*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 4, 2009*
*Электронный журнал,*
*рег. N П2375 от 07.03.97*
*ISSN 1817-2172*

*http://www.neva.ru/journal*
*http://www.math.spbu.ru/diffjournal/*
*e-mail: jodiff@mail.ru*

УДК 519.622

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

**О. Б. Арушанян, Н. И. Волченскова, С. Ф. Залеткин**

Предложен приближенный метод решения задачи Коши для нормальных и канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Метод основан на ортогональных разложениях решения и его производной на шаге интегрирования в смещенные ряды по многочленам Чебышева первого рода. Построены уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышева правой части системы, описан итерационный процесс их решения и рассмотрены достаточные условия сходимости. Даны асимптотические оценки погрешности приближенных коэффициентов Чебышева и решения относительно величины шага интегрирования.

**Ключевые слова:** обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенные аналитические методы интегрирования, численные методы интегрирования, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышева, квадратурные формулы Маркова.

Работа посвящена теоретической разработке метода приближенного решения задачи Коши для канонической системы $M$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x_0 \le x \le x_0 + X, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

$$y'(x_0) = y'_0 \tag{3}$$

и задачи Коши для нормальной системы

$$y' = f(x, y), \quad x_0 \le x \le x_0 + X, \tag{4}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{5}$$

Метод основан на разложении правой части системы, взятой на решении дифференциального уравнения, на частичном сегменте $[x_0, x_0+h]$, $h < X$, в ряд Фурье по ортогональным многочленам Чебышева первого рода. Частичная сумма этого ряда используется в качестве многочлена, аппроксимирующего правую часть $f\big(x, y(x), y'(x)\big)$ уравнения (1) (соответственно $f\big(x, y(x)\big)$ для уравнения (4)). Вычисление коэффициентов указанного разложения ведется с помощью квадратурной формулы Маркова. Предлагаемый подход отличается от известного способа нахождения коэффициентов посредством линейных рекуррентных соотношений [1–4], предназначенного, как правило, для интегрирования линейных дифференциальных уравнений и имеющего ряд ограничений и затруднений в применении.

Мы будем использовать систему смещенных многочленов Чебышева первого рода $T_i^*(x)$ на отрезке [0,1] и смещенный ряд Чебышева

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[\varphi]\, T_i^*(x) \tag{6}$$

функции $\varphi(x) \in L_2\Big(0, 1; \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\Big)$, где

$$a_i^*[\varphi] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\varphi(x)\, T_i^*(x)\, dx, \tag{7}$$

символ $\sum{}'$ определен формулой $\sum\limits_{j=l}^{m}{}' a_j = \dfrac{1}{2}a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m$, $m \geq l$. Будем предполагать, что правая часть дифференциального уравнения имеет достаточное число непрерывных частных производных, обеспечивающих справедливость приводимых в работе оценок для погрешности рассматриваемого метода.

**1. Разложение решения задачи Коши и его производной в ряд Чебышева.** Зададим некоторое число $h < X$ и рассмотрим на частичном сегменте $[x_0, x_0 + h]$ задачу Коши (1)–(3). Приведем соотношения, которые связывают коэффициенты Чебышева производной $y'(x_0 + \alpha h)$, рассматриваемой как функция переменной $\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, с коэффициентами Чебышева функции $\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\big)$:

$$a_i^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\big(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\big), \quad i > 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\, a_0^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}a_1^*[\Phi]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)\, a_j^*[\Phi]. \tag{9}$$

Подобным образом выражаются коэффициенты Чебышева решения $y(x_0 + \alpha h)$:

$$a_i^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h^2}{16}\,\frac{(i+1)a_{i-2}^*[\Phi] - 2i a_i^*[\Phi] + (i-1)a_{i+2}^*[\Phi]}{i(i^2-1)}, \quad i > 2, \tag{10}$$

$$a_2^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h^2}{96}\,\big(3a_0^*[\Phi] - 4a_2^*[\Phi] + a_4^*[\Phi]\big), \tag{11}$$

$$a_1^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{2}\,\bigg[y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{3}{4}a_1^*[\Phi] + \frac{1}{4}a_3^*[\Phi]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)\, a_j^*[\Phi]\bigg], \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}a_0^*\bigl[y(x_0+\alpha h)\bigr] = y_0 + \frac{h}{2}y_0' + \frac{h^2}{32}\bigl(3a_0^*[\Phi] - 2a_1^*[\Phi] + a_2^*[\Phi]\bigr) +$$
$$+\frac{h^2}{8}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Bigl(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Bigr)a_j^*[\Phi] - \frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\Bigl(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j}\Bigr)\frac{a_j^*[\Phi] - a_{j+2}^*[\Phi]}{j+1}. \qquad (13)$$

