ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОДУ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ – I

В. В. БАСОВ, Е. В. ФЕДОРОВА

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28,
Санкт-Петербургский Государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru, fev.math@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются вещественные двумерные автономные системы ОДУ, правая часть которых представляет собой векторный однородный многочлен третьего порядка с компонентами, имеющими общий множитель.

Разработаны структурные и нормировочные принципы, позволяющие после разбиения таких систем на классы эквивалентности относительно линейных неособых замен выделить в каждом классе каноническую форму – наиболее простой многочлен с точки зрения использования его в качестве невозмущенной части в формальных или аналитических системах, подлежащих сведению к обобщенной нормальной форме.

Для каждой канонической формы в явном виде приведены условия на коэффициенты исходной однородной кубической системы и линейная замена, сводящая ее при этих условиях к системе с выбранной канонической формой в правой части.

СОДЕРЖАНИЕ

[1]Данный раздел будет опубликован в следующем номере журнала.

1 Постановка задачи

1.1 Введение

Один из основных методов локальной качественной теории ОДУ – метод нормальных форм – заключается в приведении вещественной формальной или аналитической в начале координат двумерной системы

$$\dot{x} = \sum_{p=\mathfrak{p}}^{\infty} X^{(p)}(x) \qquad \big(\mathfrak{p} \in \mathbb{N}\big), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $X^{(p)} = (X_1^{(p)}(x), X_2^{(p)}(x))$, $X_i^{(p)} = \sum_{s=0}^{p} X_i^{(s,p-s)} x_1^s x_2^{p-s}$ $(i = 1, 2)$, $X^{(\mathfrak{p})}(x) \not\equiv 0$, при помощи обратимой формальной (аналитической) замены переменных

$$x = Ly + h(y) \qquad \big(\det L \neq 0,\ y = (y_1, y_2)\big), \tag{2}$$

где $h = (h_1(y), h_2(y))$, $h_i = \sum_{p=2}^{\infty} h_i^{(p)}(y)$, к одной из семейства наиболее простых систем

$$\dot{y} = \sum_{p=\mathfrak{p}}^{\infty} Y^{(p)}(y), \tag{3}$$

называемых нормальными формами (НФ): резонансными (РНФ) при $\mathfrak{p} = 1$ или обобщенными (ОНФ) при $\mathfrak{p} \geq 2$.

В любой НФ должны быть аннулированы все слагаемые, которые заменой (2) можно аннулировать вне зависимости от возмущенной части $\sum_{p=\mathfrak{p}+1}^{\infty} X^{(p)}(x)$ системы (1).

Отметим, что рассуждения сразу ведутся только для систем размерности два, так как именно они являются объектом исследования в работе. По той же причине члены степенных рядов группируются по однородным многочленам без возможного введения векторов веса для переменных и перегруппировок по квазиоднородным многочленам.

Нормализация исходной системы производится в два этапа.

На первом этапе нормализации подвергается невозмущенная часть $X^{(\mathfrak{p})}$ системы (1). Для этого выбирается линейная неособая замена

$$x = Lz \qquad (\det L \neq 0, \quad z = (z_1, z_2)), \tag{4}$$

преобразующая систему (1) в систему

$$\dot{z} = R^{(\mathfrak{p})}(z) + \sum_{p=\mathfrak{p}+1}^{\infty} Z^{(p)}(z), \tag{5}$$

в которой $R^{(\mathfrak{p})}(x)$ – наиболее простой векторный однородный многочлен степени $\mathfrak{p}$ с точки зрения последующей нормализации возмущений, называемый канонической формой (КФ).

КФ по умолчанию предполагается невырожденной, т. е. $R_1^{(\mathfrak{p})}, R_2^{(\mathfrak{p})} \not\equiv 0$.

На втором этапе в системе (5) при помощи почти тождественных замен $z = y + h(y)$ осуществляется нормализация возмущения, непосредственно определяемая выбором КФ. Система (5) сводится к НФ (3) с $Y^{(\mathfrak{p})} = R^{(\mathfrak{p})}$ и с различными структурами возмущений.

Только при $\mathfrak{p} = 1, 2, 3$ описанный процесс получения НФ (3) почти всегда удается осуществить конструктивно, а именно: на первом этапе разбить невозмущенную часть $X^{(\mathfrak{p})}$ системы (1) на классы эквивалентности относительно замен (4) и явно указать ту замену, которая сводит $X^{(\mathfrak{p})}$ к выделенной в каждом классе согласно должным образом введенных структурных и нормировочных принципов канонической форме, а на втором этапе для каждого порядка возмущения $p \quad (p \geq \mathfrak{p} + 1)$ в явном виде выписать конечное число линейных резонансных уравнений, связывающих коэффициенты однородных многочленов $Y^{(p)}$ системы (3), любое решение которых даст свою структуру нормальной формы.

При бо́льших значениях степени однородного многочлена в невозмущенной части в процессе нормализации системы объективно возрастают чисто технические трудности.

Рассмотрим последовательно, что происходит в случаях, когда $\mathfrak{p} = 1, 2, 3$.

1⁰. $\mathfrak{p} = 1$. В этом случае $X^{(\mathfrak{p})} = Ax$, и каноническая форма, очевидно, одна – это Jz, где J является жордановой формой матрицы A. Здесь ограничение размерности исходной системы несущественно, и ее можно выбирать произвольным образом.

Система $\dot z = Jz + \sum_{p=2}^{\infty} Z^{(p)}(z)$ при условии, что не все собственные числа матрицы A равны нулю, почти тождественной заменой переменных сводится к резонансной нормальной форме, структура которой также единственна в том смысле, что для каждого набора собственных чисел матрицы J единственным образом определяются степени тех слагаемых возмущения исходной системы, которые всегда могут быть аннулированы и, следовательно, отсутствуют в РНФ. Наиболее полно теория РНФ, включая вопросы сходимости и расходимости нормализующих преобразований, изложена А.Д. Брюно в [1].

Если же $J \neq 0$, но все ее собственные числа равны нулю, то любая система с такой невозмущенной частью будет по определению РНФ, и для ее полноценной нормализации надо вводить для переменных вес, добавляя в линейную невозмущенную часть некоторые слагаемые из возмущения, и использовать полученный квазиоднородный многочлен для сведения исходной системы к ОНФ (см. напр., [2]–[5]).

2⁰. $\mathfrak{p} = 2$. В этом случае $X^{(\mathfrak{p})} = Q(x)$, $Q = (Q_1(x), Q_2(x))$, $Q_i = a_i x_1^2 + 2b_i x_1 x_2 + c_i x_2^2$.

Следуя описанному выше двухэтапному процессу нормализации, в работе [6] множество однородных квадратичных систем $\dot x = Q(x)$ было разбито на девятнадцать классов эквивалентности относительно линейных неособых замен (4), и на основе введенных иерархических структурных принципов для каждого класса выделена своя КФ.

СПИСОК канонических форм однородной квадратичной системы $(\sigma = \pm 1)$.

$$\text{КФ}_1^{2,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_2^{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_3^{3,0} = \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_4^{3,0} = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{КФ}_5^{3,0} = \begin{pmatrix} u & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_6^{3,0} = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_7^{3,0} = \begin{pmatrix} 0 & u & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_8^{4,0} = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & v \end{pmatrix},$$

$$\text{КФ}_9^{4,0} = \begin{pmatrix} u & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & v \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_{10}^{4,0} = \begin{pmatrix} 1/2 & u & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{КФ}_1^{2,1} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_2^{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{КФ}_3^{3,1} = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_4^{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_5^{3,1} = \begin{pmatrix} u & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{КФ}_1^{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_4^{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_2^{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sigma \\ 1 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_3^{6,2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь любая КФ^{m,l} задается матрицей коэффициентов $a_i, 2b_i, c_i$ векторного многочлена Q, m – число ее ненулевых элементов, l – степень общего множителя Q_1 и Q_2, а параметры удовлетворяют следующим ограничениям: в КФ$_3^{3,0}$ $u \geq 1$, в КФ$_4^{3,0}$ $u > 1/4$, в КФ$_5^{3,0}$ $u \neq \pm 1/2$ при $R > 0$, в КФ$_9^{4,0}$ $u \neq 1/2$ при $R < 0$, в КФ$_{10}^{4,0}$ $0 < u < 2^{1/2}$; в КФ$_1^{2,1}$ $u \neq 0$, в КФ$_3^{3,1}$ $|u| < 1$ или $u = 1$, в КФ$_5^{3,1}$ $0 < u < 2$; R – результант Q_1, Q_2.

Кроме того, КФ$_j^{m,2}$ сводятся к пяти линейно неэквивалентным вырожденным КФ^d :
$$\text{КФ}_1^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{КФ}_2^d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{КФ}_3^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{КФ}_4^d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{КФ}_5^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате, в работе [6] для каждой КФ$_j^{m,l}$ из приведенного выше списка в явном виде указаны условия на шесть коэффициентов невозмущенной части системы (1) $\dot{x} = Q(x) + \sum_{p=3}^{\infty} X^{(p)}(x)$ и замена (4), преобразующая эту систему в систему (5), матрица $R^{(\mathfrak{p})}$ которой совпадает с выбранной КФ$_j^{m,l}$.

Реализация второго этапа, связанная с нормализацией системы (5), имеющей в невозмущенной части различные однородные квадратичные КФ из списка, последовательно осуществлялась конструктивным методом резонансных уравнений в работах [7]–[11]. А в [6] также получены все структуры ОНФ систем с вырожденными КФ.

3^0. $\mathfrak{p} = 3$. В этом случае $X^{(\mathfrak{p})} = P(x)$, $P = (P_1(x), P_2(x))$, $P_i = a_i x_1^3 + b_i x_1^2 x_2 + c_i x_1 x_2^2 + d_i x_2^3$, и система (1) принимает вид
$$\dot{x} = P(x) + \sum\nolimits_{p=4}^{\infty} X^{(p)}(x). \tag{6}$$

Исследование системы (6), связанное с нормализацией невозмущенной части, является основной целью предлагаемой работы. В отличие от аналогичных исследований в работе [6], для системы (6) будет предполагаться, что однородные многочлены P_1 и P_2 имеют общий множитель P_0^l ненулевой степени l. А случай, когда общий множитель отсутствует ($l = 0$) – это тема дополнительного исследования.

Отметим также, что все структуры ОНФ, формально эквивалентной исходной системе (6), получены в работе [12] для важного случая, когда невозмущенная часть $P(x)$ является канонической формой $(x_2^3, -x_1^3)$, т. е. невозмущенная система консервативна.

Предлагаемая работа состоит из шести разделов.

В разделе 1, помимо введения, выписана линейная связующая система, совместность которой гарантирует формальную эквивалентность исходной системы любой другой и, в частности, ОНФ, а условия совместности порождают резонансные уравнения. Далее кратко изложен метод резонансных уравнений и рассмотрены условия на коэффициенты $P(x)$, в той или иной степени облегчающие написание и решение резонансных уравнений.

В разделе 2 рассматриваются линейные преобразования и вид однородных кубических систем $\dot{x} = P(x)$ при различных значениях степени общего множителя.

В разделе 3 введены понятия различных форм: структурной, нормированной, канонической структурной и просто канонической, а также дополнительной и вырожденной. Множество структурных форм, выписываемое формально, вполне упорядочено иерархическим набором структурных принципов, разработанных на основе рассуждений из предыдущего раздела. Далее структурные формы нормируются согласно разработанным принципам нормировки, что позволяет выписать ограничения на их параметрические элементы, фиксирующие степень общего множителя P_0.

Если хотя бы при одном наборе элементов, удовлетворяющих этим ограничениям, нормированная структурная форма не сводится к какой-либо предшествующей форме, то она называется канонической структурной формой, в противном же случае она интереса не представляет.

Однако, главная цель заключается в получении из многочлена P канонической формы, в которую превращается каноническая структурная форма, если ни при каких допустимых значениях ее элементов она не сводится хотя бы к одной предшествующей форме.

Таким образом, введение канонических структурных форм явилось вынужденной мерой, поскольку в отдельных сложных случаях для них не удается доказать отсутствие линейной эквивалентности более простым формам.

Наконец, в разделах 4 – 6 разнообразными методами конструктивно получены канонические или канонические структурные формы для системы (6) с произвольным векторным однородным кубическим многочленом P в невозмущенной части, когда общий множитель P_1 и P_2 последовательно имеет степень три (тут же получены вырожденные канонические формы), два и один.

1.2 Формальная эквивалентность возмущенных систем

Рассмотрим двумерную вещественную формальную систему

$$\dot{x}_i = P_i(x) + X_i(x) \qquad (i = 1, 2), \tag{7}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $P_i = a_i x_1^3 + b_i x_1^2 x_2 + c_i x_1 x_2^2 + d_i x_2^3$ – кубическая невозмущенная часть, $X_i = \sum_{p=4}^{\infty} X_i^{(p)}(x)$ – возмущение. Здесь и всегда в дальнейшем через $Z_i^{(p)}(z_1, z_2)$ будем обозначать однородный полином порядка p, т. е. $Z_i^{(p)} = \sum_{s=0}^{p} Z_i^{(s,p-s)} z_1^s z_2^{p-s}$.

Пусть вещественная формальная почти тождественная замена переменных

$$x = y + h(y), \tag{8}$$

в которой $y = (y_1, y_2)$, $h = (h_1, h_2)$, $h_i = \sum_{p=2}^{\infty} h_i^{(p)}(y)$, переводит систему (7) в систему

$$\dot{y}_i = P_i(y) + Y_i(y) \qquad \big(Y_i = \sum\nolimits_{p=4}^{\infty} Y_i^{(p)}(y)\big). \tag{9}$$

Продифференцировав по t замену (8) в силу систем (7) и (9), получаем тождества

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} P_j(y) - \frac{\partial P_i(y)}{\partial y_j} h_j(y) \right) + Y_i(y) = X_i(y+h) + P_i^*(y,h) - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} Y_j(y),$$

в которых $P_i^*(y,h) = P_i(h) + \sum_{j=1}^{2} y_j\, \partial P_i(h)/\partial h_j$.

Выделяя в них для всякого $p \geq 4$ однородные полиномы порядка p, установим, что однородные полиномы $h_i^{(p-2)}$, $Y_i^{(p)}$ удовлетворяют следующим рекуррентным тождествам:

$$\begin{gathered}(a_1 y_1^3 + b_1 y_1^2 y_2 + c_1 y_1 y_2^2 + d_1 y_2^3) \frac{\partial h_i^{(p-2)}}{\partial y_1} + (a_2 y_1^3 + b_2 y_1^2 y_2 + c_2 y_1 y_2^2 + d_2 y_2^3) \frac{\partial h_i^{(p-2)}}{\partial y_2} - \\ - (3a_i y_1^2 + 2b_i y_1 y_2 + c_i y_2^2) h_1^{(p-2)} - (b_i y_1^2 + 2c_i y_1 y_2 + 3d_i y_2^2) h_2^{(p-2)} + Y_i^{(p)} = \widetilde{Y}_i^{(p)},\end{gathered} \tag{10}$$

где $\widetilde{Y}_i^{(p)} = \{X_i(y+h) + P_i^*(y,h) - Y_1\,\partial h_i/\partial y_1 - Y_2\,\partial h_i/\partial y_2\}^{(p)} \quad (i=1,2)$.

Очевидно, что при последовательном относительно $p \geq 4$ определении $h_i^{(p-2)}$ и $Y_i^{(p)}$ однородные полиномы $\widetilde{Y}_i^{(p)}(y)$ оказываются известными, так как зависят только от $h_\nu^{(r-2)}$ и $Y_\nu^{(r)}$ с $2 \leq r \leq p-1$ $(\nu = 1,2)$.

Приравнивая в (10) коэффициенты при $y_1^s y_2^{p-s}$ $(p \geq 4,\ s = \overline{0,p})$, получаем линейную связующую систему $2p+2$ уравнений с $2p-2$ неизвестными $h_i^{(0,p-2)}, \ldots, h_i^{(p-2,0)}$:

$$\begin{aligned}
&a_2(p-s+1)h_1^{(s-3,p-s+1)} + (a_1(s-2) + b_2(p-s) - 3a_1)h_1^{(s-2,p-s)} + \\
&+(b_1(s-1) + c_2(p-s-1) - 2b_1)h_1^{(s-1,p-s-1)} + (c_1 s + d_2(p-s-2) - c_1)h_1^{(s,p-s-2)} + \\
&+d_1(s+1)h_1^{(s+1,p-s-3)} - b_1 h_2^{(s-2,p-s)} - 2c_1 h_2^{(s-1,p-s-1)} - 3d_1 h_2^{(s,p-s-2)} = \widehat{Y}_1^{(s,p-s)}, \\
&a_2(p-s+1)h_2^{(s-3,p-s+1)} + (a_1(s-2) + b_2(p-s) - b_2)h_2^{(s-2,p-s)} + \\
&+(b_1(s-1) + c_2(p-s-1) - 2c_2)h_2^{(s-1,p-s-1)} + (c_1 s + d_2(p-s-2) - 3d_2)h_2^{(s,p-s-2)} + \\
&+d_1(s+1)h_2^{(s+1,p-s-3)} - 3a_2 h_1^{(s-2,p-s)} - 2b_2 h_1^{(s-1,p-s-1)} - c_2 h_1^{(s,p-s-2)} = \widehat{Y}_2^{(s,p-s)},
\end{aligned} \tag{11}$$

в которой $\widehat{Y}_i^{(s,p-s)} = \widetilde{Y}_i^{(s,p-s)} - Y_i^{(s,p-s)} \quad (i=1,2)$.

1.3 Метод резонансных уравнений и ОНФ

Следуя, например, [3, 4], условия совместности связующей системы (11) для $\forall\, p \geq 4$ можно записать в виде n_p линейно независимых линейных уравнений $(n_p \geq 4)$, связывающих коэффициенты однородных полиномов $Y_i^{(p)}$ системы (9) и называемых резонансными:

$$\sum_{s=0}^{p} \left(\alpha_{\mu s}^p Y_1^{(s,p-s)} + \beta_{\mu s}^p Y_2^{(s,p-s)}\right) = \tilde{c} \quad (\mu = 1, \ldots, n_p), \tag{12}$$

где всегда $\tilde{c} = \sum_{s=0}^p (\alpha_{\mu s}^p \widetilde{Y}_1^{(s,p-s)} + \beta_{\mu s}^p \widetilde{Y}_2^{(s,p-s)})$.

Таким образом, резонансные уравнения (12) или, что то же самое, два набора постоянных векторов α_μ^p и β_μ^p определяются кубической невозмущенной частью систем (7) или (9) и не зависят от возмущения системы (7). Они позволяют установить наличие формальной эквивалентности между любыми двумя системами с одинаковой невозмущенной частью и конструктивно выделить из семейства таких систем наиболее простые системы, называемые обобщенными нормальными формами, указав все их возможные структуры.

Коэффициенты однородных полиномов $Y_i^{(p)}$ системы (9), входящие хотя бы в одно из резонансных уравнений (12), называем резонансными, а остальные – нерезонансными. Коэффициенты однородных полиномов $h_i^{(p-2)}$, остающиеся свободными при решении системы (11), называем резонансными.

Любым n_p различным резонансным коэффициентам $Y^{p,k} = Y_{i_k}^{(s_k,p-s_k)}$ однородных полиномов $Y_1^{(p)}, Y_2^{(p)}$, где $k = \overline{1,n_p}$, $i_k \in \{1,2\}$, $0 \leq s_k \leq p$, сопоставим матрицу множителей $\Upsilon^p = \{\upsilon_{\mu k}^p\}_{\mu,k=1}^{n_p}$, в которой элемент $\upsilon_{\mu k}^p = \{\alpha_{\mu s_k}^p$ при $i_k = 1$, $\beta_{\mu s_k}^p$ при $i_k = 2\}$.

Для всякого $p \geq 4$ семейство резонансных коэффициентов $\mathcal{Y}^p = \{Y_k^p\}_{k=1}^{n_p}$ называем резонансным p-набором, если $det\,\Upsilon^p \neq 0$.

Таким образом, при любом $p \geq 4$ резонансные уравнения однозначно разрешимы относительно коэффициентов из любого $\mathcal{Y}^p$.

Для любых $\mathcal{Y}^4, \mathcal{Y}^5, \ldots$ семейство $\mathcal{Y} = \bigcup_{p=4}^{\infty} \mathcal{Y}^p$ называем резонансным набором.

Систему (9) называем обобщенной нормальной формой (ОНФ), если при любом $p \geq 4$ все коэффициенты полиномов $Y_i^{(p)}$ как резонансные, так и не резонансные, равны нулю, за исключением коэффициентов из какого-либо резонансного p-набора $\mathcal{Y}^p$, имеющих произвольные значения.

Тем самым, структуру любой ОНФ порождает какой-либо резонансный набор $\mathcal{Y}$.

Знание резонансных уравнений (12) делает очевидными следующие утверждения.

Утверждение 1. *Для того чтобы система* (9) *была формально эквивалентна исходной системе* (7)*, необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall\, k \geq 2$ *коэффициенты ее однородных полиномов* $Y_1^{[k]}, Y_2^{[k]}$ *удовлетворяли резонансным уравнениям (12).*

Утверждение 2. *Для любой системы* (7) *и для любого выбранного по ее невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}$ *существует почти тождественная замена* (8)*, преобразующая* (7) *в ОНФ* (9)*, структура которой порождена* $\mathcal{Y}$.

1.4 Подходы к решению линейной связующей системы

Матрица линейной связующей системы (11) определяется восемью коэффициентами многочленов P_1 и P_2 системы (7). От того, какие из них равны нулю и в каком количестве, зависит число и вид связей на правые части системы (11) – резонансных уравнений (12), гарантирующих ее разрешимость, и сама возможность эти связи конструктивно найти.

Для того чтобы в разделе 3 сформулировать принципы выбора тех коэффициентов P, которые линейной неособой заменой переменных следует попытаться сделать нулевыми, в первую очередь, изучим структуру связующей системы.

Примем за основу принцип максимальности числа нулевых коэффициентов P и рассмотрим их различные расстановки, например, в подсистеме (11_1).

Наличие нулевого коэффициента a_1 на структуру связующей системы практически не влияет. А наиболее благоприятная ситуация возникает, когда $b_1, c_1, d_1 = 0$. Тогда (11_1) является независимой линейной системой, имеющей в худшем случае четырехдиагональную матрицу. После исследования ее совместности, нахождения вектора коэффициентов многочлена $h_1^{(p)}$ и подстановки его в (11_2) снова возникнет линейная подсистема не более чем с четырехдиагональной матрицей, вообще говоря, доступная для исследования.

Принципиально новые проблемы не возникают и в том случае, когда только один из коэффициентов b_1, c_1, d_1 отличен от нуля.

Пусть, например, $b_1, c_1 = 0$, а $d_1 \neq 0$. Тогда опять можно ограничиться исследованием только линейных систем с диагональными матрицами, у которых число диагоналей ограничено. Действительно, для всякого $p \geq 2$ подсистема (11_1) разрешима относительно коэффициентов многочлена $h_2^{(p)}$, подставляя которые в (11_2), получаем линейную систему относительно коэффициентов $h_1^{(p)}$ с ограниченным сверху (не зависящим от p) числом диагоналей матрицы.

В то же время, если только один из коэффициентов b_1, c_1, d_1 равен нулю, то попытка разрешить подсистему (11_1) относительно коэффициентов многочлена $h_2^{(p)}$ с их последующей подстановкой в (11_2) приводит к потере диагональной структуры в нижней части матрицы полученной линейной системы, делая невозможным ее конструктивное решение.

Поэтому при исследовании совместности системы (11) существенно выполнение или невыполнение следующего условия на коэффициенты невозмущенной части системы (7):

$$(b_1^2c_1^2 + c_1^2d_1^2 + d_1^2b_1^2)(a_2^2b_2^2 + b_2^2c_2^2 + c_2^2a_2^2) = 0, \tag{13}$$

означающего при его выполнении, что среди коэффициентов b_1, c_1, d_1 или a_2, b_2, c_2 только один может быть отличен от нуля.

Помимо условия (13), приведем еще ряд соображений, касающихся упрощения исследования совместности связующей системы.

1. Чем более слабосвязаны уравнения невозмущенной системы, тем меньше диагоналей будет иметь матрица связующей системы.

2. При выборе одного нулевого коэффициента система (11) максимально упрощается, если $d_1 = 0$ $(a_2 = 0)$, так как в уравнениях (11_1) исчезнет два слагаемых, в (11_2) – одно.

3. Если же выбирать два нулевых коэффициента, то лучше, чтобы ими были пары $c_1, d_2 = 0$ (или $a_1, b_2 = 0$), это дает тот же эффект, что и при $d_1 = 0$, а наиболее оптимально, если $b_1, c_2 = 0$, тогда в каждом уравнении системы (11) исчезает по два слагаемых.

Приведенные соображения положены в основу иерархических структурных и нормировочных принципов, позволивших ниже разбить множество невозмущенных частей системы (7) на классы эквивалентности относительно линейных неособых замен с выделением в каждом классе наилучшего представителя для последующей нормализации системы (7), называемого в дальнейшем канонической формой.

2 Линейная эквивалентность кубических систем

2.1 Запись и характеристики однородных кубических систем

Рассмотрим двумерную невозмущенную вещественную систему

$$\dot{x} = P(x) \ \text{ или } \ \dot{x} = A\, q^{[3]}(x) \qquad (P(x) \not\equiv 0, \quad A \neq 0), \tag{14}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $q^{[3]}(x) = \operatorname{colon}(x_1^3,\ x_1^2x_2,\ x_1x_2^2,\ x_2^3)$.

Для векторов $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ введем функцию $\delta_{rs} = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} = r_1s_2 - r_2s_1$.

Определение 1. *Любой однородный многочлен с вещественными коэффициентами, являющийся общим множителем многочленов P_1 и P_2, будем обозначать P_0. Общий множитель P_0 максимальной степени l $(0 \le l \le 3)$ будем обозначать P_0^l.*

Очевидно, что P_0^l – вещественный, и при $l = 3$ многочлены P_1, P_2 пропорциональны.

Для векторного многочлена P введем функцию R, называемую результантом:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \delta_{ad}^3 + \delta_{ac}^2\delta_{cd} + \delta_{ab}\delta_{bd}^2 - 2\delta_{ab}\delta_{ad}\delta_{cd} - \delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{ad}\delta_{bd}. \quad (15)$$

При этом в каждое слагаемое R входят определители δ_{a*} и δ_{*d}.

Утверждение 3. *Система* (14) *имеет общий множитель* P_0 *ненулевой степени тогда и только тогда, когда* $R = 0$.

Доказательство. 1) Пусть многочлены $P_i(x) = a_i x_1^3 + b_i x_1^2 x_2 + c_i x_1 x_2^2 + d_i x_2^3$ $(i = 1, 2)$ имеют общий множитель P_0 ненулевой степени.

Если $a_1, a_2 = 0$, то P_0 имеет сомножитель x_2, и $R = 0$ согласно (15).

Пусть теперь $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, например, $a_1 \neq 0$. Тогда в P_0 коэффициент при x_1 отличен от нуля. Тем самым, в P_0 имеется сомножитель $(x_1 - \theta x_2)$.

Положим $x_1 = t x_2$, тогда $P_i(x_1, x_2) = P_i(t x_2, x_2) = x_2^3 P_i(t, 1)$ $(i = 1, 2)$.

Введем многочлены $f_i(t) = P_i(t, 1)$. Очевидно, что $f_i(t) = a_i t^3 + \ldots$.

При $t = \theta$ имеем: $P_i(\theta x_2, x_2) = x_2^3(a_i\theta^3 + b_i\theta^2 + c_i\theta + d_i) = 0$. Тогда $f_i(\theta) = P_i(\theta, 1) = 0$.

Умножив $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ на θ^2, θ, 1, получим систему:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1\theta^5 & + & b_1\theta^4 & + & c_1\theta^3 & + & d_1\theta^2 & & & & = 0, \\ & & a_1\theta^4 & + & b_1\theta^3 & + & c_1\theta^2 & + & d_1\theta & & = 0, \\ & & & & a_1\theta^3 & + & b_1\theta^2 & + & c_1\theta & + \; d_1 & = 0, \\ a_2\theta^5 & + & b_2\theta^4 & + & c_2\theta^3 & + & d_2\theta^2 & & & & = 0, \\ & & a_2\theta^4 & + & b_2\theta^3 & + & c_2\theta^2 & + & d_2\theta & & = 0, \\ & & & & a_2\theta^3 & + & b_2\theta^2 & + & c_2\theta & + \; d_2 & = 0. \end{array}$$

Следовательно, $\theta^5, \theta^4, \theta^3, \theta^2, \theta, 1$ является нетривиальным решением однородной системы линейных уравнений с неизвестными z_i $(i = \overline{1, 6})$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 z_1 & + & b_1 z_2 & + & c_1 z_3 & + & d_1 z_4 & & & & = 0, \\ & & a_1 z_2 & + & b_1 z_3 & + & c_1 z_4 & + & d_1 z_5 & & = 0, \\ & & & & a_1 z_3 & + & b_1 z_4 & + & c_1 z_5 & + \; d_1 z_6 & = 0, \\ a_2 z_1 & + & b_2 z_2 & + & c_2 z_3 & + & d_2 z_4 & & & & = 0, \\ & & a_2 z_2 & + & b_2 z_3 & + & c_2 z_4 & + & d_2 z_5 & & = 0, \\ & & & & a_2 z_3 & + & b_2 z_4 & + & c_2 z_5 & + \; d_2 z_6 & = 0. \end{array}$$

Поэтому определитель полученной системы, обозначаемый $R(f_1, f_2)$ и называемый результантом многочленов f_1, f_2, равен нулю. Согласно (15) $R = R(f_1, f_2)$, т. е. $R = 0$.

2) Покажем теперь, что если $R = R(f_1, f_2) = 0$, то многочлены P_i имеют общий множитель P_0 ненулевой степени.

Если $a_1, a_2 = 0$, то P_0 имеет сомножитель x_2.

Пусть теперь $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, например, $a_1 \neq 0$.

Запишем многочлен $f_1(t)$ в виде $f_1(t) = a_1(t-\theta_1)(t-\theta_2)(t-\theta_3) = a_1t^3 + b_1t^2 + c_1t + d_1$, где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – корни многочлена $f_1(t)$. Тогда

$$b_1 = -a_1(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad c_1 = a_1(\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_1\theta_3), \quad d_1 = -a_1\theta_1\theta_2\theta_3.$$

Подставляя в R найденные значения коэффициентов f_1 и учитывая, что $f_2(\theta_j) = a_2\theta_j^3 + b_2\theta_j^2 + c_2\theta_j + d_2$ $(j = 1, 2, 3)$, нетрудно убедиться, что $R(f_1, f_2) = a_1^3 f_2(\theta_1)f_2(\theta_2)f_2(\theta_3)$.

По предположению $R(f_1, f_2) = a_1^3 f_2(\theta_1)f_2(\theta_2)f_2(\theta_3) = 0$, поэтому существует j_0 такое, что $f_2(\theta_{j_0}) = 0$, так как $a_1^3 \neq 0$. Таким образом, число θ_{j_0} оказалось общим корнем $f_1(t)$ и $f_2(t)$, т. е. $f_i(t) = (t - \theta_{j_0})(a_it^2 + \ldots)$. Отсюда $P_i(x_1, x_2) = x_2^3 P_i(t, 1) = x_2^3 f_i(t) = x_2^3(t - \theta_{j_0})(a_it^2 + \ldots) = (tx_2 - \theta_{j_0}x_2)(a_i(tx_2)^2 + \ldots) = (x_1 - \theta_{j_0}x_2)(a_ix_1^2 + \ldots)$.

Следовательно, P_0 имеет сомножитель $(x_1 - \theta_{j_0}x_2)$. $\square$

2.2 Линейные преобразования однородных кубических систем

Будем упрощать систему (14) при помощи линейных неособых замен

$$x_1 = r_1y_1 + s_1y_2, \quad x_2 = r_2y_1 + s_2y_2 \quad \text{или} \quad x = Ly, \tag{16}$$

где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$, $\delta = \delta_{rs} = \det L \neq 0$.

Пусть замена (16) преобразует систему (14) в систему

$$\dot{y} = \widetilde{P}(y) \quad \text{или} \quad \dot{y} = \widetilde{A}\, q^{[3]}(y), \tag{17}$$

где $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1 \\ \widetilde{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1y_1^3 + \tilde{b}_1y_1^2y_2 + \tilde{c}_1y_1y_2^2 + \tilde{d}_1y_2^3 \\ \tilde{a}_2y_1^3 + \tilde{b}_2y_1^2y_2 + \tilde{c}_2y_1y_2^2 + \tilde{d}_2y_2^3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix}$.

Для системы (17) по аналогии с (14) введем результант $\widetilde{R}$ по формуле (15).

Дифференцируя замену (16) в силу систем (14) и (17), получаем $P(Ly) = L\widetilde{P}(y)$ или

$$\widetilde{P}(y) = L^{-1}P(Ly) = L^{-1}Aq^{[3]}(Ly), \tag{18}$$

где $L^{-1} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} s_2 & -s_1 \\ -r_2 & r_1 \end{pmatrix}$, тогда $L^{-1}A = \delta^{-1}\begin{pmatrix} \delta_{as} & \delta_{bs} & \delta_{cs} & \delta_{ds} \\ -\delta_{ar} & -\delta_{br} & -\delta_{cr} & -\delta_{dr} \end{pmatrix}$.

Поэтому в формуле (18) имеем

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_1y_1^3 + \tilde{b}_1y_1^2y_2 + \tilde{c}_1y_1y_2^2 + \tilde{d}_1y_2^3 \\ \tilde{a}_2y_1^3 + \tilde{b}_2y_1^2y_2 + \tilde{c}_2y_1y_2^2 + \tilde{d}_2y_2^3 \end{pmatrix} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} \delta_{as} & \delta_{bs} & \delta_{cs} & \delta_{ds} \\ -\delta_{ar} & -\delta_{br} & -\delta_{cr} & -\delta_{dr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (r_1y_1 + s_1y_2)^3 \\ (r_1y_1 + s_1y_2)^2(r_2y_1 + s_2y_2) \\ (r_1y_1 + s_1y_2)(r_2y_1 + s_2y_2)^2 \\ (r_2y_1 + s_2y_2)^3 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая коэффициенты при $y_1^s y_2^{3-s}$ $(s=\overline{0,3})$, получаем

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{a}_1 &= (a_1s_2-a_2s_1)r_1^3+(b_1s_2-b_2s_1)r_1^2r_2+(c_1s_2-c_2s_1)r_1r_2^2+(d_1s_2-d_2s_1)r_2^3,\\
\delta\tilde{b}_1 &= 3(a_1s_2-a_2s_1)r_1^2s_1+(b_1s_2-b_2s_1)(2r_1r_2s_1+r_1^2s_2)+\\
&\quad +(c_1s_2-c_2s_1)(2r_1r_2s_2+r_2^2s_1)+3(d_1s_2-d_2s_1)r_2^2s_2,\\
\delta\tilde{c}_1 &= 3(a_1s_2-a_2s_1)r_1s_1^2+(b_1s_2-b_2s_1)(2r_1s_1s_2+r_2s_1^2)+\\
&\quad +(c_1s_2-c_2s_1)(2r_2s_1s_2+r_1s_2^2)+3(d_1s_2-d_2s_1)r_2s_2^2,\\
\delta\tilde{d}_1 &= (a_1s_2-a_2s_1)s_1^3+(b_1s_2-b_2s_1)s_1^2s_2+(c_1s_2-c_2s_1)s_1s_2^2+(d_1s_2-d_2s_1)s_2^3;\\
-\delta\tilde{a}_2 &= (a_1r_1^3+b_1r_1^2r_2+c_1r_1r_2^2+d_1r_2^3)r_2-(a_2r_1^3+b_2r_1^2r_2+c_2r_1r_2^2+d_2r_2^3)r_1,\\
-\delta\tilde{b}_2 &= ((3a_1r_1^2+2b_1r_1r_2+c_1r_2^2)r_2-(3a_2r_1^2+2b_2r_1r_2+c_2r_2^2)r_1)s_1+\\
&\quad +((b_1r_1^2+2c_1r_1r_2+3d_1r_2^2)r_2-(b_2r_1^2+2c_2r_1r_2+3d_2r_2^2)r_1)s_2,\\
-\delta\tilde{c}_2 &= ((3a_1s_1^2+2b_1s_1s_2+c_1s_2^2)r_2-(3a_2s_1^2+2b_2s_1s_2+c_2s_2^2)r_1)r_1+\\
&\quad +((b_1s_1^2+2c_1s_1s_2+3d_1s_2^2)r_2-(b_2s_1^2-2c_2r_1r_2-3d_2r_2^2)r_1)r_2,\\
-\delta\tilde{d}_2 &= (a_1s_1^3+b_1s_1^2s_2+c_1s_1s_2^2+d_1s_2^3)r_2-(a_2s_1^3+b_2s_1^2s_2+c_2s_1s_2^2+d_2s_2^3)r_1.
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь в правых частях формул для коэффициентов $\widetilde{P}_2$ уже сделана перегруппировка, позволяющая записать матрицу $\widetilde{A}$ системы (17) в следующем виде:

$$\delta^{-1}\begin{pmatrix} \delta_{P(r)\,s} & \delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}\,s}s_1+\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}\,s}s_2 & \delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}\,s}r_1+\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}\,s}r_2 & \delta_{P(s)\,s}\\ -\delta_{P(r)\,r} & -\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}\,r}s_1+\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}\,r}s_2 & -\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}\,r}r_1+\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}\,r}r_2 & -\delta_{P(s)\,r}\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Утверждение 4. *В системах* (14) *и* (17) $\widetilde{R}=\delta^6R$, *т. е. знак* R *инвариантен по отношению к любой замене* (16).

Предложение 1. *В дальнейшем для краткости систему* (14) *будем отождествлять с матрицей коэффициентов* A *или многочленом* P, *поступая так же и с другими полученными из нее системами. А замену* (16) *будем отождествлять с матрицей* L.

Среди замен (16), преобразующих (14) в (17), выделим две стандартные:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0\\ 0 & s_2\end{pmatrix} \text{ – нормировка,}\quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_1r_1^2 & b_1r_1s_2 & c_1s_2^2 & d_1s_2^3/r_1\\ a_2r_1^3/s_2 & b_2r_1^2 & c_2r_1s_2 & d_2s_2^2\end{pmatrix}; \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ – перенумерация,}\quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix} d_2 & c_2 & b_2 & a_2\\ d_1 & c_1 & b_1 & a_1\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Замечание 1. Нормировка (21) имеет следующие особенности:

1) Назовем a_2,b_1,c_2,d_1 элементами нечетного зигзага, a_1,b_2,c_1,d_2 – четного, тогда у всех элементов нечетного зигзага можно одновременно изменить знак, а у любого элемента из четного зигзага знак изменить нельзя;

2) коэффициенты пропорциональности любой диагональной пары элементов a_1 и b_2, b_1 и c_2, c_1 и d_2 изменить нельзя.

В то же время перенумерация (22) позволяет договориться о следующем.

Предложение 2. *В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что в системе* (14) *многочлен* $P_1(x)\not\equiv 0$, *так как в противном случае в ней* $P_2(x)\not\equiv 0$ *и можно сделать перенумерацию* (22).

