ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

УДК.517.953.5

Ю.П.Апаков, Б.Ю.Иргашев

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩЕГО ВЫРОЖДЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА

Введение

Рассмотрим в области $D = \{0 < x < \infty, 0 < y < 1\}$ следующее уравнение

$$L[U] = U_{xxx} - x^n U_{yy} = 0, \quad n \geqslant 0. \tag{1}$$

При $n = 0$ краевые задачи для уравнения (1) были изучены H.Block [1] и E. Del Vecchio [2-3]. Затем эти результаты были обобщены в работах итальянского математика L. Cattabriga [4], где были построены фундаментальные решения (при $n = 0$) и разработана теория потенциалов. После этого появились работы [5-6], где, используя эти фундаментальные решения, изучены различные краевые задачи.

В наших работах [7-8] в прямоугольной области изучены некоторые краевые задачи для уравнения (1),при $n = 0$.

Краевая задача для уравнения с вырождением второго рода

$$U_{xxx} - y^m U_{yy} = 0$$

была рассмотрена в нашей работе [9]. В данной работе для уравнения (1) изучается краевая задача в бесконечной области, решение которой строится методом Фурье.

§1. Постановка задачи

Будем говорить, что $U(x,y) \in C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{0,0}_{x,y}(D \cup \Gamma)$ (где $\Gamma = \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{y = 1\}$) — *регулярное решение уравнения* (1), если оно ограничено на бесконечности вместе с производными до второгого порядка и $U_y(x,y) \in L_2(D)$.

Для уравнения (1) исследуем следующую задачу:

Задача T. *Найти регулярное решение уравнения (1) со следующими краевыми условиями:*

$$U(x,0) = U(x,1) = 0, \tag{2}$$

$$U(0,y) = \varphi(y), \tag{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} U(x,y) = \lim_{x\to+\infty} U_x(x,y) = 0, \tag{4}$$

где $\varphi(y) \in C^{(4)}[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$.

§2. Единственность решения

Для доказательства единственности решения задачи (1)-(4),достаточно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Задача T с однородными краевыми условиями (2)–(4)(т.е. при* $\varphi = 0$*) имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Предположим, что $U(x,y)$ — ненулевое решение задачи T. Рассмотрим тождество

$$UL[U] = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[UU_{xx} - \frac{1}{2}U_x^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}(x^n UU_y) + x^n U_y^2 = 0.$$

Проинтегрируем это тождество по области $D_a = (0 < x < a, 0 < y < 1)$:

$$\int\limits_0^1 \left(UU_{xx} - \frac{1}{2}U_x^2\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} dy - \int\limits_0^a x^n [UU_y]\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx + \iint\limits_D x^n U_y^2 dxdy = 0.$$

Устремляя a в бесконечность и учитывая однородные граничные условия, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 U_x^2(0,y)dy + \iint\limits_D x^n U_y^2 dxdy = 0.$$

Отсюда

$$U(x,y) \equiv 0.$$

Итак, единственность решения доказана. □

§3. Существование решения

Покажем теперь существование решения нашей задачи (1)-(4) при условии $\varphi \neq 0$. Будем искать решение поставленной задачи методом Фурье:

$$U(x,y) = Z(x)Y(y).$$

Тогда для уравнения (1) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Z'''(x) + \lambda x^n Z(x) = 0, & (5) \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & (6) \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ — произвольное число.
Из условия (2) имеем $Y(0) = Y(1) = 0$. Одним из (с точностью до умножения на константу) решений уравнения (6),обнуляющихся на концах отрезка [0;1] является функция

$$Y_k(y) = \sin \pi k y, \quad \lambda_k = (\pi k)^2.$$

Зафиксируем λ_k и рассмотрим уравнение (5):

$$Z'''(x) + \lambda_k x^n Z(x) = 0.$$

Сделаем замену переменных

$$t = \frac{3}{n+3}\sqrt[3]{\lambda_k} x^{\frac{n+3}{3}}.$$

Тогда получим следующее уравнение

$$z''' + \frac{a}{t}z'' + \frac{b}{t^2}z' + z = 0, \tag{7}$$

где

$$a = 3\left(1 - \frac{3}{n+3}\right), \quad b = \frac{a}{3}\left(\frac{2}{3}a - 1\right).$$

Будем искать решение уравнения (7) в виде

$$z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j+\beta},$$

где $\beta > 0$ — неизвестное комплексное число. Вычисляя производные получим

$$z'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (j+\beta) t^{j+\beta-1}, \quad z''(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (j+\beta)(j+\beta-1) t^{j+\beta-2},$$

$$z'''(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (j+\beta)(j+\beta-1)(j+\beta-2) t^{j+\beta-3}.$$