Из сделанного выше предположения о гладкости правой части уравнения вытекает равномерная сходимость всех рассматриваемых в данной работе рядов. Заметим, что если коэффициенты Чебышева функции $\Phi(\alpha)$ удовлетворяют условию $a_i^*[\Phi] = 0,\ i \ge k+1$, то $a_i^*[y'] = 0,\ i \ge k+2$, $a_i^*[y] = 0,\ i \ge k+3$.

**2. Вывод уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышева правой части.** Из приведенных соотношений видно, что для практического применения ортогональных разложений решения и его производной

$$\begin{aligned} y(x_0+\alpha h) &= {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*\bigl[y(x_0+\alpha h)\bigr]\,T_i^*(\alpha), \\ y'(x_0+\alpha h) &= {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*\bigl[y'(x_0+\alpha h)\bigr]\,T_i^*(\alpha) \end{aligned}$$

необходимо иметь значения коэффициентов Чебышева $a_i^*[\Phi]$ взятой на решении задачи Коши (1)–(3) правой части системы

$$\Phi(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi]\,T_i^*(\alpha).$$

Поэтому дальнейшая цель наших рассуждений состоит в том, чтобы дать способ определения коэффициентов $a_i^*[\Phi]$. Для этого мы перейдем к выводу уравнений, которым удовлетворяют приближенные значения коэффициентов Чебышева правой части, и к описанию алгоритма их решения.

Рассмотрим $k$-ю частичную сумму ряда Чебышева правой части $\Phi(\alpha)$:

$$S_k(\alpha,\Phi) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[\Phi]\,T_i^*(\alpha). \qquad (14)$$

Вычислим коэффициенты $a_i^*[\Phi]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, входящие в (14), по квадратурной формуле Маркова [5] с одним наперед заданным узлом $\alpha = 0$, числом нефиксированных узлов $k$ и весовой функцией $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$. Пусть многочлен $J_k(\alpha)$ представляет полученную таким образом частичную сумму

$$J_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[J_k]\,T_i^*(\alpha), \qquad (15)$$

где

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}' \Phi(\alpha_j)\,T_i^*(\alpha_j), \qquad (16)$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_j = \frac{1+\cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Аппроксимируем функцию $\Phi(\alpha)$ многочленом $J_k(\alpha)$. Тогда погрешность аппроксимации складывается из остаточного члена $r_k(\alpha,\Phi)$ ряда и ошибок в приближенных значениях коэффициентов

Чебышева:

$$\Phi(\alpha) - J_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi).$$

Здесь

$$R_i = R(\Phi\, T_i^*) = \frac{1}{2^{4k}(2k+1)!}\sum_{l=0}^{i} C_{2k+1}^{l}\Phi^{(2k+1-l)}(\eta)T_i^{*(l)}(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1, \quad \Phi(\alpha) \in C_{[0,1]}^{2k+1}.$$

Используя оценки для остатков ряда Чебышева и квадратурной формулы Маркова, можно показать, что суммарная погрешность имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \to 0$.

Пусть

$$U'(x_0+\alpha h) = y'(x_0) + h\int\limits_0^{\alpha} J_k(\xi)d\xi, \quad U(x_0+\alpha h) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + h^2\int\limits_0^{\alpha} d\xi \int\limits_0^{\xi} J_k(\zeta)d\zeta, \quad (17)$$

$$\tilde{\Phi}(\alpha) = f\big(x_0+\alpha h, U(x_0+\alpha h), U'(x_0+\alpha h)\big).$$

Определим числа $a_i^*[\tilde{J}_k]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, и многочлен $\tilde{J}_k(\alpha)$ по формулам

$$a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}'\tilde{\Phi}(\alpha_j)T_i^*(\alpha_j), \quad (18)$$

$$\tilde{J}_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\tilde{J}_k]T_i^*(\alpha).$$