2.3 Линейная эквивалентность систем при $\mathbf{l = 2}$ и $\mathbf{l = 3}$

Система (14) $\dot{x} = P(x)$ при $l = 2, 3$ записывается в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = P_0(x) \begin{pmatrix} p_1x_1 + q_1x_2 \\ p_2x_1 + q_2x_2 \end{pmatrix} = \big\langle (\alpha, 2\beta, \gamma),\, q^{[2]}(x) \big\rangle Hx \not\equiv 0, \tag{23}$$

где общий множитель $P_0 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1x_2 + \gamma x_2^2 \not\equiv 0$ имеет вещественные коэффициенты, $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma$ – его дискриминант, $q^{[2]}(x) = \operatorname{colon}(x_1^2,\, x_1x_2,\, x_2^2)$, $H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$, $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ – скалярное произведение. При этом разложение системы (23) на P_0 и H неоднозначно. Для всякого вещественного $æ \neq 0$ можно использовать $æP_0$ и $æ^{-1}H$.

Согласно определению 1 для системы (23) максимальная степень общего множителя $l = 2$, если $\delta_{pq} = \det H \neq 0$, а если $\delta_{pq} = 0$, то $l = 3$, но в системе (23) явно вынесен только множитель второй степени P_0.

Таким образом, в случае $l = 3$ с учетом предложения 2 найдется такой вещественный коэффициент пропорциональности k, что $P_2 = kP_1$, т. е. (14) может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 & kd_1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Собственные числа матрицы H в системе (23) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = (p_1 + q_2 \pm \sqrt{D})/2, \tag{25}$$

где $D = (p_1 + q_2)^2 - 4\delta_{pq} = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ при $l = 2$ и $\lambda_1\lambda_2 = 0$ при $l = 3$.

Предложение 3. *В целях нормировки один из ненулевых коэффициентов общего множителя* P_0 *всегда можно сделать равным единице. Договоримся, что если* $\alpha \neq 0$, *то* $\alpha = 1$; *если* $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, *то* $2\beta = 1$; *если* $\alpha, \beta = 0$, *то* $\gamma = 1$. *В дальнейшем запись* $\left[\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}\right.$ *будет означать, что* v_1 *имеет место при* $\alpha = 1$, v_2 *имеет место при* $\alpha = 0$.

Пусть замена (16) $x = Ly$ с $L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$ и $\det L = \delta = \delta_{rs} \neq 0$ переводит систему (14) вида (23) в систему (17) $\dot{y} = \widetilde{P}(y)$.

Положим

$$(\tilde{\alpha},\, 2\tilde{\beta},\, \tilde{\gamma}) = (\alpha,\, 2\beta,\, \gamma)M, \qquad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = L^{-1}HL, \tag{26}$$

где $M = \begin{pmatrix} r_1^2 & 2r_1s_1 & s_1^2 \\ r_1r_2 & \delta_* & s_1s_2 \\ r_2^2 & 2r_2s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}$, $\delta_* = r_1s_2 + r_2s_1$ и $\det M = \delta^3$, т. е.

$\tilde{\alpha} = \alpha r_1^2 + 2\beta r_1r_2 + \gamma r_2^2$, $\quad \tilde{\beta} = \alpha r_1s_1 + \beta\delta_* + \gamma r_2s_2$, $\quad \tilde{\gamma} = \alpha s_1^2 + 2\beta s_1s_2 + \gamma s_2^2$, $\quad \widetilde{D}_0 = \tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$,

$$\widetilde{H} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} r_1\delta_{ps} + r_2\delta_{qs} & s_1\delta_{ps} + s_2\delta_{qs} \\ -r_1\delta_{pr} - r_2\delta_{qr} & -s_1\delta_{pr} - s_2\delta_{qr} \end{pmatrix}, \qquad \delta_{\tilde{p}\tilde{q}} = \det \widetilde{H} = \delta_{pq}.$$

Утверждение 5. *Справедливы следующие два тождества*

$$q^{[2]}(Ly) = Mq^{[2]}(y), \qquad \big\langle (\alpha, 2\beta, \gamma),\, Mq^{[2]}(y)\big\rangle = \big\langle (\alpha, 2\beta, \gamma)M,\, q^{[2]}(y)\big\rangle. \tag{27}$$

Доказательство. Имеем: $q^{[2]}(Ly) =$
$$\begin{pmatrix}(r_1y_1+s_1y_2)^2\\(r_1y_1+s_1y_2)(r_2y_1+s_2y_2)\\(r_2y_1+s_2y_2)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_1^2y_1^2+2r_1s_1y_1y_2+s_1^2y_2^2\\r_1r_2y_1^2+\delta_*y_1y_2+s_1s_2y_2^2\\r_2^2y_1^2+2r_2s_2y_1y_2+s_2^2y_2^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_1^2 & 2r_1s_1 & s_1^2\\ r_1r_2 & \delta_* & s_1s_2\\ r_2^2 & 2r_2s_2 & s_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^2\\y_1y_2\\y_2^2\end{pmatrix}$$
$= Mq^{[2]}(y)$. А (27_2) выполняется благодаря ассоциативности произведения матриц. □

Теорема 1. *Система* (17) $\dot y = \widetilde P(y)$, *полученная из системы* (14) *вида* (23) *при помощи линейной неособой замены* (16), *имеет вид*

$$\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} = \widetilde P_0(y)\begin{pmatrix}\tilde p_1y_1+\tilde q_1y_2\\ \tilde p_2y_1+\tilde q_2y_2\end{pmatrix} = \big\langle (\tilde\alpha, 2\tilde\beta, \tilde\gamma),\, q^{[2]}(y)\big\rangle\, \widetilde H y \qquad (\widetilde P_0 \not\equiv 0), \tag{28}$$

где коэффициенты $\widetilde P_0 = \tilde\alpha y_1^2 + 2\tilde\beta y_1y_2 + \tilde\gamma y_2^2$ *и матрица* $\widetilde H$ *введены в* (26). *При этом*

$$\widetilde D_0 = \delta^2 D_0. \tag{29}$$

Доказательство. Формула (28) вытекает из следующих равенств:

$$\widetilde P(y) \overset{(18)}{=} L^{-1}P(Ly) \overset{(23)}{=} L^{-1}\big\langle(\alpha, 2\beta, \gamma),\, q^{[2]}(Ly)\big\rangle\, HLy \overset{(27_1)}{=} \big\langle(\alpha, 2\beta, \gamma),\, Mq^{[2]}(y)\big\rangle\, L^{-1}HLy \overset{(27_2)}{=}$$
$$= \big\langle(\alpha, 2\beta, \gamma)M,\, q^{[2]}(y)\big\rangle\, L^{-1}HLy \overset{(26)}{=} \big\langle(\tilde\alpha, 2\tilde\beta, \tilde\gamma),\, q^{[2]}(y)\big\rangle\, \widetilde H y.$$

Согласно (26) $\tilde\beta^2 - \tilde\alpha\tilde\gamma = (\alpha r_1s_1 + \beta\delta_* + \gamma r_2s_2)^2 - (\alpha r_1^2 + 2\beta r_1r_2 + \gamma r_2^2)(\alpha s_1^2 + 2\beta s_1s_2 + \gamma s_2^2) = (\beta^2 - \alpha\gamma)(r_1^2s_2^2 - 2r_1s_1r_2s_2 + s_1^2r_2^2) = (\beta^2 - \alpha\gamma)\delta^2$. □

Следствие 1. *Степень* $l = 2, 3$ *общего множителя* P_0 *многочленов* P_1, P_2 *при линейной неособой замене инвариантна, причем общие множители* P_1, P_2 *и* $\widetilde P_1, \widetilde P_2$ *одновременно раскладываются или не раскладываются на линейные множители с вещественными коэффициентами, и при* $l = 2$ *полный квадрат у них сохраняется.*

Действительно, инвариантность вытекает из вида правых частей (23) и (28) и подобия матриц H и $\widetilde H$, а все остальное — из равенства (29).

Отметим, что система (28) с учетом обозначений (17) записывается в виде

$$\widetilde A = \begin{pmatrix}\tilde a_1 & \tilde b_1 & \tilde c_1 & \tilde d_1\\ \tilde a_2 & \tilde b_2 & \tilde c_2 & \tilde d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde\alpha\tilde p_1 & \tilde\alpha\tilde q_1 + 2\tilde\beta\tilde p_1 & 2\tilde\beta\tilde q_1 + \tilde\gamma\tilde p_1 & \tilde\gamma\tilde q_1\\ \tilde\alpha\tilde p_2 & \tilde\alpha\tilde q_2 + 2\tilde\beta\tilde p_2 & 2\tilde\beta\tilde q_2 + \tilde\gamma\tilde p_2 & \tilde\gamma\tilde q_2\end{pmatrix}. \tag{30}$$

2.4 Линейная эквивалентность систем при $\mathbf{l = 1}$

Система (14) $\dot x = P(x)$ при $l = 1$ записывается в следующем виде

$$\dot x = \begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix} = P_0^1(x)\begin{pmatrix}p_1x_1^2 + q_1x_1x_2 + t_1x_2^2\\ p_2x_1^2 + q_2x_1x_2 + t_2x_2^2\end{pmatrix} = \big\langle(\alpha, \beta),\, x\big\rangle G q^{[2]}(x) \qquad (\delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt} \neq 0), \tag{31}$$

т. е. в системе (31) общий множитель $P_0^1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \not\equiv 0$, матрица $G = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 \end{pmatrix}$; $q^{[2]}(x) = \operatorname{colon}(x_1^2,\, x_1x_2,\, x_2^2)$, как и в (23); $\delta_{pt} = p_1t_2 - p_2t_1$ и т. д.

Предположение $\delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt} \neq 0$ означает, что $l = 1$, так как однородные многочлены $p_ix_1^2 + q_ix_1x_2 + t_ix_2^2$ имеют результант $R_2 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & t_1 & 0 \\ 0 & p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & t_2 \end{vmatrix} = \delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt}$, а его отличие от нуля равносильно отсутствию общего множителя у многочленов, по которым R_2 построен (аналог утверждения 3). Отсюда, в частности, вытекает, что $p_1^2+p_2^2 \neq 0$, $t_1^2+t_2^2 \neq 0$.

Пусть замена (16) $x = Ly$ $(\det L = \delta \neq 0)$ переводит систему (14) вида (31) в систему (17) $\dot y = \widetilde P(y)$. Используя матрицу M и δ_* из (26), положим

$$(\tilde\alpha,\, \tilde\beta) = (\alpha,\, \beta)L, \qquad \widetilde G = \begin{pmatrix} \tilde p_1 & \tilde q_1 & \tilde t_1 \\ \tilde p_2 & \tilde q_2 & \tilde t_2 \end{pmatrix} = L^{-1}GM, \qquad \widetilde R_2 = \delta_{\tilde p\tilde t}^2 - \delta_{\tilde p\tilde q}\delta_{\tilde q\tilde t}, \tag{32}$$

т.е. $\widetilde G = \dfrac{1}{\delta}\begin{pmatrix} r_1^2\delta_{ps} + r_1r_2\delta_{qs} + r_2^2\delta_{ts} & 2r_1s_1\delta_{ps} + \delta_*\delta_{qs} + 2r_2s_2\delta_{ts} & s_1^2\delta_{ps} + s_1s_2\delta_{qs} + s_2^2\delta_{ts} \\ -r_1^2\delta_{pr} - r_1r_2\delta_{qr} - r_2^2\delta_{tr} & -2r_1s_1\delta_{pr} - \delta_*\delta_{qr} - 2r_2s_2\delta_{tr} & -s_1^2\delta_{pr} - s_1s_2\delta_{qr} - s_2^2\delta_{tr} \end{pmatrix}$, $\tilde\alpha = \alpha r_1 + \beta r_2$, $\tilde\beta = \alpha s_1 + \beta s_2$.

Кроме того, $\big\langle(\alpha,\beta),\, Ly\big\rangle = \big\langle(\alpha,\beta)L,\, y\big\rangle$ в силу ассоциативности произведения матриц.

Теорема 2. *Система* (17), *полученная из системы* (14) *вида* (31) *при помощи линейной неособой замены* (16), *имеет вид*

$$\dot y = \begin{pmatrix} \widetilde P_1 \\ \widetilde P_2 \end{pmatrix} = \widetilde P_0^1(y)\begin{pmatrix} \tilde p_1y_1^2 + \tilde q_1y_1y_2 + \tilde t_1y_2^2 \\ \tilde p_2y_1^2 + \tilde q_2y_1y_2 + \tilde t_2y_2^2 \end{pmatrix} = \big\langle(\tilde\alpha,\tilde\beta),\, y\big\rangle\, \widetilde G q^{[2]}(y) \qquad (\delta_{\tilde p\tilde t}^2 - \delta_{\tilde p\tilde q}\delta_{\tilde q\tilde t} \neq 0), \tag{33}$$

где коэффициенты общего множителя $\widetilde P_0^1(y) = \tilde\alpha y_1 + \tilde\beta y_2 \not\equiv 0$ *и матрица* $\widetilde G$ *введены в* (32). *При этом* $\widetilde R_2 = \delta^2 R_2 \neq 0$.

Доказательство. Условие $\tilde\alpha^2+\tilde\beta^2 \neq 0$ равносильно условию $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, поскольку $\delta \neq 0$. А формула (33) вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\widetilde P(y) \overset{(18)}{=} L^{-1}P(Ly) \overset{(31)}{=} L^{-1}\big\langle(\alpha,\beta),\, Ly)\big\rangle\, Gq^{[2]}(Ly) = \big\langle(\alpha,\beta)L,\, y\big\rangle\, L^{-1}Gq^{[2]}(Ly) \overset{(27_1)}{=}$$
$$= \big\langle(\alpha,\beta)L,\, y\big\rangle\, L^{-1}GMq^{[2]}(y) \overset{(32)}{=} \big\langle(\tilde\alpha,\tilde\beta),\, y\big\rangle\, \tilde G q^{[2]}(y). \ \square$$

Следствие 2. *Степень* $l = 1$ *общего множителя* P_0^1 *многочленов* P_1 *и* P_2 *при линейной неособой замене инвариантна.*

Предложение 4. *Договоримся в целях нормировки считать, что* $\alpha = 1$, *т. е. в системе* (31) *линейный общий множитель* $P_0^1 = x_1 + \beta x_2$.

Действительно, если $\alpha = 0$, то после перенумерации (22) из (31) получаем систему (33), в которой $\widetilde P(y) = \beta y_1\begin{pmatrix} t_2y_1^2 + q_2y_1y_2 + p_2y_2^2 \\ t_1y_1^2 + q_1y_1y_2 + p_1y_2^2 \end{pmatrix}$.

3 Принципы определения канонической формы

3.1 Структурные формы

Рассматриваем систему (14) $\dot{x} = P(x)$ с $P = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{pmatrix}$, $P_i = a_i x_1^3 + b_i x_1^2 x_2 + c_i x_1 x_2^2 + d_i x_2^3$, отождествляемую с матрицей $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, где $A_i = (a_i, b_i, c_i, d_i) \quad (i = 1, 2)$.

Задача этого раздела заключается в формулировке иерархических принципов, позволяющих выделить наиболее простые линейно неэквивалентные друг другу системы, называемые в дальнейшем каноническими формами, чтобы в дальнейшем указать условия на коэффициенты исходной системы (14) и линейную замену (16), при помощи которой (14) сводится к соответствующей канонической форме. Фактически, сведение невозмущенной системы (14) к какой-либо канонической форме и означает ее нормализацию.

Как отмечалось выше, принципы надо устанавливать таким образом, чтобы максимально облегчать сведение системы (7) $\dot{x}_i = P_i(x) + X_i(x)$, невозмущенная часть которой является одной из канонических форм, к ОНФ при помощи почти тождественной замены.

Для начала осуществим формальную упорядоченность всех систем (14).

Определение 2. *Любую однородную кубическую систему* (14)*, т. е. матрицу* A *с фиксированным числом* m *ненулевых элементов, будем называть структурной формой и обозначать* SF^m *(structural form). Через* $SF^{m,\{l_0,\dots,l_k\}}$ $(0 \le k \le 3)$ *будем обозначать структурную форму, у которой в общем множителе* P_0^l *(см. опр. 1) степень* l *может принимать любое из значений* $l_0, \dots, l_k$ *при соответствующих значениях элементов.*

В связи с этим, запись $SF^{m,l}$ $(0 \le l \le 3)$ означает одно и двух: структура формы такова, что она в качестве общего множителя имеет многочлен фиксированной степени l, или для $SF^{m,l}$ указаны ограничения на элементы, фиксирующие именно эту степень.

Например, $SF^{4,\{0,1\}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – это $SF^{4,1}$ при $a_1 = b_1$, а $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$ является $SF^{4,0}$ при любых ненулевых значениях элементов.

В п. 2.3 показано, что при $l = 3$ система (14) имеет вид (24) и при $k = 0$ ее матрица A имеет нулевую вторую строку $(A_2 = 0)$, т. е. является вырожденной.

Определение 3. *Если в системе* (14) $A_1 = 0$ *или* $A_2 = 0$, *то будем называть ее вырожденной структурной формой и обозначать* $SF_d^{m,3}$ *(degenerate).*

Тем самым, запись $SF^{m,3}$ без d внизу предполагает, что форма – невырожденная, в ней нет нулевых строк. А при $l \le 2$ она и не может быть вырожденной.

Перейдем к изучению расстановок ненулевых элементов в структурных формах.

Определение 4. *Индексом элемента* a_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3, 4)$ *матрицы* A *назовем число, стоящее на соответствующем месте в матрице* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Индексом матрицы A *будем называть сумму индексов ее ненулевых элементов и при необходимости проставлять его справа внизу при матрице* A.

Ясно, что в канонической форме не только число ненулевых элементов m, но и индекс должны быть минимальны. Кроме того, при фиксированном индексе необходимо правильно расставить в SF^m имеющиеся ненулевые элементы.

Поэтому вполне упорядочим множество SF^m $(m=\overline{2,8})$, исходя из следующих трех иерархических структурных принципов (с.п.):

1. *Число m ненулевых элементов в SF^m минимально;*
2. *Индекс SF^m минимален;*
3. *Расположение ненулевых элементов в SF^m с фиксированным индексом:*
   - 3_1. *Индекс A_2 минимален;*
   - 3_2. *Индекс левого ненулевого элемента в A_1 минимален;*
   - 3_3. *Индекс правого ненулевого элемента в A_2 минимален.*

С.п. позволяют сопоставить любой структурной форме порядковый номер i – SF_i^m.

Обсудим более подробно, на чем основан выбор именно этих структурных принципов.

С.п. 1 требует аннулировать максимальное число элементов системы (14), что безусловно необходимо для максимального упрощения связующей системы (11).

С.п. 2 и 3 основываясь на рассуждениях п. 1.4, оптимизируют расположение имеющихся в распоряжении ненулевых элементов.

С.п. 2 отдает предпочтение самой слабосвязанной невозмущенной системе, т. е. такой, в которой P_1 минимально зависит от x_2, а P_2 – от x_1. Естественно, что он содержателен только при $l \leq 2$, так как при $l=3$ коэффициенты многочленов пропорциональны, а перестановка столбцов в A ее индекс не изменяет.

С.п. 3 позволяют выделить основную SF и дополнительную к ней в парах систем, полученных друг из друга перенумерацией (22) и не симметричных относительно нее. Но с точки зрения последующей нормализации возмущений обе такие формы равносильны.

Определение 5. *Структурную форму будем называть дополнительной и обозначать $SF_{a,i}^m$ (additional), если она получена из предшествующей ей SF_i^m при помощи перенумерации* (22).

Поскольку SF_i^m и $SF_{a,i}^m$ линейно эквивалентны, то $SF_{a,i}^m$, худшую с точки зрения принципов 3, можно отдельно не рассматривать и не включать в список SF.

В частности, с.п. 3_1 позволяет выделить дополнительную структурную форму в системах, индексы A_1 и A_2 которых не равны. Оставшиеся пять систем, не подпадающие под с.п. 3_1 и не симметричные относительно перенумерации – это $SF_6^{3,2}$, $SF_{17}^{3,1}$, $SF_{22}^{4,\{0,1\}}$, $SF_{14}^{5,\{1,2\}}$, $SF_{25}^{5,\{0,1\}}$ (см. нижеследующий список 1), являются основными по с.п. 3_2.

Но, самое главное, с.п. 3 организованы так, что всегда отдают предпочтение именно тем структурным формам, для которых выполняется важное для последующей нормализации возмущенных систем условие (13).

Для вырожденных структурных форм с.п. 1 и с.п. 2 сохраняются, а с.п.3 имеет вид:

3_a. *Индексы левого и следующего за ним ненулевых элементов в A_1 минимальны.*

Список 1. 120 упорядоченных структурных форм (за $SF_i^{m,l}$ указан индекс матрицы).

$$\begin{array}{ccccc}
SF_1^{2,0},2 & SF_2^{2,1},3 & SF_3^{2,2},4 & SF_4^{2,2},4 & SF_5^{2,3},5 \\
\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_6^{2,3},5 & SF_7^{2,2},6 & SF_8^{2,2},6 & SF_9^{2,1},7 & SF_{10}^{2,0},8 \\
\begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_1^{3,0},4 & SF_2^{3,0},5 & SF_3^{3,1},5 & SF_4^{3,0},6 & SF_5^{3,1},6 \\
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_6^{3,1},6 & SF_7^{3,2},6 & SF_8^{3,1},7 & SF_9^{3,0},7 & SF_{10}^{3,2},7 \\
\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_{11}^{3,1},7 & SF_{12}^{3,2},7 & SF_{13}^{3,2},8 & SF_{14}^{3,1},8 & SF_{15}^{3,0},8 \\
\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_{16}^{3,2},8 & SF_{17}^{3,1},8 & SF_{18}^{3,2},9 & SF_{19}^{3,1},9 & SF_{20}^{3,0},9 \\
\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_{21}^{3,1},9 & SF_{22}^{3,1},10 & SF_{23}^{3,0},10 & SF_{24}^{3,0},11 & SF_1^{4,\{0,1\}},6 \\
\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_2^{4,0},7 & SF_3^{4,\{0,1\}},7 & SF_4^{4,0},8 & SF_5^{4,1},8 & SF_6^{4,\{0,1\}},8 \\
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix},
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_7^{4,\{1,2\}},8 & SF_8^{4,\{0,2\}},8 & SF_9^{4,0},9 & SF_{10}^{4,0},9 & SF_{11}^{4,1},9 \\
\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_{12}^{4,\{1,2\}},9 & SF_{13}^{4,\{0,1\}},9 & SF_{14}^{4,\{1,2\}},9 & SF_{15}^{4,1},10 & SF_{16}^{4,0},10 \\
\begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_{17}^{4,0},10 & SF_{18}^{4,\{2,3\}},10 & SF_{19}^{4,1},10 & SF_{20}^{4,\{1,3\}},10 & SF_{21}^{4,\{0,3\}},10 \\
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_{22}^{4,\{0,1\}},10 & SF_{23}^{4,\{2,3\}},10 & SF_{24}^{4,1},11 & SF_{25}^{4,0},11 & SF_{26}^{4,0},11 \\
\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
SF_{27}^{4,\{1,2\}},11 & SF_{28}^{4,\{0,1\}},11 & SF_{29}^{4,\{1,2\}},11 & SF_{30}^{4,1},12 & SF_{31}^{4,0},12 \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$SF^{4,\{0,1\}}_{32}, 12$ $\begin{pmatrix}0&0&c_1&d_1\\a_2&0&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{4,\{1,2\}}_{33}, 12$ $\begin{pmatrix}0&0&c_1&d_1\\0&b_2&c_2&0\end{pmatrix}$	$SF^{4,\{0,2\}}_{34}, 12$ $\begin{pmatrix}0&b_1&0&d_1\\a_2&0&c_2&0\end{pmatrix}$	$SF^{4,0}_{35}, 13$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\a_2&0&0&0\end{pmatrix}$	$SF^{4,\{0,1\}}_{36}, 13$ $\begin{pmatrix}0&0&c_1&d_1\\a_2&0&c_2&0\end{pmatrix}$
$SF^{4,\{0,1\}}_{37}, 14$ $\begin{pmatrix}0&0&c_1&d_1\\a_2&b_2&0&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{1}, 9$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&0\\0&0&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{2}, 10$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&d_1\\0&0&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{3}, 10$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&0\\0&b_2&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,0}_{4}, 11$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\0&0&0&d_2\end{pmatrix}$
$SF^{5,\{0,1\}}_{5}, 11$ $\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&d_1\\0&0&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{6}, 11$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&d_1\\0&b_2&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1,2\}}_{7}, 11$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&0\\a_2&0&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{1,2\}}_{8}, 11$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&0\\0&b_2&c_2&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,0}_{9}, 12$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\0&0&c_2&0\end{pmatrix}$
$SF^{5,\{1,2\}}_{10}, 12$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\0&0&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{11}, 12$ $\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&d_1\\0&b_2&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{12}, 12$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&d_1\\a_2&0&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{13}, 12$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&d_1\\0&b_2&c_2&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{1,2\}}_{14}, 12$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&0\\a_2&0&c_2&0\end{pmatrix}$
$SF^{5,0}_{15}, 13$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\0&b_2&0&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{1,2\}}_{16}, 13$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\0&b_2&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{17}, 13$ $\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&d_1\\a_2&0&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{18}, 13$ $\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&d_1\\0&b_2&c_2&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{19}, 13$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&d_1\\a_2&0&c_2&0\end{pmatrix}$
$SF^{5,\{1,2\}}_{20}, 13$ $\begin{pmatrix}0&0&c_1&d_1\\0&b_2&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,0}_{21}, 14$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&0&0&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1,2\}}_{22}, 14$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\a_2&0&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{1,2\}}_{23}, 14$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\0&b_2&c_2&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{24}, 14$ $\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&d_1\\a_2&0&c_2&0\end{pmatrix}$
$SF^{5,\{0,1\}}_{25}, 14$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&d_1\\a_2&b_2&0&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{26}, 15$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\a_2&0&c_2&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{27}, 15$ $\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&d_1\\a_2&b_2&0&0\end{pmatrix}$	$SF^{5,\{0,1\}}_{28}, 16$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&0&0\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1,2\}}_{1}, 12$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&0\\0&b_2&c_2&d_2\end{pmatrix}$
$SF^{6,\{0,1\}}_{2}, 13$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\0&0&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1,2\}}_{3}, 13$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&d_1\\0&b_2&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1,2\}}_{4}, 14$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\0&b_2&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1,2\}}_{5}, 14$ $\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&d_1\\0&b_2&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1,2\}}_{6}, 14$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&d_1\\a_2&0&c_2&d_2\end{pmatrix}$
$SF^{6,\{0,1,2\}}_{7}, 15$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&0&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1\}}_{8}, 15$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\0&b_2&c_2&0\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{1,2,3\}}_{9}, 15$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\0&b_2&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1,3\}}_{10}, 15$ $\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&d_1\\a_2&0&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1,2\}}_{11}, 16$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&0&c_2&0\end{pmatrix}$
$SF^{6,\{0,1,2\}}_{12}, 16$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\a_2&0&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{1,2\}}_{13}, 16$ $\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&d_1\\a_2&b_2&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1\}}_{14}, 17$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&0&0\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1,2\}}_{15}, 17$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{6,\{0,1,2\}}_{16}, 18$ $\begin{pmatrix}0&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&0\end{pmatrix}$
$SF^{7,\{0,1,2\}}_{1}, 16$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\0&b_2&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{7,\{0,1,2\}}_{2}, 17$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&0&c_2&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{7,\{0,1,2\}}_{3}, 18$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&0&d_2\end{pmatrix}$	$SF^{7,\{0,1,2\}}_{4}, 19$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&0\end{pmatrix}$	$SF^{8,\{0,1,2,3\}}_{1}, 20$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\end{pmatrix}$

Замечание 2. Во всех SF_i^m, кроме SF_{20}^5, число ненулевых элементов в A_2 не превосходит числа ненулевых элементов в A_1.

3.2 Нормированные структурные формы

Структурные принципы не позволяют зафиксировать степень общего множителя P_0, так как никак не связаны со значениями элементов. Поэтому в первую очередь любую SF^m необходимо нормировать при помощи замены (21), получая не менее двух единичных (возможно, по модулю) элементов.

Сформулируем принципы выбора нормируемых элементов матрицы A, основная идея которых заключается в необходимости нормировки самых неприятных для нормализации возмущенных систем элементов: тех, которые имеют максимальные индексы. При этом предпочтение будет отдаваться нормировке элементов из A_2.

На этом пути имеют место две особенности.

1. Согласно замечанию 1, если нормируемые элементы из разных зигзагов, то из всей матрицы A надо вынести число σ, равное знаку нормируемого элемента из четного зигзага, после чего в нормированной матрице удается получить оба элемента единичными.

Например, правильная нормировка $SF_2^{2,1}$ дает систему $\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ с $\sigma=\operatorname{sign}a_1$.

2. Если нормируемые элементы из одного зигзага, то на знак второго повлиять удается не всегда. Часто это зависит от величины l.

Рассмотрим, например, $SF_{13}^{4,\{0,1\}}=\begin{pmatrix}a_1&0&0&d_1\\0&b_2&0&d_2\end{pmatrix}$. Нормируя b_2,d_2, при $l=1$ получаем систему $\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&u\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$ с $\sigma=\operatorname{sign}b_2$, при $l=0$ – две системы $\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&v\\0&1&0&\kappa\end{pmatrix}$, где $\kappa=\operatorname{sign}(b_2d_2)$ $(v\neq u,$ если $\kappa=-1)$. В данном случае раздвоения $SF_{13}^{4,0}$ при нормировке можно избежать, так как имеется ненулевой элемент d_1 из другого зигзага, который и будем нормировать, получая при $l=0$ единую $NSF_{13}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&1\\0&1&0&v\end{pmatrix}$ $(v\neq -u^{-2})$.

Однако, если все ненулевые элементы структурной формы принадлежат одному зигзагу, то ее раздвоения при нормировке избежать не удается.

В результате для $SF_i^{m,l}$ принимаем следующие три нормировочных принципа (н.п.):

1. В A_2 ненулевой элемент с максимальным индексом равен 1 с учетом возможного вынесения из матрицы A общего множителя σ, равного -1;

2. Если не все элементы A расположены на одном зигзаге, то второй единичный по модулю элемент должен иметь единственное значение;

3. Если $l=3$, то $A_2=A_1$; если $l\le 2$, то в A_2 ненулевой элемент со следующим по величине индексом, если имеется, равен 1 или -1, иначе в A_1 ненулевой элемент с максимальным индексом равен 1 или -1.

А для $SF_{d,i}^{m,3}$, в которой $A_2=0$, достаточно одного нормировочного принципа (в.н.п.):

$1_d)$ *В A_1 ненулевой элемент с максимальным индексом равен 1 с учетом возможного вынесения из матрицы A общего множителя σ, равного -1; стоящий перед ним однозначно нормируемый элемент равен 1 или –1.*

Таким образом, н.п. 2 и 3 позволяют однозначно выбрать место для второго единичного элемента в любой $SF_i^{m,l}$. При $l \leq 2$ они предполагают получение его в A_2, а при невозможности – в A_1, на месте с максимальным индексом с учетом сохранения единственности после нормировки.

В то же время при $l = 3$ второй единичный элемент автоматически располагается в A_1 над первым в силу естественного предположения о равенстве A_1 и A_2. С такой нестыковкой приходится мириться, так как именно при выбранных принципах нормировки оставшиеся ненормированными ненулевые элементы имеют наиболее благоприятный вид.

Определение 6. $SF_i^{m,l}$ *будем называть нормированной структурной формой и обозначать* $NSF_i^{m,l}$ *(normalized structural form), если ее нормировка* (21) *осуществлена в соответствии с приведенными нормировочными принципами. При этом, если все ненулевые элементы* $SF_i^{m,l}$ *расположены только на одном из зигзагов, из-за чего второй нормированный элемент может быть равным как 1, так и –1, будем обозначать его* κ, *а две полученные нормированные структурные формы –* $NSF_{i,\kappa}^{m,l}$ *– двойственными.*

Отметим, что для NSF_i^m существенно облегчается практическое написание условий, фиксирующих максимальную степень l общего множителя P_0^l многочленов P_1 и P_2.

Так, система $\sigma\begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $-v,\ w = u$ является $NSF_7^{5,2}$, при $w = v - u$ является $NSF_7^{5,1}$ и является $NSF_7^{5,0}$, если не выполняются оба ограничения на параметры.

Правильности выбора н.п. еще раз подтверждает, например, вид $NFS_i^{5,1}$ из списка нормированных структурных форм (см. прод. статьи в след. выпуске журнала). Любая другая расстановка нормированных элементов приведет к резкому усложнению элементов, зависящих от параметров, и условий на них, обеспечивающих условие $l = 1$.

3.3 Канонические структурные формы и канонические формы

Рассмотрим произвольную нормированную структурную форму $NSF_i^{m,l}$, в которой m – число ненулевых элементов матрицы A, i – ее порядковый номер в семействе SF^m, l – степень общего множителя P_0^l. При этом выбор l, при наличии такого выбора, привел к появлению определенных ограничений на значения ненормированных элементов.

Для $NSF_i^{m,l}$ реализуется один из двух случаев: 1) $NSF_i^{m,l}$ при помощи замен (16) всегда может быть сведена к одной или нескольким структурным формам, предшествующим ей в силу введенных выше структурных принципов; 2) таких упрощающих замен для $NSF_i^{m,l}$ найти не удалось.

Определение 7. $NSF_i^{m,l}$ *будем называть канонической структурной формой и обозначать* $CSF_i^{m,l}$ *(canonical structural form), если хотя бы при одном наборе элементов заменой* (16) *ее не удается свести к какой-либо предшествующей структурной форме.*

Произвольную каноническую структурную форму $CSF_i^{m,l}$ можно попытаться упростить, получая дополнительные ограничения на ее элементы. А именно, исключить те значения элементов, при которых: 1) $CSF_i^{m,l}$ заменами (16) может быть сведена к предшествующим структурным формам; 2) $CSF_i^{m,l}$ заменой (16) преобразуется в себя, но с другим набором значений элементов.

Определение 8. *$CSF_i^{m,l}$ будем называть канонической формой и обозначать $CF_i^{m,l}$ (canonical form), если: 1) ни при каких значениях входящих в нее элементов не существует замены* (16)*, преобразующей $CSF_i^{m,l}$ в какую-либо предшествующую $SF_{i_*}^{m_*,l}$; 2) заменой* (16)*, преобразующей $CSF_i^{m,l}$ в себя, значения элементов максимально ограничены следующим образом: по возможности, хотя бы один из неединичных элементов знакоопределен (знакоположителен) и (или) ограничен по модулю.*

Как будет видно из дальнейшего, при получение $CF_i^{m,l}$ из $CSF_i^{m,l}$ в ряде случаев возникают значительные технические трудности, связанные с решением алгебраических уравнений 4-й – 8-й степени с параметрами. В этих случаях приходится ограничиться получением только $CSF_i^{m,l}$, что и вызвало их появление.

Определение 9. *По аналогии с определениями 3, 5, 6 для $SF_i^{m,l}$ и $NSF_i^{m,l}$ введем понятия вырожденной, канонической и двойственной CSF и CF с использованием соответствующих обозначений, например, $CF_{d,i}^{m,3}$ или $CSF_{a,i,\kappa}^{m,l}$.*

Предложение 5. *При $l = 2, 3$ в зависимости от знака дискриминанта $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma$ из* (23) *будем обозначать $CF_i^{m,2}$ так: $CF_i^{m,l,>}$, $CF_i^{m,l,=}$, $CF_i^{m,l,<}$. При фиксированном знаке D_0 в зависимости от знака дискриминанта D из* (25) *в обозначение канонической формы сверху будем добавлять соответствующий знак: $>, <, =,$ например, $CF_i^{m,l,>,>}$. Аналогичные обозначения при необходимости будем использовать для $CSF_i^{m,l}$, $SF_i^{m,l,>}$.*

Согласно (29), (25), (26_2) $CSF_i^{m,l}$ ($CF_i^{m,l}$, $SF_i^{m,l}$), имеющие различные пары третьих и четвертых верхних индексов, при $l = 2, 3$ линейно неэквивалентны.

Предложение 6. *При описании $CF_i^{m,l}$ в квадратных скобках $[\ldots]$ будем обозначать те значения параметра,которые входили в описание $SF_i^{m,l}$ и от которых линейной заменой* (16) *удалось избавиться, переводя $SF_i^{m,l}$ в себя.*

В заключение опишем возможности, которые предоставляют вырожденные канонические формы для нормализации систем в случае $l = 3$.

Замечание 3. Использование $CF_d^{\mu,3}$ позволяет нормализовать исходную возмущенную систему (14) с $l = 3$ тремя различными способами:

1) использовать саму $CF_d^{\mu,3}$ в качестве невозмущенной части;

2) использовать $CF^{m,3}$ в качестве невозмущенной части, сделав в возмущенной системе соответствующую линейную замену, переводящую $CF_d^{\mu,3}$ в $CF^{m,3}$;

3) избавиться от вырожденности невозмущенной части $CF_d^{\mu,3}$, добавив в $P_2 \equiv 0$ какие-либо члены из возмущения системы (14) так, чтобы новая невозмущенная часть превратилась в квазиоднородный многочлен за счет введения соответствующего веса.

4 Канонические формы системы с общим множителем третьей степени

4.1 Характерные особенности невозмущенной системы при $l = 3$

Утверждение 6. *Для системы* (14) *при $l = 3$ условие $P_2(x) \equiv 0$ инвариантно относительно любой замены* (16) *с $r_2 = 0$.*

Доказательство. Сделаем в системе (14) с $P_2 \equiv 0$ любую замену (16). Согласно (20) в полученной системе (28) матрица $\delta\widetilde{A}$ будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} s_2P_1(r) & s_2\left(s_1\dfrac{\partial P_1(r)}{\partial r_1}+s_2\dfrac{\partial P_1(r)}{\partial r_2}\right) & s_2\left(r_1\dfrac{\partial P_1(s)}{\partial s_1}+r_2\dfrac{\partial P_1(s)}{\partial s_2}\right) & s_2P_1(s) \\ -r_2P_1(r) & -r_2\left(s_1\dfrac{\partial P_1(r)}{\partial r_1}+s_2\dfrac{\partial P_1(r)}{\partial r_2}\right) & -r_2\left(r_1\dfrac{\partial P_1(s)}{\partial s_1}+r_2\dfrac{\partial P_1(s)}{\partial s_2}\right) & -r_2P_1(s) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Если $\widetilde{P}_2 \equiv 0$, то $r_2 = 0$, так как в противном случае обращаются в нуль общие множители, входящие в $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$, т. е. и $\widetilde{P}_1 \equiv 0$. Если же $r_2 = 0$, то в (34) $\widetilde{P}_2 \equiv 0$. $\square$

Утверждение 7. *Любая замена* (16) *с* $r_2 = -s_2 \neq 0$ *преобразует систему* (14) *с* $P_2 \equiv 0$ *в систему* (17) *с* $\widetilde{P}_1 \equiv \widetilde{P}_2$.

Утверждение немедленно вытекает из формулы (34).

