ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2009
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

УДК 519.651

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА

О. Б. Арушанян[1], Н. И. Волченскова[2], С. Ф. Залеткин[3]

Аннотация

Предложен способ применения квадратурных формул Маркова с одним и двумя наперед заданными узлами для вычисления коэффициентов разложения функции в смещенный ряд Чебышева. Изложены аппроксимационные свойства частичной суммы ряда с приближенными коэффициентами. Предложенный способ может быть использован для построения численно-аналитических методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: квадратурные формулы Маркова, ряды Фурье–Чебышева, смещенные ряды Чебышева, ортогональные разложения, интерполяционные многочлены, многочлен наилучшего равномерного приближения.

English title: On some properties of partial sums for Chebyshev polynomials.

Abstract: A method of using Markov's quadrature with one and two fixed nodes is proposed to calculate the coefficients of the expansion of a function in a Chebyshev shifted series. Approximation properties of a partial sum of the series with approximate coefficients are considered. This approach can be used to construct a number of numerical analytic methods for solving ordinary differential equations.

Key words: Markov's quadratures, Fourier–Chebyshev series, Chebyshev shifted series, orthogonal expansions, interpolation polynomials, polynomial of best uniform approximation.

[1] *Арушанян Олег Багратович* — докт. техн. наук, проф., зав. лабораторией Научно-исслед. вычисл. центра МГУ, e-mail: arush@srcc.msu.ru.

[2] *Волченскова Надежда Ивановна* — канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр. Научно-исслед. вычисл. центра МГУ, e-mail: nad1947@mail.ru.

[3] *Залеткин Сергей Федорович* — канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр. Научно-исслед. вычисл. центра МГУ, e-mail: iraz@srcc.msu.ru.

Настоящая работа посвящена изучению вопросов, связанных с приближением функций посредством ортогональных разложений по смещенным многочленам Чебышева первого рода (рядов Чебышева). Для нахождения коэффициентов разложения существует метод линейных рекуррентных соотношений [1–4], предназначенный, как правило, для приближения таких неявно заданных функций, которые могут быть представлены в виде решения линейных задач, например линейных дифференциальных или интегральных уравнений. Однако этот метод имеет ряд ограничений и свои трудности в применении.

В данной статье предлагается иной подход, основанный на вычислении коэффициентов разложения с помощью квадратурной формулы. Частичная сумма $S_k(x, f)$ ряда Чебышева функции $f(x)$ не только является многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения степени k функции $f(x)$ (т.е. многочленом наилучшего приближения в пространстве $L_2(0,1;1/\sqrt{x(1-x)})$), но и в ряде случаев дает хорошее приближение в равномерной норме; такая сумма почти совпадает с многочленом наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ и на практике может его заменить. Чтобы при вычислении коэффициентов разложения сохранить эти ценные аппроксимационные свойства частичной суммы, для их вычисления целесообразно использовать квадратурную формулу, дающую возможно бóльшую точность. Имея в виду дальнейшее применение предлагаемого способа определения коэффициентов разложения к построению решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в виде ряда по многочленам Чебышева, следует принять во внимание значения искомой функции и ее производной, известные из начальных условий дифференциальной задачи. Тем самым выбор квадратурной формулы естественным образом приводит к формуле численного интегрирования Маркова, включающей заданную начальную точку в число фиксированных узлов интегрирования. Обсуждаемый круг вопросов включает вычисление коэффициентов Фурье–Чебышева по формулам Маркова с одним и двумя наперед заданными узлами, приближение функции частичной суммой ряда Чебышева и построение оценки точности данного приближения.

Предложенный в статье способ положен в основу построения приближенных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Этим методам посвящена отдельная работа.

