ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных системах

Развитие концепции топологической энтропии для систем с многомерным временем

М. М. Аникушин[1], Ф. Райтманн[2]

Математико-механический факультет,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В работе исследуется топологическая энтропия для динамических систем с дискретным или непрерывным многомерным временем. На основании анализа полученного обобщения известного одномерного по времени результата делается вывод о том, что определение топологической энтропии, представленное в работах по системам подсдвигов, приводит к нулевому значению энтропии для многих систем с многомерным временем. Для того, чтобы обойти это явление, в работе предлагается понятие относительной топологической энтропии. Доказанный в работе многомерный аналог степенного правила Боуэна позволяет определить топологическую энтропию для систем с непрерывным многомерным временем. В качестве приложения построенной теории устанавливается связь между относительной топологической энтропией и управляемостью линейной системы с непрерывным многомерным временем.

Ключевые слова: топологическая энтропия, системы с многомерным временем, управление с многомерным временем.

[1]E-mail adress: demolishka@gmail.com.
[2]E-mail adress: vreitmann@aol.com.

Abstract

We study the topological entropy for dynamical systems with discrete or continuous multiple time. Due to the generalization of a well-known one time-dimensional result we show that the definition of topological entropy, using the approach for subshifts, leads to zero entropy for many systems different from subshift. We define a new type of relative topological entropy to avoid this phenomenon. The generalization of Bowen's power rule allows us to define topological and relative topological entropies for systems with continuous multiple time. As an application we find the relation between relative topological entropy and controllability of linear system with continuous multiple time.

Keywords: topological entropy, dynamical system with multiple time, multitime controllability.

Введение

Понятие топологической энтропии впервые было введено в работе 1965-го года под авторством Р.Л. Адлера, А.Г. Конхейма и М.Х. Макэндрю [8]. Топологическая энтропия была аналогом метрической энтропии введенной ранее А.Н. Колмогоровым [3] и Я.Г. Синаем [6], но в отличие от последней определялась только с помощью топологической структуры пространства и не использовала инвариантной меры. В 1971 году Р. Боуэн дал эквивалентное определение топологической энтропии для метрических пространств и доказал степенное правило для непрерывных потоков, что позволило перенести понятие топологической энтропии на системы с непрерывным временем [11].

Следует отметить, что изучение энтропии невозможно без учета разных форм размерностей пространств или инвариантных множеств. Часто при оценке энтропии используются дополнительные свойства динамической системы, в частности их гиперболичность [9, 22]. При получении различных оценок размерностей и энтропии важную роль играют ляпуновские показатели, существование которых показано в работах [19, 21]. Актуальным направлением в теории размерностей является изучение размерности Ляпунова, которая использует уже упомянутые ляпуновские показатели [13, 14, 17]. Отметим, что в ряде случаев вместо оценок удается получить точные формулы для разных форм энтропии и размерностей [22, 15, 16].

В данной работе изучается топологическая энтропия для систем с многомерным временем. Такие системы возникают, если задано непрерывное действие группы (или полугруппы) $\mathbb{Z}^d$ ($\mathbb{Z}^d_+$) или $\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{R}^d_+$) на метрическом пространстве. Источником первых являются попарно коммутирующие непрерывные отображения метрического пространства в себя. Вторые же получаются, например, как решения вполне интегрируемых уравнений [2]. Вопрос топологической энтропии (и не только) в случае некоторых действий группы $\mathbb{Z}^d$ рассматривается в работах Д. Линда и К. Шмидта [18, 23]. В дальнейшем мы дадим определение топологической энтропии, следуя данным работам.