Значения правой части $\tilde{\Phi}(\alpha_j)$ в (18) зависят от значений функций $U(x_0+\alpha h)$ и $U'(x_0+\alpha h)$, а эти последние зависят от коэффициентов Чебышева $a_i^*[J_k]$. Поскольку точное решение $y(x_0+\alpha h)$ дифференциального уравнения (1) и его производная $y'(x_0+\alpha h)$, а следовательно, и функция $\Phi(\alpha)$ нам не известны, то коэффициенты $a_i^*[J_k]$ в (15), (16) являются неизвестными величинами. Будем считать, что коэффициенты Чебышева функций

$$U'(x_0+\alpha h) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[U']T_i^*(\alpha), \quad U(x_0+\alpha h) = \sum_{i=0}^{k+2}{}' a_i^*[U]T_i^*(\alpha) \quad (19)$$

вычисляются с помощью соотношений (8)–(13), в левых частях которых надо $y'$ и $y$ заменить соответственно на $U'$ и $U$, а в правых частях необходимо $a_l^*[\Phi]$ поменять на $a_l^*[\tilde{J}_k]$ из (18). Поэтому соотношения (18) являются уравнениями относительно коэффициентов Чебышева $a_i^*[\tilde{J}_k]$.

Рассматривая $U(x_0+\alpha h)$ и $U'(x_0+\alpha h)$ как функции не только аргумента $(x_0+\alpha h)$, но и аргументов $a_0^*[\tilde{J}_k]$, $a_1^*[\tilde{J}_k]$, $\ldots$, $a_k^*[\tilde{J}_k]$, т.е. считая их функциями нескольких переменных, уравнения (18) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' \quad & f\Big(x_0+\alpha_j h, U\big(x_0+\alpha_j h; a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big), \\ & U'\big(x_0+\alpha_j h; a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big)\Big)\, T_i^*(\alpha_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned} \quad (20)$$

**3. Оценка погрешности приближенных значений коэффициентов Чебышева.** Подставим в (20) вместо $a_i^*[\tilde{J}_k]$ точные значения коэффициентов Чебышева функции $\Phi(\alpha)$. Тогда

$$\begin{aligned} a_i^*[\Phi] = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' \quad & f\Big(x_0+\alpha_j h, U\big(x_0+\alpha_j h; a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big), \\ & U'\big(x_0+\alpha_j h; a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big)\Big)\, T_i^*(\alpha_j) + \rho_i. \end{aligned} \quad (21)$$

Левая часть равенства (21) принимает значение $a_i^*[J_k] + R_i$, сумма в правой части (21) равна:

$$\begin{array}{lll} a_i^*[J_k] + O(h^{k+2}) & \text{для уравнения} & y'' = f(x,y,y'), \\ a_i^*[J_k] + O(h^{k+3}) & \text{для уравнения} & y'' = f(x,y), \\ a_i^*[J_k] & \text{для уравнения} & y'' = f(x). \end{array}$$

Заметим, что $R_i = O(h^{2k+1-i})$ при $h \to 0$. Таким образом, невязка, которая при этом получается, будет иметь порядок:

для уравнения $y'' = f(x,y,y')$ —

$$\rho_k = O(h^{k+1}), \quad \rho_i = O(h^{k+2}), \quad 0 \le i \le k-1, \tag{22}$$

для уравнения $y'' = f(x,y)$ —

$$\rho_k = O(h^{k+1}), \quad \rho_{k-1} = O(h^{k+2}), \quad \rho_i = O(h^{k+3}), \quad 0 \le i \le k-2, \tag{23}$$

для уравнения $y'' = f(x)$ —

$$\rho_i = O(h^{2k+1-i}), \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{24}$$

Обозначим

$$\delta_i = a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde{J}_k], \quad i = 0, 1, \ldots k,$$

и вычтем из (21) уравнение (20) (для сокращения записи аргументы $U$ и $U'$ функции $f$ и коэффициенты Чебышева в качестве аргументов функций $U$ и $U'$ указывать не будем):

$$\begin{aligned} \delta_i \;\; = \;\; & \frac{4}{2k+1} \left\{ \sum_{m=0}^{k} \left[ {\sum_{j=0}^{k}}' \frac{\partial f(x_0+\alpha_j h)}{\partial y} \frac{\partial U(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]} T_i^*(\alpha_j) \right] \delta_m + \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{k} \left[ {\sum_{j=0}^{k}}' \frac{\partial f(x_0+\alpha_j h)}{\partial y'} \frac{\partial U'(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]} T_i^*(\alpha_j) \right] \delta_m \right\} + \rho_i. \end{aligned}$$