1. Частичная сумма смещенного ряда Чебышева, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова. Для функции $f(x) \in L_2\big(0,1;p(x)\big)$, где $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, построим ряд Фурье по смещенным многочленам Чебышева первого рода $T_i^*(x)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[f]\, T_i^*(x), \tag{1}$$

где

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 p(x) f(x) T_i^*(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, \tag{2}$$

символ $\sum{}'$ определен формулой $\displaystyle\sum_{j=l}^{r}{}' a_j = \frac{1}{2} a_l + a_{l+1} + \ldots + a_r$, $r \geq l$. Для вычисления интеграла (2) применим квадратурную формулу Маркова [5] с одним наперед заданным узлом и числом нефиксированных узлов n, принимая в качестве подынтегральной функции произведение $f(x)T_i^*(x)$:

$$a_i^*[f] = B_1 {\sum_{j=0}^{n}}' f(x_j)T_i^*(x_j) + R(fT_i^*). \tag{3}$$

Абсциссы, коэффициент и остаточный член в (3) определяются по формулам

$$x_0 = 0, \quad x_j = \frac{1 + \cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2n+1}}{2}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$B_1 = \frac{4}{2n+1}, \quad R(fT_i^*) = \frac{1}{2^{4n}} \frac{(fT_i^*)^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \quad 0 \le \eta \le 1, \quad f(x) \in C_{[0,1]}^{2n+1}.$$

Отбрасывая остаточный член, имеем приближенное значение коэффициентов смещенного ряда Чебышева:

$$a_i^* = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 p(x)f(x)T_i^*(x)dx \approx \frac{(-1)^i 2f(0)}{2n+1} + \frac{4}{2n+1} \sum_{j=1}^{n} \cos\frac{i(2j-1)\pi}{2n+1} f(x_j). \tag{5}$$

Рассмотрим частичную сумму ряда (1):

$$S_k(x,f) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[f]\, T_i^*(x). \tag{6}$$

Все входящие в нее коэффициенты вычислим по формуле (3) (или (5)) при $n = k$ и получим многочлен

$$J_k(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' \left(B_1 {\sum_{j=0}^{k}}' f(x_j)T_i^*(x_j) \right) T_i^*(x). \tag{7}$$

В следующей теореме говорится о свойстве данной частичной суммы.

Теорема 1. *Пусть все коэффициенты k-й частичной суммы* (6) *смещенного ряда Чебышева* (1) *функции $f(x)$ вычислены по одной и той же квадратурной формуле Маркова* (3) *с числом нефиксированных узлов $n = k$; пусть многочлен $J_k(x)$ представляет полученную таким образом частичную сумму* (7). *Тогда многочлен $J_k(x)$ является интерполяционным многочленом для функции $f(x)$ с узлами интерполирования x_j, $j = 0, 1, \ldots, k$, определенными формулой* (4).

Доказательство. Убедимся в том, что многочлены

$$Q_j(x) = B_1 {\sum_{i=0}^{k}}' T_i^*(x_j)\, T_i^*(x), \quad j = 0, 1, \ldots, k, \tag{8}$$

являются фундаментальными многочленами интерполирования, для которых выполняются следующие характеристические соотношения:

$$Q_j(x_l) = \delta_{jl}, \quad j,\, l = 0, 1, \ldots, k, \quad j \ne l = 0; \quad Q_0(x_0) = 2.$$

1-*й случай.* Пусть $l \neq j$, $j \neq 0$ и $l \neq 0$. Из тождества Кристоффеля–Дарбу для многочленов Чебышева первого рода [3] следует соотношение

$$4(x_j - x_l)\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x_l) = T_{k+1}^*(x_j)T_k^*(x_l) - T_k^*(x_j)T_{k+1}^*(x_l).$$

Преобразуем правую часть данного равенства:

$$T_{k+1}\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right)T_k\left(\cos\frac{(2l-1)\pi}{2k+1}\right) - T_k\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right)\times$$
$$\times T_{k+1}\left(\cos\frac{(2l-1)\pi}{2k+1}\right) = (-1)^{j+l}\cos\frac{(j-k-1)\pi}{2k+1}\,\cos\frac{(l+k)\pi}{2k+1} -$$
$$-(-1)^{j+l}\cos\frac{(l-k-1)\pi}{2k+1}\,\cos\frac{(j+k)\pi}{2k+1} = 0.$$

Так как по предположению $j \neq l$, то $\sum\limits_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x_l) = 0$. Таким образом, $Q_j(x_l) = 0$.