Перейдем к краткому описанию содержания работы. Глава 1 посвящена вопросам топологической энтропии в системах с дискретным многомерным временем. Показывается, что одной из особенностей систем с многомерным временем является то, что достаточно регулярные (например, липшицевы) системы имеют нулевую топологическую энтропию в случае, если фазовое пространство этой системы конечномерно в смысле фрактальной размерности. Вводится новая емкостная характеристика метрического пространства с помощью которой получается обобщение известного одномерного по времени результата о верхней оценке топологической энтропии. Эта оценка позволяет объяснить явление равенства нулю или бесконечности топологической энтропии, что довольно часто происходит в системах с многомерным временем. Далее вводится понятие относительной топологической энтропии, которое в некоторых ситуациях позволяет обойти это явление. В главе 2 понятие топологической и относительной топологической энтропии распространяется на системы с непрерывным многомерным временем. Этому способствует обобщение степенного правила Боуэна для многомерных непрерывных по времени потоков. Для линейных систем с многомерным временем, представленных в виде уравнений в частных производных первого порядка, выявлена связь относительной топологической энтропии и управляемости таких систем.

Коротко о главных обозначениях. Для произвольных векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определим их *произведение* $xy := (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)$ и, если все координаты вектора y ненулевые, *частное* $\frac{x}{y} := (\frac{x_1}{y_1}, \ldots, \frac{x_n}{y_n})$. Будем писать $y > 0$ $(y \geq 0)$, если все координаты вектора y положительны (неотрицательны). Соответственно пишем $x \leq y$, если $y - x \geq 0$. Символом $|x|$ обозначена супремум-норма:

$$|x| := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Будем обозначать время в основном буквой t, в случае если этого недостаточно, то также буквами s, n. В тех ситуациях, когда время многомерно (то есть представляет собой вектор), будем выделять его жирным шрифтом: $\mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{p}$ Мощность множества $\mathcal{A}$ обозначим символом $|\mathcal{A}|$. Также будем считать, что все недоопределенные выражения, встречающиеся в тексте, в граничных ситуациях определяются по непрерывности. Так, например, $0 \log 0 := 0$ или

$\max\{0, \log 0\} := 0$. Здесь (и далее в работе) log — логарифм по произвольному, большему единицы, основанию, единому в рамках всей работы (обычно рассматривается двоичный или натуральный логарифм).

1 Топологическая энтропия в системах с дискретным многомерным временем

1.1 Основные определения

Пусть задано метрическое пространство $(\mathcal{M}, \rho)$, целое положительное число d и $\mathbb{G} \in \{\mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d\}$ — топологическая группа ($\mathbb{R}^d$ наделяется стандартной топологией, а $\mathbb{Z}^d$ — дискретной). *Непрерывным действием* группы $\mathbb{G}$ на $\mathcal{M}$ будем называть семейство отображений $\varphi^{\mathbf{t}}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, зависящих от параметра $\mathbf{t} \in \mathbb{G}$, такое что отображение $(\mathbf{t}, x) \mapsto \varphi^{\mathbf{t}}(x)$ непрерывно как отображение из $\mathbb{G} \times \mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$ и выполнено групповое свойство: $\varphi^{\mathbf{t}+\mathbf{s}} = \varphi^{\mathbf{t}} \circ \varphi^{\mathbf{s}}$, причем $\varphi^0 = id_{\mathcal{M}}$. Семейство отображений $\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{G}}$ будем для краткости обозначать символом φ. Если $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$, то семейство φ называется *d-мерным дискретным (по времени) потоком* на $\mathcal{M}$. Если $\mathbb{G} = \mathbb{R}^d$, то семейство φ называется *d-мерным непрерывным (по времени) потоком* на $\mathcal{M}$.

Непрерывные потоки будут рассматриваться в главе 2. Далее, в рамках этой главы, считаем, что $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$.

Определение 1.1. *Пусть $(\mathcal{M}, \rho)$ — метрическое пространство и φ — d-мерный дискретный поток на $\mathcal{M}$. Пара $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ называется динамической системой с дискретным многомерным (d-мерным) временем. Пространство $(\mathcal{M}, \rho)$ называется фазовым пространством.*