По определению 1 при $l = 3$ найдется такое число k, что в системе (14) $P_2 = kP_1$, т. е. она имеет вид (24) или, что то же самое, система (23) имеет вид

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix} = (\alpha x_1^2 + 2\beta x_1x_2 + \gamma x_2^2)\begin{pmatrix} p_1x_1+q_1x_2\\ kp_1x_1+kq_1x_2\end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1\\ kp_1 & kq_1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} P_0(x)\not\equiv 0,\\ p_1^2+q_1^2\neq 0\end{pmatrix}, \quad (35)$$

причем одно из собственных чисел H, например, $\lambda_2 = 0$, тогда $\lambda_1 = p_1 + kq_1 = \operatorname{Tr} H$. Кроме того, в (25) $D = (p_1 + kq_1)^2$, поэтому, если $\lambda_1 \neq 0$, то $D > 0$, а если $\lambda_1 = 0$, то $D = 0$ и $q_1 \neq 0$, так как $p_1 = -kq_1$.

Предложение 7. *Для того чтобы избавиться от неоднозначности, возникающей при вынесении в системе* (35) *квадратичного общего множителя* P_0 *из* P, *договоримся, если это возможно, выносить полный квадрат. Иначе, если возможно, будем выносить такой квадратичный общий множитель, чтобы в* H $\lambda_1 \neq 0$.

4.2 Построение вырожденных канонических форм при $\mathbf{l = 3}$

Список 2. Одиннадцать $CF_{d,i}^{\mu,3}$ системы (14) при $l = 3$ $(\sigma = \pm 1,\ P_2 \equiv 0)$.

$$\begin{gathered} CF_{d,1}^{1,3,=,>} = \sigma(1,0,0,0)_1;\quad CF_{d,2}^{1,3,=,=} = (0,1,0,0)_2;\\ CF_{d,3}^{1,3,=,>} = \sigma(0,0,1,0)_3;\quad CF_{d,4}^{1,3,=,=} = (0,0,0,1)_4;\\ CF_{d,1}^{2,3,=,>} = \sigma(1,1,0,0)_3;\quad CF_{d,2,+}^{2,3,<,>} = \sigma(+1,0,1,0)_4;\quad CF_{d,2,-}^{2,3,>,>} = \sigma(-1,0,1,0)_4;\\ CF_{d,3}^{2,3,<,>} = \sigma(1,0,0,1)_5;\quad CF_{d,4}^{2,3,>,>} = (0,1,1,0)_5,\ [\sigma = -1];\quad CF_{d,5,+}^{2,3,<,=} = (0,+1,0,1)_6;\\ CF_{d,1}^{3,3} = \sigma(v,1,1,0)_6,\ v \in (-\infty,0)\cup(0,2/9)\cup(1/4,1/3)\cup(1/3,+\infty),\ [v \in (2/9,1/4)]. \end{gathered}$$

Здесь 3-й и 4-й верхние индексы согласно предложению 5 указывают знаки D_0 и D.

Теорема 3. *Любая система* (14) *вида* (35) *линейной неособой заменой* (16) *может быть сведена к одной из указанных в списке 2 линейно неэквивалентных вырожденных канонических форм.*

Доказательство. По теореме 1 произвольная линейная неособая замена (16) сводит систему (23) и, в частности, систему (35), к системе (28) $\dot y = \big\langle(\tilde\alpha, 2\tilde\beta, \tilde\gamma),\, q^{[2]}(y)\big\rangle\, \widetilde{H}y$, в которой вектор $(\tilde\alpha, 2\tilde\beta, \tilde\gamma)$ и матрица $\widetilde{H}$ определены в (26), причем $\delta_{\tilde p\tilde q} = \det\widetilde{H} = 0$.

Выберем сначала замену (16) так, чтобы в (28) матрица $\widetilde{H}$ оказалась жордановой, что возможно благодаря формуле (26_2).

А именно, замена (16) с $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ k & -p_1 \end{pmatrix}$ при $\lambda_1 \neq 0$ или с $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & q_1^{-1} \end{pmatrix}$ при $\lambda_1 = 0$ преобразует систему (35) в систему (28) соответственно одного из двух видов:

$$\widetilde{A} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \tilde\alpha & 2\tilde\beta & \tilde\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ с } \widetilde{H} = \begin{pmatrix} p_1 + kq_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde\alpha = \alpha + 2\beta k + \gamma k^2, \quad \tilde\beta = (\alpha + \beta k)q_1 - (\beta + \gamma k)p_1, \quad \tilde\gamma = \alpha q_1^2 - 2\beta p_1 q_1 + \gamma p_1^2 \quad \text{или} \tag{36}$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde\alpha & 2\tilde\beta & \tilde\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ с } \widetilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \tilde\alpha = \alpha + 2\beta k + \gamma k^2,\ \tilde\beta = (\beta + \gamma k)q_1^{-1},\ \tilde\gamma = \gamma q_1^{-2},$$

причем наличие $\lambda_2 = 0$ у матрицы H приводит к тому, что в системах (36) $\widetilde{P}_2 \equiv 0$.

Теперь при помощи замен (16) будем максимально упрощать системы (36), сохраняя условие $P_2 \equiv 0$ и сводя их, тем самым, к $CF_d^{\mu,3}$.

С учетом утверждения 6, произвольная замена (16) с $r_2 = 0$ сводит системы (36_1) и (36_2) соответственно к системам

$$\breve{A} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \tilde\alpha r_1^2 & r_1(3\tilde\alpha s_1 + 2\tilde\beta s_2) & 3\tilde\alpha s_1^2 + 4\tilde\beta s_1 s_2 + \tilde\gamma s_2^2 & r_1^{-1} s_1(\tilde\alpha s_1^2 + 2\tilde\beta s_1 s_2 + \tilde\gamma s_2^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde\alpha r_1 s_2 & 2s_2(\tilde\alpha s_1 + \tilde\beta s_2) & r_1^{-1} s_2(\tilde\alpha s_1^2 + 2\tilde\beta s_1 s_2 + \tilde\gamma s_2^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Все элементы получаемых систем (37) будем отмечать символом $\breve{}$.

Множество систем (35) предварительно разобьем на три линейно неэквивалентных класса в соответствии со знаком дискриминанта $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma$ общего множителя P_0. В силу (29) $\operatorname{sign} D_0$ инвариантен относительно любой замены (16). При этом $p_1^2 + q_1^2 \neq 0$.

1) $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma = 0$, т. е. P_0 является полным квадратом.

Если $\alpha \neq 0$, то $\alpha = 1$ согласно предложению 3. Тогда в системе (35) общий множитель $P_0 = x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = (x_1 + \beta x_2)^2$, т. е. $\beta^2 = \gamma \geq 0$.

Если $\alpha = 0$, то $\beta = 0$ и $\gamma = 1$ по предложению 3. Тогда $P_0 = x_2^2$.

$\mathbf{1_1}$) $\lambda_1 = p_1 + kq_1 \neq 0$ $(D = \lambda_1^2 > 0)$. Из системы (35) получена система (36_1) с

$$\tilde\alpha = \left[\begin{matrix} (1+\beta k)^2 \\ k^2 \end{matrix}\right., \quad \tilde\beta = \left[\begin{matrix} (1+\beta k)(q_1 - \beta p_1) \\ -kp_1 \end{matrix}\right., \quad \tilde\gamma = \left[\begin{matrix} (q_1 - \beta p_1)^2 \\ p_1^2 \end{matrix}\right. \qquad (\tilde\beta^2 = \tilde\alpha\tilde\gamma).$$

$\mathbf{1_1^1}$) $\tilde\gamma = 0$ $(\tilde\beta = 0,\ \tilde\alpha > 0)$. При $s_1, r_2 = 0$ система $(37_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1\tilde\alpha r_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_1$. При $r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_1|)^{-1/2}$, $s_2 = 1$ – это $CF_{d,1}^{1,3,=,>} = \sigma(1,0,0,0)_1$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$.

$\mathbf{1_1^2}$) $\tilde\alpha = 0$ $(\tilde\beta = 0,\ \tilde\gamma > 0)$. При $s_1, r_2 = 0$ система $(37_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1\tilde\gamma s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_3$. При $r_1 = 1$, $s_2 = (\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$, $s_2 = 1$ – это $CF_{d,3}^{1,3,=,>} = \sigma(0,0,1,0)_3$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$.

$\mathbf{1_1^3}$) $\tilde\alpha>0,\tilde\gamma>0$ $(\tilde\beta\neq 0)$. Система (36_1) сводится к системе (37_1), в которой $\check c_1=\lambda_1\tilde\alpha^{-1}(3\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)$, $\check d_1=\lambda_1(\tilde\alpha r_1)^{-1}s_1(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)^2$. При $s_2=-\tilde\alpha\tilde\beta^{-1}s_1$, $r_1,s_1=(\tilde\alpha|\lambda_1|)^{-1/2}$ – это $CF_{d,1}^{2,3,=,>}=\sigma(1,1,0,0)_3$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1$.

$\mathbf{1_2}$) $\lambda_1=p_1+kq_1=0$ $(q_1\neq 0,$ так как $p_1^2+q_1^2\neq 0)$. Из (35) получена система (36_2) с

$$\tilde\alpha=\begin{bmatrix}(1+\beta k)^2\\ k^2\end{bmatrix},\quad \tilde\beta=\begin{bmatrix}(1+\beta k)\beta q_1^{-1}\\ kq_1^{-1}\end{bmatrix},\quad \tilde\gamma=\begin{bmatrix}\beta^2q_1^{-2}\\ q_1^{-2}\end{bmatrix}\qquad(\tilde\beta^2=\tilde\alpha\tilde\gamma).$$

$\mathbf{1_2^1}$) $\tilde\alpha=0$ $(\tilde\beta=0,\ \tilde\gamma>0)$. При $s_1=0$ система $(37_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&\tilde\gamma r_1^{-1}s_2^3\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}_4$. При $r_1=\tilde\gamma,\ s_2=1$ – это $CF_{d,4}^{1,3,=,=}=(0,0,0,1)_4$.

$\mathbf{1_2^2}$) $\tilde\alpha>0$. Система (36_2) сводится к (37_2), в которой $\check d_1=(\tilde\alpha r_1)^{-1}s_2(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)^2$. При $s_1=-\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta s_2,\ r_1=\tilde\alpha^{-1},\ s_2=1$ – это $CF_{d,2}^{1,3,=,=}=(0,1,0,0)_2$.

$\mathbf{2}$) $\beta^2-\alpha\gamma>0$, т.е. P_0 раскладывается на два различных сомножителя.

Если $\alpha\neq 0$, то $\alpha=1$ согласно предложению 3. Тогда в системе (35) $\beta^2-\gamma>0$ и общий множитель $P_0=x_1^2+2\beta x_1x_2+\gamma x_2^2=(x_1+\zeta x_2)(x_1+\eta x_2)$.

Если $\alpha=0$, то $2\beta=1$ по предложению 3. Тогда $P_0=(x_1+\gamma x_2)x_2$.

$\mathbf{2_1}$) $\lambda_1=p_1+kq_1\neq 0$. Из системы (35) получена система (36_1), в которой $\tilde\beta^2>\tilde\alpha\tilde\gamma$,

$$\tilde\alpha=\begin{bmatrix}1+2\beta k+\gamma k^2\\ k(1+\gamma k)\end{bmatrix},\ \tilde\beta=\begin{bmatrix}(1+\beta k)q_1-(\beta+\gamma k)p_1\\ (kq_1-(1+2\gamma k)p_1)/2\end{bmatrix},\ \tilde\gamma=\begin{bmatrix}q_1^2-2\beta q_1p_1+\gamma p_1^2\\ (\gamma p_1-q_1)p_1\end{bmatrix}. \tag{38}$$

$\mathbf{2_1^1}$) $\tilde\alpha,\tilde\gamma=0$. Тогда в (36_1) $\widetilde P_1=2\tilde\beta\lambda_1y_1^2y_2$. По предложению 7 – это случай 1_2).

$\mathbf{2_1^2}$) $\tilde\alpha\neq 0,\tilde\gamma=0$. В (36_1) $\widetilde P_1=\lambda_1y_1^2(\tilde\alpha y_1+2\tilde\beta y_2)$. По предложению 7 – случай 1_1).

$\mathbf{2_1^3}$) $\tilde\alpha=0,\ \tilde\gamma\neq 0$ $(\tilde\beta\neq 0)$. $(37_1)=\lambda_1s_2\begin{pmatrix}0&2\tilde\beta r_1&4\tilde\beta s_1+\tilde\gamma s_2&(2\tilde\beta s_1+\tilde\gamma s_2)s_1r_1^{-1}\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Если $\tilde\gamma\lambda_1<0$, то при $s_1=-\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-1}s_2,\ r_1=s_1,\ s_2=|\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$, а если $\tilde\gamma\lambda_1>0$, то при $r_1=\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-1}s_2,\ s_1=0,\ s_2=|\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ система (37_1) – это $CF_{d,4}^{2,3,>,>}=(0,1,1,0)_5$.

Вместо $\check d_1=0$ можно сделать $\check c_1=0$, но (37_1) не будет канонической по с.п. 2.

$\mathbf{2_1^4}$) $\tilde\alpha,\tilde\gamma\neq 0$.

$\mathbf{2_1^{4a}}$) $\tilde\beta=0$ $(\tilde\alpha\tilde\gamma<0)$. $(37_1)=\lambda_1\begin{pmatrix}\tilde\alpha r_1^2&3\tilde\alpha r_1s_1&3\tilde\alpha s_1^2+\tilde\gamma s_2^2&(\tilde\alpha s_1^2+\tilde\gamma s_2^2)r_1^{-1}s_1\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$. При $s_1=0,\ r_1=|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2},\ s_2=|\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ – это $CF_{d,2,-}^{2,3,>,>}=\sigma(-1,0,1,0)_4$ с $\sigma=-\operatorname{sign}(\tilde\alpha\lambda_1)$.

$\mathbf{2_1^{4b}}$) $\tilde\beta\neq 0$. Введем $\tilde\tau=(\tilde\beta^2-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}>0$ $(\tilde\tau\neq|\tilde\beta|)$.

Случай $\check b_1,\check c_1=0$ в (37_1), возникающий при $s_1=(-2\tilde\beta\pm(4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2})(3\tilde\alpha)^{-1}s_2$ или при $s_2=-3\tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1}s_1$, невозможен, поскольку требует, чтобы $4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma=0$, а $\tilde\beta^2>\tilde\alpha\tilde\gamma$. Поэтому по с.п. 2 в первую очередь получаем $\check d_1=0\ \Leftrightarrow\ s_1=0$ или $s_1=\tilde\alpha^{-1}(-\tilde\beta\pm\tilde\tau)s_2$.

Система (37_1) при $s_1 = \tilde\alpha^{-1}(\tilde\tau - |\tilde\beta|)s_2 \operatorname{sign}\tilde\beta$ или $s_1 = 0$ имеет вид соответственно

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \tilde\alpha r_1^2 & (3\tilde\tau - |\tilde\beta|)r_1 s_2 \operatorname{sign}\tilde\beta & 2\tilde\alpha^{-1}\tilde\tau(\tilde\tau - |\tilde\beta|)s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \lambda_1 \begin{pmatrix} \tilde\alpha r_1^2 & 2\tilde\beta r_1 s_2 & \tilde\gamma s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

$\mathbf{2_1^{4b1}}$) $3\tilde\tau = |\tilde\beta| \ \Leftrightarrow\ \tilde\gamma = 8(9\tilde\alpha)^{-1}\tilde\beta^2$. При $r_1 = |\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2 = 3|\tilde\alpha|^{1/2}(2\tilde\beta)^{-1}|\lambda_1|^{-1/2}$ система (39_1) – это опять $CF^{2,3,>,>}_{d,2,-} = \sigma(-1,0,1,0)_4$ с $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde\alpha\lambda_1)$.

$\mathbf{2_1^{4b2}}$) $3\tilde\tau \neq |\tilde\beta|$. При $r_1 = (2\tilde\tau)^{1/2}|\tilde\tau - |\tilde\beta||^{1/2}(3\tilde\tau - |\tilde\beta|)^{-1}|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}\operatorname{sign}(\tilde\alpha\tilde\beta(\tilde\tau - |\tilde\beta|))$, $s_2 = |\tilde\alpha|^{1/2}|2\lambda_1\tilde\tau(\tilde\tau - |\tilde\beta|)|^{-1/2}$ система (39_1) – это $CF^{3,3,>,>}_{d,1} = \sigma(v,1,1,0)_6$ с $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde\alpha\lambda_1(\tilde\tau - |\tilde\beta|))$, $v = 2\tilde\tau(\tilde\tau - |\tilde\beta|)(3\tilde\tau - |\tilde\beta|)^{-2}$, при этом $v < 2/9$.

$\mathbf{2_2}$) $\lambda_1 = p_1 + kq_1 = 0$ $(q_1 \neq 0)$. Из системы (35) получена система (36_2), в которой $\tilde\alpha = \left[\begin{matrix} 1 + 2\beta k + \gamma k^2 \\ k(1+\gamma k) \end{matrix}\right.$, $\quad \tilde\beta = \left[\begin{matrix} (\beta + \gamma k)q_1^{-1} \\ (1/2 + \gamma k)q_1^{-1} \end{matrix}\right.$, $\quad \tilde\gamma = \left[\begin{matrix} \gamma q_1^{-2} \\ \gamma q_1^{-2} \end{matrix}\right.$.

$\mathbf{2_2^1}$) $\tilde\alpha, \tilde\gamma = 0$. Тогда в системе (36_2) $\widetilde P_1 = 2\tilde\beta y_1 y_2^2$. По предложению 7 это случай 1).

$\mathbf{2_2^2}$) $\tilde\alpha = 0$, $\tilde\gamma \neq 0$. В (36_2) $\widetilde P_1 = y_2^2(2\tilde\beta y_1 + \tilde\gamma y_2)$. По предложению 7 – это случай 1).

$\mathbf{2_2^3}$) $\tilde\gamma = 0$, $\tilde\alpha \neq 0$. В (36_2) $\widetilde P_1 = y_1 y_2(\tilde\alpha y_1 + 2\tilde\beta y_2)$. По предложению 7 – это случай 2_1), так как при правильной группировке $\widetilde P(y) = (\tilde\alpha y_1 y_2 + 2\tilde\beta y_2^2)\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 1$ в $\widetilde H$.

$\mathbf{2_2^4}$) $\tilde\alpha$, $\tilde\gamma \neq 0$. В (36_2) $\widetilde P_1 = \tilde\alpha y_2(y_1^2 + 2\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta y_1 y_2 + \tilde\alpha^{-1}\tilde\gamma y_2^2) = \tilde\alpha y_2(y_1 + \tilde\zeta y_2)(y_1 + \tilde\eta y_2)$ с $\tilde\zeta = (\tilde\beta\operatorname{sign}\tilde\alpha + (\tilde\beta^2 - \tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2})|\tilde\alpha|^{-1}$, $\tilde\eta = (\tilde\beta\operatorname{sign}\tilde\alpha - (\tilde\beta^2 - \tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2})|\tilde\alpha|^{-1}$. По предложению 7 – это случай 2_1), так как правильно: $\widetilde P(y) = (\tilde\alpha y_1 y_2 + \tilde\alpha\tilde\zeta y_2^2)\begin{pmatrix} y_1 + \tilde\eta y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = 1$ в $\widetilde H$.

3) $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$. Поскольку $\alpha\gamma > 0$, то $\alpha = 1$ по предложению 3.

Тогда в системе (35) $\beta^2 - \gamma < 0$ $(\gamma > 0)$ и общий множитель $P_0 = x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$.

$\mathbf{3_1}$) $\lambda_1 = p_1 + kq_1 \neq 0$. Из системы (35) получена система (36_1), в которой $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ заданы в верхней строке (38), при этом $\tilde\alpha, \tilde\gamma > 0$, $\tilde\beta^2 < \tilde\alpha\tilde\gamma$.

$\mathbf{3_1^a}$) $\tilde\beta = 0$. Аналогично 2_1^{4a}) система (37_1) при $s_1 = 0$, $r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_1|)^{-1/2}$, $s_2 = (\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ – это $CF^{2,3,<,>}_{d,2,+} = \sigma(1,0,1,0)_4$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$.

$\mathbf{3_1^b}$) $\tilde\beta \neq 0$. В отличие от 2_1^{4b}) в системе (37_1) $\breve d_1 = 0$ только при $s_1 = 0$. Поэтому система (39_2) $(s_1 = 0)$ при $r_1 = \gamma^{1/2}(2\tilde\beta)^{-1}|\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2 = (\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ – это $CSF^{3,3,<,>}_{d,1} = \sigma(v,1,1,0)_6$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$, $v = \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} > 1/4$.

Зато в отличие от 2_1^{4b}) в системе (37_1) можно получить $\breve b_1, \breve c_1 = 0$, если $4\tilde\beta^2 - 3\tilde\alpha\tilde\gamma = 0$ $\Leftrightarrow$ $v = 1/3$. Поэтому в $CF^{3,3,<,>}_{d,1}$ $v > 1/4$ и $v \neq 1/3$.

$\mathbf{3_1^c}$) $\tilde\gamma = 4(3\tilde\alpha)^{-1}\tilde\beta^2$. При $s_2 = -3\tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1}s_1$ $(37_1) = \begin{pmatrix} \tilde\alpha\lambda_1 r_1^2 & 0 & 0 & \tilde\alpha\lambda_1 r_1^{-1}s_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1, s_1 = (\tilde\alpha|\lambda_1|)^{-1/2}$ – это $CSF^{2,3,<,>}_{d,3} = \sigma(1,0,0,1)_5$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$.

$\mathbf{3_2}$) $\lambda_1 = p_1 + kq_1 = 0$ $(q_1 \neq 0)$. Из системы (35) получена система (36_2), в которой $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ заданы в верхней строке (38), при этом $\tilde\alpha, \tilde\gamma > 0$, $\tilde\beta^2 < \tilde\alpha\tilde\gamma$.

Система $(37_2) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde\alpha r_1 s_2 & 2s_2(\tilde\alpha s_1 + \tilde\beta s_2) & r_1^{-1}s_2(\tilde\alpha s_1^2 + 2\tilde\beta s_1 s_2 + \tilde\gamma s_2^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $s_2 = (\tilde\alpha\tilde\gamma - \tilde\beta^2)^{-1/4}$, $r_1 = \tilde\alpha^{-1}s_2^{-1}$, $s_1 = -\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta s_2^{-1}$ – это $CF_{d,5,+}^{2,3,<,=} = \sigma(0,1,0,1)_6$. $\square$

Замечание 4. 1) $CSF_{d,1}^{3,3} = \sigma(v,1,1,0)_6$ с $\sigma = \sigma_*$ при $v = 2/9,\ 1/4,\ 1/3$ – неканоническая по с.п. 1. При $v = 2/9$ заменой (16) с $r_1, s_1 = 3\cdot 2^{-1/2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = -2^{1/2}$ она сводится к $CF_{d,2,-}^{2,3,>,>} = \sigma(-1,0,1,0)_4$ с $\sigma = -\sigma_*$; при $v = 1/4$ заменой (16) с $r_1, s_1 = 2$, $r_2 = 0$, $s_2 = -1$ – к $CF_{d,1}^{2,3,=,>} = \sigma(1,1,0,0)_3$ с $\sigma = \sigma_*$; при $v = 1/3$ заменой (16) с $r_1, s_1 = 3^{1/2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = -3^{1/2}$ – к $CF_{d,3}^{2,3,<,>} = \sigma(1,0,0,1)_5$ с $\sigma = \sigma_*$.

2) $CSF_{d,1}^{3,3,>,>} = \sigma(v_*,1,1,0)$ при $v_* \in (2/9, 1/4)$ заменой (16) с $r_1 = (6v_* - 1 + (1 - 4v_*)^{1/2})^{-1}(8v_* - 2 + 2(1-4v_*)^{1/2})^{1/2}$, $s_1 = 2(8v_* - 2 + 2(1-4v_*)^{1/2})^{-1/2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = ((1-4v_*)^{1/2} - 1)(8v_* - 2 + 2(1-4v_*)^{1/2})^{-1/2}$ сводится к $CF_{d,1}^{3,3,>,>} = \sigma(v,1,1,0)$ с $v = 2v_*(4v_* - 1 + (1-4v_*)^{1/2}(6v_* - 1 + (1-4v_*)^{1/2})^{-2}$ и $v \in (0, 2/9)$.

3) $CF_{d,1}^{3,3} = \{CF_{d,1}^{3,3,<,>}$ при $v > 1/4,\ v \neq 1/3$; $CF_{d,1}^{3,3,>,>}$ при $v < 2/9\}$.

Следствие 3. *Система* (35) *известной линейной неособой заменой* (16) *может быть сведена к соответствующей* $CF_{d,i}^{\nu,3}$ *из списка 2, если шесть параметров системы: коэффициенты* $\alpha, 2\beta, \gamma$ *общего множителя* P_0, *элементы* p_1, q_1 $(p_1^2 + q_1^2 \neq 0)$ *матрицы* H *и коэффициент пропорциональности* k *удовлетворяют следующим условиям:*

$CF_{d,1}^{1,3,=,>}$: 1. $\alpha = 1,\ \gamma = \beta^2,\ p_1 \neq -kq_1,\ q_1 = \beta p_1\ (\beta k \neq -1)$,
2. $\alpha, \beta = 0,\ \gamma = 1,\ k \neq 0,\ p_1 = 0\ \ (1_1^1)$;

$CF_{d,3}^{1,3,=,>}$: 1. $\alpha = 1,\ \gamma = \beta^2,\ p_1 \neq -kq_1,\ \beta k = -1\ (q_1 \neq \beta p_1)$,
2. $\alpha, \beta = 0,\ \gamma = 1,\ k = 0,\ p_1 \neq 0\ \ (1_1^2)$;

$CF_{d,1}^{2,3,=,>}$: 1. $\alpha = 1,\ \gamma = \beta^2,\ p_1 \neq -kq_1,\ \beta k \neq -1,\ q_1 \neq \beta p_1$,
2. $\alpha, \beta = 0,\ \gamma = 1,\ k \neq 0,\ p_1 \neq 0,\ p_1 \neq -kq_1\ \ (1_1^3)$;

$CF_{d,4}^{1,3,=,=}$: 1. $\alpha = 1,\ \gamma = \beta^2,\ p_1 = -kq_1,\ \beta k = -1$,
2. $\alpha, \beta = 0,\ \gamma = 1,\ k = 0,\ p_1 = 0\ \ (1_2^1)$;

$CF_{d,2}^{1,3,=,=}$: 1. $\alpha = 1,\ \gamma = \beta^2,\ p_1 = -kq_1,\ \beta k \neq -1$,
2. $\alpha, \beta = 0,\ \gamma = 1,\ k \neq 0,\ p_1 = -kq_1\ (1_2^2)$;

$CF_{d,4}^{2,3,>,>}$: 1. $\alpha = 1,\ \gamma < \beta^2,\ p_1 \neq -kq_1,\ 1 + 2\beta k + \gamma k^2 = 0,\ q_1 \neq (\beta \pm (\beta^2 - \gamma)^{1/2})p_1$,
2. $\alpha = 0,\ 2\beta = 1,\ p_1 \neq -kq_1,\ k(1 + \gamma k) = 0,\ (\gamma p_1 - q_1)p_1 \neq 0\ \ (2_1^3)$;

$CF_{d,2,-}^{2,3,>,>}$: 1. $\alpha = 1,\ \gamma > \beta^2,\ p_1 \neq -kq_1,\ 1 + 2\beta k + \gamma k^2 \neq 0,\ q_1 \neq (\beta \pm \tau^{1/2})p_1$,
$(\beta + \gamma k)p_1 = (1 + \beta k)q_1$ *или* $\iota_1 = 0$,
2. $\alpha = 0,\ 2\beta = 1,\ p_1 \neq -kq_1,\ k(1 + \gamma k) \neq 0,\ (\gamma p_1 - q_1)p_1 \neq 0$,
$kq_1 = (2\gamma k + 1)p_1\ \ (2_1^{4a})$ *или* $\iota_2 = 0\ \ (2_1^{4b1})$;

$CF_{d,1}^{3,3,>,>}$: 1. $\alpha = 1,\ \gamma > \beta^2,\ p_1 \neq -kq_1,\ 1 + 2\beta k + \gamma k^2 \neq 0,\ q_1 \neq (\beta \pm \tau^{1/2})p_1$,
$(\beta + \gamma k)p_1 \neq (1 + \beta k)q_1,\ \iota_1 \neq 0$,
2. $\alpha = 0,\ 2\beta = 1,\ p_1 \neq -kq_1,\ k(1 + \gamma k) \neq 0,\ (\gamma p_1 - q_1)p_1 \neq 0$,
$kq_1 \neq (1 + 2\gamma k)p_1,\ \iota_2 \neq 0\ (2_1^{4b2})$;

$CF_{d,2,+}^{2,3,<,>}$: $\alpha = 1,\ \gamma > \beta^2,\ p_1 \neq -kq_1,\ (\beta + \gamma k)p_1 = (1 + \beta k)q_1\ (3_1^a)$;

$CF^{2,3,<,>}_{d,3}$: $\alpha = 1,\ \gamma > \beta^2,\ p_1 \neq -kq_1,\ (\beta+\gamma k)p_1 \neq (1+\beta k)q_1,\ \iota_3 = 0\ \ (3^c_1)$;
$CF^{3,3,<,>}_{d,1}$: $\alpha = 1,\ \gamma > \beta^2,\ p_1 \neq -kq_1,\ (\beta+\gamma k)p_1 \neq (1+\beta k)q_1,\ \iota_3 \neq 0\ (3^b_1)$;
$CF^{2,3,<,=}_{d,5,+}$: $\alpha = 1,\ \gamma > \beta^2,\ p_1 = -kq_1\ (3_2)$.
Здесь $\sigma = \operatorname{sign}(p_1 + kq_1)$ *в* $CF^{1,3,=,>}_{d,1}$, $CF^{1,3,=,>}_{d,3}$, $CF^{2,3,=,>}_{d,1}$, $CF^{2,3,<,>}_{d,2,+}$, $CF^{2,3,<,>}_{d,3}$, $CSF^{3,3,<,>}_{d,1}$;
$\sigma = \left[\begin{matrix} -\operatorname{sign}\left((p_1+kq_1)(1+2\beta k+\gamma k^2)\right) \\ -\operatorname{sign}\left(k(p_1+kq_1)(1+\gamma k)\right)\end{matrix}\right.,\ \left[\begin{matrix} \operatorname{sign}\left((p_1+kq_1)(q_1^2-2\beta p_1q_1+\gamma p_1^2)\right) \\ \operatorname{sign}\left(p_1(p_1+kq_1)(\gamma p_1 - q_1)\right)\end{matrix}\right.$ *в* $CSF^{2,3,>,>}_{d,2,-}$,
$CSF^{3,3,>,>}_{d,1}$; $v = \left[\begin{matrix}(1+2\beta k+\gamma k^2)(q_1^2-2\beta p_1q_1+\gamma p_1^2)(2(1+\beta k)q_1 - 2(\beta+\gamma k)p_1)^{-2} \\ kp_1(\gamma k+1)(\gamma p_1 - q_1)(kq_1 - (2\gamma k+1)p_1)^{-2}\end{matrix}\right.$, *причем*
в $CF^{3,3,>,>}_{d,1}$ $v < 2/9$, *а в* $CF^{3,3,<,>}_{d,1}$ $v \neq 1/3\ \ (v > 1/4)$; $\tau = \beta^2 - \gamma$;
$\iota_1 = ((\gamma k+\beta)p_1 - (\beta k+1)q_1)^2 - 9(\beta^2-\gamma)(p_1-kq_1)^2$, $\iota_2 = 2k^2q_1^2 + (\gamma k+5)kq_1p_1 - (\gamma k+2)(\gamma k-1)p_1^2$,
$\iota_3 = ((\gamma k+\beta)p_1 - (\beta k+1)q_1)^2 - 3(\gamma-\beta^2)(p_1+kq_1)^2$.

4.3 Построение канонических форм при $\mathbf{l = 3}$ из $\mathbf{CF}^{\mu,3}_d$

Список 3. Восемь $CF^{m,3}$ системы (14) при $l = 3$ $(\sigma = \pm 1,\ P_2 \equiv P_1)$.

$$CF^{2,3,=,>}_5 = \sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_5; \qquad CF^{2,3,=,>}_6 = \sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_5;$$
$$CF^{4,3,=,=}_{18,-} = \begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}_{10},\ [\sigma = -1];$$
$$CF^{4,3}_{20} = \sigma\begin{pmatrix}0&1&0&u\\0&1&0&u\end{pmatrix}_{10},\ \ \begin{matrix}u \in (-\infty,-1/9]\cup(0,+\infty)\\ [u \in (-1/9,0)]\end{matrix},\ \ \sigma = -1 \text{ при } u = -1;$$
$$CF^{4,3,<,>}_{21,+} = \sigma\begin{pmatrix}1&0&0&+1\\1&0&0&+1\end{pmatrix}_{10}; \qquad CF^{4,3,<,=}_{21,-} = \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}_{10},\ [\sigma=-1];$$
$$CF^{6,3,=,>}_9 = \sigma\begin{pmatrix}0&1&-2&1\\0&1&-2&1\end{pmatrix}_{15}; \qquad CF^{8,3,=,=}_1 = \begin{pmatrix}1&-3&3&-1\\1&-3&3&-1\end{pmatrix}_{20}.$$

Здесь 3-й и 4-й верхние индексы согласно предложению 5 указывают знаки D_0 и D.

Теорема 4. *Известной заменой* (16) $CF^{1,3,=,>}_{d,1}$ *сводится к* $CF^{2,3,=,>}_5$; $CF^{1,3,=,=}_{d,2}$ – *к* $CF^{4,3,=,=}_{18,-}$; $CF^{1,3,=,>}_{d,3}$ – *к* $CF^{6,3,=,>}_9$; $CF^{1,3,=,=}_{d,4}$ – *к* $CF^{8,3,=,=}_1$; $CF^{2,3,=,>}_{d,1}$ – *к* $CF^{2,3,=,>}_6$; $CF^{2,3,<,>}_{d,2,+}$ – *к* $CF^{4,3,<,>}_{21,+}$; $CF^{2,3,>,>}_{d,2,-}$, $\sigma = \sigma_*$ – *к* $CF^{4,3,>,>}_{20}$, $\sigma = -\sigma_*$, $u = -1/9$; $CF^{2,3,<,>}_{d,3}$ – *к* $CF^{4,3,<,>}_{20}$, $u = 1/3$; $CF^{2,3,>,>}_{d,4}$ – *к* $CF^{4,3,>,>}_{20}$, $\sigma = -1$, $u = -1$; $CF^{2,3,<,=}_{d,5,+}$ – *к* $CF^{4,3,<,=}_{21,-}$; $CF^{3,3}_{d,1}$ – *к* $CF^{4,3,<,>}_{20}$, $u \in (-\infty,-1)\cup(-1,-1/9)\cup(0,1/3)\cup(1/3,+\infty)$.

Доказательство. В каждой $CF^{\mu,3}_d$ из списка 2 будем делать замену (16), в которой с учетом утверждения 7 $r_2 = -s_2 \neq 0$, получая $P_2 \equiv P_1$, и выбирать остальные элементы так, чтобы получить некоторую $CF^{m,3}$. Введем $\delta_1 = (r_1 + s_1)^{-1}$.

$CF^{1,3,=,>}_{d,1}$ сводится к $\sigma\delta_1(r_1^3, r_1^2s_1, r_1s_1^2, s_1^3)$. При $s_1 = 0$, $r_1, s_2 = 1$ – это $CF^{2,3,=,>}_5$.

$CF^{1,3,=,=}_{d,2}$ сводится к $\delta_1 s_2(-r_1^2, r_1(r_1 - 2s_1), s_1(2r_1 - s_1), s_1^2)$. При $r_1 = 0$, $s_1, -s_2 = 1$ – это $CF^{4,3,=,=}_{18,-}$ с $\sigma = 1$.

$CF^{1,3,=,>}_{d,3}$ сводится к $\sigma\delta_1 s_2^2(r_1, s_1 - 2r_1, r_1 - 2s_1, s_1)$. При $r_1 = 0$, $s_1, s_2 = 1$ $(a_i = 0)$ – это $CF^{6,3,=,>}_9$. В системе можно сделать также $b_i = 0$, получая $SF^{6,3}_{10}$, которой $CF^{6,3,=,>}_{a,9}$

предшествует по с.п. 3_1. А выбор $d_i = 0$ или $c_i = 0$ приведет к $SF^{6,3}_{a,9}$ или $SF^{6,3}_{a,10}$.

$CF^{1,3,=,=}_{d,4}$ сводится к $\delta_1 s_2^3(-1,3,-3,1)$. При $s_1 = 0$, $r_1, -s_2 = 1$ – это $CF^{8,3,=,=}_1$.

$CF^{2,3,=,>}_{d,1}$ сводится к $\sigma\delta_1(r_1^2(r_1 - s_2),\, r_1(3r_1s_1 - 2s_1s_2 + r_1s_2),\, s_1(3r_1s_1 + 2r_1s_2 - s_1s_2),\, s_1^2(s_1 + s_2))$. При $s_1 = 0$, $r_1, s_2 = 1$ – это $CF^{2,3,=,>}_6$.

$CF^{2,3,<,>}_{d,2,+}$ сводится к системе $\sigma\delta_1(r_1(r_1^2 + s_2^2),\, 3r_1^2s_1 - 2r_1s_2^2 + s_1s_2^2,\, 3r_1s_1^2 - 2s_1s_2^2 + r_1s_2^2,\, s_1(s_1^2 + s_2^2))$. При $r_1, s_1 = 2^{-1/2}$, $s_2 = (3/2)^{1/2}$ – это $CF^{4,3,<,>}_{21,+}$.

$CF^{2,3,>,>}_{d,2,-}$ с $\sigma = \sigma_*$ сводится к $\sigma_*\delta_1(r_1(r_1 - s_2)(r_1 + s_2),\, 3r_1^2s_1 + 2r_1s_2^2 - s_1s_2^2,\, 3r_1s_1^2 - r_1s_2^2 + 2s_1s_2^2,\, s_1(s_1 - s_2)(s_1 + s_2))$. При $r_1, s_2 = 2^{-1/2}$, $s_1 = s_2/3$ – это $CF^{4,3,>,>}_{20}$ с $u = -1/9$. В системе можно сделать также $d_i = 0$ $(r_1, s_1 = s_2)$, получая $SF^{4,3}_{23}$, худшую по с.п. 3_1.

$CF^{2,3,<,>}_{d,3}$ сводится к $\sigma\delta_1((r_1 - s_2)(r_1^2 + r_1s_2 + s_2^2),\, r_1^2s_1 + s_2^3,\, 3(r_1s_1^2 - s_2^3),\, (s_1 + s_2)(s_1^2 - s_1s_2 + s_2^2))$. При $r_1, s_1, s_2 = 3^{-1/2}$ – это $CF^{4,3,<,>}_{20}$ с $u = 1/3$.