2-*й случай.* Пусть $l = 0$ и $j \neq 0$. Тогда сумма в (8) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{k}{}'(-1)^i T_i\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right) = \frac{(-1)^k}{2}\left[\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1} - 1\right)\times\right.$$
$$\left.\times U_{k-1}\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right) + \cos\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1}\right] =$$
$$= (-1)^k\cos\frac{(2j-1)\pi}{2}\sin\frac{(2j-1)\pi}{2(2k+1)}\left(\sin\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right)^{-1} = 0.$$

Следовательно, $Q_j(x_0) = 0$. Равенство $Q_0(x_l) = 0$ при $l \neq 0$ доказывается аналогично.

3-*й случай.* Пусть $l = j \neq 0$. Тогда

$$Q_j(x_j) = \frac{4}{2k+1}\sum_{i=0}^{k}{}'\big[T_i^*(x_j)\big]^2 = \frac{4}{2k+1}\left[\frac{1}{4}\big(U_{2k}(2x_j-1)+2k\big) + \frac{1}{4}\right].$$

Поскольку $2x_j - 1$ есть нечетный корень многочлена Чебышева второго рода U_{2k}, то получаем $Q_j(x_j) = 1$.

4-*й случай.* Пусть $l = j = 0$. Тогда

$$Q_0(x_0) = \frac{4}{2k+1}\sum_{i=0}^{k}{}'\big[T_i^*(0)\big]^2 = \frac{4}{2k+1}\left[\frac{1}{4}\big(U_{2k}(-1)+2k\big) + \frac{1}{4}\right] =$$
$$= \frac{4}{2k+1}\left(\frac{4k+1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2.$$

Напомним, что многочлен $Q_0(x)$ входит в сумму $J_k(x) = \sum\limits_{j=0}^{k}{}' Q_j(x)f(x_j)$ с дополнительным коэффициентом $1/2$. Теорема доказана.

Формула (7) дает простое выражение коэффициентов Чебышева многочлена $J_k(x)$, аппроксимирующего функцию $f(x)$:

$$a_i^*[J_k] = B_1 {\sum_{j=0}^{k}}' f(x_j) T_i^*(x_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{9}$$

Установим зависимость этих коэффициентов от коэффициентов Чебышева самой функции.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ разложена в ряд Чебышева*

$$f(x) = {\sum_{l=0}^{\infty}}' a_l^*[f]\, T_l^*(x) \tag{10}$$

и многочлен $J_k(x)$ записан по формуле $J_k(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[J_k]\, T_i^*(x)$, где $a_i^*[J_k]$ определены в (9), *то*

$$a_i^*[J_k] = a_i^*[f] + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \big(a_{q(2k+1)-i}^*[f] + a_{q(2k+1)+i}^*[f]\big), \quad 0 < i \leq k,$$

$$a_0^*[J_k] = a_0^*[f] + 2\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q a_{q(2k+1)}^*[f].$$

Доказательство. Подставим разложение (10) в (9):

$$a_i^*[J_k] = B_1 {\sum_{l=0}^{\infty}}' a_l^*[f] {\sum_{j=0}^{k}}' T_l^*(x_j) T_i^*(x_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Для произвольных целых неотрицательных чисел q и r справедливо равенство

$$T_{q(2k+1)\pm r}^*(x_j) = (-1)^q T_r^*(x_j). \tag{11}$$

Для каждого $l \geq 0$ существуют такие целые числа $\bar{q} \geq 0$ и $-k \leq \bar{r} \leq k$, что $l = \bar{q}(2k+1) + \bar{r}$. Из (11) следует

$$T_l^*(x_j) = T_{\bar{q}(2k+1)+\bar{r}}^*(x_j) = (-1)^{\bar{q}} T_{|\bar{r}|}^*(x_j).$$