Рассмотрим вопрос о том как можно задать дискретный поток на метрическом пространстве $(\mathcal{M}, \rho)$. Используя групповое свойство для семейства φ, любое отображение $\varphi^{\mathbf{t}}$ можно представить в виде $\varphi^{\mathbf{t}} = \varphi^{t_1\mathbf{e}_1} \circ \ldots \circ \varphi^{t_d\mathbf{e}_d}$, используя координатное представление вектора $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{Z}^d$ по каноническому базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d\}$ в $\mathbb{R}^d$. Обозначив $\varphi_j := \varphi^{\mathbf{e}_j}$, получим представление

$$\varphi^{\mathbf{t}} = \varphi_1^{t_1} \circ \ldots \circ \varphi_d^{t_d}, \tag{1}$$

где под $\varphi_j^{t_j}$ уже понимается итерация отображения φ_j выполненная t_j раз. При этом, отображения $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ обязаны попарно коммутировать ($\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i$) в силу того же группового свойства. Верно и обратное: если имеется

d непрерывных и попарно коммутирующих отображений метрического пространства в себя $\varphi_1, \ldots, \varphi_d \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, то равенство (1) задает d-мерный дискретный поток на $\mathcal{M}$. Отображение φ_j будем называть *j-ым координатным представителем дискретного потока φ.*

Как будет видно далее, для определения топологической энтропии достаточно полугрупповой структуры семейства φ. Причем в полугрупповом случае остаются верны и все общие факты о топологической энтропии. Другое дело, что наличие групповых свойств в системе дает возможность формулировать более детальные утверждения в рамках этой ситуации. Именно по этой причине мы рассматриваем только групповые системы, но с учетом данного замечания все определения и теоремы естественным образом могут быть перенесены на полугрупповой случай.

Наша следующая цель — определить топологическую энтропию динамической системы $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ с не компактным фазовым пространством. Будем говорить, что d-мерный дискретный поток φ *равномерно непрерывен* на $\mathcal{M}$, если его координатные представители $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ равномерно непрерывны на $\mathcal{M}$. Далее считаем, что дискретный поток динамической системы $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ равномерно непрерывен на $\mathcal{M}$. Для целого положительного числа m обозначим $C_m := \{0, \ldots, m-1\}^d \subset \mathbb{Z}^d$. Рассмотрим новую метрику (семейство метрик) на $\mathcal{M}$:

$$\rho_m(x, y) := \max_{\mathbf{t}\in C_m} \rho(\varphi^{\mathbf{t}}(x), \varphi^{\mathbf{t}}(y)), \quad x, y \in \mathcal{M}. \tag{2}$$

Множество $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ называется (m, ε)-*отделенным (относительно φ)*, если для любых различных $x, y \in \mathcal{E}$ выполнено $\rho_m(x, y) > \varepsilon$. Будем говорить, что множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ (m, ε)-*порождает* другое *множество $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ (относительно φ)*, если для всякого $x \in \mathcal{K}$ найдется $y \in \mathcal{F}$, такой что $\rho_m(x, y) \le \varepsilon$. Для компактного множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ определим $r_m(\varepsilon, \mathcal{K})$ как наименьшую мощность множеств $\mathcal{F}$, которые (m, ε)-порождают $\mathcal{K}$. Через $s_m(\varepsilon, \mathcal{K})$ обозначим наибольшую мощность (m, ε)-отделенных множеств $\mathcal{E}$, содержащихся в $\mathcal{K}$. Величины $r_m(\varepsilon, \mathcal{K})$ и $s_m(\varepsilon, \mathcal{K})$ конечны в силу компактности множества $\mathcal{K}$ и равномерной непрерывности потока φ. В ситуациях, когда необходимо подчеркнуть зависимость этих величин от φ, будем писать $r_m(\varepsilon, \mathcal{K}, \varphi)$ и $s_m(\varepsilon, \mathcal{K}, \varphi)$. Как и в одномерном по времени случае [11] нетрудно показать, что определение следующей величины корректно:

$$h(\varphi, \mathcal{K}) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m^d} \log r_m(\varepsilon, \mathcal{K}) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m^d} \log s_m(\varepsilon, \mathcal{K}).$$