Подставляя производные в (7) и приравнивая нулю коэффициент при $t^{\beta-3}$ получим

$$c_0 \beta [(\beta-1)(\beta-2) + (\beta-1)a + b] = 0,$$

отсюда

$$\left[\begin{array}{l} \beta = 0, \\ (\beta-1)(\beta-2) + (\beta-1)a + \dfrac{a}{3}\left(\dfrac{2}{3}a - 1\right) = 0. \end{array} \right.$$

Второе из этих уравнений является квадратным относительно β и имеет 2 корня:

$$\beta_2 = 1 - \frac{a}{3}, \quad \beta_3 = 2\left(1 - \frac{a}{3}\right).$$

Итак, для β получили 3 случая. Рассмотрим каждый случай в отдельности:

Случай 1. $\beta = 0$. Решение уравнения (7) ищем в виде

$$z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j.$$

Подставляя его в (7) получим уравнение

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j [j(j-1)(j-2) + aj(j-1) + bj] t^{j-3} = -\sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t будем иметь:

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 2a + 3b},\ c_4 = 0,\ c_5 = 0.$$

Отсюда получим формулы для коэффициентов

$$c_{3j}^1 = \frac{(-1)^j}{\prod\limits_{l=1}^{j} 3l[b + (3l-1)a + (3l-1)(3l-2)]}\ ,\ c_{3j+1} = c_{3j+2} = 0,\ j \in \mathbb{N}.$$

Тогда решение примет следующий вид

$$z_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{3j}^1 t^{3j}.$$

Случай 2. $\beta = 1 - \dfrac{a}{3}$. Решение ищем в виде

$$z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j+1-\frac{a}{3}}.$$

Подставляя его в уравнение (7) имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \Big(j + 1 - \frac{a}{3}\Big) \Big[\Big(j - \frac{a}{3}\Big)\Big(j - 1 - \frac{a}{3}\Big) + a\left(j - \frac{a}{3}\right) + b\Big]\, t^{j-2-\frac{a}{3}} =$$

$$= -\sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j+1-\frac{a}{3}}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t получим:

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = -\frac{1}{\left(4 - \frac{a}{3}\right)\left[\left(3 - \frac{a}{3}\right)\left(2 - \frac{a}{3}\right) + a\left(3 - \frac{a}{3}\right) + b\right]},$$

$$c_4 = 0,\ c_5 = 0.$$

Имеем следующие формулы для коэффициентов

$$c_{3j}^2 = \frac{(-1)^j}{\prod\limits_{l=1}^{j}\left(3l + 1 - \frac{a}{3}\right)\left[\left(3l - \frac{a}{3}\right)\left(3l - 1 - \frac{a}{3}\right) + a\left(3l - \frac{a}{3}\right) + b\right]}\ ,$$

$$c_{3j+1} = c_{3j+2} = 0,\ j \in \mathbb{N}.$$

Тогда решение будет иметь следующий вид

$$z_2(t) = t^{1-\frac{a}{3}}\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{3j}^2 t^{3j}\right].$$

Случай 3. $\beta = 2\left(1 - \dfrac{a}{3}\right)$. Решение ищем в виде

$$z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j+2-\frac{2a}{3}}.$$

Подставив его в уравнение (7) будем иметь

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j$$

$$\left(j+2-\frac{2a}{3}\right)\left[\left(j+1-\frac{2a}{3}\right)\left(j-\frac{2a}{3}\right)+a\left(j+1-\frac{2a}{3}\right)+b\right]t^{j-1-\frac{2a}{3}}=$$

$$=-\sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j+2-\frac{2a}{3}}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t получим:

$$c_0=1, c_1=0, c_2=0,$$

$$c_3=\frac{-1}{\left(5-\frac{2a}{3}\right)\left[\left(4-\frac{2a}{3}\right)\left(3-\frac{2a}{3}\right)+a\left(4-\frac{2a}{3}\right)+b\right]}.$$

Имеем следующие формулы для коэффициентов

$$c_{3j}^3=\frac{(-1)^j}{\prod\limits_{l=1}^{j}\left(3l+2-\frac{2a}{3}\right)\left[\left(3l+1-\frac{2a}{3}\right)\left(3l-\frac{2a}{3}\right)+a\left(3l+1-\frac{2a}{3}\right)+b\right]},$$

$$c_{3j+1}=c_{3j+2}=0,\ j\in\mathbb{N}.$$

Тогда решение будет иметь следующий вид

$$z_3(t)=t^{2\left(1-\frac{a}{3}\right)}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}c_{3j}^3 t^{3j}\right].$$

Ясно, что функции $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (7).