Скалярная матрица $\dfrac{\partial U(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]}$ порядка $M$ содержит множитель $h^2$, а скалярная матрица $\dfrac{\partial U'(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]}$ — множитель $h$ (см. формулы (8)–(13)). Поэтому последнее равенство может быть представлено в виде

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1} \sum_{m=0}^{k} (h^2 Q_{im} + h P_{im}) \delta_m + \rho_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{25}$$

где $Q_{im}$, $P_{im}$ — квадратные матрицы порядка $M$, зависящие от $i$ и $m$ (напомним, что $M$ — это число уравнений в системе (1)). Из (22)–(25) следует, что погрешность $\delta_i$ имеет нижеследующий порядок относительно $h$:

для уравнения $y'' = f(x,y,y')$ —

$$\delta_k = O(h^{k+1}), \quad \delta_i = O(h^{k+2}), \quad 0 \le i \le k-1,$$

для уравнения $y'' = f(x,y)$ —

$$\delta_k = O(h^{k+1}), \quad \delta_{k-1} = O(h^{k+2}), \quad \delta_i = O(h^{k+3}), \quad 0 \le i \le k-2,$$

для уравнения $y'' = f(x)$ —

$$\delta_i = O(h^{2k+1-i}), \quad 0 \le i \le k.$$

**4. Описание итерационного процесса определения коэффициентов Чебышева.** Применим метод последовательных приближений для решения системы уравнений (20). Допустим, что мы имеем некоторые приближенные значения коэффициентов Чебышева $a_i^*[\Phi]$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Примем эти значения в качестве нулевого приближения неизвестных $a_i^*[\tilde{J}_k]$. Обозначим это приближение через $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, полагая здесь $\nu = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Определим $\nu$-е приближение коэффициентов Чебышева $a_i^*[U']$ производной $U'$ по формулам (8) для $i = 1, 2, \ldots, k+1$ и (9) для $i = 0$, а именно:

$$a_i^{*(\nu)}[U'] = \frac{h}{4i}\big(a_{i-1}^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - a_{i+1}^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\big), \quad i = 1, 2, \ldots, k+1, \tag{26}$$

$$\frac{1}{2}a_0^{*(\nu)}[U'] = y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - \frac{1}{2}a_1^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)\, a_j^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]. \tag{27}$$

Далее определяем $\nu$-е приближение коэффициентов Чебышева $a_i^*[U]$ решения $U$ по формулам (10) для $i = 3, 4, \ldots, k+2$, (11) для $i = 2$, (12) для $i = 1$ и (13) для $i = 0$, а именно:

$$a_i^{*(\nu)}[U] = \frac{h^2}{16}\,\frac{(i+1)a_{i-2}^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - 2ia_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] + (i-1)a_{i+2}^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]}{i(i^2-1)}, \quad i = 3, 4, \ldots, k+2, \tag{28}$$

$$a_2^{*(\nu)}[U] = \frac{h^2}{96}\big(3a_0^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - 4a_2^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] + a_4^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\big), \tag{29}$$

$$a_1^{*(\nu)}[U] = \frac{h}{2}\left[y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - \frac{3}{4}a_1^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] + \frac{1}{4}a_3^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)\, a_j^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\right], \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,a_0^{*(\nu)}[U] &= y_0 + \frac{h}{2}y_0' + \frac{h^2}{32}\big(3a_0^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - 2a_1^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] + a_2^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\big) + \\ &+ \frac{h^2}{8}\sum_{j=2}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - \frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j}\Big)\frac{1}{j+1}\big(a_j^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - a_{j+2}^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Входящие в формулы (26), (28), (31) коэффициенты Чебышева $a_l^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ при $l \ge k+1$ полагаются равными нулю.