Определение 1.2. *Пусть* $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M},\rho))$ *— динамическая система в смысле определения 1.1 и дискретный поток* φ *равномерно непрерывен на* $\mathcal{M}$. *Тогда топологической энтропией называется величина*

$$h_{\mathrm{top}}(\varphi) := \sup\{h(\varphi,\mathcal{K}) \mid \mathcal{K}\subset\mathcal{M},\ \mathcal{K} - \textit{компакт}\}. \tag{3}$$

Замечание 1.1. Легко видеть, что если $\mathcal{K}\subset\mathcal{K}_1\cup\ldots\cup\mathcal{K}_n$, где $\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_n\subset\mathcal{M}$, то $h(\varphi,\mathcal{K}) \le \max\limits_{1\le i\le n} h(\varphi,\mathcal{K}_i)$. Это говорит о том, что при вычислении $h_{\mathrm{top}}(\varphi)$ нужно учитывать только компакты маленького диаметра. Также в случае компактного фазового пространства выполнено равенство $h_{\mathrm{top}}(\varphi) = h(\varphi,\mathcal{M})$.

В предположении компактности фазового пространства динамической системы можно дать эквивалентное определение топологической энтропии на языке открытых покрытий. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — открытые покрытия $\mathcal{M}$ и $\psi\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ — непрерывное отображение. Символами $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ и $\psi^{-1}\mathfrak{A}$ обозначим *произведение покрытий* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ и *прообраз покрытия* $\mathfrak{A}$ *относительно* ψ, определяемые равенствами

$$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B} := \{\mathcal{A}\cap\mathcal{B} \mid \mathcal{A}\in\mathfrak{A}, \mathcal{B}\in\mathfrak{B}\},$$

$$\psi^{-1}\mathfrak{A} := \{\psi^{-1}\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\in\mathfrak{A}\}.$$

Ясно, что произведение и прообраз открытых покрытий также являются открытыми покрытиями. Наименьшее число элементов $\mathfrak{A}$, необходимых для покрытия $\mathcal{M}$ обозначим через $N(\mathfrak{A})$. Тогда, также как и в одномерном по времени случае, величину $h_{\mathrm{top}}(\varphi)$, определенную ранее можно считать по следующей формуле [10, 23]:

$$h_{\mathrm{top}}(\varphi) = \sup_{\mathfrak{A}} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m^d}\log N\left(\bigvee_{\mathbf{t}\in C_m}\varphi^{-\mathbf{t}}\mathfrak{A}\right), \tag{4}$$

где супремум берется по всем конечным открытым покрытиям $\mathfrak{A}$ фазового пространства.

Пусть $(\mathcal{M},\rho)$ — компактное метрическое пространство и $N_\varepsilon(\mathcal{M})$ — наименьшее число метрических шаров радиуса не более ε, которыми можно покрыть $\mathcal{M}$. Тогда *фрактальной размерностью* пространства $(\mathcal{M},\rho)$ называется величина

$$\dim_F\mathcal{M} = \limsup_{\varepsilon\to0+}\frac{\log N_\varepsilon(\mathcal{M})}{\log 1/\varepsilon}.$$

Легко показать, что фрактальная размерность n-мерного куба в $\mathbb{R}^n$ равна n. Поэтому разумно определить фрактальную размерность не компактного метрического пространства $(\mathcal{M}, \rho)$ как верхнюю грань фрактальных размерностей его компактных подмножеств

$$\dim_F \mathcal{M} := \sup\{\dim_F \mathcal{K} \mid \mathcal{K} \subset \mathcal{M},\ \mathcal{K} \text{ — компакт}\}.$$

По такому определению $\dim_F \mathbb{R}^n = n$. Заметим также, что фрактальная размерность может не сохраняться при замене метрики на эквивалентную (задающей ту же самую топологию). Поэтому в те моменты, когда важно подчеркнуть зависимость от метрики, мы будем писать $\dim_F(\mathcal{M}, \rho)$.