Для коэффициента $a_i^*[J_k]$ получаем выражение

$$a_i^*[J_k] = B {\sum_{l=0}^{\infty}}' (-1)^{\bar{q}} a_l^*[f] {\sum_{j=0}^{k}}' T_{|\bar{r}|}^*(x_j) T_i^*(x_j). \tag{12}$$

При i, $r = 0, 1, \ldots, k$ из ортогональности смещенных многочленов Чебышева на [0,1] вытекает, что

$$B_1 {\sum_{j=0}^{k}}' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq i, \\ 2 & \text{при} \quad r = i = 0, \\ 1 & \text{при} \quad r = i > 0. \end{cases} \tag{13}$$

В силу (13) внутренняя сумма в (12) отлична от нуля для фиксированного $0 < i \leq k$ только тогда, когда $|\bar{r}| = i$, т.е. при $l = i,\ 2k+1-i,\ 2k+1+i,\ 4k+2-i,\ 4k+2+i,\ \ldots$; тогда

$$a_i^*[J_k] = a_i^*[f] - a_{2k+1-i}^*[f] - a_{2k+1+i}^*[f] + a_{4k+2-i}^*[f] + a_{4k+2+i}^*[f] - \ \ldots\ . \tag{14}$$

В частности,

$$a_k^*[J_k] = a_k^*[f] - a_{k+1}^*[f] - a_{3k+1}^*[f] + a_{3k+2}^*[f] + a_{5k+2}^*[f] - \ \ldots\ . \tag{15}$$

Для $i = 0$ внутренняя сумма в (12) отлична от нуля только при значениях $l = 0, 2k+1, 4k+2, 6k+3, \ldots$; тогда

$$a_0^*[J_k] = a_0^*[f] - 2a_{2k+1}^*[f] + 2a_{4k+2}^*[f] - 2a_{6k+3}^*[f] + \ \ldots\ . \tag{16}$$

Теорема доказана.

На основании формул (14)–(16) можно сделать вывод о том, что если последовательность $\{a_i^*[f]\}$ достаточно регулярно стремится к нулю, то коэффициент $a_i^*[J_k] \approx a_i^*[f]$ и имеет наибольшую абсолютную погрешность при $i = k$; при $i = k-1, k-2, \ldots, 1$ эта погрешность меньше, а наименьшую погрешность имеет коэффициент $a_0^*[J_k]$.

Обратимся теперь к квадратурной формуле Маркова [5] с двумя фиксированными узлами и числом нефиксированных узлов n. Ее применение для вычисления интеграла (2) приводит к следующему представлению коэффициентов Чебышева

$$a_i^*[f] = B_2 \sum_{j=0}^{n+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j) + R(f T_i^*). \tag{17}$$

Абсциссы, коэффициент и остаточный член в (17) задаются соотношениями

$$x_0 = 0, \quad x_j = \frac{1 + \cos\dfrac{j\pi}{n+1}}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad x_{n+1} = 1, \tag{18}$$

$$B_2 = \frac{2}{n+1}, \quad R(fT_i^*) = -\frac{1}{2^{4n+2}} \frac{(fT_i^*)^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad f(x) \in C_{[0,1]}^{2n+2},$$

символ $\sum''$ определен формулой $\sum\limits_{j=l}^{r}{}'' a_j = \frac{1}{2}a_l + a_{l+1} + \ \ldots\ + a_{r-1} + \frac{1}{2}a_r$, $r > l$. Узлы x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, являются нулями смещенного многочлена Чебышева второго рода $U_n^*(x)$. Отбрасывая остаточный член, получим приближенное значение коэффициентов:

$$a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^1 p(x) f(x) T_i^*(x) dx \approx \frac{(-1)^i}{n+1} f(0) + \frac{1}{n+1} f(1) + \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \cos\frac{ij\pi}{n+1} f(x_j). \tag{19}$$

Вычисляя все входящие в частичную сумму (6) ряда Чебышева коэффициенты по формуле (17) (или (19)) при $n = k$, приходим к многочлену степени k:

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' \left(B_2 \sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j) \right) T_i^*(x). \tag{20}$$