По найденным значениям коэффициентов Чебышева $a_i^{*(\nu)}[U']$ и $a_i^{*(\nu)}[U]$ вычисляем $\nu$-е приближение для значений $U'(x_0 + \alpha_j h)$ и $U(x_0 + \alpha_j h)$:

$$U'^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^{*(\nu)}[U']T_i^*(\alpha_j), \quad U^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = {\sum_{i=0}^{k+2}}' a_i^{*(\nu)}[U]T_i^*(\alpha_j) \tag{32}$$

и значения правой части дифференциального уравнения (1):

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\big(x_j^0, U^{(\nu)}(x_j^0), U'^{(\nu)}(x_j^0)\big), \quad x_j^0 = x_0 + \alpha_j h, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{33}$$

Теперь находим $(\nu+1)$-е приближение коэффициентов Чебышева правой части дифференциального уравнения (1) с помощью соотношений

$$\begin{aligned} a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k] &= \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}{}' \tilde{\Phi}(\alpha_j)T_i^*(\alpha_j) = \\ &= \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}{}' f\big(x_j^0, U^{(\nu)}(x_j^0), U'^{(\nu)}(x_j^0)\big)T_i^*(\alpha_j), \quad i=0,1,\ldots,k. \end{aligned} \tag{34}$$

Дальнейшие приближения для коэффициентов Чебышева $a_i^{*(\nu)}[U']$, $a_i^{*(\nu)}[U]$, $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k]$, $\nu=1,2,\ldots$, строятся по такой же схеме с использованием формул (26)–(34) для $\nu=1,2,\ldots$. Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно $h$ очередного приближения $a_i^{*(\nu)}[U']$, $a_i^{*(\nu)}[U]$, $U'^{(\nu)}(x_j^0)$, $U^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ на единицу. В случае, когда правая часть дифференциального уравнения (1) не зависит от производной, т.е. для уравнения $y''=f(x,y)$, каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно $h$ очередного приближения $U'^{(\nu)}(x_j^0)$, $U^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ на два. При этом порядок точности данных приближений, т.е. порядок разностей между точными и приближенными значениями соответствующих величин, а именно

$$y(x_j^0)-U^{(\nu)}(x_j^0), \quad y'(x_j^0)-U'^{(\nu)}(x_j^0), \quad a_i^*[\Phi]-a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k],$$

увеличивается до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения и производной, равный порядку точности формул $y'(x)\approx U'(x_0+\alpha h)$, $y(x)\approx U(x_0+\alpha h)$, в которых $U'$ и $U$ определяются по (15)–(17). Итерации продолжаются до достижения максимального порядка точности решения и производной, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

В качестве значений коэффициентов Чебышева $a_i^*[y]$, $a_i^*[y']$, $a_i^*[\Phi]$ решения $y(x_0+\alpha h)$ задачи Коши (1)–(3), производной решения $y'(x_0+\alpha h)$ и правой части дифференциального уравнения (1) $\Phi(\alpha)$, $0\le\alpha\le 1$, принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации $\nu+1$, а именно:

$$a_i^*[y]=a_i^{*(\nu+1)}[U], \quad i=0,1,\ldots,k+2; \quad a_i^*[y']=a_i^{*(\nu+1)}[U'], \quad i=0,1,\ldots,k+1; \tag{35}$$

$$a_i^*[\Phi]=a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k], \quad i=0,1,\ldots,k.$$

**5. Сходимость итерационного процесса.** Рассмотрим условия сходимости метода последовательных приближений (34), (32).

Уравнения (20), которым удовлетворяют коэффициенты Чебышева $a_i^*[\tilde{J}_k]$, запишем в виде

$$a_i^*[\tilde{J}_k]=\varphi_i\big(a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big), \quad i=0,1,\ldots,k,$$

где $\varphi_i\big(a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big)$ — правая часть (20). Обозначим $l$-ю компоненту вектор-функции $\varphi_i$ через $\varphi_{li}$, а $n$-ю компоненту вектора $a_m^*[\tilde{J}_k]$ через $a_{nm}$. Найдем частную производную $\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, $i,m=0,1,\ldots,k$, $\;l,n=1,2,\ldots,M$ (для сокращения записи коэффициенты Чебышева $a_0^*[\tilde{J}_k],\ldots,a_k^*[\tilde{J}_k]$ в качестве аргументов функций $U$ и $U'$ указывать не будем):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}} &= \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}{}' \Big[\frac{\partial f_l\big(x_0+\alpha_j h, U(x_0+\alpha_j h), U'(x_0+\alpha_j h)\big)}{\partial y_n}\,\frac{\partial U_n(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_{nm}} + \\ &+ \frac{\partial f_l\big(x_0+\alpha_j h, U(x_0+\alpha_j h), U'(x_0+\alpha_j h)\big)}{\partial y'_n}\,\frac{\partial U'_n(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_{nm}}\Big]\, T_i^*(\alpha_j). \end{aligned}$$