1.2 Энтропийные особенности систем с многомерным временем

Для объяснения специфики энтропийных свойств динамических систем с многомерным временем нам потребуются некоторые известные понятия и факты [23]. Пусть $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ — динамическая система в смысле определения 1.1, фазовое пространство которой компактно. Вероятностная мера μ, заданная на σ-алгебре борелевских множеств в $\mathcal{M}$, называется *инвариантной* относительно семейства φ (или просто *инвариантной мерой* на $\mathcal{M}$), если

$$\mu(\varphi^{\mathbf{t}}) = \mu \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d.$$

В этом случае будем писать, что $\mu \in \mathbb{M}_\varphi$. Если $\mu \in \mathbb{M}_\varphi$ и $\mathfrak{Q}$ — конечное борелевское разбиение пространства $\mathcal{M}$ (то есть $|\mathfrak{Q}| < \infty$, $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} \mathcal{Q}$ и элементы $\mathfrak{Q}$ есть попарно дизъюнктные борелевские множества), то величина $H_\mu(\mathfrak{Q}) := -\sum\limits_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} \mu(\mathcal{Q}) \log \mu(\mathcal{Q})$ называется *μ-энтропией конечного борелевского покрытия* $\mathcal{Q}$. Для заданных борелевских разбиений $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ пространства $\mathcal{M}$ и измеримого отображения $\psi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ определим *произведение разбиений* $\mathfrak{P}$ *и* $\mathfrak{Q}$ и *прообраз разбиения* $\mathfrak{P}$ *относительно отображения* ψ с помощью равенств

$$\mathfrak{P} \vee \mathfrak{Q} := \{\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \in \mathfrak{P}, \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}\},$$

$$\psi^{-1}\mathfrak{P} := \{\psi^{-1}\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\}.$$

Как и ранее, положим $C_m := \{0, \ldots, m-1\}^d \subset \mathbb{Z}^d$. *Метрической энтропией относительно* μ называется величина

$$h_\mu(\varphi) := \sup_{\mathfrak{Q}} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m^d} H_\mu\left(\bigvee_{\mathbf{t}\in C_m} \varphi^{-\mathbf{t}}\mathfrak{Q}\right),$$

где супремум берется по всем конечным борелевским разбиениям $\mathfrak{Q}$ пространства $\mathcal{M}$. Известен *вариационный принцип*, связывающий метрическую и топологическую энтропию [23]:

$$h_{\mathrm{top}}(\varphi) = \sup_{\mu \in \mathbb{M}_\varphi} h_\mu(\varphi). \tag{5}$$

Как уже было сказано ранее, d-мерный дискретный поток φ задается с помощью коммутирующих непрерывных отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$. Имеется связь между метрической энтропией динамической системы с многомерным временем, порожденной семейством φ, и метрической энтропией динамических систем с одномерным временем, порожденных итерациями отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$.

Предложение 1.1 ([7], лемма 3 на стр. 75)**.** *Пусть* $(\{\varphi^{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ *— динамическая система в смысле определения 1.1 с компактным фазовым пространством, причем* $d \geq 2$. *Пусть* $\mu \in \mathbb{M}_\varphi$. *Тогда*

$$h_\mu(\varphi) > 0 \;\Rightarrow\; h_\mu(\varphi_j) = \infty, \;\text{при}\; j = 1, \ldots, d.$$

Пользуясь вариационным принципом (5), можно получить аналогичный результат для топологической энтропии.

Теорема 1.1. *Пусть* $(\{\varphi^{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ *— динамическая система в смысле определения 1.1 с компактным фазовым пространством, причем* $d \geq 2$. *Тогда*

$$h_{\mathrm{top}}(\varphi) > 0 \;\Rightarrow\; h_{\mathrm{top}}(\varphi_j) = \infty, \;\text{при}\; j = 1, \ldots, d.$$

Доказательство. Действительно, если $h_{\mathrm{top}}(\varphi) > 0$, то в силу вариационного принципа найдется инвариантная относительно φ мера μ на $\mathcal{M}$, такая что $h_\mu(\varphi) > 0$. Следовательно, по предложению 1.1, имеем $h_\mu(\varphi_j) = \infty$. Применяя все тот же вариационный принцип, но уже для системы порожденной итерацией φ_j, заключаем, что $h_{\mathrm{top}}(\varphi_j) \geq h_\mu(\varphi_j) = \infty$. □