$CF^{2,3,>,>}_{d,4}$ сводится к $\delta_1 s_2(r_1(r_1 - s_2),\, r_1^2 - 2r_1s_1 - 2r_1s_2 + s_1s_2,\, 2r_1s_1 + r_1s_2 - s_1^2 - 2s_1s_2,\, s_1(s_1 + s_2))$. При $r_1, s_1, s_2 = 1$ – это $CF^{4,3,>,>}_{20}$ с $u = -1$ и $\sigma = -1$.

$CF^{2,3,<,=}_{d,5,+}$ сводится к системе $\delta_1 s_2(-r_1^2 - s_2^2,\, r_1^2 - 2r_1s_1 + 3s_2^2,\, 2r_1s_1 - s_1^2 - 3s_2^2,\, s_1^2 + s_2^2)$. При $r_1, s_1 = 3^{3/4}2^{-1/2}$, $s_2 = -3^{1/4}2^{-1/2}$ – это $CF^{4,3,<,=}_{21,-}$.

$CF^{3,3}_{d,1}$ сводится к $\sigma\delta_1(r_1(vr_1^2 + r_1r_2 + r_2^2),\, 3vr_1^2s_1 + 2r_1s_1r_2 - r_1^2r_2 - 2r_1r_2^2 + r_2^2s_1,\, 3vr_1s_1^2 - 2r_1s_1r_2 + s_1^2r_2 - 2r_2^2s_1 + r_1r_2^2,\, s_1(vs_1^2 - r_2s_1 + r_2^2))$. При $r_1 = 0$, $s_1 = -2$, $s_2 = 1$ – это $CF^{4,3}_{20}$ с $u = (4v - 1) > 0$ и $u \in (-\infty, -1) \cup (-1, -1/9) \cup (0, 1/3) \cup (1/3, +\infty)$.

Поскольку $CF^{\nu,3}_d$ из списка 2 попарно линейно неэквивалентны и к одной из них сводится любая исходная система в случае $l = 3$, то список 3 исчерпывает все $CF^{m,3}$. $\square$

Замечание 5. В любой $CF^{m,3}_i$, кроме $CF^{2,3,=,>}_6$, полученной из соответствующей $CF^{\mu,3}_{d,j}$, имеем: $m > \mu$, что является естественной "платой" за бóльшие возможности при последующей нормализации.

Замечание 6. 1) $CSF^{4,3,>,>}_{20} = \sigma(0, 1, 0, u_*)$ с $u_* \in (-1/9, 0)$ линейной неособой заменой $L = (2u_* + 2\sqrt{-u_*})^{-1/2}\begin{pmatrix} \sqrt{-u_*} & -3\sqrt{-u_*}(\sqrt{-u_*} - 1)(3\sqrt{-u_*} + 1)^{-1} \\ 1 & (\sqrt{-u_*} - 1)(3\sqrt{-u_*} + 1)^{-1} \end{pmatrix}$ сводится к $CF^{4,3,>,>}_{20} = \sigma(0, 1, 0, u)$ с $u = -(\sqrt{-u_*} - 1)^2(3\sqrt{-u_*} + 1)^{-2}$ и $u \in (-1, -1/9)$.

2) $CF^{4,3}_{20} = \{CF^{4,3,<,>}_{20}$ при $u > 0$, $CF^{4,3,>,>}_{20}$ при $u < -1/9\}$.

Замечание 7. $CF^{2,3,>,>}_{d,4}$, $CF^{4,3,=,=}_{18,-}$ и $CF^{4,3,<,=}_{21,-}$ – системы, в которых при видимой необходимости появления множителя $\sigma = \pm 1$, его всегда удается сделать единичным.

Из следствия 3 и теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Система* (35) *известной линейной неособой заменой* (16) *может быть сведена к соответствующей* $CF^{m,3}_i$ *из списка 3, если шесть параметров системы: коэффициенты* $\alpha, 2\beta, \gamma$ *общего множителя* P_0*, элементы* p_1, q_1 $(p_1^2 + q_1^2 \neq 0)$ *матрицы* H *и коэффициент пропорциональности* k *удовлетворяют следующим условиям:*

$CF^{2,3,=,>}_5$: *условия попадания в* $CF^{1,3,=,>}_{d,1}$; $CF^{2,3,=,>}_6$: *условия попадания в* $CF^{2,3,=,>}_{d,1}$;
$CF^{4,3,=,=}_{18,-}$: *условия попадания в* $CF^{1,3,=,=}_{d,2}$;
$CF^{4,3,<,>}_{20}$: $u = 1/3$ – *условия попадания в* $CF^{2,3,<,>}_{d,3}$; $u > 0$, $u \neq 1/3$ – *в* $CF^{3,3,<,>}_{d,1}$;

$CF_{20}^{4,3,>,>}$: $u = -1/9$ – *условия попадания в* $CF_{d,2,-}^{2,3,>,>}$; $\sigma = -1,\ u = -1$ – *в* $CF_{d,4}^{2,3,>,>}$;
$u < -1/9$ – *условия попадания в* $CF_{d,1}^{3,3,>,>}$;
$CF_{21,+}^{4,3,<,>}$: *условия попадания в* $CF_{d,2,+}^{2,3,<,>}$; $CF_{21,-}^{4,3,<,=}$: *условия попадания в* $CF_{d,5,+}^{2,3,<,=}$;
$CF_{9}^{6,3,=,>}$: *условия попадания в* $CF_{d,3}^{1,3,=,>}$; $CF_{1}^{8,3,=,=}$: *условия попадания в* $CF_{d,4}^{1,3,=,=}$.

5 Канонические формы системы с общим множителем второй степени

5.1 Девять классов эквивалентности кубических систем при $\mathbf{l = 2}$

Рассмотрим систему (23) $\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix} = P_0(x)\begin{pmatrix}p_1x_1+q_1x_2\\ p_2x_1+q_2x_2\end{pmatrix}$ с $P_0 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1x_2 + \gamma x_2^2 \not\equiv 0$, $\delta_{pq} = \det H \neq 0$ и собственные числа матрицы $H = \begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix}$ из (25) отличны от нуля.

По теореме 1 произвольная замена (16) переводит такую систему (23) в систему (28) $\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} = \widetilde{P}_0(y)\begin{pmatrix}\tilde p_1y_1+\tilde q_1y_2\\ \tilde p_2y_1+\tilde q_2y_2\end{pmatrix} = \left\langle(\tilde\alpha, 2\tilde\beta, \tilde\gamma),\, q^{[2]}(y)\right\rangle \tilde H y$, в которой вектор $(\tilde\alpha, 2\tilde\beta, \tilde\gamma)$ общего множителя $\widetilde{P}_0$ и матрица $\tilde H$ заданы в (26), причем $\delta_{\tilde p\tilde q} = \det \tilde H \neq 0$.

В частности, после перенумерации (22) $\widetilde{P}_0 = (\gamma y_1^2 + 2\beta y_1y_2 + \alpha y_2^2)$, $\tilde H = \begin{pmatrix}q_2 & p_2\\ q_1 & p_1\end{pmatrix}$.

Множество систем (23) разбивается на три класса в соответствии со знаком дискриминанта D_0 общего множителя P_0, который согласно (29) инвариантен относительно линейных неособых замен.

Далее, для каждого класса будем выбирать замену (16), которая сводит матрицу H системы (23) к жордановой форме $\tilde H$ в получаемой системе (28). При этом вид замены, конечно, будет зависеть от знака дискриминанта $D = (p_1+q_2)^2 - 4\delta_{pq}$ из формулы (25) для собственных чисел $\lambda_{1,2} = (p_1 + q_2 \pm \sqrt{D})/2 \neq 0$ матрицы H, который также инвариантен.

После этого в системе (28) будем делать произвольную замену (16), сводящую ее к структурно аналогичной системе, все составляющие которой вместо символа $\tilde{}$ будем сверху отмечать символом $\breve{}$. В результате, учитывая (26), (30), будем получать систему

$$\breve A = \begin{pmatrix}\breve a_1 & \breve b_1 & \breve c_1 & \breve d_1\\ \breve a_2 & \breve b_2 & \breve c_2 & \breve d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\breve\alpha\breve p_1 & \breve\alpha\breve q_1 + 2\breve\beta\breve p_1 & 2\breve\beta\breve q_1 + \breve\gamma\breve p_1 & \breve\gamma\breve q_1\\ \breve\alpha\breve p_2 & \breve\alpha\breve q_2 + 2\breve\beta\breve p_2 & 2\breve\beta\breve q_2 + \breve\gamma\breve p_2 & \breve\gamma\breve q_2\end{pmatrix}, \tag{40}$$

у которой $\breve\alpha = \tilde\alpha r_1^2 + 2\tilde\beta r_1r_2 + \tilde\gamma r_2^2$, $\breve\beta = (\tilde\alpha s_1 + \tilde\beta s_2)r_1 + (\tilde\beta s_1 + \tilde\gamma s_2)r_2$, $\breve\gamma = \tilde\alpha s_1^2 + 2\tilde\beta s_1s_2 + \tilde\gamma s_2^2$, $\breve H = \begin{pmatrix}\breve p_1 & \breve q_1\\ \breve p_2 & \breve q_2\end{pmatrix} = \delta^{-1}\begin{pmatrix}r_1\delta_{ps} + r_2\delta_{qs} & s_1\delta_{ps} + s_2\delta_{qs}\\ -r_1\delta_{pr} - r_2\delta_{qr} & -s_1\delta_{pr} - s_2\delta_{qr}\end{pmatrix}$ $(\det \breve H = \delta_{\tilde p\tilde q} = \delta_{pq})$.

Остается подобрать коэффициенты замены (16) так, чтобы (40) оказалась наиболее простой в соответствии со структурными и нормировочными принципами из раздела 3.

Для этого рассмотрим различные значения дискриминанта $D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1$.

1) $D>0$, т. е. в формуле (25) $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$, вещественны и различны. Точнее говоря,

$$\lambda_1=(p_1+q_2+\sigma_0\sqrt{D})/2,\quad \lambda_2=(p_1+q_2-\sigma_0\sqrt{D})/2,\quad \lambda_*=p_1-q_2+\sigma_0\sqrt{D}\neq 0,\qquad (41)$$

где $\sigma_0=\{\,\mathrm{sign}\,(p_1-q_2)$ при $p_1\neq q_2$; 1 при $p_1=q_2\,\}$, тогда $\sigma_0=\mathrm{sign}\,\lambda_*$ и $\sigma_0\sqrt{D}=\lambda_1-\lambda_2$.

Замена (16) с $L_>=\begin{pmatrix}\lambda_* & 2q_1\\ 2p_2 & -\lambda_*\end{pmatrix}$, $\delta_>=-\lambda_*^2-4p_2q_1=-\sqrt{D}|\lambda_*|$, учитывая формулы для коэффициентов $\widetilde{P}_0$ из (26) и предложение 3, сводит систему (23) к системе (28) с

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde\alpha\lambda_1 & 2\tilde\beta\lambda_1 & \tilde\gamma\lambda_1 & 0\\ 0 & \tilde\alpha\lambda_2 & 2\tilde\beta\lambda_2 & \tilde\gamma\lambda_2\end{pmatrix},\quad \tilde H=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix};\quad \tilde\alpha=\left[\begin{matrix}\lambda_*^2+4\beta\lambda_*p_2+4\gamma p_2^2\\ 2p_2\lambda_*\end{matrix}\right.,$$
$$\tilde\beta=\left[\begin{matrix}-\beta\lambda_*^2+2(q_1-\gamma p_2)\lambda_*+4\beta p_2q_1\\ -(p_1-q_2)\lambda_*\end{matrix}\right.,\quad \tilde\gamma=\left[\begin{matrix}4q_1^2-4\beta q_1\lambda_*+\gamma\lambda_*^2\\ -2q_1\lambda_*\end{matrix}\right..\qquad (42)$$

2) $D=0$, т. е. в формуле (25) $\lambda=\lambda_{1,2}=(p_1+q_2)/2\neq 0$.

Если $q_1\neq 0$, то замена (16) с $L_==\begin{pmatrix}0 & 2q_1\\ 2 & q_2-p_1\end{pmatrix}$, $\delta_==-4q_1\neq 0$, учитывая формулы для коэффициентов $\widetilde{P}_0$ из (26) и предложение 3, сводит систему (23) к системе (28) с

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde\alpha\lambda & 2\tilde\beta\lambda & \tilde\gamma\lambda & 0\\ \tilde\alpha & \tilde\alpha\lambda+2\tilde\beta & 2\tilde\beta\lambda+\tilde\gamma & \tilde\gamma\lambda\end{pmatrix},\quad \tilde H=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix};$$
$$\tilde\alpha=\left[\begin{matrix}4\gamma\\ 0\end{matrix}\right.,\quad \tilde\beta=\left[\begin{matrix}4\beta q_1-2\gamma(p_1-q_2)\\ 2q_1\end{matrix}\right.,\quad \tilde\gamma=\left[\begin{matrix}4q_1^2-4\beta q_1(p_1-q_2)+\gamma(p_1-q_2)^2\\ -2q_1(p_1-q_2)\end{matrix}\right..\qquad (43)$$

Если $q_1=0$, то $\lambda=p_1=q_2\neq 0$ в силу (25). Поэтому при $p_2=0$ матрица H диагональна и система (23) сразу имеет вид (42) с $\lambda_1=\lambda_2$. А при $p_2\neq 0$ нормировка (21) с $r_1=1,\ s_2=p_2$ сводит (23) к системе (43). При этом в (42), (43) соответственно

$$\tilde\alpha=\left[\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right.,\ \tilde\beta=\left[\begin{matrix}\beta\\ 1/2\end{matrix}\right.,\ \tilde\gamma=\left[\begin{matrix}\gamma\\ 0\end{matrix}\right.\ (p_2=0);\qquad \tilde\alpha=\left[\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right.,\ \tilde\beta=\left[\begin{matrix}\beta p_2\\ p_2/2\end{matrix}\right.,\ \tilde\gamma=\left[\begin{matrix}\gamma p_2^2\\ 0\end{matrix}\right.\ (p_2\neq 0).\qquad (44)$$

3) $D<0$ $(p_2q_1<0)$, т. е. в формуле (25) λ_1,λ_2 – комплексно-сопряженные.

Замена (16) с $L_<=\begin{pmatrix}\sqrt{-D} & p_1-q_2\\ 0 & 2p_2\end{pmatrix}$, $\delta_<=2p_2\sqrt{-D}\neq 0$, учитывая формулы для коэффициентов $\widetilde{P}_0$ из (26) и предложение 3, сводит систему (23) к системе (28) с

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde\alpha\theta & 2\tilde\beta\theta-\tilde\alpha\mu & \tilde\gamma\theta-2\tilde\beta\mu & -\tilde\gamma\mu\\ \tilde\alpha\mu & \tilde\alpha\theta+2\tilde\beta\mu & 2\tilde\beta\theta+\tilde\gamma\mu & \tilde\gamma\theta\end{pmatrix},\quad \tilde H=\begin{pmatrix}\theta & -\mu\\ \mu & \theta\end{pmatrix};$$
$$\tilde\alpha=\left[\begin{matrix}-D\\ 0\end{matrix}\right.,\quad \tilde\beta=\left[\begin{matrix}\sqrt{-D}(p_1-q_2+2\beta p_2)\\ \sqrt{-D}p_2\end{matrix}\right.,\quad \tilde\gamma=\left[\begin{matrix}D+4p_2(\beta p_1-\beta q_2+\gamma p_2-q_1)\\ 2p_2(p_1-q_2)\end{matrix}\right.,\qquad (45)$$

где $\theta=(p_1+q_2)/2\,(=\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2})$, $\mu=\sqrt{-D}/2\,(=|\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2}|)>0$.

5.2 Список канонических форм при $l = 2$

Список 4. Двадцать шесть $CF_i^{m,2}$ и $CSF_i^{m,2}$ системы (14) при $l=2$ $(\sigma=\pm 1)$.

$$CF_3^{2,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_4; \qquad CF_4^{2,2,>}=\begin{pmatrix}0&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_4,\ \begin{matrix}|u|\le 1\\ [|u|>1]\end{matrix};$$

$$CF_{7,+}^{2,2,=}=\begin{pmatrix}0&+1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_6; \qquad CF_{7,-}^{2,2,=}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_6;$$

$$CF_{8,+}^{2,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&+1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_4; \quad CF_{8,-}^{2,2,>}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_4, [\sigma=-1];$$

$$CF_7^{3,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_6,\ \begin{matrix}u\ne -1\\ [|u|>1]\end{matrix}; \quad CF_{10}^{3,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_7;$$

$$CF_{12}^{3,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_7, u<-1/4;\ CF_{13}^{3,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}_8; CF_{16}^{3,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_8;$$

$$CF_{8,+}^{4,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&+u&0\\0&1&0&+1\end{pmatrix}_8,\ \begin{matrix}|u|\le 1\\ [|u|>1]\end{matrix}; \quad CF_{8,-}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&-u&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_8,\ \begin{matrix}|u|<1\\ [|u|>1]\end{matrix};$$

$$CF_{14}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&-u^2\end{pmatrix}_9,\ u\ne -1,-1/2,-1/3;$$

$$CF_{23}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&v&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{10},\ \begin{matrix}|u|\le 1\\ [|u|>1]\end{matrix},\ \ v<0 \text{ при } u=1,\ \ v\ne u,\ u(2-u)/4,\ (2u-1)/4.$$

$$CF_{34,+}^{4,2,<}=\begin{pmatrix}0&u&0&+u\\1&0&+1&0\end{pmatrix}_{12},\ \begin{matrix}|u|<1,\ u=-1\\ \qquad\quad [u>1]\end{matrix};$$

$$CF_7^{5,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{11},\ \ u\ne -1,3; \quad CF_{22}^{5,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&-u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{14},\ u\ne 3/2;$$

$$CF_1^{6,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&u&uv&0\\0&1&1&v\end{pmatrix}_{12},\begin{matrix}|u|\le 1\\ [|u|>1]\end{matrix},\ \begin{matrix}v>1/4,\ v\ne(3u^2+3u+1)(u^2+3u+3)(3u^2+8u+3)^{-2},\\ v\ne(u^2-3u+3)(u-3)^{-2},\ (3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2};\end{matrix}$$

$$CF_3^{6,2,<,=}=\sigma\begin{pmatrix}1&1-v&0&-v^2\\0&1&1&v\end{pmatrix}_{13},\ v>1/4,\ v\ne(49\pm 7\sqrt{46})/6,\ 1/3,\ 1\ \ (u=1);$$

$$CF_4^{6,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}1&v&1&v\\0&1&0&1\end{pmatrix}_{14},\ \begin{matrix}0<v<1\\ [-1<v<0]\end{matrix}\ \ (u=1);$$

$$CSF_6^{6,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&u(v^{-2}-v)&0&uv^{-3}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix}_{14},\ \begin{matrix}v\in(0,1),\ u\in(u_-,u_+)\ \ (u<0),\\ u_\mp=v^3-2\mp 2(1-v^3)^{1/2})v^{-2};\end{matrix}$$

$$CSF_7^{6,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&-v&u+v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{15},\ v<-(u+1)^2/4,\ \ u\ne -v,\ -v/3-1,\ (2v-3)(3-v)^{-1};$$

$$CSF_{11}^{6,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&u&v\\1&0&1&0\end{pmatrix}_{16},\ \begin{matrix}u>0,\ [u<0],\ v<-u^2/4;\ v\ne\sqrt{3}u(3u^2+\sqrt{3}u-2)(4-3u^2)^{-1}\\ \text{при } u\in(0;\sqrt{6}(43-7\sqrt{37})^{1/2}/3)\cup(2/\sqrt{3};\sqrt{6}(43+7\sqrt{37})^{1/2}/3);\end{matrix}$$

$$CSF_{13}^{6,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&uv&uv^2(1+v)\\1&1&0&v(1+v)^2\end{pmatrix}_{16},\ v<-4/3,\ \ u\in(((-v)^{1/2}-1)^2,((-v)^{1/2}+1)^2);$$

$$CSF_2^{7,2,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&w&uv^{-1}-v(uv+w)&u+wv^{-1}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix}_{17},\ 0<v<\sqrt[3]{4},\ v\ne 1,\ w<-(u+v)^2/4\le 0,$$
$$w\ne -uv, uv^{-2}-uv,\ 4v^2w^2-4v(2v^3-3uv^2-2)w+(v^3-3uv^2+2)^2<0.$$

Здесь 3-й верхний индекс согласно предложению 5 указывает знак D_0.

5.3 Построение $\mathbf{CF^{m,2}}$ при нулевом дискриминанте $\mathbf{P_0^2}$

Список 5. Шесть $CF_i^{m,2,=}$ системы (14) при $l=2$ и $D_0=\beta^2-\alpha\gamma=0$ $(\sigma=\pm1)$.

$$CF_3^{2,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_4;\ CF_{7,+}^{2,2,=,>}=\begin{pmatrix}0&+1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_6;\ CF_{7,-}^{2,2,=,<}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_6;$$

$$CF_7^{3,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_6,\ u\neq-1,\ [|u|>1];$$

$$CF_{12}^{3,2,=,<}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_7,\ u<-1/4;\qquad CF_{13}^{3,2,=,=}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}_8.$$

Теорема 5. *Любая система* (14) *вида* (23) *с* $p_1q_2-p_2q_1\neq0$ *и* $D_0=0$ *линейной неособой заменой* (16) *может быть сведена к одной из указанных в списке 5 линейно неэквивалентных канонических форм.*

Доказательство. Поскольку $\beta^2=\alpha\gamma$, то P_0 – полный квадрат и $\alpha^2+\gamma^2\neq0$.

Не уменьшая общности, будем считать, что $\alpha\neq0$, так как при $\alpha=0$ всегда можно осуществить перенумерацию 22. Поэтому по предложению 3 $\alpha=1$ и в системе (23) $P_0=(x_1+\beta x_2)^2$, т. е. $\gamma=\beta^2\geq0$.

Согласно (26) и (29) в системах (42), (43), (45) $\tilde\beta^2=\tilde\alpha\tilde\gamma$, $\tilde\alpha,\tilde\gamma\geq0$ и $\tilde\alpha+\tilde\gamma>0$, поэтому в системе (40) общий множитель $\breve P_0$ имеет коэффициенты

$$\begin{array}{l}\tilde\alpha\neq0:\quad \breve\alpha=\tilde\alpha^{-1}(\tilde\alpha r_1+\tilde\beta r_2)^2,\quad \breve\beta=\tilde\alpha^{-1}(\tilde\alpha r_1+\tilde\beta r_2)(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2),\quad \breve\gamma=\tilde\alpha^{-1}(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)^2;\\ \tilde\alpha=0:\quad \breve\alpha=\tilde\gamma r_2^2,\quad \breve\beta=\tilde\gamma r_2s_2,\quad \breve\gamma=\tilde\gamma s_2^2\quad (\tilde\beta=0,\ \tilde\gamma>0).\end{array}\tag{46}$$

В формуле (46) всегда можно сделать $\breve\beta,\breve\gamma=0$ (или перенумерацией – $\breve\alpha,\breve\beta=0$). Для этого в произвольной замене (16), преобразующей системы (42), (43), (45) с жордановыми матрицами $\tilde H$, достаточно зафиксировать связь между s_1 и s_2 :

$$\tilde\alpha\neq0:\quad s_1=-\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta s_2;\qquad \tilde\alpha=0:\quad s_2=0.\tag{47}$$

В результате в получаемой системе (40) два правых столбца будут нулевыми.

1) $D>0$ $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1-\lambda_2\neq0)$. Из (23) получена система (42), у которой в $\widetilde P_0$

$$\tilde\alpha=(2\beta p_2+\lambda_*)^2,\qquad \tilde\beta=(2\beta p_2+\lambda_*)(2q_1-\beta\lambda_*),\qquad \tilde\gamma=(2q_1-\beta\lambda_*)^2.$$

Пусть замена (16) при условии (47) сводит систему (42) к системе (40), у которой коэффициенты $\breve P_0$ определены в (46).

1₁) $\tilde\alpha=0$ $(\tilde\gamma>0)$. Тогда $(40)=\tilde\gamma r_2^2\begin{pmatrix}\lambda_2&0&0&0\\(\lambda_1-\lambda_2)r_1s_1^{-1}&\lambda_1&0&0\end{pmatrix}$. При $r_1=0$, $s_1=1$, $r_2=(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ – это $CF_3^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1$, $u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq1$.

1₂) $\tilde\alpha>0$. Тогда система (40) имеет вид

$$\breve A=(r_1+\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2)\begin{pmatrix}\tilde\alpha\lambda_1r_1+\tilde\beta\lambda_2r_2&\tilde\beta(\lambda_2-\lambda_1)s_2&0&0\\\tilde\alpha(\lambda_2-\lambda_1)r_1r_2s_2^{-1}&\tilde\alpha\lambda_2r_1+\tilde\beta\lambda_1r_2&0&0\end{pmatrix}.\tag{48}$$

$\mathbf{1_2^1}$) $\tilde\beta = 0$. Тогда система (48) $= \tilde\alpha r_1^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_2-\lambda_1)r_2 s_2^{-1} & \lambda_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_2 = 0$, $s_2 = 1$, $r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2}$, – это $CF_3^{2,2,=,>}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_2$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq 1$.

$\mathbf{1_2^2}$) $\tilde\beta \neq 0$.

$\mathbf{1_2^{2a}}$) $\lambda_1 = -\lambda_2$. Тогда при $r_1 = \tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2$ система (48) $= 4\tilde\gamma r_2^2\lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & r_2^{-1}s_2 & 0 & 0 \\ r_2 s_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_2 = (4\tilde\gamma|\lambda_2|)^{-1/2}$, $s_2 = r_2 \operatorname{sign}\lambda_2$ – это $CF_{7,+}^{2,2,=,>}$.

$\mathbf{1_2^{2b}}$) $\lambda_1 \neq -\lambda_2$. Тогда при $r_1 = 0$ система (48) $= \tilde\gamma r_2^2 \begin{pmatrix} \lambda_2 & (\lambda_2-\lambda_1)r_2^{-1}s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_2 = (\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$, $s_2 = \tilde\gamma^{-1/2}|\lambda_1|^{1/2}(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}\operatorname{sign}\lambda_1$ – это $CSF_7^{3,2,=,>}$ с $u = u_*$, $\sigma = \sigma_*$, где $u_* = \lambda_1^{-1}\lambda_2 \neq \pm 1$, $\sigma_* = \operatorname{sign}\lambda_1$.

Сделав в полученной $CSF_7^{3,2,=,>}$ замену (16) с $r_1 = |u_*|^{-1/2}$, $s_1 = 0$, $s_2 = |u_*|^{1/2}\operatorname{sign} u_*$, $r_2 = (1-u_*)|u_*|^{-1/2}$, перейдем опять в $CSF_7^{3,2,=,>}$, но с $u = u_*^{-1}$, $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} u_* = \operatorname{sign}\lambda_2$. Поэтому в 1_2^{2b}) всегда можно получить $CF_7^{3,2,=,>}$ с $|u| < 1$.

В системе (48) можно также сделать $\breve b_2 = 0$ или $\breve a_1 = 0$, получая $SF_{12}^{3,2,=,>}$ или $SF_{a,18}^{3,2,=,>}$, которым $CF_7^{3,2,=,>}$ предшествует по с.п. 2.

$\mathbf{2}$) $D = 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 = \lambda = (p_1+q_2)/2 \neq 0)$.

$\mathbf{2_a}$) $q_1 \neq 0$. Из системы (23) получена система (43), у которой в $\widetilde P_0$

$$\tilde\alpha = 4\beta^2, \qquad \tilde\beta = 2\beta(2q_1 - \beta(p_1-q_2)), \qquad \tilde\gamma = (2q_1 - \beta(p_1-q_2))^2.$$

Пусть замена (16) при условии (47) сводит систему (43) к системе (40), у которой коэффициенты $\breve P_0$ определены в (46).

$\mathbf{2_{a1}}$) $\tilde\alpha = 0$ $(\tilde\gamma > 0)$. Тогда система (40) $= \gamma r_2 \begin{pmatrix} r_1 + \lambda r_2 & s_1 & 0 & 0 \\ -\tilde\gamma^{1/2} r_1^2 s_1^{-1} & \lambda r_2 - r_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = 0$, $r_2 = (\tilde\gamma|\lambda|)^{-1/2}$, $s_1 = \lambda r_2$ – это $CF_7^{3,2,=,=}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda$, $u = 1$.

Аналогично 1_2^{2b}) в полученной системе (40) помимо $\breve a_2 = 0$ можно сделать $\breve b_2 = 0$ или $\breve a_1 = 0$, что приводит только к $SF_{12}^{3,2,=,=}$ или $SF_{a,18}^{3,2,=,=}$.

$\mathbf{2_{a2}}$) $\tilde\alpha > 0$. Тогда система (40) имеет вид

$$\breve A = (r_1 + \tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2)\begin{pmatrix} (\tilde\alpha\lambda r_1 + \tilde\beta)r_1 + \tilde\beta\lambda r_2 & -\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta^2 s_2 & 0 & 0 \\ \tilde\alpha r_1^2 s_2^{-1} & (\tilde\alpha\lambda r_1 - \tilde\beta)r_1 + \tilde\beta\lambda r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

$\mathbf{2_{a2}^1}$) $\tilde\beta = 0$. Тогда система (49) $= \tilde\alpha r_1^2 \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ r_1 s_2^{-1} & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = (\tilde\alpha|\lambda|)^{-1/2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = \lambda^{-1}r_1$ – это $CF_{a,13}^{3,2,=,=}$ с $\sigma =$ $\operatorname{sign}\lambda$. Перенумерация (22) сведет ее к $CF_{13}^{3,2,=,=}$.

$\mathbf{2_{a2}^2}$) $\tilde\beta \neq 0$ $(\tilde\gamma > 0)$. Тогда при $r_1 = 0$ система (49) $= \tilde\gamma^2 r_2^2 \begin{pmatrix} \lambda & -\tilde\beta^{-1}\tilde\gamma r_2^{-1}s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_2 = (\tilde\gamma|\lambda|)^{-1/2}$, $s_2 = \tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\lambda r_2$ – это $CF_7^{3,2,=,=}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda, u = 1$.

Аналогично 1_2^{2b}) из (49) можно еще получить последующие $SF_{12}^{3,2,=,=}$ или $SF_{a,18}^{3,2,=,=}$.

$\mathbf{2_b}$) $q_1 = 0$. Тогда в силу (25) $\lambda = p_1 = q_2 \neq 0$.

$\mathbf{2_{b1}}$) $p_2 = 0$, т.е. $H = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix}$, и система (23) сразу имеет вид (42) с $\lambda_{1,2} = p_1$, $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = \beta$, $\tilde{\gamma} = \gamma = \beta^2$.

Произвольная замена (16) сводит (42) к системе (40), в которой матрица $\breve{H} = H$, $\breve{\alpha} = (r_1 + \beta r_2)^2$, $\breve{\beta} = (r_1 + \beta r_2)(s_1 + \beta s_2)$, $\breve{\gamma} = (s_1 + \beta s_2)^2$. При $r_1 = |p_1|^{-1/2}$, $s_1 = -\beta$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ – это $CSF_3^{2,2,=,=}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda\,(= \operatorname{sign} p_1)$, $u = 1$.

$\mathbf{2_{b2}}$) $p_2 \neq 0$, т.е. $H = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}$. Нормировка (21) с $r_1 = 1$, $s_2 = p_2$ сводит (23) к системе вида (43) из 2_1), в которой $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = \beta p_2$, $\tilde{\gamma} = (\beta p_2)^2$ и $\lambda = p_1$.

3) $D < 0$. Из системы (23) получена система (45), у которой в $\widetilde{P}_0$

$$\tilde{\alpha} = -D, \quad \tilde{\beta} = \sqrt{-D}(p_1 - q_2 + 2\beta p_2), \quad \tilde{\gamma} = (p_1 - q_2 + 2\beta p_2)^2.$$

Пусть замена (16) при условии (47) сводит систему (45) к системе (40), у которой коэффициенты $\breve{P}_0$ определены в (46). Тогда (40) имеет вид

$$\breve{A} = (r_1 + \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta} r_2) \begin{pmatrix} (\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu) r_1 + (\tilde{\beta}\theta - \tilde{\alpha}\mu) r_2 & -\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)\mu s_2 & 0 & 0 \\ \mu(r_1^2 + r_2^2) s_2^{-1} & (\tilde{\alpha}\theta - \tilde{\beta}\mu) r_1 + (\tilde{\beta}\theta + \tilde{\alpha}\mu) r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

$\mathbf{3_1}$) $\theta = 0$. Тогда при $r_2 = \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta} r_1$ $(50) = \tilde{\alpha}^{-3}(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)^2 \mu r_1^2 \begin{pmatrix} 0 & -r_1^{-1} s_2 & 0 & 0 \\ r_1 s_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1, s_2 = \tilde{\alpha}^{3/2}(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)^{-1}\mu^{-1/2}$ – это $CF_{7,-}^{2,2,=,<}$.

$\mathbf{3_2}$) $\theta \neq 0$. Тогда (50) при $r_1 = \dfrac{\tilde{\alpha}^{1/2}(\tilde{\alpha}\mu + \tilde{\beta}\theta)}{|2\theta|^{1/2}\mu(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)}$, $r_2 = \dfrac{\tilde{\alpha}^{1/2}(\tilde{\beta}\mu - \tilde{\alpha}\theta)}{|2\theta|^{1/2}\mu(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)}$, $s_2 = \dfrac{\tilde{\alpha}^{3/2}(\theta^2 + \mu^2)}{2^{3/2}\theta|\theta|^{1/2}\mu(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)}$, – это $CF_{12}^{3,2,=,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\theta$, $u = -(\theta^2 + \mu^2)(4\theta)^{-2} < -1/4$.

В системе (50) можно также сделать $\breve{a}_1 = 0$, получая SF с большим индексом. $\square$

Замечание 8. 1) $CF_3^{2,2,=} = \{CF_3^{2,2,=,>}$ при $u \neq 1$, $CF_3^{2,2,=,=}$ при $u = 1\}$;

2a) $CSF_7^{3,2,=,>}$ при $u = -1$ – неканоническая по с.п. 1. Заменой (16) с $r_1, r_2 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = \sigma$ она сводится к $CF_{7,+}^{2,2,=,>}$;

2b) $CSF_7^{3,2,=,>}$ с $|u| > 1$ заменой (16) из 1_2^{2b}) можно свести к $CF_7^{3,2,=,>}$ с $|u| < 1$;

2c) $CF_7^{3,2,=} = \{CF_7^{2,2,=,>}$ при $|u| < 1$, $CF_3^{2,2,=,=}$ при $u = 1\}$.

Следствие 5. *Система* (23), *в которой* $\beta^2 = \alpha\gamma$ *и* $p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0$, *известной линейной неособой заменой* (16) *сводится к соответствующей* $CF_i^{m,2}$ *из списка 5, если пять параметров системы: коэффициент* β *в* P_0^2 $(\alpha = 1, \gamma = \beta^2)$ *и элементы* p_1, q_1, p_2, q_2 *матрицы* H *удовлетворяют условиям:*

$CF_3^{2,2,=,>}$: *1)* $D > 0$, $2\beta p_2 + p_1 - q_2 + \sigma_0\sqrt{D} = 0$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$, $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2 \neq 1$; *2)* $D > 0$, $2q_1 - \beta(p_1 - q_2 + \sigma_0\sqrt{D}) = 0$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_2$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq 1$;

$CF_{7,+}^{2,2,=,>}$: $D > 0$, $p_1 + q_2 = 0$, $2\beta p_2 + 2p_1 + \sigma_0\sqrt{D} \neq 0$, $2q_1 - \beta(2p_1 + \sigma_0\sqrt{D}) \neq 0$;

$CF_7^{3,2,=,>}:$ $D>0,\ p_1+q_2\neq 0,\ 2\beta p_2+p_1-q_2+\sigma_0\sqrt{D}\neq 0,\ 2q_1-\beta(p_1-q_2+\sigma_0\sqrt{D})\neq 0,$ *тогда* $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1,\ u=u_*,$ *если* $|u_*|<1,$ *или* $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2,\ u=u_*^{-1},$ *если* $|u_*|>1,$ *где* $u_*=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq\pm 1;$

$CF_3^{2,2,=,=}:$ $D=0,\ q_1=0,\ p_2=0,$ *тогда* $\sigma=\operatorname{sign}p_1\quad(u=1);$

$CF_7^{3,2,=,=}:$ *1)* $D=0,\ q_1\neq 0,\ 2q_1-\beta(p_1-q_2)\neq 0,$ *тогда* $\sigma=\operatorname{sign}(p_1+q_2)\quad(u=1);$ *2)* $D=0,\ q_1=0,\ p_2\neq 0,\ \beta\neq 0,$ *тогда* $\sigma=\operatorname{sign}p_1\quad(u=1);$

$CF_{13}^{3,2,=,=}:$ *1)* $D=0,\ q_1\neq 0,\ 2q_1-\beta(p_1-q_2)=0,$ *тогда* $\sigma=\operatorname{sign}(p_1+q_2);$ *2)* $D=0,\ q_1=0,\ p_2\neq 0,\ \beta=0,$ *тогда* $\sigma=\operatorname{sign}p_1;$

$CF_{7,-}^{2,2,=,<}:$ $D<0,\ p_1+q_2=0;$

$CF_{12}^{3,2,=,<}:$ $D<0,\ p_1+q_2\neq 0,$ *тогда* $\sigma=\operatorname{sign}\theta,\ u=(p_2q_1-p_1q_2)(p_1+q_2)^{-2}<-1/4.$

Здесь согласно (41) $D=(p_1-q_2)^2+4p_2q_1,\ \lambda_{1,2}=(p_1+q_2\pm\sigma_0\sqrt{D})/2\neq 0,$ *где* $\sigma_0=\{\operatorname{sign}(p_1-q_2)$ *при* $p_1\neq q_2;\ 1$ *при* $p_1=q_2\}.$

5.4 Построение $\mathbf{CF^{m,2}}$ при положительном дискриминанте $\mathbf{P_0^2}$

Список 6. $NSF^{m,2,>}$ системы (14) до $NSF_{23}^{4,2,>}$ включительно с указанием для каждой (см. (28)) вектора $(\alpha,2\beta,\gamma)$, матрицы H, ее собственных чисел и D $(\sigma=\pm 1,\ D_0=1)$

$$NSF_4^{2,2,>}=\begin{pmatrix}0&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_4,\quad(0,1,0),\ \begin{pmatrix}u&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{matrix}\lambda_1=u\\\lambda_2=1\end{matrix},\quad D=(u-1)^2;$$

$$NSF_8^{2,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_6,\quad(0,1,0),\ \sigma\begin{pmatrix}0&u\\1&0\end{pmatrix},\quad\begin{matrix}\lambda_1=\sqrt{u}\\\lambda_2=-\sqrt{u}\end{matrix},\quad D=4u;$$

$$NSF_{10}^{3,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_7,\quad(0,1,0),\ \sigma\begin{pmatrix}u&1\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{matrix}\lambda_1=u\\\lambda_2=1\end{matrix},\quad D=(u-1)^2;$$

$$NSF_{16}^{3,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_8,\quad(0,1,0),\ \sigma\begin{pmatrix}1&u\\1&0\end{pmatrix},\quad\begin{matrix}\lambda_{1,2}=(1\pm\sqrt{4u+1})/2,\\D=4u+1;\end{matrix}$$

$$NSF_7^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&u&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_8,\quad(0,1,1),\ \sigma\begin{pmatrix}u&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{matrix}\lambda_1=u\\\lambda_2=1\end{matrix},\quad D=(u-1)^2;$$

$$NSF_{8,-}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&-u&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_8,\quad(1,0,-1),\ \sigma\begin{pmatrix}u&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{matrix}\lambda_1=u\\\lambda_2=1\end{matrix},\quad D=(u-1)^2;$$

$$NSF_{12}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&-u\\0&0&1&1\end{pmatrix}_9,\quad(0,1,1),\ \sigma\begin{pmatrix}u&-u\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{matrix}\lambda_1=u\\\lambda_2=1\end{matrix},\quad D=(u-1)^2;$$

$$NSF_{14}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&-u^2\end{pmatrix}_9,\quad(0,1,u),\ \sigma\begin{pmatrix}1&0\\1&-u\end{pmatrix},\quad\begin{matrix}\lambda_1=-u\\\lambda_2=1\end{matrix},\quad D=(u+1)^2;$$

$$NSF_{23}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&v&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{10},\ v\neq u,\quad(0,1,0),\ \sigma\begin{pmatrix}u&v\\1&1\end{pmatrix},\quad\begin{matrix}\lambda_{1,2}=(u+1\pm\sqrt{(u-1)^2+4v})/2,\\D=(u-1)^2+4v.\end{matrix}$$

Замечание 9. Ниже в пунктах II 3) и II 4) доказательства теоремы 6 будет доказано, что $NSF_7^{4,2,>}$ и $NSF_{12}^{4,2,>}$ не являются каноническими, так как при всех значениях параметра $u\neq 0$ сводятся к предшествующим формам.