При выводе выражения производной мы учли, что каждая компонента векторов $U$ и $U'$ зависит только от одноименной компоненты вектора $a^*_m[\tilde{J}_k]$. Из (8)–(13) следует, что $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h)$ для уравнения $y'' = f(x, y, y')$ и $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h^2)$ для уравнения $y'' = f(x, y)$. Поэтому, выбрав малую величину шага интегрирования $h$, можно обеспечить выполнение достаточного условия сходимости метода итераций (34), (32). Если ввести в рассмотрение матрицу $Q$, составленную из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей найденных выше частных производных $\max\left|\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$, то достаточным условием для сходимости метода итераций является условие, что какая-нибудь норма матрицы $Q$ меньше единицы [6, 7], например

$$||Q||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{M(k+1)} Q_{ij} < 1, \quad ||Q||_1 = \max_j \sum_{i=1}^{M(k+1)} Q_{ij} < 1, \quad ||Q||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{M(k+1)} Q^2_{ij}} < 1,$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $QQ^T$. Таким образом, при значениях шага интегрирования, для которых удовлетворяется какое-либо из выписанных условий, последовательные приближения $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, определяемые по (34) и (32), будут при $\nu \to \infty$ сходиться к решению уравнения (20).

**6. Приближенное вычисление решения задачи Коши и его производной на шаге интегрирования.** По найденным значениям коэффициентов Чебышева (35) частичные суммы Чебышева

$$U'(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a^*_i[y'] T^*_i(\alpha), \quad U(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+2}}' a^*_i[y] T^*_i(\alpha)$$

дадут приближенные значения производной решения $y'(x_0 + \alpha h)$ и решения $y(x_0 + \alpha h)$ задачи Коши (1)– (3) в любой точке $x = x_0 + \alpha h$, $0 \le \alpha \le 1$, $x_0 \le x \le x_0 + h$. В частности, в конце сегмента $[x_0, x_0 + h]$ значения производной и решения могут быть найдены по формулам

$$y'(x_0 + h) = y'(x_1) \approx U'(x_1) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a^*_i[y'], \quad y(x_0 + h) = y(x_1) \approx U(x_1) = {\sum_{i=0}^{k+2}}' a^*_i[y].$$

При этом погрешность приближенного значения производной $U'(x_0 + h)$ есть $O(h^{k+2})$, а погрешность приближенного значения решения $U(x_0 + h)$ — $O(h^{k+3})$.

Для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5) коэффициенты Чебышева решения задачи Коши связаны с коэффициентами правой части системы

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\big)$$

следующим образом:

$$a^*_i\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\left(a^*_{i-1}[\Phi] - a^*_{i+1}[\Phi]\right), \quad i \ne 0,$$

$$\frac{1}{2} a^*_0\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{4}\left(a^*_0[\Phi] - \frac{1}{2} a^*_1[\Phi]\right) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\right) a^*_j[\Phi].$$

Частичная сумма ряда

$$U(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a^*_i[y] T^*_i(\alpha)$$

представляет приближенное решение $y(x_0+\alpha h)$ задачи Коши (4), (5) на $[x_0, x_0+h]$; в частности,

$$y(x_0+h) = y(x_1) \approx U(x_1) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y].$$

Погрешность приближенного значения решения $U(x_0+h)$ есть $O(h^{k+2})$.

Так как коэффициенты Чебышева $a_i^*[\Phi]$ определяются с помощью приведенного выше итерационного процесса приближенно, то указанные здесь оценки погрешности решения и производной справедливы тогда, когда погрешности вычисления коэффициентов $a_i^*[\Phi]$ имеют достаточный для этого порядок относительно $h$.