Теорема 3. *Пусть все коэффициенты k-й частичной суммы* (6) *смещенного ряда Чебышева* (1) *функции $f(x)$ вычислены по одной и той же квадратурной формуле Маркова* (17) *с числом нефиксированных узлов $n = k$; пусть многочлен $L_k(x)$ представляет полученную таким образом частичную сумму* (20)*. Тогда $L_k(x)$ является многочленом степени k наилучшего (равномерного) приближения функции $f(x)$ на множестве узлов x_j, $j = 0, 1, \dots, k+1$, определенных формулой* (18)*, т.е. на множестве корней многочлена $x(1-x)U_k^*(x)$.*

Доказательство. Определим многочлен $K_k^*(x)$ по формуле

$$K_k^*(x) = J_{k+1}^*(x) - \varepsilon T_{k+1}^*(x), \tag{21}$$

где

$$J_{k+1}^*(x) = \frac{2}{k+1}\, x(x-1)\, U_k^*(x) \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j)\, \frac{1}{x - x_j}\,,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j).$$

Здесь $J_{k+1}^*(x)$ — интерполяционный многочлен степени $k+1$ функции $f(x)$ с узлами интерполирования x_m, $m = 0, 1, \dots, k+1$ (см. (18)). Коэффициент при x^{k+1} в $J_{k+1}^*(x)$ равен $2^{2k+1}\varepsilon$. Правая часть равенства (21) есть разность двух многочленов с одинаковыми старшими членами, поэтому является многочленом степени не выше k. Из (21) вытекает, что разность $f(x) - K_k^*(x)$ в узлах x_m, $m = 0, 1, \dots, k+1$, принимает поочередно значения $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$. Иными словами, многочлен $K_k^*(x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$f(x_m) - K_k^*(x_m) = (-1)^m \varepsilon, \quad m = 0, 1, \dots, k+1.$$

По основной теореме Чебышева об альтернансе $K_k^*(x)$ является многочленом наилучшего (равномерного) приближения степени k для функции $f(x)$ на множестве узлов x_m, $m = 0, 1, \dots, k+1$.

Раскладывая $J_{k+1}^*(x)$ по системе смещенных многочленов Чебышева первого рода $T_i^*(x)$, $i = 0, 1, \dots, k+1$, как ортогональных на точечном множестве x_m, $m = 0, 1, \dots, k+1$ в смысле скалярного произведения $(T_i^*, T_l^*) = \sum_{m=0}^{k+1}{}'' T_i^*(x_m) T_l^*(x_m)$, из (21) получим

$$K_k^*(x) = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1}{}'' \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j) \right) T_i^*(x) - \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j) \right) T_{k+1}^*(x).$$

Учитывая, что $T_{k+1}^*(x_j) = (-1)^j$, имеем

$$K_k^*(x) = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k}{}' \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j) \right) T_i^*(x). \tag{22}$$

Сопоставляя правые части (20) и (22), приходим к равенству

$$L_k(x) = K_k^*(x).$$

Теорема доказана.

Формула (20) дает простое выражение для коэффициентов Чебышева многочлена $L_k(x)$, аппроксимирующего функцию $f(x)$:

$$a_i^*[L_k] = B_2 \sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{23}$$

Следующая теорема показывает зависимость этих коэффициентов от коэффициентов Чебышева самой функции.

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ разложена в ряд Чебышева* (10), *многочлен $L_k(x)$ записан по формуле $L_k(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[L_k] T_i^*(x)$, где $a_i^*[L_k]$ определены в* (23), *то*

$$a_i^*[L_k] = a_i^*[f] + \sum_{q=1}^{\infty} \big(a^*_{2q(k+1)-i}[f] + a^*_{2q(k+1)+i}[f]\big), \quad 0 < i \le k,$$

$$a_0^*[L_k] = a_0^*[f] + 2 \sum_{q=1}^{\infty} a^*_{2q(k+1)}[f].$$

Доказательство данной теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 2.