Нас теперь интересует поведение решения уравнения (7) при $t\to+\infty$.

Сделаем следующую замену $z(t)=t^{-\frac{a}{3}}w(t)$. Тогда относительно функции $w(t)$ получим следующее уравнение

$$w'''+\frac{a(6-a)}{9t^2}w'+\left(1-\frac{a}{3t^2}\left(\frac{a^2}{3}+\frac{a}{3}+1\right)\right)w=0. \tag{8}$$

Теперь применим следующую теорему из [10; гл.2,п.6,теорема 7]:

Теорема 2. *Если уравнение* $\dfrac{dz}{dt} = (A+B(t))z(t)$, *где* $z(t)$ — n*-мерная вектор-функция,* A — *постоянная матрица размерности* $n \times n$, $B(t)$ — *переменная матрица, удовлетворяет условиям:*

1) A — *постоянная матрица с простыми характеристическими числами;*

2) $\|B(t)\| \to 0$ *при* $t \to \infty$, *где под нормой матрицы* $B(t)$ *понимается сумма абсолютных величин всех элементов матрицы, т.е.* $\|B(t)\| = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|$, *то каждому характеристическому числу* μ_k *соответствует решение* $z^{(k)}$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$c_2 \exp\left[Re(\mu_k)t - d_2 \int\limits_{t_0}^{t} \|B(t)\| dt\right] \leqslant$$

$$\leqslant \|z^{(k)}(t)\| \leqslant$$

$$c_1 \exp\left[Re(\mu_k)t + d_1 \int\limits_{t_0}^{t} \|B(t)\| dt\right]$$

(где $\|z^{(k)}(t)\| = \sum\limits_{j=1}^{n} |z_j^{(k)}|$, $z_j^{(k)}$ — *компоненты вектора* $z^{(k)}(t)$*)*
для $t \geqslant t_0$, *где* c_1, c_2, d_1, d_2 — *положительные постоянные, при этом система решений* $z^{(k)}$ *линейно независима.*

Уравнение (8) можно привести к следующей системе уравнений 1-го порядка

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{3t^3}\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a}{3} + 1\right) & \frac{a(a-6)}{9t^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w' \\ w'' \\ w''' \end{pmatrix}.$$

В нашем случае действительные части характеристических чисел постоянной матрицы имеют вид

$$Re(\mu_1) = -1, \quad Re(\mu_2) = Re(\mu_3) = \frac{1}{2}, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty.$$

Тогда согласно теореме 2 существуют линейно-независимые решения $F_{1k}(t)$, $F_{2k}(t)$, $F_{3k}(t)$ уравнения (7), для которых справедливы следующие оценки при $t \to +\infty$:

$$\begin{aligned} M_1^1 t^{-\frac{a}{3}} e^{-t} &\leqslant |F_{1k}(t)| \leqslant M_2^1 t^{-\frac{a}{3}} e^{-t}, \\ M_1^2 t^{-\frac{a}{3}} e^{\frac{t}{2}} &\leqslant |F_{2k}(t)| \leqslant M_2^2 t^{-\frac{a}{3}} e^{\frac{t}{2}}, \\ M_1^3 t^{-\frac{a}{3}} e^{\frac{t}{2}} &\leqslant |F_{3k}(t)| \leqslant M_2^3 t^{-\frac{a}{3}} e^{\frac{t}{2}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где M_j^s — некоторые положительные постоянные. Для производных до 2-го порядка включительно функций $F_{ij}(t)$ получим те же самые оценки, только с другими постоянными.

Т.к. $F_{ik}(t)$ линейно-независимы, то они тоже образуют фундаментальную систему решений уравнения (7), т.е. общее решение уравнения (7) может быть записано в виде

$$Z_k(t) = c_1 F_{1k}(t) + c_2 F_{2k}(t) + c_3 F_{3k}(t),$$

но вместе с тем $F_{ik}(t)$ могут быть выраженны через найденные нами функции $Z_{ik}(t)$:

$$\begin{aligned} F_{1k}(t) &= A_{1k} Z_{1k}(t) + B_{1k} Z_{2k}(t) + N_{1k} Z_{3k}(t), \\ F_{2k}(t) &= A_{2k} Z_{1k}(t) + B_{2k} Z_{2k}(t) + N_{2k} Z_{3k}(t), \\ F_{3k}(t) &= A_{3k} Z_{1k}(t) + B_{3k} Z_{2k}(t) + N_{3k} Z_{3k}(t), \end{aligned}$$

где A_{ik}, B_{ik}, N_{ik} — некоторые постоянные.