**7. Пример.** Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_1' = y_2 + \frac{x+1,5}{\sqrt{x+1}}\,, \quad y_1(0) = 1,$$

$$y_2' = -y_1 + \frac{x+0,5}{\sqrt{x+1}}\,, \quad y_2(0) = 0.$$

Таблица 1

| No. | $X$ | $h$ | Количество нулей в погрешности $\varepsilon$ после десятичной запятой $\big([-\lg\|\varepsilon\|]\big)$ для $y_1(X)$ и $y_2(X)$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Метод рядов Чебышева, $k=5$ | | Метод Рунге–Кутта классический | | Метод Адамса | | Неявный метод Рунге–Кутта | |
| 1 | 0.09 | 0.01 | 16 | 15 | 11 | 11 | 11 | 10 | 15 | 15 |
| 2 | 0.18 | 0.02 | 15 | 15 | 9 | 10 | 9 | 9 | 16 | 15 |
| 3 | 0.36 | 0.04 | 15 | 14 | 8 | 8 | 7 | 7 | 13 | 13 |
| 4 | 0.72 | 0.08 | 13 | 13 | 6 | 6 | 5 | 5 | 12 | 11 |
| 5 | 0.9 | 0.1 | 13 | 12 | 6 | 6 | 5 | 5 | 11 | 11 |
| 6 | 1.8 | 0.2 | 11 | 11 | 5 | 4 | 4 | 4 | 9 | 9 |
| 7 | 3.6 | 0.4 | 9 | 9 | 3 | 3 | 4 | 2 | 7 | 7 |
| 8 | 7.2 | 0.8 | 6 | 6 | 1 | 2 | — | | 5 | 4 |
| 9 | 9.0 | 1.0 | 5 | 5 | 1 | 1 | — | | 4 | 4 |

Точное решение системы содержит периодическую составляющую и возрастающую (или убывающую) составляющую $\big(y_1(x) = \sin x + \sqrt{x+1},\ y_2(x) = \cos x - \sqrt{x+1}\big)$. Задача решалась описанным в статье методом рядов Чебышева на интервале $[0, X]$. При этом задавалось разбиение интервала на девять частичных сегментов длиной $h$, и на каждом сегменте решение представлялось в виде частичной суммы ряда Чебышева. Вычисления проводились с 16 значащими цифрами. Различные значения $X$, $h$ и $k$, а также абсолютная погрешность $\varepsilon$ (т.е. $\big[-\lg|\varepsilon|\big]$) приближенных значений обеих компонент $y_1(X)$ и $y_2(X)$, вычисленных в конце интервала, приведены в табл. 1 и 2. В таблицах даны также результаты, полученные классическим методом Рунге–Кутта четвертого порядка, методом Адамса пятого порядка типа предиктор-корректор и неявным трехстадийным методом Рунге–Кутта шестого порядка с постоянным шагом, равным диаметру указанного разбиения интервала интегрирования. Прочерк в таблицах означает, что при указанных в них значениях $h$ либо не может быть получено приближение с удовлетворительной точностью, либо вычисленное значение вообще не имеет ни одной верной цифры.

Таблица 2

| No. | $X$ | $h$ | Количество нулей в погрешности $\varepsilon$ после десятичной запятой $\Big([-\lg\lvert\varepsilon\rvert]\Big)$ для $y_1(X)$ и $y_2(X)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Метод рядов Чебышева, $k=30$ | | Метод Рунге–Кутта классический | | Метод Адамса | Неявный метод Рунге–Кутта | |
| 10 | 17.0 | 2.0 | 14 | 15 | 0 | 0 | — | 2 | 2 |
| 11 | 25.5 | 3.0 | 14 | 14 | — | | — | 0 | 1 |
| 12 | 34.0 | 4.0 | 13 | 15 | — | | — | 0 | 0 |
| 13 | 42.5 | 5.0 | 14 | 13 | — | | — | — | |

Из таблиц видно, что при одних и тех же $h$ метод рядов Чебышева дает на несколько порядков более высокую точность по сравнению с методами Рунге–Кутта и Адамса и обеспечивает вычисление приближенного решения с высокой точностью при тех $h$, с которыми эти методы не справляются.

## Список литературы

[1] *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.

[2] *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1988.

[3] *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.

[4] *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972.

[5] *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998.

[6] *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.

[7] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ, 2007.