2. О погрешности приближения функции частичной суммой ряда Чебышева. Погрешность аппроксимации функции частичной суммой ряда Чебышева (7) складывается из остаточного члена $r_k(x, f)$ ряда и ошибок R_i из-за неточностей в приближенных значениях коэффициентов, входящих в частичную сумму:

$$f(x) - J_k(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(x) + r_k(x, f), \tag{24}$$

где

$$R_i = R(f T_i^*) = \frac{1}{2^{4k}(2k+1)!} \sum_{l=0}^{i} C_{2k+1}^{l} f^{(2k+1-l)}(\eta)\, T_i^{*(l)}(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1. \tag{25}$$

Для $r_k(x, f)$ справедливы следующие оценки, которые могут быть выведены из неравенства Лебега с привлечением прямых теорем о наилучших приближениях непрерывных функций алгебраическими многочленами [6–8]:

$$||r_k(x, f)||_\infty \le \frac{c_p M_{p+1} \ln k}{k^{p+1}} \quad \text{при} \quad k > p; \quad ||r_k(x, f)||_\infty \le \frac{c_1 M_{k+1} \ln k}{2^{2k+1}(k+1)!}\,. \tag{26}$$

Здесь $M_n = ||f^{(n)}(x)||_\infty$, $c_1 = \text{const}$, c_p — постоянная, зависящая от p и не зависящая от k. Из (26) следует, что если $f(x)$ достаточно гладкая $\big(f(x) \in C^p_{[0,1]}\big)$, то $r_k(x, f)$ быстро стремится к нулю при $k \to \infty$. В силу теоремы 1 погрешность аппроксимации может быть выражена через остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа, которая в данном случае имеет вид

$$f(x) - J_k(x) = \frac{T^*_{k+1}(x) + T^*_k(x)}{2^{2k+1}(k+1)!}\, f^{(k+1)}(\xi), \quad 0 < \xi < \max\{x, x_1\}, \tag{27}$$

откуда получаем

$$\left|f(x) - J_k(x)\right| \le \frac{\left|f^{(k+1)}(\xi)\right|}{2^{2k}(k+1)!} \le \frac{M_{k+1}}{2^{2k}(k+1)!}.$$

Если функция $f(x)$ задана на $[x_0, x_0 + h]$, то для функции $\varphi(\alpha) \equiv f(x_0 + \alpha h)$, $0 \le \alpha \le 1$, формулы (24) – (27) приводят к следующей асимптотической оценке погрешности аппроксимации относительно длины сегмента h:

$$\varphi(\alpha) - J_k(\alpha) = O(h^{k+1}), \quad h \to 0.$$

В случае, когда коэффициенты Чебышева вычисляются по квадратурной формуле Маркова с двумя наперед заданными узлами, оценки для погрешности аппроксимации функции $\varphi(\alpha)$ многочленом $L_k(\alpha)$ получаются аналогично и имеют вид

$$||\varphi(\alpha) - L_k(\alpha)||_\infty \le \frac{c_p M_{p+1} \ln k}{k^{p+1}}\, h^{p+1} + O(h^{k+2}), \quad k > p, \quad h \to 0,$$

$$||\varphi(\alpha) - L_k(\alpha)||_\infty \le \frac{c_1 M_{k+1} \ln k}{2^{2k+1}(k+1)!}\, h^{k+1} + O(h^{k+2}), \quad h \to 0.$$

В этом случае главный член погрешности аппроксимации содержит только остаточный член ряда Чебышева, а ошибки в приближенных значениях коэффициентов имеют по сравнению с остаточным членом ряда более высокий порядок малости относительно длины сегмента h.

3. Заключение. Предложенные в статье приемы рассматриваются нами в качестве средства конструирования численно-аналитических методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения задачи Коши построены на основе рядов Чебышева и описанного выше способа вычисления коэффициентов Чебышева. Этим методам посвящена отдельная работа.

Список литературы

[1] *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.

[2] *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1988.

[3] *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.

[4] *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972.

[5] *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998.

[6] *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.

[7] *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.

[8] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Физматгиз, 2000.