Список 7. Восемь $CF_i^{m,2,>}$ системы (14) при $l=2$ и $D_0=\beta^2-\alpha\gamma>0$ $(\sigma=\pm1)$.

$$CF_4^{2,2,>}=\begin{pmatrix}0&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_4,\ \begin{matrix}|u|\le1\\ [|u|>1]\end{matrix};\quad CF_{8,+}^{2,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&+1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_4;$$

$$CF_{8,-}^{2,2,>}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_4,\ [\sigma=-1];\ CF_{10}^{3,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_7;\ CF_{16}^{3,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_8;$$

$$CF_{8,-}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&-u&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_8,\ \begin{matrix}|u|<1\\ [|u|>1]\end{matrix};\ CF_{14}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&-u^2\end{pmatrix}_9,\ u\ne-1,-1/2,-1/3;$$

$$CF_{23}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&v&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{10},\ \begin{matrix}|u|\le1\\ [|u|>1]\end{matrix},\ \ v<0 \text{ при } u=1,\ \ v\ne u,\ u(2-u)/4,\ (2u-1)/4.$$

Теорема 6. *Любая система* (14) *вида* (23) *с* $p_1q_2-p_2q_1\ne0$ *и* $D_0>0$ *линейной неособой заменой* (16) *может быть сведена к одной из указанных в списке 7 линейно неэквивалентных канонических форм.*

Доказательство. Поскольку $\beta^2>\alpha\gamma$, то общий множитель $P_0(x)$ в системе (23) раскладывается на два различных сомножителя.

Если $\alpha\ne0$, то $\alpha=1$ по предложению 3. Тогда в системе (23) $\beta^2-\gamma>0$ и общий множитель $P_0=x_1^2+2\beta x_1x_2+\gamma x_2^2=(x_1+\eta_1x_2)(x_1+\eta_2x_2)$ $(\eta_1\ne\eta_2)$.

Случай $\alpha=0,\ \gamma\ne0$ перенумерацией (22) сводится к случаю с $\alpha\ne0$.

А если $\alpha,\gamma=0$, то $2\beta=1$ по предложению 3. Тогда в системе (23) $P_0=x_1x_2$.

Для любой полученной из (23) системы (28) с учетом (29) введем $\tilde\tau=(\tilde\beta^2-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}>0$.

I) В системе (40) коэффициенты $\breve\alpha,\ \breve\gamma$ общего множителя $\breve P_0$ всегда можно сделать нулевыми, в результате чего $\breve A$ в (40) будет иметь $\breve a_1,\breve a_2=0$ и $\breve d_1,\breve d_2=0$.

Для этого в произвольной замене (16), преобразующей любую систему (28) и, в частности, системы (42), (43), (45) с жордановыми $\widetilde H$, достаточно зафиксировать следующие две связи между коэффициентами:

$$r_2=-\tilde\alpha(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}r_1\operatorname{sign}\tilde\beta,\quad s_1=-\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}s_2\operatorname{sign}\tilde\beta\qquad(\operatorname{sign}0=1),\tag{51}$$

при этом, если $\tilde\alpha\tilde\gamma=0$, то $|\tilde\beta|=\tilde\tau\ne0$, а если $\tilde\beta=0$, $\tilde\tau^2=-\tilde\alpha\tilde\gamma>0$.

Тогда $\delta=r_1s_2-r_2s_1=2\tilde\tau(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}r_1s_2$ и в (40) $\breve\beta=2\tilde\tau^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}r_1s_2\operatorname{sign}\tilde\beta$.

1) $D=(p_1-q_2)^2+4p_2q_1>0$ $(\lambda_1\ne\lambda_2)$. Из (23) получена система (42), которую любая замена (16) при условии (51) сводит к системе (40), имеющей вид

$$2\tilde\tau\operatorname{sign}\tilde\beta\begin{pmatrix}0&(\lambda_1-\tilde\alpha\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_2)r_1s_2&-\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2\operatorname{sign}\tilde\beta&0\\0&\tilde\alpha(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2\operatorname{sign}\tilde\beta&(\lambda_2-\tilde\alpha\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_1)r_1s_2&0\end{pmatrix}.\tag{52}$$

$\mathbf{1_0}$) $\tilde\alpha,\tilde\gamma=0$. Тогда (52) $=\begin{pmatrix}0&2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2&0&0\\0&0&2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2&0\end{pmatrix}$. При $r_1=1$, $s_2=(2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}$ – это $CSF_4^{2,2,>,>}=\begin{pmatrix}0&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_4$ с $u=u_*$, где $u_*=\lambda_1\lambda_2^{-1}\ne1$.

Сделав в полученной $CSF_4^{2,2,>,>}$ замену (16) с $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = u_*^{-1}$, $r_2 = 1$, перейдем к $CSF_4^{2,2,>,>}$ с $u = u_*^{-1}$.

Поэтому в 1_0) всегда можно получить $CF_4^{2,2,>,>}$ с $|u| < 1$ либо $u = -1$.

$\mathbf{1_1}$) $\tilde\alpha = 0$, $\tilde\gamma \neq 0$ $(\tilde\beta \neq 0)$. Тогда система (52) $= \begin{pmatrix} 0 & 2\tilde\beta\lambda_1 r_1 s_2 & -\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tilde\beta\lambda_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$.

При $r_1 = -\sigma_0|\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}\mathrm{sign}\,\tilde\gamma$, $s_2 = |\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$ – это $CF_{10}^{3,2,>,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_7$ с $\sigma = -\sigma_0\mathrm{sign}\,\tilde\gamma$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq 1$, где σ_0 из (41).

$\mathbf{1_2}$) $\tilde\gamma = 0$, $\tilde\alpha \neq 0$ $(\tilde\beta \neq 0)$. Тогда система (52) $= \begin{pmatrix} 0 & 2\tilde\beta\lambda_1 r_1 s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & 2\tilde\beta\lambda_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$.

При $r_1 = |\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(2\tilde\beta\lambda_1)^{-1}\sigma_0\,\mathrm{sign}\,\tilde\alpha$ – это $CF_{a,10}^{3,2,>,>}$ с $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2 \neq 1$, $\sigma = \sigma_0\,\mathrm{sign}\,\tilde\alpha$.

$\mathbf{1_3}$) $\tilde\alpha \neq 0$, $\tilde\gamma \neq 0$ $(\tilde\tau \neq |\tilde\beta|)$. Тогда $\breve c_1\breve b_2 \neq 0$.

$\mathbf{1_3^1}$) $\tilde\beta = 0$, тогда $\tilde\alpha\tilde\gamma < 0$ и $\tilde\tau^2 = -\tilde\alpha\tilde\gamma$. Поэтому система (52) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)r_1 s_2 & -2\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0 \\ 0 & 2\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & 2(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

$\mathbf{1_3^{1a}}$) $\lambda_2 = -\lambda_1$. Тогда система (53) при $r_1 = |4\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2 = |4\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ – это $CF_{8,+}^{2,2,>,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_4$ с $\sigma = -\mathrm{sign}\,(\tilde\gamma\lambda_1)\ (= -\sigma_0\mathrm{sign}\,\tilde\gamma = \sigma_0\mathrm{sign}\,\tilde\alpha)$.

$\mathbf{1_3^{1b}}$) $\lambda_2 \neq -\lambda_1$. Тогда (53) при $s_2 = -|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(-2\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\sigma_0\mathrm{sign}\,\tilde\gamma$, $r_1 = |2\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$ – это $CSF_{23}^{4,2,>,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{10}$ (см. II 1b)) с $\sigma = \sigma_0\mathrm{sign}\,\tilde\alpha$, $u = 1$, $v = D(\lambda_1+\lambda_2)^{-2}$ $(v > 0\ , v \neq 1)$.

$\mathbf{1_3^2}$) $\tilde\beta \neq 0$. Тогда $\breve b_1^2 + \breve c_2^2 \neq 0$.

$\mathbf{1_3^{2a}}$) $\breve b_1 = 0$, т.е. $\lambda_1 = \tilde\alpha\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_2 \ \Leftrightarrow\ \tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2) = |\tilde\beta|(\lambda_2-\lambda_1)$, так как $\tilde\alpha\tilde\gamma = (|\tilde\beta|-\tilde\tau)(|\tilde\beta|+\tilde\tau)$. Тогда (52) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\tilde\gamma\tilde\tau^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_2 s_2^2 & 0 \\ 0 & -4\tilde\alpha\tilde\tau^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_2 r_1^2 & 8\tilde\beta\tilde\tau^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$.
При $r_1 = (|\tilde\beta|+\tilde\tau)|\tilde\gamma\lambda_2|^{3/2}(4\tilde\beta\tilde\tau\tilde\gamma)^{-1}\lambda_2^{-2}$, $s_2 = (|\tilde\beta|+\tilde\tau)(2\tilde\tau)^{-1}|\tilde\gamma\lambda_2|^{-1/2}$ – это $CF_{a,16}^{3,2,>,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \end{pmatrix}_8$ с $u = -\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} > -1/4$, $\sigma = \mathrm{sign}\,(\tilde\gamma\lambda_2)(= \mathrm{sign}\,(\tilde\alpha\lambda_1))$.

$\mathbf{1_3^{2b}}$) $\breve c_2 = 0$, т.е. $\lambda_2 = \tilde\alpha\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_1 \ \Leftrightarrow\ \tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2) = |\tilde\beta|(\lambda_1-\lambda_2)$, поэтому система (52) $= \begin{pmatrix} 0 & 8\tilde\beta\tilde\tau^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_1 r_1 s_2 & -4\tilde\gamma\tilde\tau^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & 4\tilde\alpha\tilde\tau^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_1 r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = (|\tilde\beta|+\tilde\tau)(2\tilde\tau)^{-1}|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2 = (|\tilde\beta|+\tilde\tau)|\tilde\alpha\lambda_1|^{3/2}(4\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\tau)^{-1}\lambda_1^{-2}$ – это $CF_{16}^{3,2,>,>}$ с теми же u и σ.

$\mathbf{1_3^{2c}}$) $\breve b_1\breve c_2 \neq 0$, т.е. $\lambda_i - \tilde\alpha\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\lambda_{3-i} \neq 0$ $(i = 1, 2)$ $\Leftrightarrow$ $\tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2) \pm |\tilde\beta|(\lambda_1-\lambda_2) \neq 0$.

Тогда (52) при $s_2 = (|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{3/2}|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(2\tilde\tau)^{-1/2}((|\tilde\beta|+\tilde\tau)^2\lambda_2-\tilde\alpha\tilde\gamma\lambda_1)^{-1}\,\sigma_0\mathrm{sign}\,(\tilde\alpha\tilde\beta)$, $r_1 = (|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{1/2}(2\tilde\tau|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|)^{-1/2}$ – это $CSF^{4,2,>,>}_{23} = \sigma\begin{pmatrix}0 & u & v & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}_{10}$ с $\sigma=\sigma_*$, $u=u_*$, $v=v_*$, где $\sigma_*=\sigma_0\,\mathrm{sign}\,\tilde\alpha$, $u_* = (\tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2)+|\tilde\beta|(\lambda_1-\lambda_2))(\tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2)-|\tilde\beta|(\lambda_1-\lambda_2))^{-1}\neq 1$, $v_* = -\tilde\alpha\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^2((|\tilde\beta|+\tilde\tau)^2\lambda_2-\tilde\alpha\tilde\gamma\lambda_1)^{-2}D$.

Сделав в полученной $CSF^{4,2,>,>}_{23}$ замену (16) с $r_1,s_2=0$, $s_1=v_*|v_*|^{-1/2}u_*^{-1}$, $r_2 = |v_*|^{-1/2}$, перейдем к $CSF^{4,2,>,>}_{23}$ с $\sigma=\sigma_*\mathrm{sign}v_*$, $u=u_*^{-1}$, $v=v_*u_*^{-2}$.

Поэтому в 1_3^{2c}) всегда можно получить $CSF^{4,2,>,>}_{23}$ с $|u|<1$, $u=-1$. При этом в ней $4v>-(1-u)^2$ в силу инвариантности знака D из (25) относительно замен (16).

2) $D=(p_1-q_2)^2+4p_2q_1=0$. Тогда $\lambda=\lambda_{1,2}=(p_1+q_2)/2\neq 0$.

$\mathbf{2_1}$) $q_1\neq 0$. Из системы (23) получена система (43), которую любая замена (16) при условии (51) сводит к системе (40), имеющей вид

$$2\tilde\tau\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta\begin{pmatrix}0 & (2\tilde\tau\lambda+\tilde\gamma\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}r_1s_2 & -\tilde\gamma^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}s_2^2 & 0\\ 0 & r_1^2 & (2\tilde\tau\lambda-\tilde\gamma\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}r_1s_2 & 0\end{pmatrix}. \tag{54}$$

$\mathbf{2_1^1}$) $\tilde\gamma=0$. Тогда (54) $= 2\tilde\tau\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta\begin{pmatrix}0 & 2\tilde\tau\lambda(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}r_1s_2 & 0 & 0\\ 0 & r_1^2 & 2\tilde\tau\lambda(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$.

При $r_1=(2\tilde\tau)^{-1/2}$, $s_2=(|\tilde\beta|+\tilde\tau)(2\tilde\tau)^{-3/2}\lambda^{-1}$ – это $CF^{3,2,>,=}_{a,10} = \sigma\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & u & 0\end{pmatrix}_7$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\tilde\beta$, $u=1$.

$\mathbf{2_1^2}$) $\tilde\gamma\neq 0$. Тогда в системе (54) $\breve b_2\breve c_1\neq 0$, $\breve b_1^2+\breve c_2^2\neq 0$.

$\mathbf{2_1^{2a}}$) $\breve b_1=0$, т.е. $2\lambda\tilde\tau=-\tilde\gamma\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta$. Тогда система (54) принимает вид $\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\tilde\tau\tilde\gamma^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta\,s_2^2 & 0\\ 0 & 2\tilde\tau\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta\,r_1^2 & -4\tilde\tau\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $s_2=-(|\tilde\beta|+\tilde\tau)(2\tilde\tau)^{-1/2}\tilde\gamma^{-1}\mathrm{sign}\,\tilde\beta$, $r_1=-2^{-3/2}\tilde\tau^{-1/2}$ – это $CF^{3,2,>,=}_{a,16} = \sigma\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & u & 1 & 0\end{pmatrix}_8$ с $\sigma=-\mathrm{sign}\,\tilde\beta$, $u=-1/4$.

$\mathbf{2_1^{2b}}$) $\breve c_2=0$, т.е. $2\lambda\tilde\tau=\tilde\gamma\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta$. Тогда система (54) принимает вид $\begin{pmatrix}0 & 4\tilde\tau\tilde\gamma(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-1}r_1s_2 & -2\tilde\tau\tilde\gamma^2(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^{-2}\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta\,s_2^2 & 0\\ 0 & 2\tilde\tau\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta\,r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=(2\tilde\tau)^{-1/2}$, $s_2=-(|\tilde\beta|+\tilde\tau)2^{-3/2}(\tilde\tau)^{-1/2}\tilde\gamma^{-1}\mathrm{sign}\,\tilde\beta$ – это $CF^{3,2,>,=}_{16}$ с $u=-1/4$, $\sigma=\mathrm{sign}\,\tilde\beta$.

$\mathbf{2_1^{2c}}$) $\breve b_1\breve c_2\neq 0$, т.е. $2\lambda\tilde\tau\neq\pm\tilde\gamma\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta$.

При $r_1=(2\tilde\tau)^{-1/2}$, $s_2=(|\tilde\beta|+\tilde\tau)(2\tilde\tau)^{-1/2}(2\tilde\tau\lambda-\tilde\gamma\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)^{-1}$ система (54) является $CSF^{4,2,>,=}_{23} = \sigma\begin{pmatrix}0 & u & v & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}_{10}$ с $\sigma=\sigma_*$, $u=u_*$, $v=v_*$, где $\sigma_*=\mathrm{sign}\,\tilde\beta$, $u_*=(2\tilde\tau\lambda+\tilde\gamma\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)(2\tilde\tau\lambda-\tilde\gamma\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)^{-1}\neq 0,\pm1$, $v_*=-\tilde\gamma^2(2\tilde\tau\lambda-\tilde\gamma\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)^{-2}<0$.

Сделав в полученной $CSF^{4,2,>,=}_{23}$ замену (16) с $r_1,s_2=0$, $s_1=v_*|v_*|^{-1/2}u_*^{-1}$, $r_2 = |v_*|^{-1/2}$, перейдем к $CSF^{4,2,>,=}_{23}$ с $\sigma=\sigma_*\mathrm{sign}v_*$, $u=u_*^{-1}$, $v=v_*u_*^{-2}$.

Поэтому в 2_1^{2c}) всегда можно получить $CF^{4,2,>,=}_{23}$ с $|u|<1$. При этом $4v=-(1-u)^2$.

$\mathbf{2_2}$) $q_1 = 0$. Тогда в силу (25) $\lambda = p_1 = q_2 \neq 0$.

$\mathbf{2_2^1}$) $p_2 = 0$, т. е. $H = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix}$, и система (23) имеет вид (42), но при условии (44_1).

Теперь произвольная замена (16) сводит (42) к системе (40), в которой $\breve{H} = H$, $\breve{\alpha} = \left[\begin{matrix}(r_1+\eta_1 r_2)(r_1+\eta_2 r_2)\\ r_1 r_2\end{matrix}\right.$, $\breve{\beta} = \left[\begin{matrix}r_1 s_1 + \beta(r_1 s_2 + r_2 s_1) + \gamma r_2 s_2\\ (r_1 s_2 + r_2 s_1)/2\end{matrix}\right.$, $\breve{\gamma} = \left[\begin{matrix}(s_1+\eta_1 s_2)(s_1+\eta_2 s_2)\\ s_1 s_2\end{matrix}\right.$.

Тогда при $\left[\begin{matrix} r_1 = \eta_1,\ s_1 = -\eta_2(\eta_1-\eta_2)^{-2}p_1^{-1},\ r_2 = -1,\ s_2 = (\eta_1-\eta_2)^{-2}p_1^{-1} \\ r_1 = 1,\quad s_1 = 0,\quad r_2 = 0,\quad s_2 = p_1^{-1}\end{matrix}\right.$ получаем $CF_4^{2,2,>} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_4$ с $u = 1$.

$\mathbf{2_2^2}$) $p_2 \neq 0$, т. е. $H = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}$. Поэтому обычная нормировка (21) с $r_1 = 1$, $s_2 = p_2$ сводит (23) к системе (43), получаемой в 2_1), но при условии (44_2) и с $\lambda = p_1$.

$\mathbf{3}$) $D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2 q_1 < 0$ $(p_2 q_1 < 0)$. Из (23) получена система (45), которую любая замена (16) при условии (51) сводит к системе (40), имеющей вид

$$\frac{2\tilde{\tau}\mathrm{sign}\,\tilde{\beta}}{|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & (2\tilde{\tau}\theta + (\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde{\beta})r_1 s_2 & -(\tilde{\gamma}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^{-1}\lambda_I s_2^2 & 0 \\ 0 & (\tilde{\alpha}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^{-1}\lambda_I r_1^2 & (2\tilde{\tau}\theta - (\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde{\beta})r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

$\mathbf{3_1}$) $\theta = 0$, $\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma} = 0$. Тогда $\tilde{\tau} = (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)^{1/2}$ и система (55) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\tilde{\tau}(\tilde{\alpha}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^{-2}\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde{\beta}s_2^2 & 0 \\ 0 & 2\tilde{\tau}(\tilde{\alpha}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^{-2}\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde{\beta}r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $r_1, s_2 = (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})(2\tilde{\tau}\mu(\tilde{\alpha}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2))^{-1/2}$ — это $CF_{8,-}^{2,2,>,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_4$ с $\sigma = 1$, если $\tilde{\beta} \geq 0$, а при $\tilde{\beta} < 0$ — это $CF_{a,8,-}^{2,2,>,<}$ с $\sigma = 1$.

$\mathbf{3_2}$) $\theta^2 + (\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})^2 \neq 0$, тогда $\breve{b}_1^2 + \breve{c}_2^2 \neq 0$.

$\mathbf{3_2^1}$) $\breve{b}_1 = 0$, т. е. $2\tilde{\tau}\theta = -(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde{\beta} \neq 0$. Тогда система (55) имеет вид

$$\frac{2\tilde{\tau}\mathrm{sign}\,\tilde{\beta}}{|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\tilde{\gamma}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^{-1}\lambda_I s_2^2 & 0 \\ 0 & (\tilde{\alpha}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^{-1}\lambda_I r_1^2 & -2(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde{\beta}\,r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $r_1 = (\tilde{\gamma}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)^{1/2}(8\tilde{\tau}\mu)^{-2}(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})^{-1}\mathrm{sign}\tilde{\beta}$, $s_2 = (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})(2\tilde{\tau}\mu(\tilde{\gamma}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2))^{-1/2}$ – это $CF_{a,16}^{3,2,>,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \end{pmatrix}_8$ с $u = -(\tilde{\alpha}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(\tilde{\gamma}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(2(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})(|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau}))^{-2} < -1/4$, $\sigma = -\mathrm{sign}\,\tilde{\beta}$.

$\mathbf{3_2^2}$) $\breve{c}_2 = 0$, т. е. $2\tilde{\tau}\theta = (\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})\mu\mathrm{sign}\,\tilde{\beta} \neq 0$. Тогда система (55) имеет вид

$$\frac{2\tilde{\tau}\mathrm{sign}\,\tilde{\beta}}{|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})\mu\mathrm{sign}\,\tilde{\beta}\,r_1 s_2 & -(\tilde{\gamma}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^{-1}\lambda_I s_2^2 & 0 \\ 0 & (\tilde{\alpha}^2 + (|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^2)(|\tilde{\beta}|+\tilde{\tau})^{-1}\lambda_I r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $r_1=(|\tilde\beta|+\tilde\tau)(2\tilde\tau\mu(\tilde\alpha^2+(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^2))^{-1/2}\mathrm{sign}\tilde\beta$, $s_2=(\tilde\alpha^2+(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^2)^{1/2}(8\tilde\tau\mu)^{-2}(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^{-1}$ – это $CF_{16}^{3,2,>,<}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\tilde\beta$ и тем же u.

$\mathbf{3_2^3}$) $\breve b_1\breve c_2\neq 0$, т.е. $2\tilde\tau\theta\neq\pm(\tilde\alpha+\tilde\gamma)\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta$.

При $r_1=(|\tilde\beta|+\tilde\tau)(2\tilde\tau\mu(\tilde\alpha^2+(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^2))^{-1/2}$, $s_2=(\mu(\tilde\alpha^2+(|\tilde\beta|+\tilde\tau)^2))^{1/2}(2\tilde\tau)^{-1/2}(2\tilde\tau\theta-(\tilde\alpha+\tilde\gamma)\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)^{-1}$ система (55) – это $CSF_{23}^{4,2,>,<}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&v&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{10}$ с $\sigma=\sigma_*$, $u=u_*$, $v=v_*$, где $u_*=(2\tilde\tau\theta+(\tilde\alpha+\tilde\gamma)\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)(2\tilde\tau\theta-(\tilde\alpha+\tilde\gamma)\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)^{-1}$, $v_*=-\mu^2((\tilde\alpha+\tilde\gamma)^2+4\tilde\tau^2)(2\tilde\tau\theta-(\tilde\alpha+\tilde\gamma)\mu\,\mathrm{sign}\,\tilde\beta)^{-2}$, $\sigma_*=\mathrm{sign}\,\tilde\beta$.

Сделав в полученной $CSF_{23}^{4,2,>,<}$ замену (16) с $r_1,s_2=0$, $s_1=v_*|v_*|^{-1/2}u_*^{-1}$, $r_2=|v_*|^{-1/2}$, перейдем к $CSF_{23}^{4,2,>,<}$ с $\sigma=\sigma_*\mathrm{sign}v_*$, $u=u_*^{-1}$, $v=v_*u_*^{-2}$.

Поэтому в 3_2^3) всегда можно получить $CF_{23}^{4,2,>,<}$ с $|u|\le 1$. При этом $4v<-(1-u)^2$.

II) Посмотрим теперь, какие системы (28), не имеющие по два нулевых элемента справа и слева, могут оказаться каноническими формами в случае $l=2$ и $\beta^2>\alpha\gamma$.

Выберем из списка 6 $NSF^{m,2}$, предшествующие $CSF_{23}^{4,2,>}$. Их всего четыре:

$$1)\ NSF_{8,-}^{4,2,>}\quad 2)\ NSF_{14}^{4,2,>}\quad 3)\ NSF_{7}^{4,2,>}\quad 4)\ NSF_{12}^{4,2,>}$$

$$\sigma_*\begin{pmatrix}u_*&0&-u_*&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_8,\quad \sigma_*\begin{pmatrix}0&1&u_*&0\\0&1&0&-u_*^2\end{pmatrix}_9,\quad \sigma_*\begin{pmatrix}0&u_*&u_*&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_8,\quad \sigma_*\begin{pmatrix}0&u_*&0&-u_*\\0&0&1&1\end{pmatrix}_9.$$

Произвольной заменой (16) при условии (51) будем сводить каждую из них к системе (40), имеющей слева и справа по два нулевых элемента.

1) В $NSF_{8,-}^{4,2,>}$, записанной в виде (28), $(\tilde\alpha,2\tilde\beta,\tilde\gamma)=(1,0,-1)$. Поэтому $\tilde\tau=(\tilde\beta^2-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}=1$, в условии (51) $r_2=-r_1$, $s_1=s_2$, а значит, полученная из $NSF_{8,-}^{4,2,>}$ система (40) $=2\sigma_*\begin{pmatrix}0&(u_*+1)r_1s_2&(u_*-1)s_2^2&0\\0&(u_*-1)r_1^2&(u_*+1)r_1s_2&0\end{pmatrix}$.

1a) При $|u_*|=1$ в (40) всегда $m=2$, поэтому $NSF_{8,-}^{4,2,>}$ – неканоническая по с.п. 1.

1b) При $|u_*|\neq 1$ и $r_1=(2|u_*-1|)^{-1/2}$, $s_2=2^{-1/2}|u_*-1|^{1/2}(u_*+1)^{-1}\mathrm{sign}\,(u_*-1)$ система (40) является $CSF_{23}^{4,2,>,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&v&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{10}$ с $u=1$, $v=(u_*-1)^2(u_*+1)^{-2}\neq 1$, $\sigma=\sigma_*\,\mathrm{sign}\,(u_*-1)$. Поэтому $CSF_{23}^{4,2,>,>}$ при указанных u,v по с.п. 2 – неканоническая.

Действительно, $CSF_{23}^{4,2,>,>}$ при $u=1$, $v>0$ ($v\neq 1$, иначе $l=3$) – это случай I, 1_3^{1b}) заменой с $r_1=-v^{1/4}(1+v^{1/2})^{-1/2}$, $s_1=-r_1$, $r_2,s_2=v^{-1/4}(1+v^{1/2})^{-1/2}$ сводится к $CF_{8,-}^{4,2,>,>}$ с $\sigma_*=-\sigma$, $u_*=(1-v^{1/2})(1+v^{1/2})^{-1}$ ($|u_*|<1$).

2) В $NSF_{14}^{4,2,>}$, записанной в виде (28), вектор $(\tilde\alpha,2\tilde\beta,\tilde\gamma)=(0,1,u_*)$. Следовательно $\tilde\tau=1/2$, в условии (51) $r_2=0$, $s_1=-u_*s_2$ и полученная из $NSF_{14}^{4,2,>}$ система (40) $=\sigma_*\begin{pmatrix}0&(u_*+1)r_1s_2&-u_*(2u_*+1)s_2^2&0\\0&r_1^2&-2u_*r_1s_2&0\end{pmatrix}$.

2a) При $u_*=-1/2,\,-1$ в (40) $m=3$, поэтому $NSF_{14}^{4,2,>}$ – неканоническая по с.п. 1.

2b) Пусть $u_*\neq -1/2,-1$. Тогда при $r_1=1$, $s_2=-(2u_*)^{-1}$ система (40) – это $CSF_{23}^{4,2,>,>}$ с $\sigma=\sigma_*$, $u=-(u_*+1)(2u_*)^{-1}$, $v=-(2u_*+1)(4u_*)^{-1}$ ($4v=2u-1$), а при $r_1=-|u_*|^{3/2}|2u_*+1|^{3/2}|u_*|^{-1}|u_*+1|^{-1}|2u_*+1|^{-1}$, $s_2=|u_*|^{-1/2}|2u_*+1|^{-1/2}$ – это $CSF_{a,23}^{4,2,>,>}$

с $\sigma=-\sigma_*\operatorname{sign}(u_*(2u_*+1))$, $u=-(2u_*)(u_*+1)^{-1}$, $v=-u_*(2u_*+1)(u_*+1)^{-2}$ $(4v=u(2-u))$. Поэтому $CSF_{23}^{4,2,>,>}$ при указанных u,v по с.п. 2 – неканоническая.

Действительно, $CSF_{23}^{4,2,>,>}$ при $u\neq1$, $v=(2u-1)/4$ $(u\neq\pm1/2)$ – это случай $\mathrm{I},1_3^{2c})$, заменой с $r_1=1$, $s_1=-(1+2u)^{-1}$, $r_2=0$, $s_2=-2s_1$ сводится к $NSF_{14}^{4,2,>,>}$ с $\sigma_*=\sigma$, $u_*=-(1+2u)^{-1}$ $(u_*\neq1/3)$. А если $u\neq1$, $v=u(2-u)/4$ $(u\neq\pm2)$ – это тот же случай, то $CSF_{23}^{4,2,>,>}$ заменой с $r_1=0$, $s_1=-|u|^{3/2}|u-2|^{3/2}u^{-1}(u^2-4)^{-1}$, $r_2=2|u(u-2)|^{-1/2}$, $s_2=2(u-2)^{-1}s_1$ сводится к $NSF_{14}^{4,2,>,>}$ с $\sigma_*=\sigma\operatorname{sign}(u(2-u))$, $u_*=-u(u+2)^{-1}$ $(u_*\neq-1/3)$.

2c) При $u_*=-1/3$ $NSF_{14}^{4,2,>}$ – неканоническая по с.п. 2, так как при с $r_1=0$, $s_1=2/\sqrt3$, $r_2,s_2=\sqrt3$ получаем $CF_{8,-}^{4,2,>,>}$ с $\sigma=-\sigma_*$, $u=1/3$.

В итоге, $NSF_{14}^{4,2,>}$ является $CF_{14}^{4,2,>,>}$ с $u=u_*$, $\sigma=\sigma_*$, причем $u\neq-1,-1/2,-1/3$.

3) $NSF_7^{4,2,>}$ $((\tilde\alpha,2\tilde\beta,\tilde\gamma)=(0,1,1)$, $\tilde\tau=1/2)$ – неканоническая по с.п.1. При $u_*\neq1$ заменой с $r_1=(u_*-1)|u_*-1|^{-1/2}$, $s_1=|u_*-1|^{-1/2}$, $r_2=0$, $s_2=-s_1$ она сводится к $CF_{10}^{3,2,>,>}$ с $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}(1-u_*)$, $u=u_*\neq1$. А при $u_*=1$ заменой с $r_1=\sigma_*$, $s_1=-1$, $r_2=0$, $s_2=1$ она сводится к $CF_4^{2,2,>,=}$ с $u=1$.

4) $NSF_{12}^{4,2,>}$ $((\tilde\alpha,2\tilde\beta,\tilde\gamma)=(0,1,1)$, $\tilde\tau=1/2)$ – неканоническая по с.п. 1. При $u_*\neq1/2$ заменой с $r_1=-|2u_*-1|^{3/2}(2u_*-1)^{-1}$, $s_1=|2u_*-1|^{-1/2}$, $r_2=0$, $s_2=-s_1$ она сводится к $CF_{10}^{3,2,>,>}$ с $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}(1-2u_*)$, $u=u_*\neq1/2$. А при $u_*=1/2$ заменой с $r_1=-\sigma_*$, $s_1=1$, $r_2=0$, $s_2=-1$ она сводится к $CF_4^{2,2,>,>}$ с $u=1/2$. □

Замечание 10. 1a) $CF_4^{2,2,>}=\{CF_4^{2,2,>,>}$ при $|u|<1$, $u=-1$, $CF_4^{2,2,>,=}$ при $u=1\}$;
1b) $CSF_4^{2,2,>,>}$ с $|u|>1$ заменой (16) из $1_0)$ сводится к $CF_4^{2,2,>,>}$ с $|u|<1$;

2) $CSF_{8,-}^{2,2,>}$ с $\sigma=-1$ перенумерацией (22) сводится к $CF_{8,-}^{2,2,>}$ с $\sigma=1$;

3) $CF_{10}^{3,2,>}=\{CF_{10}^{3,2,>,>}$ при $u\neq1$, $CF_{10}^{3,2,>,=}$ при $u=1\}$;

4) $CF_{16}^{3,2,>}=\{CF_{16}^{3,2,>,>}$ $(u>-1/4)$, $CF_{16}^{3,2,>,=}$ $(u=-1/4)$, $CF_{16}^{3,2,>,<}$ $(u<-1/4)\}$;

5a) $CSF_{8,-}^{4,2,>}$ при $|u|=1$ – неканоническая по с.п. 1. При $u=1$ заменой с $s_1,s_2=1/2$, $r_1,-r_2=\sigma/2$ она сводится к $CF_4^{2,2,>,=}$, а при $u=-1$ той же заменой – к $CF_{8,+}^{2,2,>}$;
5b) $CSF_{8,-}^{4,2,>}$ с $|u|>1$ заменой с $r_1,s_2=0$, $s_1,r_2=|u|^{-1/2}$ сводится к $CF_{8,-}^{4,2,>}$ с $|u|<1$;

6) $CSF_{14}^{4,2,>}$ при $u=-1,-1/2,-1/3$ – неканоническая по с.п. 1,2. При $u=-1$ заменой (16) с $r_1=-1/2$, $r_2=0$, $s_1=-u$, $s_2=1$ она сводится к $CF_{a,16}^{3,2,>,=}$, при $u=-1/2$ заменой (16) с $r_1=1$, $r_2=0$, $s_1=-2u$, $s_2=2$ она сводится к $CF_{a,10}^{3,2,>,>}$, при $u=-1/3$ заменой (16) с $r_1=0$, $s_1=2/\sqrt3$, $r_2,s_2=\sqrt3$ она сводится к $CF_{8,-}^{4,2,>}$;

7a) $CF_{23}^{4,2,>}=\{CF_{23}^{4,2,>,>}$ при $|u|<1$, $u=-1$, $v>-(1-u)^2/4$, $v\neq u$, $u(2-u)/4$, $(2u-1)/4$, $CF_{23}^{4,2,>,=}$ при $|u|<1$, $v=-(1-u)^2/4$, $CF_{23}^{4,2,>,<}$ при $|u|\leq1$, $v<-(1-u)^2/4$, $v\neq u\}$;
7b) $CF_{23}^{4,2,>,>}$ при $u=1$, $v=u(2-u)/4$, $(2u-1)/4$ – неканоническая по с.п. 2. При $u=1$ заменой из $1b)$ она сводится к $CF_{8,-}^{4,2,>,>}$. При $v=u(2-u)/4$, $(2u-1)/4$ заменой из $2b)$ она сводится к $CF_{14}^{4,2,>,>}$;
7c) $CSF_{23}^{4,2,>}$ с $|u|>1$ заменами из $1_3^{2c})$, $2_1^{2c})$, $3_2^3)$ сводится к $CF_{23}^{4,2,>}$ с $|u|<1$.