Возвращаясь к старым переменным получим

$$Z_{1k}(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{3j}^1 \left(\frac{27\pi^2 k^2 x^{n+3}}{(n+3)^3} \right)^j, \tag{10}$$

$$Z_{2k}(x) = \sqrt[n+3]{\frac{27\pi^2 k^2}{(n+3)^3}} \cdot x \cdot \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{3j}^2 \left(\frac{27\pi^2 k^2 x^{n+3}}{(n+3)^3} \right)^j \right], \tag{11}$$

$$Z_{3k}(x) = \sqrt[n+3]{\frac{729\pi^4 k^4}{(n+3)^6}} \cdot x^2 \cdot \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{3j}^3 \left(\frac{27\pi^2 k^2 x^{n+3}}{(n+3)^3} \right)^j \right]. \tag{12}$$

Легко проверить, что при фиксированном k ряды (10), (11), (12) вместе с производными любого порядка по переменной x сходятся равномерно и абсолютно по признаку Даламбера.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), имеет вид

$$U(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(x) \sin \pi k y, \tag{13}$$

где

$$Z_k(x) = c_{1k}F_{1k}(x) + c_{2k}F_{2k}(x) + c_{3k}F_{3k}(x).$$

Для удовлетворения условиям (4) задачи T нужно потребовать, чтобы $c_{2k} = c_{3k} = 0$. Осталось найти c_{1k}.

Удовлетворив условию (3) получим

$$U(0,y) = \varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{1k}A_{1k} \sin \pi k y,$$

отсюда

$$A_{1k}c_{1k} = 2\int_0^1 \varphi(\xi) \sin \pi k \xi d\xi.$$

Покажем равномерную сходимость ряда (13). Имеем

$$|U(x,y)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |c_{1k}||F_{1k}(x)| = \sum_{k=0}^{\infty} |c_{1k}A_{1k}| \left| \frac{F_{1k}(x)}{A_{1k}} \right|.$$

Учитывая оценку (9), неравенства $|\varphi^{(4)}(y)| \leqslant M = const$ и

$$|A_{1k}c_{1k}| \leqslant \frac{2M}{(\pi k)^4}$$

получим

$$|U(x,y)| \leqslant N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^4} < \infty, \tag{14}$$

где N — некоторая постоянная.

Равномерная сходимость рядов, составленных из частных производных по переменным x и y, показывается аналогично.

Список литературы

[1] Block H., Sur les equations linares aux derivees partielles a carateristiques multiples. Note 1, Ark. Mat. Astron. Fys. 7, No.13 (1912),1-34; Note 2, ibid. 7, No. 21 (1912), 1-30; Note 3, ibid. 8, No.23 (1912-1913),1-51.

[2] Del Vecchio E., Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$. Memorie R. Accad. Sci. Torino. Ser.2, 66 (1915), 1-41.

[3] Del Vecchio E., Sur deux problemes d'integration pour les equations paraboli ques $Z_{\xi\xi\xi} - Z_\eta = 0$, $Z_{\xi\xi\xi} - Z_{\eta\eta} = 0$. H.Block. Remarque a la note precedente. Arkiv for Mat. Astr. och Fys. Bd.11 (1916).

[4] Cattabriga L., Potenziali di linea e di domino per equazioni non parabpliche in due variabili e caratteristiche multiple. Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padova. 1961, vol.31, p.1-45.

[5] Абдиназаров С., Об одном уравнении третьего порядка. Изв. АН УзССР, сер. физ-мат. наук, № 6, 1989. с.3-6.

[6] Хошимов А.Р., Об одной задаче для уравнения смешанного типа с кратными характеристиками. Узбекский матем. журнал, № 2, 1995. с.93-97.

[7] Иргашев Ю., Апаков Ю.П., Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа. Узбекский матем. журнал, № 2, 2006. с.44-51.

[8] Апаков Ю.П. О решении одной краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка. Тезисы докладов Межд. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 28 мая – 2 июня 2007 г. Новосибирск, с.65-66.

[9] Апаков Ю.П.,Иргашев Б.Ю. Об одной задаче для вырождающегося уравнения третьего порядка.Тезисы докладов Межд. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 28 мая – 2 июня 2007 г. Новосибирск, с.67-68.

[10] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: "ИЛ", 1954. 215 с.