Следствие 6. *Система* (23), *в которой* $\beta^2>\alpha\gamma$ *и* $p_1q_2-p_2q_1\neq0$, *известной линейной неособой заменой* (16) *сводится к соответствующей* $CF_i^{m,2}$ *из списка 7, если шесть или четыре параметра системы: соответственно коэффициенты* β *и* γ *общего множителя* P_0^2 $(\alpha=1,\ \beta^2>\gamma)$ *или* P_0^2 *с фиксированными коэффициентами* $(\alpha,\gamma=0,$ $2\beta=1)$ *и элементы* p_1,q_1,p_2,q_2 *матрицы* H *удовлетворяют следующим условиям:*

$CF_4^{2,2,>,>}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\gamma} = 0$, *тогда* $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2$ *при* $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ *и* $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$ *при* $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, *т. е.* $|u| < 1$, $u = -1$;

$CF_4^{2,2,>,=}$: $D = 0$, $q_1 = 0$, $p_2 = 0$ $(\sigma = 1)$;

$CF_{8,+}^{2,2,>,>}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde{\beta} = 0$, $p_1 + q_2 = 0$, *тогда* $\sigma = \sigma_0 \operatorname{sign} \tilde{\alpha}$;

$CF_{8,-}^{2,2,>,<}$: $D < 0$, *в* (45) $\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} = 0$, $p_1 + q_2 = 0$ $(\sigma = 1)$;

$CF_{10}^{3,2,>,>}$: $D > 0$, *1) в* (42) $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\gamma} \neq 0$, *тогда* $\sigma = -\sigma_0 \operatorname{sign} \tilde{\gamma}$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$ $(u \neq 1)$, *2) в* (42) $\tilde{\alpha} \neq 0$, $\tilde{\gamma} = 0$, *тогда* $\sigma = \sigma_0 \operatorname{sign} \tilde{\alpha}$, $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2$ $(u \neq 1)$;

$CF_{10}^{3,2,>,=}$: $D = 0$, *если* $q_1 \neq 0$, *то в* (43), *а если* $q_1 = 0$ *и* $p_2 \neq 0$, *то в* (44_2), $\tilde{\gamma} = 0$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{\beta}$;

$CF_{16}^{3,2,>,>}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde{\alpha} \neq 0$, $\tilde{\gamma} \neq 0$, $|\tilde{\beta}| = \pm\tilde{\tau}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \neq 0$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde{\alpha}\lambda_1)$, $u = -\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(2\tilde{\beta})^{-2}$ $(u > -1/4)$;

$CF_{16}^{3,2,>,=}$: $D = 0$, *если* $q_1 \neq 0$, *то в* (43), *а если* $q_1 = 0$ *и* $p_2 \neq 0$, *то в* (44_2), $\tilde{\gamma} = \pm(p_1 + q_2)\tilde{\tau} \operatorname{sign} \tilde{\beta} \neq 0$, *тогда* $\sigma = \pm\operatorname{sign} \tilde{\beta}$;

$CF_{16}^{3,2,>,<}$: $D < 0$, *в* (45) $(p_1 + q_2)\tilde{\tau} = \pm(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})(-D/4)^{1/2}\operatorname{sign} \tilde{\beta} \neq 0$, *тогда* $\sigma = \pm\operatorname{sign} \tilde{\beta}$, $u = -(\tilde{\alpha}^2 + (|\tilde{\beta}| + \tilde{\tau})^2)(\tilde{\gamma}^2 + (|\tilde{\beta}| + \tilde{\tau})^2)(2(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})(|\tilde{\beta}| + \tilde{\tau}))^{-2}$ $(u < -1/4)$;

$CF_{8,-}^{4,2,>,>}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde{\beta} = 0$, $p_1 + q_2 \neq 0$, *тогда* $u = (|p_1 + q_2| - D^{1/2})(|p_1 + q_2| + D^{1/2})^{-1}$ $(|u| < 1)$, $\sigma = -\sigma_0 \operatorname{sign} \tilde{\alpha}$;

$CF_{23}^{4,2,>,>}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde{\alpha} \neq 0$, $\tilde{\gamma} \neq 0$, $\tilde{\beta} \neq 0$, $\tilde{\tau}(\lambda_1 + \lambda_2) \pm |\tilde{\beta}|(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, *тогда при* $u_* = \dfrac{\tilde{\tau}(\lambda_1 + \lambda_2) + |\tilde{\beta}|(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tilde{\tau}(\lambda_1 + \lambda_2) - |\tilde{\beta}|(\lambda_1 - \lambda_2)} \neq 1$, *если* $|u_*| \leq 1$, *то* $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, $v = v_*$, *где* $v_* = \dfrac{-D\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(|\tilde{\beta}| + \tilde{\tau})^2}{((|\tilde{\beta}| + \tilde{\tau})^2\lambda_2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\lambda_1)^2}$, $\sigma_* = \sigma_0 \operatorname{sign} \tilde{\alpha}$, *а если* $|u_*| > 1$, *то* $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} v_*$, $u = u_*^{-1}$, $v = v_* u_*^{-2}$ $(|u| < 1,\ u = -1,\ 4v > -(1 - u)^2)$, *но при этом еще для полученных* u, v *выполняются неравенства* $v \neq u, u(2 - u)/4, (2u - 1)/4$;

$CF_{14}^{4,2,>,>}$ *с* $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde{\alpha} \neq 0$, $\tilde{\gamma} \neq 0$, $\tilde{\beta} \neq 0$, $\tilde{\tau}(\lambda_1 + \lambda_2) \pm |\tilde{\beta}|(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, *в* $CF_{23}^{4,2,>,>}$ *1)* $4v = u(2 - u)$, *тогда* $\sigma_* = \sigma \operatorname{sign}(2u - u^2)$, $u_* = -u(u + 2)^{-1}$, *2)* $4v = 2u - 1$, *тогда* $\sigma_* = \sigma$, $u_* = -(1 + 2u)^{-1}$ $(u_* \neq -1, -1/2, -1/3)$;

$CF_{23}^{4,2,>,=}$: $D = 0$, *если* $q_1 \neq 0$, *то в* (43), *а если* $q_1 = 0$ *и* $p_2 \neq 0$, *то в* (44_2), $\tilde{\gamma} \neq \pm(p_1 + q_2)\tilde{\tau} \operatorname{sign} \tilde{\beta} \neq 0$, *тогда при* $u_* = \dfrac{(p_1 + q_2)\tilde{\tau} \operatorname{sign} \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}}{(p_1 + q_2)\tilde{\tau} \operatorname{sign} \tilde{\beta} - \tilde{\gamma}} \neq \pm 1$, *если* $|u_*| < 1$, *то* $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, $v = v_*$, *где* $v_* = \dfrac{-\tilde{\gamma}^2}{((p_1 + q_2)\tilde{\tau} \operatorname{sign} \tilde{\beta} - \tilde{\gamma})^2}$, $\sigma_* = \operatorname{sign} \tilde{\beta}$, *а если* $|u_*| > 1$, *то* $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} v_*$, $u = u_*^{-1}$, $v = v_* u_*^{-2}$ $(|u| < 1,\ 4v = -(1 - u)^2)$;

$CF_{23}^{4,2,>,<}$: $D < 0$, *в* (45) $(p_1 + q_2)\tilde{\tau} \neq \pm(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})(-D/4)^{1/2}\operatorname{sign} \tilde{\beta}$, *тогда при* $u_* = \dfrac{(p_1 + q_2)\tilde{\tau} + (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})(-D/4)^{1/2}\operatorname{sign} \tilde{\beta}}{(p_1 + q_2)\tilde{\tau} - (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})(-D/4)^{1/2}\operatorname{sign} \tilde{\beta}}$, *если* $|u_*| \leq 1$, *то* $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, $v = v_*$, *где* $\sigma_* = \operatorname{sign} \tilde{\beta}$, $v_* = \dfrac{D((\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})^2/4 + \tilde{\tau}^2)}{((p_1 + q_2)\tilde{\tau} - (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})(-D/4)^{1/2}\operatorname{sign} \tilde{\beta})^2}$, *а если* $|u_*| > 1$, *то* $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} v_*$, $u = u_*^{-1}$, $v = v_* u_*^{-2}$ $(|u| \leq 1,\ 4v < -(1 - u)^2)$.

Здесь $D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1$, *а* λ_1, λ_2 *и* σ_0 *из* (41), $\tilde{\tau} = (\tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma})^{1/2}$.

5.5 Построение $\mathbf{CF^{m,2}}$ при отрицательном дискриминанте $\mathbf{P_0}$

Список 8. $NSF^{m,2,<}$ системы (14) до $NSF_2^{4,2,<}$ включительно с указанием для каждой (см. (28)) вектора $(\alpha, 2\beta, \gamma)$, матрицы H, ее собственных чисел, $D_0 < 0$ и D $(\sigma = \pm 1)$

$$NSF_{8,+}^{4,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & +u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}_8, \quad (1,0,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} D_0 = -4, \\ D = (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$NSF_{34,+}^{4,2,<} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & +u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{12}, \quad (1,0,1), \ \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm u^{1/2}, \quad \begin{matrix} D_0 = -4, \\ D = 4u; \end{matrix}$$

$$NSF_7^{5,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{11}, \quad (1,-1,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} D_0 = -3, \\ D = (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$NSF_{22}^{5,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}, \quad (1,-1,1), \ \sigma \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{D})/2, \quad \begin{matrix} D_0 = -3, \\ D = 4u+1; \end{matrix}$$

$$NSF_1^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{12}, \ v > 1/4, \quad (1,1,v), \ \sigma \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} D_0 = 1-4v, \\ D = (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$NSF_3^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{13}, \ \begin{matrix} v > 1/4 \\ v \neq 1 \end{matrix}, \ (1,1,v), \ \sigma \begin{pmatrix} u & -uv \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}, \ \begin{matrix} D_0 = 1-4v, \\ D = (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$NSF_4^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}, \quad (1,0,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} D_0 = -4, \\ D = (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$NSF_5^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & u(v-1) & -uv \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{14}, \ \begin{matrix} v > 1/4 \\ v \neq 1 \end{matrix}, \ (1,1,v), \ \sigma \begin{pmatrix} u & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}, \ \begin{matrix} D_0 = 1-4v, \\ D = (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$NSF_6^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{14}, \ \begin{matrix} v \in (0, \sqrt[3]{4}) \\ v \neq 1 \end{matrix}, \quad (1,-v,v^{-1}), \ \sigma \begin{pmatrix} u & uv^{-2} \\ 1 & v \end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,2} = (u + v \pm \sqrt{D})/2, \ D_0 = (v^3-4)v^{-1}, \ D = (u-v)^2 + 4uv^{-2};$

$$NSF_7^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{15}, \ v \neq -u, \quad (1,-1,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & u+v \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,2} = (u + 1 \pm \sqrt{(u+1)^2 + 4v})/2, \quad D_0 = -3, \quad D = (u+1)^2 + 4v;$

$$NSF_{11}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{16}, \quad (1,0,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (u \pm \sqrt{D})/2, \quad \begin{matrix} D_0 = -4, \\ D = u^2 + 4v; \end{matrix}$$

$$NSF_{12}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & -uv & u & -uv^2 \\ 1 & 0 & v-v^{-2} & 1 \end{pmatrix}_{16}, \ \begin{matrix} v > 4^{-1/3} \\ v \neq 1 \end{matrix}, \quad (1, v^{-1}, v), \ \sigma \begin{pmatrix} 0 & -uv \\ 1 & v^{-1} \end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1-4uv^3})/(2v), \ D_0 = (1-4v^3)v^{-2}, \ D = (1-4uv^3)v^{-2};$

$$NSF_{13}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & uv & uv^2(1+v) \\ 1 & 1 & 0 & v(1+v)^2 \end{pmatrix}_{16}, \ v \in (-\infty, -4/3) \cup (0, +\infty), \ (1, -v, v^2+v), \ \sigma \begin{pmatrix} u & uv \\ 1 & 1+v \end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,2} = (u + v + 1 \pm \sqrt{D})/2, \ D_0 = -v(3v+4), \ D = (u+v+1)^2 - 4u;$

$$NSF_{15}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & -uv^2 & u & -uv \\ 1 & v-v^{-2} & 0 & 1 \end{pmatrix}_{17}, \ \begin{matrix} v > 4^{-1/3} \\ v \neq 1 \end{matrix}, \quad (1, -v^{-2}, v^{-1}), \ \sigma \begin{pmatrix} 0 & -uv^2 \\ 1 & v \end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,2} = (v \pm \sqrt{D})/2, \ D_0 = (1-4v^3)v^{-4}, \ D = v^2(1-4u);$

$$NSF_{16}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & u & uv \\ 1 & 1 & v & 0 \end{pmatrix}_{18}, \ v > 1/4, \quad (1,1,v), \ \sigma \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm u^{1/2}, \quad \begin{matrix} D_0 = 1-4v, \\ D = 4u; \end{matrix}$$

$$NSF_1^{7,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv-u+w & v(w-u) \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{16}, \begin{matrix} v > 1/4 \\ w \neq u, u(1-v) \end{matrix}, \quad (1,1,v),\ \sigma \begin{pmatrix} u & w-u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 = u,\ \lambda_2 = 1,\ D_0 = 1-4v,\ D = (u-1)^2;$

$$NSF_2^{7,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1} - v(uv+w) & u+wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{17}, \begin{matrix} v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1 \\ w \neq -uv, uv^{-2}-uv \end{matrix},$$

$$(1,-v,v^{-1}),\ \sigma \begin{pmatrix} u & uv+w \\ 1 & v \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (u+v\pm\sqrt{D})/2, \quad \begin{matrix} D_0 = (v^3-4)/v, \\ D = (u+v)^2+4w. \end{matrix}$$

Список 9. Двенадцать $CF_i^{m,2,<}$ и $CSF_i^{m,2,<}$ системы (14) при $l=2$ и $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma < 0$ $(\sigma = \pm 1)$.

$$CF_{8,+}^{4,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & +u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}_8, \begin{matrix} |u| \le 1 \\ [|u| > 1] \end{matrix}; \qquad CF_{34,+}^{4,2,<} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & +u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{12}, \begin{matrix} |u|<1,\ u=-1 \\ [u>1] \end{matrix};$$

$$CF_7^{5,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{11}, \quad u \neq -1, 3; \qquad CF_{22}^{5,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}, \ u \neq 3/2;$$

$$CF_1^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{12}, \begin{matrix} |u| \le 1 \\ [|u|>1] \end{matrix}, \begin{matrix} v > 1/4,\ v \neq (3u^2+3u+1)(u^2+3u+3)(3u^2+8u+3)^{-2}, \\ v \neq (u^2-3u+3)(u-3)^{-2},\ (3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2}; \end{matrix}$$

$$CF_3^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1-v & 0 & -v^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{13}, \ v > 1/4,\ v \neq (49 \pm 7\sqrt{46})/6,\ 1/3,\ 1 \ \ (u=1);$$

$$CF_4^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & v & 1 & v \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}, \begin{matrix} 0 < v < 1 \\ [-1 < v < 0] \end{matrix} \ \ (u=1);$$

$$CSF_6^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{14}, \begin{matrix} v \in (0,1),\ u \in (u_-, u_+) \ \ (u<0), \\ u_{\mp} = v^3 - 2 \mp 2(1-v^3)^{1/2})v^{-2}; \end{matrix}$$

$$CSF_7^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{15}, \ v < -(u+1)^2/4, \ \ u \neq -v,\ -v/3-1,\ (2v-3)(3-v)^{-1};$$

$$CSF_{11}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{16}, \begin{matrix} u>0,\ [u<0],\ v < -u^2/4;\ v \neq \sqrt{3}u(3u^2+\sqrt{3}u-2)(4-3u^2)^{-1} \\ \text{при } u \in (0; \sqrt{6}(43-7\sqrt{37})^{1/2}/3) \cup (2/\sqrt{3}; \sqrt{6}(43+7\sqrt{37})^{1/2}/3); \end{matrix}$$

$$CSF_{13}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & uv & uv^2(1+v) \\ 1 & 1 & 0 & v(1+v)^2 \end{pmatrix}_{16}, \ v < -4/3, \ \ u \in (((-v)^{1/2}-1)^2, ((-v)^{1/2}+1)^2);$$

$$CSF_2^{7,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1} - v(uv+w) & u+wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{17}, \ 0 < v < \sqrt[3]{4},\ v \neq 1,\ w < -(u+v)^2/4 \le 0,$$
$$w \neq -uv, uv^{-2}-uv,\ 4v^2w^2 - 4v(2v^3-3uv^2-2)w + (v^3-3uv^2+2)^2 < 0.$$

Замечание 11. 1) В $NSF_6^{6,2,<,<}$ $v \neq 1$, $D_0 = (v^3-4)v^{-1} < 0 \Leftrightarrow v \in (0, \sqrt[3]{4})$ и $D = (v^2(u-v)^2 + 4u)v^{-2} < 0 \Leftrightarrow v^2u^2 - 2(v^3-2)u + v^4 < 0$. Это неравенство не имеет решений при $v > 1$, а при $v \in (0,1)$ имеем: $(v^3-2-2(1-v^3)^{1/2})v^{-2} < u < (v^3-2+2(1-v^3)^{1/2})v^{-2} < 0$.

Потому при $D < 0$ $CSF_6^{6,2,<,<}$ согласно н.п. 3 может быть пронормирована иначе: $CSF_6^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} -uv & u & 0 & u(1+v^2)^2 \\ 1 & 0 & 1 & -v(1+v^2) \end{pmatrix}_{14}$, и в ней $(1, v, 1+v^2)$, $\sigma \begin{pmatrix} -uv & u(v^2+1) \\ 1 & -v \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = (-v(u+1) \pm \sqrt{v^2(u+1)^2+4u})/2$, $D_0 = -3v^2-4$, $D = v^2(u+1)^2+4u$.

Естественно, $CSF_6^{6,2,<,<}$ с $u = u_*$, $v = v_*$ заменой (21) с $r_1 = v_*^{1/4}(1-v_*^3)^{-1/4}$, $s_2 = r_1^3$ сводится к $CSF_6^{6,2,<,<}$ с тем же σ, $u = u_* v_*^{-1}$, $v = -v_*^{3/2}(1-v_*^3)^{-1/2}$.

2) В $NSF_{13}^{6,2,<,<}$ $D_0 = -v(3v+4) < 0 \Leftrightarrow v \in (-\infty, -4/3) \cup (0, +\infty)$ и $D = (u+v+1)^2 - 4u < 0 \Leftrightarrow u^2 - 2(1-v)u + (v+1)^2 < 0$. Это неравенство не имеет решений при $v > 0$, а при $v \in (-\infty, -4/3)$ имеем: $((-v)^{1/2} - 1)^2 < u < ((-v)^{1/2} + 1)^2$.

Теорема 7. *Любая система* (14) *вида* (23) *с* $p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$ *и* $D_0 < 0$ *линейной неособой заменой* (16) *может быть сведена к одной из указанных в списке 9 линейно неэквивалентных канонических форм.*

Доказательство. Поскольку $\alpha\gamma > \beta^2$, $P_0(x)$ имеет комплексные корни и $\alpha\gamma > 0$. Тогда по предложению 3 $\alpha = 1$ и в системе (23) $P_0 = x_1^2 + 2\beta x_1x_2 + \gamma x_2^2$, $\gamma > \beta^2 \geq 0$.

Для любой из систем (42), (43), (45), полученных из системы (23), с учетом (29) введем $\tilde\tau = (\tilde\alpha\tilde\gamma - \tilde\beta^2)^{1/2} > 0$. При этом $\tilde\alpha, \tilde\gamma > 0$ (в квадратной скобке берется верхняя строка).

1) $D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1 > 0$, т.е. в (41) $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, вещественны и различны.

Из системы (23) заменой $L_>$ получена система (42) с $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$.

Произвольная замена (16) сводит (42) к системе (40), в которой $\breve\alpha\breve\gamma - \breve\beta^2 > 0$, $\breve\alpha, \breve\gamma > 0$.

При $r_2, s_1 = 0$ система (40) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde\alpha\lambda_1 r_1^2 & 2\tilde\beta\lambda_1 r_1 s_2 & \tilde\gamma\lambda_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & \tilde\alpha\lambda_2 r_1^2 & 2\tilde\beta\lambda_2 r_1 s_2 & \tilde\gamma\lambda_2 s_2^2 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

$\mathbf{1_1}$) $\tilde\beta = 0$. Тогда при $r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2}$, $s_2 = (\tilde\gamma|\lambda_2|)^{-1/2}$ система (56) является $CSF_{8,+}^{4,2,<,>} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_8$ с $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, где $\sigma_* = \operatorname{sign}\lambda_2$, $u_* = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq 1$.

Сделав в полученной $CSF_{8,+}^{4,2,<,>}$ замену (16) с $r_1, s_2 = 0$, $s_1, r_2 = |u_*|^{-1/2}$, снова перейдем в $CSF_{8,+}^{4,2,<,>}$, но с $u = u_*^{-1}$, $\sigma = \sigma_*\operatorname{sign} u_* (= \operatorname{sign}\lambda_1)$.

Поэтому, в 1_1) всегда можно получить $CF_{8,+}^{4,2,<,>}$ с $|u| < 1$ или $u = -1$.

$\mathbf{1_2}$) $\tilde\beta \neq 0$. Тогда при $r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2}$, $s_2 = \tilde\alpha^{1/2}|\lambda_2|^{3/2}(2\tilde\beta)^{-1}\lambda_2^{-2}$ система (56) – это $CSF_1^{6,2,<,>} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{12}$ с $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, $v = v_*$, где $\sigma_* = \operatorname{sign}\lambda_2$, $u_* = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq 1$, $v_* = \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} > 1/4$.

Сделав в полученной $CSF_1^{6,2,<,>}$ замену (16) с $r_1, s_2 = 0$, $r_2 = |u_*|^{3/2}|v_*|^{1/2}u_*^{-2}v_*^{-1}$, $s_1 = |u_*^{-1}v_*|^{1/2}$, снова получим $CSF_1^{6,2,<,>}$, но с $u = u_*^{-1}$, $v = v_*$, $\sigma = \sigma_*\operatorname{sign} u_* (= \operatorname{sign}\lambda_1)$.

Поэтому, в 1_2) всегда можно получить $CSF_1^{6,2,<,>}$ с $|u| < 1$ или $u = -1$.

В случае 1) существуют еще три $NSF^{m,2,<,>}$ из списка 8, претендующие на роль канонических форм, поскольку они предшествуют $CSF_1^{6,2,<,>}$ по с.п. 1. Это системы:

a) $NSF_{34,+}^{4,2,<,>} = \begin{pmatrix} 0 & u_* & 0 & u_* \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{12}$ с $u_* > 0$,

b) $NSF_7^{5,2,<,>} = \sigma \begin{pmatrix} u_* & -u_* & u_* & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{11}$ с $u_* \neq 1$,

c) $NSF_{22}^{5,2,<,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u_* & -u_* & u_* \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}$ с $u_* > -1/4$.

Получим последовательно эти формы непосредственно из $CSF_1^{6,2,<,>}$.

a) $CSF_1^{6,2,<,>}$ только при $u=-1$ $(v>1/4)$ заменой (16) с $r_1=-v^{1/4}(4v-1)^{-1/4}$, $s_1=v^{1/4}(2v^{1/2}-1)(4v-1)^{-3/4}\sigma$, $r_2=v^{-1/4}(4v-1)^{-1/4}$, $s_2=(2v^{1/2}-1)v^{-1/4}(4v-1)^{-3/4}\sigma$ сводится к $F_{34,+}^{4,2,<,>}$ с $u_*=(2v^{1/2}-1)^2(4v-1)^{-1}$, причем $0<u_*<1$, так как $v>1/4$.

Сделав в произвольной $NSF_{34,+}^{4,2,<,>}$ с $u=u_*$ замену (16) с $r_1,s_2=0$, $s_1,r_2=u_*^{-1/2}$, снова перейдем в $NSF_{34,+}^{4,2,<,>}$, но с $u=u_*^{-1}$.

b) $CSF_1^{6,2,<,>}$ с $|u|<1$, $u=-1$, $v>1/4$ сводится к $CSF_7^{5,2,<,>}$ $(u_*\neq 1)$ только в двух случаях: при $v=(u^2-3u+3)(u-3)^{-2}$ и при $v=(3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2}$ $(u\neq 1/3)$.

b_1) Положим, например, $s_1=0$ и $r_1=v(u-3)r_2$, тогда в получаемой системе $\breve{a}_1=0$ и $\breve{c}_2=0$, а элемент $\breve{b}_2=0$ $\Leftrightarrow$ $(u-3)^2v-u^2+3u-3=0$, т.е. при $v=(u^2-3u+3)(u-3)^{-2}$. Тогда $\breve{a}_2,\breve{d}_2=\sigma$ при $r_2=(u-3)(u^2-3u+3)^{-1/2}(u-1)^{-1}$, $s_2=(3-u)(u^2-3u+3)^{-1/2}$, и в $CSF_7^{5,2,<,>}$ $\sigma_*=\sigma$, $u_*=u$ $(|u_*|<1,\ u_*=-1)$.

b_2) Либо ($u\neq 1/3$) можно положить $s_2=0$ и $r_1=u(1-3u)^{-1}r_2$, тогда в получаемой системе $\breve{a}_1=0$ и $\breve{c}_2=0$, а элемент $\breve{b}_2=0$ $\Leftrightarrow$ $v(3u-1)^2-3u^2+3u-1=0$, т.е. при $v=(3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2}$. Тогда $\breve{a}_2,\breve{d}_2=\sigma$ при $s_1=-|u|^{-1/2}$, $r_2=(3u-1)(u-1)^{-1}|u|^{-1/2}$, и в $CSF_7^{5,2,<,>}$ $\sigma_*=\sigma\,\mathrm{sign}\,u$, $u_*=u^{-1}$ $(|u_*|>1,\ u_*=-1)$. Таким образом, $u_*\neq 1,3$.

b_3) $CSF_7^{5,2,<,>}$ при $u_*=-1$ заменой, обратной к любой из вышеперечисленных (например, с $r_1=-2/\sqrt{7}$, $s_1=0$, $r_2=1/\sqrt{7}$, $s_2=\sqrt{7}/4$), сводится к $CSF_1^{6,2,<,>}$ с $u=-1$, $v=7/16$, а та, как установлено в a), сводится к $CSF_{34,+}^{4,2,<,>}$ с $u=(11-4\sqrt{7})/3$.

b_4) $CSF_7^{5,2,<,>}$ при $u_*=3$ заменой (16) с $r_1=0$, $s_1=2/3$, $r_2=1/\sqrt{3}$, $s_2=1/3$ сводится к $CF_{8,+}^{4,2,<,>}$ с тем же σ и $u=1/3$.

Следовательно, $CSF_7^{5,2,<,>}=CF_7^{5,2,<,>}$ при $u\neq\pm 1,3$.

c) Пусть $CSF_1^{6,2,<,>}$ с $|u|<1, v>1/4$ заменой (16) сводится к $CSF_{22}^{5,2,<,>}$ $(u_*>-1/4)$.

c_1) В $CSF_{22}^{5,2,<,>}$ элемент $\breve{a}_1=0$ $\Leftrightarrow$ $r_1=u^{-1}r_2s_1s_2^{-1}$, а элемент $\breve{b}_2=0$ $\Leftrightarrow$ $s_2^{\pm}=(-u-1\pm æ^{1/2})(uv(u+3))^{-1}s_1$, если при этом $æ=(u+1)^2-v(3u^2+10u+3)\geq 0$.

Имеем: $æ>0$ при $-1<u\leq -1/3$; $æ\geq 0$ при $u>-1/3$, $v\leq (u+1)^2(3u^2+10u+3)^{-1}$.

При таких $r_1,s_2^{\pm}$ элемент $\breve{c}_2=0$, если разрешимо хотя бы одно из двух уравнений $3u+2-(u+1\mp æ^{1/2})(u(u^2+4u+5)\pm(2u+3)æ^{1/2})(uv)^{-1}(u+3)^{-2}=0$.

При $u\neq(\sqrt{7}-4)/3$ оба этих уравнения имеют единственное решение $v_0=(3u^2+3u+1)(u^2+3u+3)(3u^2+8u+3)^{-2}>1/4$, при этом $v_0\leq(u+1)^2(3u^2+10u+3)^{-1}$, если $u>-1/3$. Тогда $æ=u^2(u-1)^2(3u^2+8u+3)^{-2}$, и при $u\in(-1,(\sqrt{7}-4)/3)\cup(0,1)$ $æ^{1/2}=u(1-u)(3u^2+8u+3)^{-1}$, а при $u\in((\sqrt{7}-4)/3,0)$ $æ^{1/2}=u(u-1)(3u^2+8u+3)^{-1}$.

Поскольку $s_2^+=0$, если $u=-1/3$, то при $u\in((\sqrt{7}-4)/3,0)$ выбираем $s_2=s_2^-\neq 0$. Положив $s_1=uv_0^2(u+3)(u-1)(2uv_0-u+6v_0-1-æ^{1/2})(u+1+æ^{1/2})^{-3}r_2^3$, $r_2=(3u^2+8u+3)(u+1)^{-1/2}(u^2+3u+3)^{-1/2}(u-1)^{-1}$, из $CSF_1^{6,2,<,>}$ получим $CSF_{22}^{5,2,<,>}$ с тем же σ и $u_*=-u(u+1)^{-2}$, а значит, $u_*\in(0,3/2)$. Теперь при $u\in(-1,(\sqrt{7}-4)/3)\cup(0,1)$, $s_2=s_2^+$ выбираем $s_1=uv_0^2(u+3)(u-1)(2uv_0-u+6v_0-1+æ^{1/2})(u+1-æ^{1/2})^{-3}r_2^3$ и том же r_2 получим $CSF_{22}^{5,2,<,>}$ с теми же σ и u_*, но $u_*\in(-1/4,0)\cup(3/2,+\infty)$.

c_2) $CSF_{22}^{5,2,<,>}$ при $u=3/2$ заменой (16) с $r_2=(8/\sqrt{7}-8/3)^{1/2}$, $s_2=(10/\sqrt{7}+2)^{1/2}/3$, $r_1=-(1/\sqrt{7}+1/3)^{1/2}(\sqrt{7}-2)$, $s_1=(5/\sqrt{7}-1)^{1/2}(2\sqrt{7}+1)/9$ сводится к $CF_{8,+}^{4,2,>,>}$ с тем же σ и $u=(\sqrt{7}-4)/3$. Следовательно, $CSF_{22}^{5,2,<,>}=CF_{22}^{5,2,<,>}$ при $u>-1/4$, $u\neq 3/2$.

В итоге, $CSF_1^{6,2,<,>} = CF_1^{6,2,<,>}$ при $|u| < 1$, $v > 1/4$, $v \neq (u^2-3u+3)(u-3)^{-2}$, $(3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2}$, $(3u^2+3u+1)(u^2+3u+3)(3u^2+8u+3)^{-2}$.

2) $D = (p_1-q_2)^2 + 4p_2q_1 = 0$, т. е. в (41) $\lambda_1, \lambda_2 = (p_1+q_2)/2 \neq 0$.

$\mathbf{2_1}$) $q_1 \neq 0$. Из системы (23) заменой $L_=$ получена система (43).

Произвольная замена (16) сводит (43) к (40) с $\breve{\alpha}\breve{\gamma} - \breve{\beta}^2 > 0$, $\breve{\alpha}, \breve{\gamma} > 0$.

При $r_1 = 0$, $s_1 = \tilde{\gamma}^{1/2}|\lambda\tilde{\tau}|^{-1/2}$, $r_2 = |\tilde{\gamma}\lambda|^{-1/2}$, $s_2 = -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}s_1$ система (40) является $CSF_4^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda$, $u = 1$, $v = \tilde{\gamma}\lambda^{-1}\tilde{\tau}^{-1}$.

Если в полученной $CSF_4^{6,2,>,=}$ $v = v_* < 0$, то сделав замену (21) с $r_1 = -1$, $s_2 = 1$, получим $CSF_4^{6,2,>,=}$ с тем же σ и $v = -v_* > 0$.

Поэтому, в 2_1) всегда можно получить $CSF_4^{6,2,<,=}$ с $v > 0$.

В случае 2_1), когда жорданова $\tilde{H}$ в (43) не диагональна, существуют три $NSF^{m,2,<}$ из списка 8, претендующие на роль канонических форм, поскольку первые две из них предшествуют $NSF_4^{6,2,<,=}$ по с.п. 1, а последняя – по с.п. 2. Это системы:

a) $NSF_7^{5,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{11}$ $(u = -1)$,

b) $NSF_{22}^{5,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}$ $(u = -1/4)$,

c) $NSF_3^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1-v & 0 & -v^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{13}$ с $v > 1/4$, $v \neq 1$ $(u = 1)$.

Получим последовательно эти формы непосредственно из $CSF_4^{6,2,<,=}$.

a) $NSF_4^{6,2,<,=}$ при $v = 2/\sqrt{3}$ заменой (16) с $r_1 = -1/2$, $s_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{3}/2$, $s_2 = 0$ сводится к $NSF_7^{5,2,<,=} = CF_7^{5,2,<,=}$ с тем же σ.

b) $NSF_4^{6,2,<,=}$ при $v = 7/\sqrt{3}$ заменой (16) с $r_1 = -\sqrt{2/7}$, $s_1 = 5\sqrt{14}/28$, $r_2 = \sqrt{3/14}$, $s_2 = \sqrt{42}/28$ сводится к $NSF_{22}^{5,2,<,=} = CF_{22}^{5,2,<,=}$ с тем же σ.

c) Пусть $NSF_4^{6,2,<,=}$ с $v = v_*$ сводится к $NSF_3^{6,2,<,=}$ заменой (16). Тогда в $NSF_3^{6,2,<,=}$ элемент $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow r_2 = 0$, а элемент $\breve{c}_1 = 0 \Leftrightarrow s_1^{\pm} = (-v_* \pm (v_*^2-1)^{1/2})s_2$ и $|v_*| \geq 1$. При $r_1 = 1$ элемент $\breve{b}_2 = 1$, тогда $\breve{c}_2 = 2(-v_* \pm (v_*^2-1)^{1/2})s_2$ и при $s_2 = (2(-v_* \pm (v_*^2-1)^{1/2}))^{-1}$ получаем $NSF_3^{6,2,<,=}$ с тем же σ и $v = v_*(v_* \pm (v_*^2-1)^{1/2})/2 > 1/4$.

Согласно *a*) $NSF_4^{6,2,<,=}$ при $v = v_* = 2/\sqrt{3}$ эквивалентна $CF_7^{5,2,<,=}$. При таком v_* и $s_1 = s_1^+$ в $NSF_3^{6,2,<,=}$ $v = 1$, и после нормировки она является $CF_{a,7}^{5,2,<,=}$, предшествующей по с.п. 1. А при $s_1 = s_1^-$ в $NSF_3^{6,2,<,=}$ $v = 1/3$, и заменой с $r_1, s_1 = 1$, $r_2 = -3$, $s_2 = 0$ она также сводится к $CF_7^{5,2,<,=}$.

Согласно *b*) $NSF_4^{6,2,<,=}$ при $v = v_* = 7/\sqrt{3}$ эквивалентна $CF_{22}^{5,2,<,=}$. При таком v_* и $s_1 = s_1^{\pm}$ в $NSF_3^{6,2,<,=}$ $v = (49 \pm 7\sqrt{46})/6$, и композицией известных замен она сводится к предшествующей по с.п. 1 $CF_{22}^{5,2,<,=}$.

В результате $NSF_3^{6,2,<,=} = CF_3^{6,2,<,=}$ при $v > 1/4$, $v \neq (49 \pm 7\sqrt{46})/6,\ 1/3,\ 1$.

Кроме того, $NSF_4^{6,2,<,=} = CF_4^{6,2,<,=}$ при $0 < v < 1$.

$\mathbf{2_2}$) $q_1 = 0$, тогда в силу (25) $\lambda = p_1 = q_2 \neq 0$.

$\mathbf{2_2^1}$) $p_2 \neq 0$, т.е. $H = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}$. Нормировка (21) с $r_1 = 1$, $s_2 = p_2$ сводит (23) к системе (43) из 2_1) с $(\tilde\alpha, 2\tilde\beta, \tilde\gamma) = (1, 2\beta p_2, \gamma p_2^2)$ согласно (44_1) и $\lambda = p_1$.

$\mathbf{2_2^2}$) $p_2 = 0$, т.е. $H = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix}$. Произвольная замена (16) сводит (23) к системе (42), в которой $(\tilde\alpha, 2\tilde\beta, \tilde\gamma) = (r_1^2 + 2\beta r_1 r_2 + \gamma r_2^2,\ 2(r_1 s_1 + \beta(r_1 s_2 + s_1 r_2) + \gamma r_2 s_2),\ s_1^2 + 2\beta s_1 s_2 + \gamma s_2^2)$, $\tilde H = H$ из (23), $\lambda_1 = \lambda_2 = p_1$.

При $r_1 = -|\tilde\alpha\lambda|^{-1/2}\tilde\beta\tilde\tau^{-1}$, $s_1 = |\tilde\alpha\lambda|^{-1/2}$, $r_2 = \tilde\alpha^{1/2}|\lambda|^{-1/2}\tilde\tau^{-1}$, $s_2 = 0$ эта система является $CF_{8,+}^{4,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_8$ с $\sigma = \operatorname{sign}\lambda (= \operatorname{sign} p_1)$, $u = 1$.

Имеется еще только одна система, относящаяся к случаю 2_2^2), т.е. с диагональной матрицей H – это $NSF_1^{6,2,<,=}$ $(v > 1/4,\ u = 1)$. Заменой (16) с $r_1 = -2v^{1/2}(4v-1)^{-1/2}$, $s_1 = 0$, $r_2 = (v(4v-1))^{-1/2}$, $s_2 = v^{-1/2}$ она сводится к $CF_{8,+}^{4,2,<,=}$ с тем же σ.

$\mathbf{3}$) $D < 0$ $(p_2 q_1 < 0)$, т.е. собственные числа матрицы H – комплексно-сопряженные.

Из (23) получена система (45) с $\mu > 0$, которая произвольной заменой (16) сводится к системе (40), в которой $\breve\alpha$, $\breve\gamma > 0$, $\breve\alpha\breve\gamma > \breve\beta^2$, $\begin{pmatrix} \breve p_1 & \breve q_1 \\ \breve p_2 & \breve q_2 \end{pmatrix} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} \delta\theta - \delta_0\mu & -(s_1^2 + s_2^2)\mu \\ (r_1^2 + r_2^2)\mu & \delta\theta + \delta_0\mu \end{pmatrix}$, где $\delta = r_1 s_2 - r_2 s_1$, $\delta_0 = r_1 s_1 + r_2 s_2$. При этом $\breve p_2 \breve q_1 < 0$, поэтому в системе (40) $\breve a_2, \breve d_1 \neq 0$.

Для упрощения системы (40) будем последовательно накладывать различные условия на изначально произвольные коэффициенты замены (16) и исследовать, при каких ограничениях на коэффициенты системы (45) эти условия выполнимы.

$\mathbf{3_1}$) В (45) $\theta = 0$. Тогда система (40) принимает вид

$$-\mu\delta^{-1} \begin{pmatrix} \breve\alpha\delta_0 & \breve\alpha(s_1^2 + s_2^2) + 2\breve\beta\delta_0 & 2\breve\beta(s_1^2 + s_2^2) + \breve\gamma\delta_0 & \breve\gamma(s_1^2 + s_2^2) \\ -\breve\alpha(r_1^2 + r_2^2) & -\breve\alpha\delta_0 - 2\breve\beta(r_1^2 + r_2^2) & -2\breve\beta\delta_0 - \breve\gamma(r_1^2 + r_2^2) & -\breve\gamma\delta_0 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

$\mathbf{3_1^1}$) $\delta_0 = 0$, $\breve\beta = (\tilde\alpha r_1 + \tilde\beta r_2)s_1 + (\tilde\beta r_1 + \tilde\gamma r_2)s_2 = 0$, тогда $\breve a_1, \breve c_1, \breve b_2, \breve d_2 = 0$.

Пусть t_* – корень уравнения $\tilde\beta t^2 - (\tilde\alpha - \tilde\gamma)t - \tilde\beta = 0$, $\varphi_* = \tilde\alpha t_*^2 + 2\tilde\beta t_* + \tilde\gamma > 0$, $\psi_* = \tilde\gamma t_*^2 - 2\tilde\beta t_* + \tilde\alpha > 0$. Тогда система (57) при $r_1 = \mu^{-1/2}(\varphi_*\psi_*)^{-1/4}$, $s_1 = \mu^{-1/2} t_* \varphi_*^{-3/4}\psi_*^{1/4}$, $r_2 = -\mu^{-1/2} t_* \varphi_*^{-1/4}\psi_*^{-1/4}$, $s_2 = \mu^{-1/2}\varphi_*^{-3/4}\psi_*^{1/4}$ $(\delta = -\mu^{-1}(1 + t_*^2)\varphi_*^{-1})$ является $CSF_{34,+}^{4,2,<,<} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{12}$ с $u = u_*$, где $u_* = -\psi_*\varphi_*^{-1} < 0$.

Сделав в полученной $CSF_{34,+}^{4,2,<,<}$ замену (16) с $r_1, s_2 = 0$, $r_2, -s_1 = (-u_*)^{-1/2}$, опять перейдем в $CSF_{34,+}^{4,2,<,<}$, но с $u = u_*^{-1}$. Поэтому $CSF_{34,+}^{4,2,<,<} = CF_{34,+}^{4,2,<,<}$ с $-1 \le u < 0$.

$\mathbf{3_1^2}$) $\delta_0^2 + \breve\beta^2 \neq 0$. Если $\delta_0 = 0$, то в (57) только $\breve a_1, \breve d_2 = 0$. А если $\delta_0 \neq 0$, то $\breve a_1, \breve a_2, \breve d_1, \breve d_2 \neq 0$ и отличен от нуля еще хотя бы один элемент, иначе $l \neq 2$. Поэтому любая такая система (57) менее предпочтительна, чем $CF_{34,+}^{4,2,<,<}$, по с.п. 1.

$\mathbf{3_2}$) В (45) $\theta \neq 0$. Тогда в системе (40) $\breve p_1^2 + \breve q_2^2 \neq 0$ и $\breve a_1^2 + \breve d_2^2 \neq 0$ $(\tilde\tau^2 = \tilde\alpha\tilde\gamma - \tilde\beta^2 > 0)$.

Введем следующие обозначения для трех дискриминантов и двух многочленов:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{D}}_1 = (2\tilde\beta\theta \mp (\tilde\alpha - \tilde\gamma)\mu)^2 - 4(\tilde\alpha\theta \pm \tilde\beta\mu)(\tilde\gamma\theta \mp \tilde\beta\mu),\\
&\widetilde{\mathcal{D}}_2 = 25(\tilde\beta^2 - \tilde\alpha\tilde\gamma)\theta^4 + 2(2\tilde\alpha^2 + 13\tilde\beta^2 + 2\tilde\gamma^2 - 9\tilde\alpha\tilde\gamma)\theta^2\mu^2 + (\tilde\beta^2 - \tilde\alpha\tilde\gamma)\mu^4,\\
&\widetilde{\mathcal{D}}_3 = 16(\tilde\beta^2 - \tilde\alpha\tilde\gamma)\theta^6 + (\tilde\alpha^2 + 36\tilde\beta^2 + \tilde\gamma^2 - 34\tilde\alpha\tilde\gamma)\theta^4\mu^2 + \\
&\qquad +2(\tilde\alpha^2 + 12\tilde\beta^2 + \tilde\gamma^2 - 10\tilde\alpha\tilde\gamma)\theta^2\mu^4 + (\tilde\alpha^2 + 4\tilde\beta^2 + \tilde\gamma^2 - 2\tilde\alpha\tilde\gamma)\mu^6,\\
&Q_\pm(t_1,t_2) = (\tilde\alpha\theta \pm \tilde\beta\mu)t_1^2 + (2\tilde\beta\theta \mp (\tilde\alpha - \tilde\gamma)\mu)t_1t_2 + (\tilde\gamma\theta \mp \tilde\beta\mu)t_2^2.
\end{aligned} \tag{58}$$

В (58) оба многочлена Q_+ и Q_- имеют дискриминант $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ и не имеют общих нулей, а $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \geq 0$ как при $\tilde\beta\mu = \pm\tilde\alpha\theta, \pm\tilde\gamma\theta$, так и при $\tilde\beta\mu = -2\tilde\alpha\theta, 2\tilde\gamma\theta$ $(\tilde\beta \neq 0)$.

Действительно, подставляя, например, $\tilde\beta = 2\tilde\gamma\theta\mu^{-1}$ из последнего равенства в $\widetilde{\mathcal{D}}_1$, получаем $\widetilde{\mathcal{D}}_1 = (16\tilde\gamma^2\theta^4 + 4\tilde\gamma(4\tilde\gamma - \tilde\alpha)\theta^2\mu^2 + (\tilde\gamma - \tilde\alpha)^2\mu^4)\mu^{-2}$. Нули квадратного относительно θ^2 многочлена имеют вид $(4\tilde\gamma - \tilde\alpha \pm (12\tilde\gamma^2 - 3\tilde\alpha^2)^{1/2})\mu^2(8\tilde\gamma)^{-1}$. Если $\tilde\alpha > 2\tilde\gamma$, то его дискриминант отрицателен и $\widetilde{\mathcal{D}}_1 > 0$, если $\tilde\alpha \leq 2\tilde\gamma$, то оба нуля неположительные и $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \geq 0$.

Дискриминанты $\widetilde{\mathcal{D}}_1, \widetilde{\mathcal{D}}_2, \widetilde{\mathcal{D}}_3$ из (58) удается разложить на множители:

$\widetilde{\mathcal{D}}_1 = -\tilde\tau^2\mu^2(4\rho - (æ - 4)) = -4\tau^2\mu^2(\rho - (æ - 4)/4)$,

$\widetilde{\mathcal{D}}_2 = -\tilde\tau^2\mu^4(25\rho^2 - 2(2æ - 13)\rho + 1) = -25\tau^2\mu^4(\rho - \rho_0^-)(\rho - \rho_0^+)$,

$\widetilde{\mathcal{D}}_3 = -\tilde\tau^2\mu^6(16\rho^3 - (æ - 36)\rho^2 - 2(æ - 12)\rho - (æ - 4)) = -16\tau^2\mu^6(\rho + 1)^2(\rho - (æ - 4)/16)$,

здесь $\rho = \theta^2\mu^{-2} > 0$, $æ = (\tilde\alpha + \tilde\gamma)^2\tilde\tau^{-2} \geq 4$, $\rho_0^\mp = (2æ - 13 \mp 2((æ - 4)(æ - 9))^{1/2})/25$.

$\mathbf{3_2^1}$) $\breve\beta = (\tilde\alpha r_1 + \tilde\beta r_2)s_1 + (\tilde\beta r_1 + \tilde\gamma r_2)s_2 = 0$. Тогда система (40) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \breve\alpha\breve p_1 & \breve\alpha\breve q_1 & \breve\gamma\breve p_1 & \breve\gamma\breve q_1\\ \breve\alpha\breve p_2 & \breve\alpha\breve q_2 & \breve\gamma\breve p_2 & \breve\gamma\breve q_2 \end{pmatrix} \qquad (\breve p_2\breve q_1 < 0). \tag{59}$$

$\mathbf{3_2^{1a}}$) $\breve q_2 = \theta + \delta_0\delta^{-1}\mu = 0$ $(\breve p_1 \neq 0)$, что при $\breve\beta = 0$ равносильно $Q_-(r_1, r_2) = 0$. А это уравнение разрешимо при $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \geq 0$. Тогда в системе (59) $\breve b_2, \breve d_2 = 0$.

Если $\theta = \tilde\alpha^{-1}\tilde\beta\mu$ $(\tilde\beta \neq 0)$, то при $r_1 = (\tilde\tau\mu)^{-1/2}$, $s_1 = -\tilde\beta\tilde\tau^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = \tilde\alpha\tilde\tau^{-3/2}\mu^{-1/2}$ система (59) является $CSF_{11}^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v\\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{16}$ с $\sigma = 1$, $v = -(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)\tilde\tau^{-2}$, $u = 2\tilde\beta\tilde\tau^{-1}$, причем $v < -u^2/4$.

А если $\theta \neq \tilde\alpha^{-1}\tilde\beta\mu$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \geq 0$, то $\exists\, t_*$ – корень уравнения $Q_-(t, 1) = 0$ $(Q_+(t_*, 1) \neq 0)$, и при $r_1 = t_* r_2$, $s_1 = -(\tilde\beta t_* + \tilde\gamma)\mu^{-1/2}\tilde\tau^{-3/2}(1 + t_*^2)^{-1/2}$, $r_2 = (\tilde\tau\mu)^{-1/2}(1 + t_*^2)^{-1/2}$, $s_2 = (\tilde\alpha t_* + \tilde\beta)\mu^{-1/2}\tilde\tau^{-3/2}(1 + t_*^2)^{-1/2}$ система (59) – это опять $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = 1$, $u = Q_+(t_*, 1)(\mu\tilde\tau(t_*^2 + 1))^{-1}$, $v = -((\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)t_*^2 + 2\tilde\beta(\tilde\alpha + \tilde\gamma)t_* + \tilde\beta^2 + \tilde\gamma^2)\tilde\tau^{-2}(t_*^2 + 1)^{-1}$. При этом также $v < -u^2/4$.

Заменой (21) с $r_1 = 1$, $s_2 = -1$ $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$ сводится к $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = -\sigma_*$, $u = -u_*$. Следовательно, в $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ всегда можно получить $u > 0$.

$\mathbf{3_2^{1b}}$) $\breve p_1 = \theta - \delta_0\delta^{-1}\mu = 0$ $(\breve q_2 \neq 0)$, что при $\breve\beta = 0$ равносильно $Q_-(s_1, s_2) = 0$. А это уравнение разрешимо при $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \geq 0$. Тогда в системе (59) $\breve a_1, \breve c_1 = 0$.

Как 3_2^{1a}) выберем значения коэффициентов замены (16), только поменяем местами r_1 с s_1 и r_2 с s_2. Тогда система (59) – это $CSF_{a,11}^{6,2,<,<} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ v & u & v & u \end{pmatrix}_{16}$ с теми же u, v.

$\mathbf{3_2^{1c}}$) $\breve{p}_1\breve{q}_2 \neq 0$, что означает отсутствие в системе (59) нулевых элементов, и она не является канонической, так как системы из 3_2^{2c1}) предшествуют ей по с.п. 1.

$\mathbf{3_2^{2}}$) $\breve{\beta} \neq 0$.

$\mathbf{3_2^{2a}}$) $\breve{q}_2 = ((r_1\mu - r_2\theta)s_1 + (r_1\theta + r_2\mu)s_2)\delta^{-1} = 0$ $(\breve{p}_1 \neq 0)$. Тогда (40) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \breve{\alpha}\breve{p}_1 & \breve{\alpha}\breve{q}_1 + 2\breve{\beta}\breve{p}_1 & 2\breve{\beta}\breve{q}_1 + \breve{\gamma}\breve{p}_1 & \breve{\gamma}\breve{q}_1 \\ \breve{\alpha}\breve{p}_2 & 2\breve{\beta}\breve{p}_2 & \breve{\gamma}\breve{p}_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\breve{p}_2\breve{q}_1 < 0). \tag{60}$$

$\mathbf{3_2^{2a1}}$) $-2\breve{\beta} = \breve{\alpha}\breve{q}_1/\breve{p}_1 \neq \breve{\gamma}\breve{p}_1/\breve{q}_1$. Тогда (60) $= \begin{pmatrix} \breve{\alpha}\breve{p}_1 & 0 & (\breve{\gamma}\breve{p}_1^2 - \breve{\alpha}\breve{q}_1^2)p_1^{-1} & \breve{\gamma}\breve{q}_1 \\ \breve{\alpha}\breve{p}_2 & 2\breve{\beta}\breve{p}_2 & \breve{\gamma}\breve{p}_2 & 0 \end{pmatrix}$ и в ней $\breve{c}_1 \neq 0$. Поэтому при должном выборе двух свободных коэффициентов замены получим $NSF^{6,2,<,<}_{a,15} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & v - v^{-2} & 1 \\ -uv & u & -uv^2 & 0 \end{pmatrix}_{17}$ с $v > 4^{-1/3}$, $v \neq 1$.

Равенство $\breve{b}_1 = 0$ равносильно уравнению $(\tilde{\alpha}\mu^2 - 4\tilde{\beta}\theta\mu + 5\tilde{\alpha}\theta^2)r_1^2 + 2(\tilde{\beta}\mu^2 + 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})\theta\mu + 5\tilde{\beta}\theta^2)r_1r_2 + (\tilde{\gamma}\mu^2 + 4\tilde{\beta}\theta\mu + 5\tilde{\gamma}\theta^2)r_2^2 = 0$, разрешимому при $\widetilde{\mathcal{D}}_2 \geq 0$.

Неравенство $\widetilde{\mathcal{D}}_2 \geq 0$ с учетом ограничений æ ≥ 4 и $\rho > 0$ равносильно неравенствам æ ≥ 9 и $0 < \rho_0^- \leq \rho \leq \rho_0^+$. И оно не выполняется, если $\widetilde{\mathcal{D}}_1 < 0$, так как (æ $- 4)/4 > \rho_0^+$.

Таким образом, если $\widetilde{\mathcal{D}}_1 < 0$, то случай 3_2^{2a1}) не реализуется, а если $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \geq 0$, то $NSF^{6,2,<,<}_{15}$ – неканоническая по с.п. 2, она всегда сводится к $CSF^{6,2,<,<}_{11}$.

$\mathbf{3_2^{2a2}}$) $-2\breve{\beta} = \breve{\gamma}\breve{p}_1/\breve{q}_1 \neq \breve{\alpha}\breve{q}_1/\breve{p}_1$. Тогда (60) $= \begin{pmatrix} \breve{\alpha}\breve{p}_1 & (\breve{\alpha}\breve{q}_1^2 - \breve{\gamma}\breve{p}_1^2)q_1^{-1} & 0 & \breve{\gamma}\breve{q}_1 \\ \breve{\alpha}\breve{p}_2 & 2\breve{\beta}\breve{p}_2 & \breve{\gamma}\breve{p}_2 & 0 \end{pmatrix}$ и в ней $\breve{b}_1 \neq 0$. Поэтому при должном выборе двух свободных коэффициентов замены получим $NSF^{6,2,<,<}_{a,12} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & v - v^2 & 0 & 1 \\ -uv^2 & u & -uv & 0 \end{pmatrix}_{16}$ с $v > 4^{-1/3}$, $v \neq 1$.

Уравнение $\breve{c}_1 = 0$ равносильно $(2\tilde{\alpha}\theta^3 - 3\tilde{\beta}\theta^2\mu + (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})\theta\mu^2 - \tilde{\beta}\mu^3)r_1^2 + (4\tilde{\beta}\theta^3 + 3(\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})\theta^2\mu + (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})\mu^3)r_1r_2 + (2\tilde{\gamma}\theta^3 + 3\tilde{\beta}\theta^2\mu + (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})\theta\mu^2 + \tilde{\beta}\mu^3)r_2^2 = 0$, разрешимому при $\widetilde{\mathcal{D}}_3 \geq 0$.

Неравенство $\widetilde{\mathcal{D}}_3 \geq 0$ равносильно неравенству $0 < \rho \leq$ (æ $- 4)/16$. Очевидно, оно не выполняется, если $\widetilde{\mathcal{D}}_1 < 0$, так как тогда $\rho >$ (æ $- 4)/4$.

Таким образом, если $\widetilde{\mathcal{D}}_1 < 0$, то случай 3_2^{2a2}) не реализуется, а если $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \geq 0$, то $NSF^{6,2,<,<}_{12}$ – неканоническая, по с.п. 2 она всегда сводится к $CSF^{6,2,<,<}_{11}$.

$\mathbf{3_2^{2a3}}$) $-2\breve{\beta} = \breve{\alpha}\breve{q}_1/\breve{p}_1 = \breve{\gamma}\breve{p}_1/\breve{q}_1$. Тогда (60) $= \begin{pmatrix} \breve{\alpha}\breve{p}_1 & 0 & 0 & \breve{\gamma}\breve{q}_1 \\ \breve{\alpha}\breve{p}_2 & 2\breve{\beta}\breve{p}_2 & \breve{\gamma}\breve{p}_2 & 0 \end{pmatrix}$ и при должном выборе коэффициентов замены становится $CSF^{5,2,<,<}_{a,22} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ u & -u & u & 0 \end{pmatrix}_{14}$ с $u < -1/4$.

Выписывать в явном виде ограничения на систему (45), позволяющие привести ее к $CSF^{5,2,<,<}_{22}$, сложно, так как система $\breve{q}_2 = 0$, $\breve{b}_1 = 0$, $\breve{c}_1 = 0$ совместна, если $\widetilde{\mathcal{D}}_2, \widetilde{\mathcal{D}}_3 \geq 0$ и квадратные уравнения из случаев 3_2^{2a1}) и 3_2^{2a2}) имеют хотя бы один общий корень.

Но уже $\widetilde{\mathcal{D}}_2, \widetilde{\mathcal{D}}_3 \geq 0$ возможно только при $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \geq 0$, а значит, $CSF^{5,2,<,<}_{22}$ должна сводиться к $CSF^{6,2,<,<}_{11}$.

Поэтому найдем все замены, сводящие $CSF_{22}^{5,2,<,<}$ к $CSF_{11}^{6,2,<,<}$, что позволит выписать условия на элементы $CSF_{11}^{6,2,<,<}$, необходимые и достаточные для сведения ее к $CSF_{22}^{5,2,<,<}$.

Итак, рассмотрим произвольную $CSF_{22}^{5,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & w & -w & w \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}$ с $w < -1/4$ и построим замену, сводящую ее к $CSF_{11}^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{16}$ с $v < -u^2/4$.

Положим $s_1 = (wr_1^{-1}r_2 - 1)s_2$ и $r_2^{\mp} = (2w+3\mp(4w^2+9)^{1/2})(2w)^{-1}r_1$, тогда в получаемой системе $\breve{d}_2 = 0$ и $\breve{b}_2 = 0$ и она принимает вид

$$\breve{A} = \sigma \begin{pmatrix} f_{\mp}(w)r_1^2 & wf_{\mp}(w)r_1s_2 & g_{\mp}(w)s_2^2 & wg_{\mp}(w)r_1^{-1}s_2^3 \\ f_{\mp}(w)r_1^3s_2^{-1} & 0 & g_{\mp}(w)r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

где $f_{\mp} = (4w^2+3w+9\mp(w+3)(4w^2+9)^{1/2})(2w^2)^{-1} > 0$, $g_{\mp} = 2w^2+3\mp w(4w^2+9)^{1/2} > 0$.

В системе (61) $\breve{a}_2 = 1$ при $s_2 = f_{\mp}r_1^3$, после чего $\breve{c}_2 = 1$ при $r_1 = (f_{\mp}g_{\mp})^{-1/4}$. Тогда $(61) = \sigma \begin{pmatrix} f_{\mp}^{1/2}(w)g_{\mp}^{-1/2}(w) & wf_{\mp}(w)g_{\mp}^{-1}(w) & f_{\mp}^{-1/2}(w)g_{\mp}^{1/2}(w) & wf_{\mp}(w)g_{\mp}^{-1}(w) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. – это $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ либо с $u = f_-^{1/2}(w)g_-^{-1/2}(w) = u_-(w)$, $v = wf_-(w)g_-^{-1}(w) = v_-(w)$, либо с $u = f_+^{1/2}(w)g_+^{-1/2}(w) = u_+(w)$, $v = wf_+(w)g_+^{-1}(w) = v_+(w)$, причем $v_{\mp} \equiv wu_{\mp}^2$. И $u_-(w) \in (0; \sqrt{6}(43-7\sqrt{37})^{1/2}/3)$, $u_+(w) \in (2/\sqrt{3}; \sqrt{6}(43+7\sqrt{37})^{1/2}/3)$ при $w < -1/4$.

Решая оба уравнения $u_{\mp} = f_{\mp}^{1/2}(w)g_{\mp}^{-1/2}(w)$ относительно w, получаем две функции:

$$w_1(u) = \frac{-3u - \sqrt{3}(3u^2-2)}{u(3u^2-4)}, \quad w_2(u) = \frac{-3u + \sqrt{3}(3u^2-2)}{u(3u^2-4)}. \tag{62}$$

Функция $w_2(u) > 0$ при $u \in (0; \sqrt{6}(43+7\sqrt{37})^{1/2}/3)$, поэтому не подходит. А функция $w_1(u) < -1/4$ при $u \in (0; \sqrt{6}(43-7\sqrt{37})^{1/2}/3) \cup (2/\sqrt{3}; \sqrt{6}(43+7\sqrt{37})^{1/2}/3)$.

В результате $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ при $u \in (0; \sqrt{6}(43-7\sqrt{37})^{1/2}/3)$ заменой, обратной к вышеуказанной, взятой с верхним знаком, а при $u \in (2/\sqrt{3}; \sqrt{6}(43+7\sqrt{37})^{1/2}/3)$ заменой, обратной к вышеуказанной, взятой с нижним знаком, и $v = w_1(u)u^2$ сводится к $CSF_{22}^{5,2,<,<} = CF_{22}^{5,2,<,<}$ с тем же σ, $w = w_1(u)$ $(w < -1/4)$.

$\mathbf{3_2^{2a4}}$) $-2\breve{\beta} \neq \breve{\alpha}\breve{q}_1/\breve{p}_1, \breve{\gamma}\breve{p}_1/\breve{q}_1$.

Тогда в (60) только $\breve{d}_2 = 0$ и она при должном выборе коэффициентов замены станет $NSF_4^{7,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv-u+w & (w-u)v \\ 1 & 1 & v & 0 \end{pmatrix}_{19}$ с $v > 1/4$, $u^2+4(w-u) < 0$, $w \neq u, u(1-v)$, но неканонической, так как системы из 3_2^{2c1}) предшествуют ей по с.п. 2.

$\mathbf{3_2^{2b}}$) $\breve{p}_1 = 0$ $(\breve{q}_2 \neq 0)$. По аналогии с 3_2^{1b}) в этом случае будут получены системы, которые перенумерацией (22) сводятся к соответствующим системам из 3_2^{2a}).

$\mathbf{3_2^{2c}}$) $\breve{p}_1, \breve{q}_2 \neq 0$, т. е. $\theta \neq \pm\delta_0\delta^{-1}\mu$. Тогда в (40) $\breve{a}_1, \breve{d}_2 \neq 0$, $\breve{b}_1^2 + \breve{b}_2^2 \neq 0$, $\breve{c}_1^2 + \breve{c}_2^2 \neq 0$.

В этом пункте будут использоваться следующие многочлены Q и константы ψ :

$$
\begin{aligned}
&Q_1(r_1,r_2)=3\tilde\alpha r_1^3\mu+(4\tilde\beta\mu-\tilde\alpha\theta)r_1^2r_2+(2\tilde\alpha\mu-2\tilde\beta\theta+\tilde\gamma\mu)r_1r_2^2+(2\tilde\beta\mu-\tilde\gamma\theta)r_2^3,\\
&Q_2(r_1,r_2)=(2\tilde\beta\mu+\tilde\alpha\theta)r_1^3+(\tilde\alpha\mu+2\tilde\gamma\mu+2\tilde\beta\theta)r_1^2r_2+(4\tilde\beta\mu+\tilde\gamma\theta)r_1r_2^2+3\tilde\gamma\mu r_2^3,\\
&Q_3(t)=\psi_1t^4+2(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)(2\tilde\beta\theta+(\tilde\alpha-\tilde\gamma)\mu)t^3+((2\tilde\alpha\tilde\gamma+4\tilde\beta^2)\theta^2+6\tilde\beta(\tilde\alpha-\tilde\gamma)\theta\mu+\\
&\qquad+(\tilde\alpha^2+\tilde\gamma^2+16\tilde\alpha\tilde\gamma-20\tilde\beta^2)\mu^2)t^2+2(\tilde\gamma\theta+\tilde\beta\mu)(2\tilde\beta\theta+(\tilde\alpha-\tilde\gamma)\mu)t+(\tilde\gamma\theta+\tilde\beta\mu)^2+9\tilde\tau^2\mu^2,\\
&Q_4(t)=(2\tilde\alpha\theta+\tilde\beta\mu)t^2+(4\tilde\beta\theta-\tilde\alpha\mu+\tilde\gamma\mu)t+2\tilde\gamma\theta-\tilde\beta\mu,\\
&Q_5^{\pm}(u,v)=u(v^2+3uv-9u)-(v-6u-3)v+9u\pm(v^2+3uv-9u)^{1/2}(2uv+v+3u^2+3),\\
&Q_6(t)=(\tilde\alpha^2\theta^2+4\tilde\alpha\theta\tilde\beta\mu+\mu^2(9\tilde\alpha^2+4\tilde\beta^2))t^4+4(\tilde\beta\tilde\alpha\theta^2+\mu(2\tilde\beta^2-\tilde\alpha^2+\tilde\alpha\tilde\gamma)\theta+\tilde\beta\mu^2(2\tilde\gamma+7\tilde\alpha))t^3\\
&\qquad+2((2\tilde\beta^2+\tilde\alpha\tilde\gamma)\theta^2-6\tilde\beta\mu(\tilde\alpha-\tilde\gamma)\theta+\mu^2(2\tilde\gamma^2+2\tilde\alpha^2+5\tilde\alpha\tilde\gamma+14\tilde\beta^2))t^2+\\
&\qquad+4(\tilde\beta\theta^2\tilde\gamma-\mu(\tilde\alpha\tilde\gamma-\tilde\gamma^2+2\tilde\beta^2)\theta+\tilde\beta\mu^2(2\tilde\alpha+7\tilde\gamma))t+\tilde\gamma^2\theta^2-4\tilde\beta\tilde\gamma\theta\mu+(4\tilde\beta^2+9\tilde\gamma^2)\mu^2;\\
&\psi_1=(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^2+9\tilde\tau^2\mu^2,\quad \psi_2=(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^2-3\tilde\tau^2\mu^2,\quad \psi_3=(\tilde\alpha\theta+2\tilde\beta\mu)^2+9\tilde\alpha^2\mu^2,\\
&\psi_4=\tilde\alpha^3\theta^3+3\tilde\alpha(\tilde\alpha^2+2\tilde\alpha\tilde\gamma-2\tilde\beta^2)\theta\mu^2-\tilde\beta(3\tilde\alpha(\tilde\alpha-\tilde\gamma)+4\tilde\beta^2)\mu^3.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

$\mathbf{3_2^{2c1}}$) $-2\breve\beta=\breve\alpha\breve q_2/\breve p_2\neq\breve\gamma\breve p_1/\breve q_1,\breve\gamma\breve p_2/\breve q_2,$ т. е. $\breve b_2=0$ $(\breve b_1\neq 0)$ и $\breve c_1,\breve c_2\neq 0.$

Тогда (40) $=\begin{pmatrix}\breve\alpha\breve p_1 & -\breve\alpha\delta_{\breve p\breve q}p_2^{-1} & (\breve\gamma\breve p_1\breve p_2-\breve\alpha\breve q_1\breve q_2)p_2^{-1} & \breve\gamma\breve q_1\\ \breve\alpha\breve p_2 & 0 & (\breve\gamma\breve p_2^2-\breve\alpha\breve q_2^2)p_2^{-1} & \breve\gamma\breve q_2\end{pmatrix}$ и $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ ей предшествует по с.п. 1. Поэтому ее имеет смысл нормировать только при $\widetilde{\mathcal D}_1<0,$ когда, в частности, $\tilde\beta\mu\neq\pm\tilde\alpha\theta,\pm\tilde\gamma\theta,-2\tilde\alpha\theta,2\tilde\gamma\theta,$ и $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ невозможно получить.

Условие $-2\breve\beta=\breve\alpha\breve q_2/\breve p_2,$ аннулируя $\breve b_2,$ дает связь $s_1Q_1(r_1,r_2)+s_2Q_2(r_1,r_2)=0.$

Выберем, например, $r_2=0.$ Тогда при $s_1=-(3/2)^{1/2}(\tilde\alpha\theta+2\tilde\beta\mu)|\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu|^{1/2}\psi_1^{-1/2}(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^{-1},$ $s_2=3^{3/2}\tilde\alpha\mu|\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu|^{1/2}(2\psi_1)^{-1/2}(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^{-1},$ $r_1=3^{1/2}(2|\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu|\psi_1)^{-1/6}$ система (40) – это $CSF_2^{7,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u & w & uv^{-1}-v(uv+w) & u+wv^{-1}\\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1\end{pmatrix}_{17}$ с $v=2^{2/3}(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^{2/3}\psi_1^{-1/3},$ $u=4^{1/3}(2\tilde\alpha\theta+\tilde\beta\mu)((\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)\psi_1)^{-1/3},$ $w=-9\tilde\alpha^2(\theta^2+\mu^2)(2\psi_1(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu))^{-2/3},$ $\sigma=\mathrm{sign}(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu),$ причем $w<-(u+v)^2/4\le 0,$ $w\neq -uv,\ uv^{-2}-uv,$ $v\in(0,\sqrt[3]{4})\backslash\{1\}.$

Если не выбирать $r_1=0$ или $r_2=0,$ то, чтобы получить $\breve d_2=1,$ нужно решить уравнение шестой степени относительно r_1 или $r_2,$ условия разрешимости которого выписать невозможно. Однако, если бы удалось его решить, то, вероятно, еще один из коэффициентов в $CSF_2^{7,2,<,<}$ удалось бы сделать равным единице по модулю и получить $CF_2^{7,2,<,<}.$

Возьмем любую $CSF_2^{7,2,<,<}$ и попробуем построить замену, сводящую ее к $CSF_{11}^{6,2,<,<}.$

Положим в (16) $(r_1-ur_2)s_1=(uvr_2-vr_1+wr_2)s_2,$ тогда в получаемой из $CSF_2^{7,2,<,<}$ системе $\breve d_2=0.$ Теперь $\breve b_2=0\Leftrightarrow 3v^2r_1^2-(v^3+3uv^2+2vw+2)r_1r_2+(uv^3+2u+v^2w)r_2^2=0.$ Это уравнение разрешимо, если $\mathcal D_4=4v^2w^2-4v(2v^3-3uv^2-2)w+(v^3-3uv^2+2)^2\ge 0.$

Таким образом для $CSF_2^{7,2,<,<}$ имеет место дополнительное ограничение: $\mathcal D_4<0.$

$\mathbf{3_2^{2c2}}$) $-2\breve\beta=\breve\gamma\breve p_1/\breve q_1\neq\breve\alpha\breve q_1/\breve p_1,\breve\alpha\breve q_2/\breve p_2.$

Этот случай, в котором только $\breve c_1=0,$ перенумерацией сводится к предыдущему.

$\mathbf{3_2^{2c3}}$) $-2\breve\beta=\breve\gamma\breve p_2/\breve q_2\neq\breve\alpha\breve q_1/\breve p_1,\breve\alpha\breve q_1/\breve p_1.$

Тогда в (40) только $\breve c_2=0$ и при должном выборе коэффициентов замены она превратится $NSF_3^{7,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u & w & v(w-u) & v(w-uv)(v-1)\\ 1 & 1 & 0 & -v(v-1)^2\end{pmatrix}_{18}$ с $v\in(-\infty,0)\cup(4/3,+\infty),$

$(u-v+1)^2+4w-4u<0,\ \ w\neq u,\, uv.$ Но $NSF_3^{7,2,<,<}$ – неканоническая, поскольку ей предшествует $CSF_2^{7,2,<,<}$ согласно с.п. 2.

$\mathbf{3_2^{2c4}}$) $\ -2\breve\beta=\breve\gamma\breve q_1/\breve p_1\neq\breve\gamma\breve p_1/\breve q_1,\breve\gamma\breve p_1/\breve q_1.$

Этот случай, в котором только $\breve b_1=0,$ перенумерацией сводится к предыдущему.

$\mathbf{3_2^{2c5}}$) $\ -2\breve\beta=\breve\alpha\breve q_2/\breve p_2=\breve\gamma\breve p_2/\breve q_2\ \ (\breve b_2,\,\breve c_2=0).$

Тогда система $(40)=\begin{pmatrix}\breve\alpha\breve p_1 & -\breve\alpha\delta_{\breve p\breve q}p_2^{-1} & \breve\gamma\delta_{\breve p\breve q}q_2^{-1} & \breve\gamma\breve q_1\\ \breve\alpha\breve p_2 & 0 & 0 & \breve\gamma\breve q_2\end{pmatrix}$ и при определенных r_1,s_1,r_2,s_2 превращается в $SF_7^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u & v & -v & u+v\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{15}.$

Условие $-2\breve\beta=\breve\alpha\breve q_2/\breve p_2,$ аннулируя $\breve b_2,$ дает связь $s_1Q_1(r_1,r_2)+s_2Q_2(r_1,r_2)=0.$ Тогда условие $-2\breve\beta=\breve\gamma\breve p_2/\breve q_2,$ аннулирующее $\breve c_2,$ требует разрешимости уравнения

$$\begin{gathered}\psi_2r_1^4+2(2\tilde\alpha\tilde\beta\theta^2-(\tilde\alpha\tilde\gamma-\tilde\alpha^2+2\tilde\beta^2)\theta\mu-\tilde\beta(\tilde\alpha-\tilde\gamma)\mu^2)r_1^3r_2+\\ +((2\tilde\alpha\tilde\gamma+4\tilde\beta^2)\theta^2+6\tilde\beta(\tilde\alpha-\tilde\gamma)\theta\mu+(\tilde\alpha^2+4\tilde\beta^2-8\tilde\alpha\tilde\gamma+\tilde\gamma^2)\mu^2)r_1^2r_2^2+\\ +2(2\tilde\beta\tilde\gamma\theta^2-(\tilde\gamma^2-2\tilde\beta^2-\tilde\alpha\tilde\gamma)\theta\mu+\tilde\beta(\tilde\alpha-\tilde\gamma)\mu^2)r_1r_2^3+((\tilde\gamma\theta+\tilde\beta\mu)^2-3\tilde\tau^2\mu^2)r_2^4=0.\end{gathered}\tag{64}$$

Если $\psi_2=0\ \ (\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu\neq0)$, то при $r_2=0,\ \ r_1=3^{1/2}(24\mu^2\tilde\tau^2|\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu|)^{-1/6},\ \ s_1=-(2\tilde\beta\mu+\tilde\alpha\theta)(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^{-1}|\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu|^{1/2}(8\mu^2\tilde\tau^2)^{-1/2}$ система (40) – это $SF_7^{6,2,<,<}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)$, $u=(2\tilde\alpha\theta+\tilde\beta\mu)(3\mu^2\tilde\tau^2)^{-1/3}(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^{-1/3},\ \ v=-(9/8)^{2/3}\tilde\alpha^2(\theta^2+\mu^2)(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^{-2/3}.$

Если $\psi_2\neq0$ и (64) не имеет вещественных корней, то случай 3_2^{2c5}) не реализуется. А если существует вещественное $t_*,$ что связь $r_1=t_*r_2$ удовлетворяет уравнению (64), то при $r_1=t_*r_2$ имеем: $\breve a_2=Q_1(t_*,1)r_2^3(3s_2)^{-1}\neq0,\ \ \breve d_2=2Q_-(t_*,1)Q_3(t_*)Q_1(t_*,1)^{-2}s_2^2/3\neq0.$ Тогда $\breve a_2=\sigma$ при $s_2=\sigma r_1^3Q_1(t_*,1)/3,$ а $\breve d_2=\sigma$ при $r_2=(2/27)^{-1/6}|Q_-(t_*,1)Q_3(t_*)|^{-1/6}$ и (40) – это $CSF_7^{6,2,<,<}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\mathrm{Q_-(t_*,1)Q_3(t_*)}),\ \ u=\sigma r_2^2(2/3)Q_4(t_*),\ \ v=-r_2^4(\theta^2+\mu^2)(2\tilde\alpha t_*^2+2\tilde\beta t_*+\tilde\gamma),$ если $Q_4(t_*)\neq0.$ При этом всегда $v<-(u+1)^2/4,\ \ u+v\neq0.$

Если же $Q_4(t_*)=0,$ то $CSF_7^{6,2,<,<}=CF_{22}^{5,2,<,<}$ с $u=v$ и тем же $\sigma.$

Выпишем условия на элементы произвольной $CSF_7^{6,2,<,<}$, необходимые и достаточные для сведения ее к $CF_{22}^{5,2,<,<}$. Для этого будем строить замену (16), сводящую $CSF_7^{6,2,<,<}$ к $CF_{22}^{5,2,<,<}=\sigma_*\begin{pmatrix}0 & u_* & -u_* & u_*\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{11}$ с $u_*<-1/4.$

Положим $s_1=(ur_1+(u+v)r_2)(r_1+r_2)^{-1}s_2$ и $r_1^\pm=(-v\pm(v^2+3uv-9u)^{1/2})(3u)^{-1}r_2,$ тогда в получаемой из $SF_7^{6,2,<,<}$ системе $\breve a_1=0$ и $\breve b_2=0,$ а $\breve c_2=0\ \Leftrightarrow\ Q_5^\pm(u,v)=0.$

Уравнение $Q_5^+=0$ имеет два вещественных ненулевых решения: $u=-v/3-1,$ $u=(2v-3)(3-v)^{-1},$ а $Q_5^-=0$ – только последнее, поэтому выберем замену с $r_1=r_1^+.$

Тогда при $u=-v/3-1\ \ (-36<v<0),\ \ r_2=\sqrt3(v+3)(27+v^2)^{-1/2}(-v)^{-1/2},\ \ s_2=6\sqrt3(27+v^2)^{-1/2}(-v)^{-1/2}$ получим $CF_{22}^{5,2,<,<}$ с $\sigma_*=\sigma$ и $u_*=9/v<-1/4.$

А при $u=(2v-3)(3-v)^{-1},\ \ r_2=3(3-v)^{1/2}(v^2-9v+27)^{-1/2}(-v)^{-1/2}$ и $s_2=(3-v)^{3/2}(v^2-9v+27)^{-1/2}(-v)^{-1/2}$ получим $CF_{22}^{5,2,<,<}$ с $\sigma_*=-\sigma$ и $u_*=(v-3)^2/v<-12.$

$\mathbf{3_2^{2c6}}$) $\ -2\breve\beta=\breve\alpha\breve q_1/\breve p_1=\breve\gamma\breve p_1/\breve q_1.$

Этот случай, в котором только $\breve b_1,\breve c_1=0,$ перенумерацией сводится к предыдущему.

$\mathbf{3_2^{2c7}}$) $\ -2\breve\beta=\breve\alpha\breve q_2/\breve p_2=\breve\gamma\breve p_1/\breve q_1\ \ (\breve b_2,\breve c_1=0).$

Тогда система (40) $= \begin{pmatrix} \breve{\alpha}\breve{p}_1 & -\breve{\alpha}\delta_{\breve{p}\breve{q}}p_2^{-1} & 0 & \breve{\gamma}\breve{q}_1 \\ \breve{\alpha}\breve{p}_2 & 0 & -\breve{\gamma}\delta_{\breve{p}\breve{q}}q_1^{-1} & \breve{\gamma}\breve{q}_2 \end{pmatrix}$ и при определенных r_1, s_1, r_2, s_2 превращается в $NSF_6^{6,2,<,<}$ с индексом четырнадцать.

Условие $-2\breve{\beta} = \breve{\alpha}\breve{q}_2/\breve{p}_2$, аннулируя $\breve{b}_2$, дает связь $s_1Q_1(r_1,r_2)+s_2Q_2(r_1,r_2) = 0$. Тогда условие $-2\breve{\beta} = \breve{\gamma}\breve{p}_1/\breve{q}_1$ равносильно уравнению

$$\psi_4r_1^6 + 3(2\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}\theta^3 + 2\tilde{\beta}(3\tilde{\alpha}^2 + 2\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} - 2\tilde{\beta}^2)\theta\mu^2 + (\tilde{\alpha}^3 - 2\tilde{\alpha}^2\tilde{\gamma} - 2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^2 - 2\tilde{\gamma}\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2\tilde{\alpha})\mu^3)r_1^5r_2+$$
$$+3(\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + 4\tilde{\beta}^2)\theta^3 + (7\tilde{\alpha}^2\tilde{\gamma} + 8\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^2 + 2\tilde{\gamma}^2\tilde{\alpha} - 2\tilde{\gamma}\tilde{\beta}^2)\theta\mu^2 + \tilde{\beta}(4\tilde{\alpha}^2 - 4\tilde{\beta}^2 - 3\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}^2)\mu^3)r_1^4r_2^2+$$
$$+(4\tilde{\beta}(2\tilde{\beta}^2 + 3\tilde{\alpha}\tilde{\gamma})\theta^3 + 60\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\theta\tilde{\gamma}\mu^2 + (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})(\tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + 24\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2)\mu^3)r_2^3r_1^3+$$
$$+3(\tilde{\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + 4\tilde{\beta}^2)\theta^3 + (2\tilde{\alpha}^2\tilde{\gamma} - 2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^2 + 7\tilde{\gamma}^2\tilde{\alpha} + 8\tilde{\gamma}\tilde{\beta}^2)\theta\mu^2 + \tilde{\beta}(\tilde{\alpha}^2 + 3\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + 4\tilde{\beta}^2 - 4\tilde{\gamma}^2)\mu^3)r_1^2r_2^4+$$
$$+3(2\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2\theta^3 + 2\tilde{\beta}(2\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} - 2\tilde{\beta}^2 + 3\tilde{\gamma}^2)\theta\mu^2 - (\tilde{\alpha}^2\tilde{\gamma} - 2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^2 - 2\tilde{\gamma}^2\tilde{\alpha} - 2\tilde{\gamma}\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^3)\mu^3)r_1r_2^5+$$
$$+(\tilde{\gamma}^3\theta^3 + 3\tilde{\gamma}(2\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^2 - 2\tilde{\beta}^2)\theta\mu^2 + \tilde{\beta}(4\tilde{\beta}^2 - 3\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + 3\tilde{\gamma}^2)\mu^3)r_2^6 = 0. \tag{65}$$

1) $\psi_4 = 0$ $(\Rightarrow 2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu \neq 0)$. Тогда в (40) $\breve{a}_1 = (2/3)(2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu)r_1^2$, $\breve{a}_2 = \tilde{\alpha}\mu r_1^3s_2^{-1}$, $\breve{d}_1 = (\tilde{\alpha}\theta - \tilde{\beta}\mu)\psi_3^2(\tilde{\alpha}\mu)^{-3}(2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu)^{-1}(81r_1)^{-1}s_2^3$, $\breve{c}_2 = -\tilde{\alpha}(\theta^2+\mu^2)(\tilde{\alpha}\theta - \tilde{\beta}\mu)\mu^{-1}(2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu)^{-1}r_1s_2$, $\breve{d}_2 = -(2/27)\psi_3(\tilde{\alpha}\theta - \tilde{\beta}\mu)^2(\tilde{\alpha}\mu)^{-2}(2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu)^{-1}s_2^2)$, следовательно, $\tilde{\alpha}\theta - \tilde{\beta}\mu \neq 0$, иначе, например, $\breve{d}_1 = 0$, что невозможно. Тогда при $r_1 = 3^{1/2}2^{-1/6}|2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu|^{1/6}\psi_3^{-1}(\tilde{\alpha}\theta - \tilde{\beta}\mu)^{-1/3}$, $s_1 = (3/2)^{1/2}(\tilde{\alpha}\theta + 2\tilde{\beta}\mu)|2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu|^{1/2}\psi_3^{-1/2}(\tilde{\alpha}\theta - \tilde{\beta}\mu)^{-1}\mathrm{sign}(2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu)$, $r_2 = 0$ получим $CSF_6^{6,2,<,<} = \sigma\begin{pmatrix} u & u(v^{-2} - v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix}_{14}$ с $\sigma = -\mathrm{sign}(2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu)$, $u = -2^{2/3}|2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu|^{4/3}(\tilde{\alpha}\theta - \tilde{\beta}\mu)^{-2/3}\psi_3^{-1/3}$, $v = -2^{2/3}(2\tilde{\alpha}\theta + \tilde{\beta}\mu)^{1/3}(\tilde{\alpha}\theta - \tilde{\beta}\mu)^{1/3}\psi_3^{-1/3}$.

2) $\psi_4 \neq 0$. Если (65) не имеет вещественных корней, то пункт 3_2^{2c7}) не реализуется. А если существует вещественное t_*, что связь $r_1 = t_*r_2$ удовлетворяет уравнению (65), то положив $r_1 = t_*r_2$, имеем: $\breve{a}_1 = (2/3)Q_4(t_*)r_2^2$, $\breve{d}_1 = -Q_3(t_*)Q_6(t_*)Q_1(t_*,1)^{-3}s_2^3(3r_2)^{-1}$, $\breve{a}_2 = Q_1(t_*,1)r_2^3(3s_2)^{-1}$, $\breve{d}_2 = (2/3)Q_-(t_*,1)Q_3(t_*)Q_1(t_*,1)^{-2}s_2^2$, следовательно, $Q_1(t_*,1)$, $Q_-(t_*,1)$, $Q_3(t_*)$, $Q_4(t_*)$, $Q_6(t_*) \neq 0$, иначе хотя бы один из коэффициентов $\breve{a}_1, \breve{d}_1, \breve{a}_2, \breve{d}_2$ равен нулю, что невозможно. Тогда $\breve{a}_2 = \sigma$ при $s_2 = \sigma r_2^3Q_1(t_*,1)/3$, а $\breve{d}_2 = \sigma$ при $r_2 = (27/2)^{1/6}|Q_-(t_*,1)Q_3(t_*)|^{-1/6}$ и система (40) – это $CSF_6^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\mathrm{Q}_-(\mathrm{t}_*,1)\mathrm{Q}_3(\mathrm{t}_*))$, $u = 2^{2/3}Q_4(t_*)|Q_-(t_*,1)Q_3(t_*)|^{-1/6}$, $v = -2^{4/9}Q_4(t_*)^{1/3}Q_2(t_*,1)^{4/9}Q_6(t_*)^{-1/3}$. При этом в каждом из случаев 1), 2) $v \in (0,1)$, $u \in ((v^3-2-2(1-v^3)^{1/2})v^{-2}, (v^3-2+2(1-v^3)^{1/2})v^{-2})$.

$\mathbf{3_2^{2c8}}$) $-2\breve{\beta} = \breve{\alpha}\breve{q}_1/\breve{p}_1 = \breve{\gamma}\breve{p}_2/\breve{q}_2$ $(\breve{b}_1, \breve{c}_2 = 0)$.

Тогда система (40) $= \begin{pmatrix} \breve{\alpha}\breve{p}_1 & 0 & \breve{\gamma}\delta_{\breve{p}\breve{q}}q_2^{-1} & \breve{\gamma}\breve{q}_1 \\ \breve{\alpha}\breve{p}_2 & \breve{\alpha}\delta_{\breve{p}\breve{q}}p_1^{-1} & 0 & \breve{\gamma}\breve{q}_2 \end{pmatrix}$ и при определенных r_1, s_1, r_2, s_2 превращается в $CSF_{13}^{6,2,<,<}$ с индексом 16, при $\widetilde{\mathcal{D}}_1 < 0$ неэквивалентную $CSF_{11}^{6,2,<,<}$.

Условие $-2\breve{\beta} = \breve{\alpha}\breve{q}_1/\breve{p}_1 \Leftrightarrow (3\tilde{\alpha}s_1^2\mu + (2\tilde{\beta}\mu - 2\tilde{\alpha}\theta)s_2s_1 + (\tilde{\alpha}\mu - 2\tilde{\beta}\theta)s_2^2)r_1^2 + ((4\tilde{\beta}\mu + 2\tilde{\alpha}\theta)s_1^2 + 2\mu(\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})s_2s_1 + (4\tilde{\beta}\mu - 2\tilde{\gamma}\theta)s_2^2)r_2r_1 + ((2\tilde{\beta}\theta + \mu\tilde{\gamma})s_1^2 + (2\tilde{\beta}\mu + 2\tilde{\gamma}\theta)s_2s_1 + 3\tilde{\gamma}s_2^2\mu)r_2^2 = 0$.

Условие $-2\breve{\beta} = \breve{\gamma}\breve{p}_2/\breve{q}_2 \Leftrightarrow (3\tilde{\alpha}s_1^2\mu + (4\tilde{\beta}\mu + 2\tilde{\alpha}\theta)s_2s_1 + (2\tilde{\beta}\theta + \mu\tilde{\gamma})s_2^2)r_1^2 + ((2\tilde{\beta}\mu - 2\tilde{\alpha}\theta)s_1^2 + 2\mu(\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})s_2s_1 + (2\tilde{\beta}\mu + 2\tilde{\gamma}\theta)s_2^2)r_2r_1 + ((\tilde{\alpha}\mu - 2\tilde{\beta}\theta)s_1^2 + (4\tilde{\beta}\mu - 2\tilde{\gamma}\theta)s_2s_1 + 3\tilde{\gamma}s_2^2\mu)r_2^2 = 0$.

Сумма этих двух уравнений, в частности, дает связь, не зависящую от θ, μ :

$$(6\tilde{\alpha}s_1^2 + 6\tilde{\beta}s_1s_2 + (\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})s_2^2)r_1^2 + (6\tilde{\beta}s_1^2 + 4(\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})s_2s_1 + 6\tilde{\beta}s_2^2)r_2r_1 + ((\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})s_1^2 + 6\tilde{\beta}s_1s_2 + 6\tilde{\gamma}s_2^2)r_2^2 = 0.$$

Но этого недостаточно, чтобы выписать хоть какие-то явные условия на элементы системы (45), при которых она сводилась бы известной заменой к $CSF^{6,2,<,<}_{13}$, как это делалось в предыдущих пунктах. Поэтому в данном случае предлагается другой план.

Возьмем произвольную $CSF^{6,2,<,<}_{13} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & uv & uv^2(1+v) \\ 1 & 1 & 0 & v(1+v)^2 \end{pmatrix}_{16}$ с $v \in (-\infty, -4/3)$, $u \in (((-v)^{1/2}-1)^2, ((-v)^{1/2}+1)^2)$ в качестве исходной системы (23) и получим из нее все возможные системы (45), а точнее, все матрицы $\tilde{H}$ и векторы $(\tilde{\alpha}, 2\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$.

Для $\forall c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ матрица $CSF^{6,2,<,<}_{13}$ раскладывается на $H = c^{-1}\begin{pmatrix} u & uv \\ 1 & 1+v \end{pmatrix}$ и $(\alpha, 2\beta, \gamma) = \sigma c\,(1, -v, v^2+v)$, причем $D_c = (p_1-q_2)^2 + 4p_2q_1 = ((u+v+1)^2-4u)c^{-2} < 0$.

В результате замены (16) с $L^c_< = c\begin{pmatrix} \sqrt{-D_c} & p_1-q_2 \\ 0 & 2p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-D)^{1/2}\operatorname{sign} c & u-v-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(D = D_1)$ получаем жорданову матрицу $\tilde{H} = \dfrac{1}{2|c|}\begin{pmatrix} (u+v+1)\operatorname{sign} c & -(-D)^{1/2} \\ (-D)^{1/2} & (u+v+1)\operatorname{sign} c \end{pmatrix}$ и вектор $(\bar{\alpha}, 2\bar{\beta}, \bar{\gamma}) = \sigma c\,(-D_c,\ 2(u-v-1)(-D_c)^{1/2}\operatorname{sign} c,\ D+6v(v-u-1))$.

Любая замена (16) вида $L^{a,b}_J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a^2+b^2 \neq 0)$ сохраняет жорданову матрицу.

В результате такой замены вектор $(\bar{\alpha}, 2\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ с учетом (26), где $r_1, s_2 = a$, $-s_1, r_2 = b$, преобразуется в $(\tilde{\alpha}, 2\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = (\bar{\alpha}a^2 + 2\bar{\beta}ab + \bar{\gamma}b^2,\ 2(\bar{\beta}(a^2-b^2) - (\bar{\alpha}-\bar{\gamma})ab),\ \bar{\gamma}a^2 - 2\bar{\beta}ab + \bar{\alpha}b^2)$.

Таким образом, система (45) с матрицей $\tilde{H}_0 = \begin{pmatrix} \theta & -\mu \\ \mu & \theta \end{pmatrix}$ и вектором $(\tilde{\alpha}_0, 2\tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}_0)$ может быть сведена к $CSF^{6,2,<,<}_{13}$, если совместна следующая система:

$$\begin{gathered} (2c)^{-1}(u+v+1) = \theta, \quad (2|c|)^{-1}(4u-(u+v+1)^2)^{1/2} = \mu, \\ \bar{\alpha}a^2 + 2\bar{\beta}ab + \bar{\gamma}b^2 = \tilde{\alpha}_0, \quad \bar{\beta}(a^2-b^2) - (\bar{\alpha}-\bar{\gamma})ab = \tilde{\beta}_0, \quad \bar{\gamma}a^2 - 2\bar{\beta}ab + \bar{\alpha}b^2 = \tilde{\gamma}_0, \\ ((-v)^{1/2}-1)^2 < u < ((-v)^{1/2}+1)^2, \quad v < -4/3, \end{gathered} \tag{66}$$

где $\bar{\alpha} = -\sigma c^{-1}D$, $\bar{\beta} = \sigma(u-v-1)(-D)^{1/2}$, $\bar{\gamma} = \sigma c(D+6v(v-u-1))$, $D = (u+v+1)^2-4u < 0$.

Из первых двух уравнений системы (66) находим: $u = c^2(\theta^2+\mu^2)$, $-v = (c\theta-1)^2+c^2\mu^2$.

Подставляя их в три оставшиеся уравнения (66), имеем систему относительно a, b, c, σ. Любое ее решение a_*, b_*, c_*, σ_* при условии, что полученные $u_* = c_*^2(\theta^2+\mu^2)$, $-v_* = (c_*\theta-1)^2 + c_*^2\mu^2$ удовлетворяют неравенствам системы (66), позволяет заменой (16) с $L = (L^{a_*,b_*}_J \cdot L^{c_*}_<)^{-1}$ свести выбранную систему (45) к $CSF^{6,2,<,<}_{13}$ с $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, $v = v_*$.

$\mathbf{3^{2c9}_2}$) $-2\breve{\beta} \neq \breve{\alpha}\breve{q}_i/\breve{p}_i, \breve{\gamma}\breve{p}_i/\breve{q}_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда в системе (40) все элементы отличны от нуля, и она — неканоническая по с.п. 1. $\square$

Замечание 12. 1a) $CF^{4,2,<}_{8,+} = \{CF^{4,2,<,>}_{8,+}$ при $|u| < 1$, $u = -1$, $CF^{4,2,<,=}_{8,+}$ при $u = 1\}$;
1c) $CSF^{4,2,<,>}_{8,+}$ с $|u_*| > 1$ заменой из 1_1) сводится к $CF^{4,2,<,>}_{8,+}$ с $|u| < 1$;

2a) $CF^{4,2,<}_{34,+} = \{CF^{4,2,<,>}_{34,+}$ при $0 < u < 1$, $CF^{4,2,<,=}_{34,+}$ при $-1 \leq u < 0\}$;
2b) $CSF^{4,2,<,>}_{34,+}$ при $u = 1$ – неканоническая по с.п. 2. Заменой (16) с $r_1, s_1, s_2 = 2^{-1/2}$, $r_2 = -2^{-1/2}$ она сводится к $CF^{4,2,<,>}_{8,+}$ с $\sigma = 1$, $u = -1$;

2c) $CSF_{34,+}^{4,2,<,>}$ при $u > 1$ заменой из $1_2a)$ сводится к $CF_{34,+}^{4,2,<,>}$ с $0 < u < 1$, $CSF_{34,+}^{4,2,<,>}$ при $u < -1$ заменой из $3_1^1)$ сводится к $CF_{34,+}^{4,2,<,<}$ с $-1 \le u < 0$;

3a) $CF_7^{5,2,<} = \{CF_7^{5,2,<,>}$ при $u \ne \pm 1,\ 3,\ \ CF_7^{5,2,<,=}$ при $u = 1\}$;
3b) $CSF_7^{5,2,<,>}$ при $u = -1, 3$ – неканоническая по с.п. 1. При $u = -1$ заменой из $1_2b_3)$ она сводится к $CF_{34,+}^{4,2,<,>}$, при $u = 3$ заменой из $1_2b_4)$ она сводится к $CF_{8,+}^{4,2,<,>}$;

4a) $CF_{22}^{5,2,<} = \{CF_{22}^{5,2,<,>}$ при $u > -1/4,\ u \ne 3/2,\ \ CF_{22}^{5,2,<,=}$ при $u = -1/4,\ \ CF_{22}^{5,2,<,<}$ при $u < -1/4\}$;
4b) $CSF_7^{5,2,<,>}$ с $u = 3/2$ – неканоническая по с.п.1. Заменой из $1_2c_2)$ сводится к $CF_{8,+}^{4,2,<,>}$;

5b) $CSF_1^{6,2,<,>}$ при $u = -1$ $(v > 1/4)$, а также при $|u| < 1$ и $v = (u^2-3u+3)(u-3)^{-2}$, $(3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2}$, $(3u^2+3u+1)(u^2+3u+3)(3u^2+8u+3)^{-2}$ – неканоническая по с.п. 1. При $u = -1$ заменой из $1_2a)$ она сводится к $CF_{34,+}^{4,2,<,>}$, при $v = (u^2 - 3u + 3)(u - 3)^{-2}$ и $v = (3u^2 - 3u + 1)(3u - 1)^{-2}$ заменами из $1_2b_1)$ из $1_2b_2)$ она сводится к $CF_7^{5,2,<,>}$, при $v = (3u^2+3u+1)(u^2+3u+3)(3u^2+8u+3)^{-2}$ заменами из $1_2c_1)$ она сводится к $CF_{22}^{5,2,<,>}$;
5c) $CSF_1^{6,2,<,>}$ при $|u_*| > 1$ заменой (16) из $1_2)$ сводится к $CSF_1^{6,2,<,>}$ с $|u| < 1$;

6b) $CSF_3^{6,2,<,=}$ при $v = (49 \pm 7\sqrt{6})/6,\ 1/3$ – неканоническая по с.п. 1. Композицией известных замен из $2_1a), 2_1b), 2_1c)$ она сводится к $CF_7^{5,2,<,=}$ или $CF_{22}^{5,2,<,=}$;

7b) $CSF_4^{6,2,<,=}$ при $|v| \ge 1$ – неканоническая по с.п. 2. Заменой из $2_1c)$ она сводится к $CSF_3^{6,2,<,=}$;
7c) $CSF_4^{6,2,<,=}$ при $-1 < v < 0$ заменой (16) из $2_1)$ сводится к $CF_4^{6,2,<,=}$ с $0 < v < 1$;

8b) $CSF_6^{6,2,<,<}$ сводится к предшествующей $CF_{22}^{5,2,<,<}$, если разрешима система:

$$v^3(u(5v^3-2)+2v^4+v))s_1^2 - 2u(v^6+3v^3-1)(v+u)s_1s_2 + u^2(u+2v^3u+5v^4-2v)s_2^2 = 0,$$
$$v(4v^3u-u+3v^4)s_1^2 - v((v^3+2)u^2+3(v^4+v)u+v^5+2v^2)s_1s_2 + u(4v^3+3v^2u-1)s_2^2 = 0.$$

9b) $CSF_7^{6,2,<,<}$ при $u = -v/3-1,\ (2v-3)(3-v)^{-1}$ – неканоническая по с.п. 1. Заменами из $3_2^{2c5})$ она сводится к $CSF_{22}^{5,2,<,<}$.

10b) $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ при $u \in (0; \sqrt{2/3}(43-7\sqrt{37})^{1/2}) \cup (2/\sqrt{3}; \sqrt{2/3}(43+7\sqrt{37})^{1/2})$, $v = \sqrt{3}u(3u^2+\sqrt{3}u-2)(4-3u^2)^{-1}$ – неканоническая по с.п. 1. Заменами из $3_2^{2a3})$ она сводится к $CSF_{22}^{5,2,<,<}$. Также $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ сводится к предшествующей по с.п. 2 $CSF_6^{6,2,<,<}$, если разрешимо уравнение: $9v^2r_1^6 + 6v(-3+vu^2+v^3+2v^2u)r_1^5r_2 + (9-3vu^2-12v^3-42v^2u)r_1^4r_2^2 + 2v(3v+15u-3u^2v^2-vu^3-v^4-3uv^3)r_2^3r_1^3 + 3v^2(8u^2+v^2)r_1^2r_2^4 + 6v^2u(1+v^3+2v^2u+vu^2)r_1r_2^5 + v^2(3vu^2-6v^2u-1)r_2^6 = 0$;
10c) $CSF_{11}^{6,2,<,<}$ при $u < 0$ заменой (16) из $3_2^{1a})$ сводится к $CF_{11}^{6,2,<,<}$ с $u > 0$;

11b) $CSF_2^{7,2,<,<}$ при $\mathcal{D}_4 = 4v^2w^2 - 4v(2v^3-3uv^2-2)w + (v^3-3uv^2+2)^2 \ge 0$ – неканоническая по с.п. 1. Заменой из $3_2^{2c1})$ она сводится к $SF_{11}^{6,2,<,<}$. Также $CSF_2^{7,2,<,<}$ сводится к предшествующей по с.п. 1 $CF_{22}^{5,2,<,<}$, если разрешима система двух уравнений: $3uvr_1^2 + (2wv+2-2v^3)r_1r_2 + (u-wv^2+3v-uv^3)r_2^2 = 0$, $(-v^3+3u^2v+1)r_1^2 + (4v-v^4+2u-2uv^3+wv^2+3u^2v^2+4uvw)r_1r_2 - v(2uv^3+2wv^2-3v-uvw-w^2-2u)r_2^2 = 0$.

Следствие 7. *Система* (23), *в которой* $\beta^2 < \alpha\gamma$ *и* $p_1q_2-p_2q_1 \ne 0$, *линейной неособой заменой* (16) *сводится к соответствующей* $CF_i^{m,2}$ *или* $CSF_i^{m,2}$ *из списка 9, если шесть параметров системы: коэффициенты* β *и* γ *общего множителя* P_0^2 $(\alpha = 1,\ \gamma > \beta^2)$ *и элементы* p_1, q_1, p_2, q_2 *матрицы* H *удовлетворяют следующим условиям:*

$CF_{8,+}^{4,2,<,>}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde\beta = 0$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$, $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2$, *если* $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, *или* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_2$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$, *если* $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, *т. е.* $|u| < 1$, $u = -1$;

$CF^{4,2,<,=}_{8,+}$: $p_1 = q_2$, $q_1 = 0$, $p_2 = 0$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} p_1$;

$CF^{4,2,<,>}_{34,+}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde\beta \neq 0$, $p_1+q_2 = 0$, *тогда* $u = ((\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2} - |\tilde\beta|)^2\tilde\tau^{-2}$, *т. е.* $0 < u < 1$;

$CF^{4,2,<,<}_{34,+}$: $D < 0$, $p_1 + q_2 = 0$, *тогда* $u = -\psi_*\varphi_*^{-1} < 0$, *если* $\psi_* < \varphi_*$, *или* $u = -\psi_*^{-1}\varphi_*$, *если* $\psi_* > \varphi_*$, *где* $\psi_* = \tilde\gamma t_*^2 - 2\tilde\beta t_* + \tilde\alpha > 0$, $\varphi_* = \tilde\alpha t_*^2 + 2\tilde\beta t_* + \tilde\gamma > 0$, t_* *– корень уравнения* $\tilde\beta t^2 - (\tilde\alpha - \tilde\gamma)t - \tilde\beta = 0$, *а* $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ *из* (45), *т. е.* $-1 \leq u < 0$;

$CF^{5,2,<,>}_{7}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde\beta \neq 0$, $p_1 + q_2 \neq 0$ *и либо* $\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} = (u_*^2 - 3u_* + 3)(u_* - 3)^{-2}$, *где* $u_* = \lambda_1^{-1}\lambda_2$, $\sigma_* = \operatorname{sign}\lambda_1$, *если* $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, *или* $u_* = \lambda_1\lambda_2^{-1}$, $\sigma_* = \operatorname{sign}\lambda_2$, *если* $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ $(|u_*| < 1)$, *тогда* $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, *либо* $\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} = (3u_*^2 - 3u_* + 1)(3u_* - 1)^{-2}$ $(|u_*| < 1,\ u_* \neq 1/3)$, *тогда* $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} u_*$, $u = u_*^{-1}$, *т. е* $0 < |u| \neq 1$, $u \neq 3$;

$CF^{5,2,<,=}_{7}$: $D = 0$, *если* $q_1 \neq 0$, *то в* (43), *а если* $q_1 = 0$ *и* $p_2 \neq 0$, *то в* (44_2) $|\tilde\tau(p_1+q_2)| = \sqrt{3}\tilde\gamma$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(p_1 + q_2)$;

$CF^{5,2,<,>}_{22}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde\beta \neq 0$, $p_1 + q_2 \neq 0$, $\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} = (3u_*^2 + 3u_* + 1)(u_*^2 + 3u_* + 3)(3u_*^2 + 8u_* + 3)^{-2}$, *где* $u_* = \lambda_1^{-1}\lambda_2$, $\sigma_* = \operatorname{sign}\lambda_1$, *если* $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, *или* $u_* = \lambda_1\lambda_2^{-1}$, $\sigma_* = \operatorname{sign}\lambda_2$, *если* $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, *тогда* $\sigma = \sigma_*$, $u = -u_*(u_* + 1)^{-2}$, *причем* $u \in (0, 3/2)$ *при* $u_* \in ((\sqrt{7} - 4)/3, 0)$, $u \in (-1/4, 0) \cup (3/2, +\infty)$ *при* $u_* \in (-1, (\sqrt{7} - 4)/3) \cup (0, 1)$, *т. е.* $u > -1/4$, $u \neq 3/2$;

$CF^{5,2,<,=}_{22}$: $D = 0$, *если* $q_1 \neq 0$, *то в* (43), *а если* $q_1 = 0$ *и* $p_2 \neq 0$, *то в* (44_2) $7|\tilde\tau(p_1 + q_2)| = 2\sqrt{3}\tilde\gamma$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(p_1 + q_2)$;

$CF^{5,2,<,<}_{22}$: $D < 0$, $p_1 + q_2 \neq 0$, *в* (58) $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \geq 0$, $v_* = \sqrt{3}u_*(3u_*^2 + \sqrt{3}u_* - 2)(4 - 3u_*^2)^{-1}$ *при* $u_* \in (0; \sqrt{6}(43 - 7\sqrt{37})^{1/2}/3) \cup (2/\sqrt{3}; \sqrt{6}(43 + 7\sqrt{37})^{1/2}/3)$, *и если* $\tilde\alpha\theta = \tilde\beta\mu$, *то* $u_* = 2\tilde\beta\tilde\tau^{-1}$, $v_* = -(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)\tilde\tau^{-2}$, *а если* $\tilde\alpha\theta \neq \tilde\beta\mu$, t_* *– корень уравнения* $Q_-(t, 1) = 0$ $(Q_+(t_*, 1) \neq 0)$, *то* $u_* = Q_+(t_*, 1)(\mu\tilde\tau(t_*^2 + 1))^{-1}$, $v_* = -((\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)t_*^2 + 2\tilde\beta(\tilde\alpha + \tilde\gamma)t_* + \tilde\beta^2 + \tilde\gamma^2)\tilde\tau^{-2}(t_*^2 + 1)^{-1}$, *причем* $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ *из* (45), *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} u_*$, $u = \sqrt{3}(3u_*^2 + \sqrt{3}u_* - 2)u_*^{-1}(4 - 3u_*^2)^{-1} < 1/4$;

$CF^{6,2,<,>}_{1}$: $D > 0$, *в* (42) $\tilde\beta \neq 0$, $p_1 + q_2 \neq 0$, $\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} \neq v_1^*, v_2^*, v_3^*$, *где* $v_1^* = (u_*^2 - 3u_* + 3)(u_* - 3)^{-2}$, $v_2^* = (3u_*^2 - 3u_* + 1)(3u_* - 1)^{-2}$, $v_3^* = (3u_*^2 + 3u_* + 1)(u_*^2 + 3u_* + 3)(3u_*^2 + 8u_* + 3)^{-2}$, *а* $u_* = \lambda_1^{-1}\lambda_2$ *и* $\sigma_* = \operatorname{sign}\lambda_1$, *если* $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $u_* = \lambda_1\lambda_2^{-1}$ *и* $\sigma_* = \operatorname{sign}\lambda_2$, *если* $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ *из* (42), *тогда* $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, $v = \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} > 1/4$, *т. е.* $|u| < 1$, $v \neq v_1^*, v_2^*, v_3^*$;

$CF^{6,2,<,=}_{3}$: $D = 0$, $|v_*| \geq 1$, $v_* \neq 2/\sqrt{3}, 7/\sqrt{3}$, *где* $v_* = 2\tilde\gamma(p_1 + q_2)^{-1}\tilde\tau^{-1}$, $\tilde\gamma$ *из* (43), *если* $q_1 \neq 0$, *а если* $q_1 = 0$ *и* $p_2 \neq 0$, *то из* (44_2), *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(p_1 + q_2)$, $v = v_*(v_* \pm (v_*^2 - 1)^{1/2})/2 > 1/4$;

$CF^{6,2,<,=}_{4}$: $D = 0$, *если* $q_1 \neq 0$, *то в* (43), *а если* $q_1 = 0$ *и* $p_2 \neq 0$, *то в* (44_2) $2\tilde\gamma < \tilde\tau|p_1 + q_2|$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(p_1 + q_2)$, $v = 2\tilde\gamma(p_1 + q_2)^{-1}\tilde\tau^{-1} > 0$ *при* $p_1 + q_2 > 0$, $v = -2\tilde\gamma(p_1 + q_2)^{-1}\tilde\tau^{-1} > 0$ *при* $p_1 + q_2 < 0$;

$CSF^{6,2,<,<}_{6}$: $D < 0$, $p_1 + q_2 \neq 0$, *если в* (63) $\psi_4 = 0$, *тогда* $\sigma = -\operatorname{sign}(2\tilde\alpha\theta + \tilde\beta\mu)$, $u = -2^{2/3}|2\tilde\alpha\theta + \tilde\beta\mu|^{4/3}(\tilde\alpha\theta - \tilde\beta\mu)^{-2/3}\psi_3^{-1/3}$, $v = -2^{2/3}(2\tilde\alpha\theta + \tilde\beta\mu)^{1/3}(\tilde\alpha\theta - \tilde\beta\mu)^{1/3}\psi_3^{-1/3}$, *а если в* (63) $\psi_4 \neq 0$, *существует вещественное* t_*, *что связь* $r_1 = t_*r_2$ *удовлетворяет* (65), $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ *из* (45), *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(Q_-(t_*, 1)Q_3(t_*))$, $u = 2^{2/3}Q_4(t_*)|Q_-(t_*, 1)Q_3(t_*)|^{-1/6}$, $v = -2^{4/9}Q_4(t_*)^{1/3}Q_2(t_*, 1)^{4/9}Q_6(t_*)^{-1/3}$, *т. е. всегда* $v \in (0, 1)$, $u \in ((v^3 - 2 - 2(1 - v^3)^{1/2})v^{-2}, (v^3 - 2 + 2(1 - v^3)^{1/2})v^{-2})$;

$CSF_7^{6,2,<,<}$: $D<0$, $p_1+q_2\neq 0$, *если в* (63) $\psi_2=0$, $u_*\neq -v_*/3-1,(2v_*-3)(3-v_*)^{-1}$, *где* $u_*=(2\tilde\alpha\theta+\tilde\beta\mu)(3\mu^2\tilde\tau^2)^{-1/3}(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^{-1/3}$, $v_*=-(9/8)^{2/3}\tilde\alpha^2(\theta^2+\mu^2)(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)^{-2/3}$, *тогда* $\sigma=\mathrm{sign}(\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu)$, $u=u_*$, $v=v_*$, *а если в* (63) $\psi_2\neq 0$, *существует вещественное* t_*, *что связь* $r_1=t_*r_2$ *удовлетворяет* (64), $Q_4(t_*)\neq 0$, $u_*\neq -v_*/3-1,(2v_*-3)(3-v_*)^{-1}$, *где* $u_*=\sigma r_*^2(2/3)Q_4(t_*)$, $v_*=-r_*^4(\theta^2+\mu^2)(2\tilde\alpha t_*^2+2\tilde\beta t_*+\tilde\gamma)$, $r_*=(2/27)^{-1/6}|Q_-(t_*,1)Q_3(t_*)|^{-1/6}$, *тогда* $\sigma=\mathrm{sign}(Q_-(t_*,1)Q_3(t_*))$, $u=u_*$, $v=v_*$, *и* $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$ *из* (45), *т. е.* $v<-(u+1)^2/4$, $u+v\neq 0$, $u\neq -v/3-1$, $(2v-3)(3-v)^{-1}$;

$CSF_{11}^{6,2,<,<}$: $D<0$, $p_1+q_2\neq 0$, *в* (58) $\widetilde{\mathcal D}_1\geq 0$, $v_*\neq\sqrt3u_*(3u_*^2+\sqrt3u_*-2)(4-3u_*^2)^{-1}$ *при* $u_*\in(0;\sqrt6(43-7\sqrt{37})^{1/2}/3)\cup(2/\sqrt3;\sqrt6(43+7\sqrt{37})^{1/2}/3)$, *где* $u_*=2\tilde\beta\tilde\tau^{-1}$, $v_*=-(\tilde\alpha^2+\tilde\beta^2)\tilde\tau^{-2}$ *при* $\tilde\alpha\theta=\tilde\beta\mu$ *и* $u_*=Q_+(t_*,1)(\mu\tilde\tau(t_*^2+1))^{-1}$, $v_*=-((\tilde\alpha^2+\tilde\beta^2)t_*^2+2\tilde\beta(\tilde\alpha+\tilde\gamma)t_*+\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\tau^{-2}(t_*^2+1)^{-1}$ *при* $\tilde\alpha\theta\neq\tilde\beta\mu$, *где* t_* *– корень уравнения* $Q_-(t,1)=0$ $(Q_+(t_*,1)\neq 0)$, *а* $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$ *из* (45), *тогда* $\sigma=\mathrm{sign}\,u_*$, $u=u_*$, $v=v_*$, *т. е.* $v<-u^2/4$;

$CSF_{13}^{6,2,<,<}$: $D<0$, $p_1+q_2\neq 0$, *в* (58) $\widetilde{\mathcal D}_1<0$, a_*,b_*,c_*,σ_* *– любое решение системы:* $\bar\alpha a^2+2\bar\beta ab+\bar\gamma b^2=\tilde\alpha$, $\bar\beta(a^2-b^2)-(\bar\alpha-\bar\gamma)ab=\tilde\beta$, $\bar\gamma a^2-2\bar\beta ab+\bar\alpha b^2=\tilde\gamma$, $((-v_*)^{1/2}-1)^2<u_*<((-v_*)^{1/2}+1)^2$, $v_*<-4/3$, *где* $a,b,c\in\mathbb R$, $a^2+b^2\neq 0$, $c\neq 0$, $\bar\alpha=-\sigma c^{-1}D_c$, $\bar\beta=\sigma(u_*-v_*-1)(-D_c)^{1/2}$, $\bar\gamma=\sigma c(D_c+6v_*(v_*-u_*-1))$, $D_c=(u_*+v_*+1)^2-4u_*<0$, $u_*=c^2(\theta^2+\mu^2)$, $-v_*=(c\theta-1)^2+c^2\mu^2$, *тогда* $\sigma=\sigma_*$, $u=c_*^2(\theta^2+\mu^2)$, $v=-(c_*\theta-1)^2-c_*^2\mu^2$, *т. е.* $((-v)^{1/2}-1)^2<u<((-v)^{1/2}+1)^2$, $v<-4/3$;

$CSF_2^{7,2,<,<}$: $D<0$, $p_1+q_2\neq 0$, *в* (58) $\widetilde{\mathcal D}_1<0$, $4v_*^2w_*^2-4v_*(2v_*^3-3u_*v_*^2-2)w_*+v_*^6-6u_*v_*^5+9u_*^2v_*^4+4v_*^3-12u_*v_*^2+4<0$, *где* $u_*=4^{1/3}(2\tilde\alpha\theta+\tilde\beta\mu)(\tilde\rho\psi_1)^{-1/3}$, $v_*=(2\tilde\rho)^{2/3}\psi_1^{-1/3}$, $w_*=-9\tilde\alpha^2(\theta^2+\mu^2)(2\tilde\rho\psi_1)^{-2/3}$, $\tilde\rho=\tilde\alpha\theta-\tilde\beta\mu$, $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$ *из* (45), *тогда* $u=u_*$, $v=v_*$, $w=w_*$, $\sigma=\mathrm{sign}\,\tilde\rho$, *т. е.* $w<-(u+v)^2/4\leq 0$, $w\neq -uv, uv^{-2}-uv$, $v\in(0,\sqrt[3]{4})\backslash\{1\}$.

Здесь $D=(p_1-q_2)^2+4p_2q_1$, $\tilde\tau=(\tilde\alpha\tilde\gamma-\tilde\beta^2)^{1/2}>0$, λ_1 *и* λ_2 *из* (41) $(\lambda_1\neq\lambda_2)$, $\theta=(p_1+q_2)/2$, $\mu=\sqrt{-D}/2>0$ *при* $D<0$, *многочлены* $Q_\pm(t_1,t_2)$ *из* (58), *многочлены* Q_1-Q_6 *и константы* $\psi_1-\psi_4$ *из* (63).

6 Канонические формы системы с общим множителем первой степени

Этот раздел будет напечатан в 2012 году в третьем выпуске журнала.

Список литературы

[1] *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. Матем. о-ва, 1971, т. 25, с. 119–262; 1972, т. 26, с. 7–264.

[2] *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы формальных рядов и ростков C^∞- отображений относительно действия группы // Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, т. 40, N 4, с. 855–868.

[3] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами // Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, N 2, с. 154–170.

[4] *Басов В. В., Федотов А. А.* Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2007, вып. 1, с. 13–33.

[5] *Басов В. В., Михлин Л. С.* Обобщенные нормальные формы систем ОДУ с линейно-кубической невозмущенной частью // Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http:// www.math.spbu.ru/diffjournal).— 2012.— № 2.— С. 129–153.

[6] *Басов В.В., Федорова Е.В.* Двумерные вещественные системы ОДУ с квадратичной невозмущенной частью: классификация и вырожденные обобщенные нормальные формы // Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal).—2010.— № 4.— С. 49–85.

[7] *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением, I // Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, N 8, с. 1016–1029.

[8] *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением, II // Дифференц. уравнения, 2005, т. 41, N 8, с. 1011–1022.

[9] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением, III // Дифференц. уравнения, 2006, т. 42, N 3, с. 308–319.

[10] *Басов В. В., Федорова Е. В.* Нормализация двумерных систем с невозмущенной частью $(\alpha x_1^2 + x_1x_2,\, x_1x_2)$ // Труды IV Межд. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения), 2007, с. 24–32.

[11] *Басов В. В., Федорова Е. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением, IV // Дифференц. уравнения, 2009, т. 45, N 3, с. 297–313.

[12] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевым приближением $(x_2^3, -x_1^3)$ // Дифференц. уравнения.— 2004.— Т. 40. № 8.— С. 1011–1022.