Замечание 1.2. Теорема 1.1 говорит нам о том, что если все величины $h_{\mathrm{top}}(\varphi_j)$ конечны, то $h_{\mathrm{top}}(\varphi) = 0$. Условие $h_{\mathrm{top}}(\varphi_j) < \infty$ выполнено если, например, отображения $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ удовлетворяют условию Липшица и $\dim_F \mathcal{M} < \infty$ (см. теорему 3.1 в [1]). Поэтому положительность топологической энтропии системы с многомерным временем возможна либо в случае, если $\dim_F(\mathcal{M}) = \infty$, либо, если дискретный поток φ недостаточно регулярный.

Рассмотрим один пример, который потребуется нам в дальнейшем.

Пример 1.1. Пусть $d \geq 1$ — целое число и $\mathbb{A}$ — конечное множество (*алфавит*). Обозначим через $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}$ — множество всех отображений $x : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{A}$. Для всякого непустого подмножества $F \subset \mathbb{Z}^d$ обозначим

$$\pi_F : \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{A}^F$$

— *проекцию*, которая сопоставляет каждому отображению $x \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}$ его сужение на F. Для всякого $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ определим *сдвиг Бернулли* σ с помощью равенства

$$(\sigma^{\mathbf{t}} x)_{\mathbf{s}} = x_{\mathbf{t}+\mathbf{s}}, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d, x = \{x_{\mathbf{s}}\} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}.$$

Если снабдить множество $\mathbb{A}$ дискретной топологией, а множество $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d} = \prod\limits_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{A}$ — топологией тихоновского произведения счетного числа метризуемых компактных пространств, то $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}$ — компактное метризуемое пространство с некоторой метрикой ρ. Тогда пара $\Big(\{\sigma^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d}, (\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}, \rho)\Big)$ есть динамическая система с многомерным временем и компактным фазовым пространством. Рассмотрим один конкретный способ введения метрики ρ, задающей топологию тихоновского произведения на $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Пусть $\alpha \in (1, +\infty)$ — произвольное вещественное число. Тогда

$$\rho_\alpha(x, y) = \alpha^{-\sup\{N \in \mathbb{Z}_+ \ | \ x_{\mathbf{s}} = y_{\mathbf{s}} \ \forall \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d \ : \ |\mathbf{s}| < N\}}, \quad x, y \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}. \tag{6}$$

задает нужную метрику. Легко видеть, что $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ — липшицевы отображения (в метрике ρ_α). Можно показать, что $h_{\mathrm{top}}(\sigma) = \log |\mathbb{A}|$. Тогда, учитывая замечание 1.2, заключаем, что $\dim_F(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}, \rho_\alpha) = \infty$ при $d \geq 2$.

1.3 Оценка топологической энтропии систем с многомерным временем

В этом разделе мы приведем обобщение известного результата В.А. Бойченко и Г.А. Леонова о верхней оценке топологической энтропии [1, 10] (который в свою очередь является обобщением результата С. Ито [12]), во-первых, для систем на произвольном метрическом пространстве, а во-вторых, для систем с многомерным временем. Пусть $(\mathcal{M}, \rho)$ — метрическое пространство, $\xi \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — равномерно непрерывное отображение и $\varkappa \colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to (0, +\infty)$ — положительная непрерывная функция, ограниченная сверху и снизу положительными константами. Пусть ρ' — другая метрика на $\mathcal{M}$, которая эквивалентна метрике ρ, то есть, для некоторых констант $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ выполняется соотношение

$$c_1 \rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq c_2 \rho(x, y) \ \ \forall x, y \in \mathcal{M}.$$

Рассмотрим величины

$$k_j = k(\xi, j) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_{0<\rho(x,y)<\varepsilon} \left[\frac{\rho'\left(\xi^j(x), \xi^j(y)\right)}{\rho'(x,y)} \cdot \frac{\varkappa\left(\xi^j(x), \xi^j(y)\right)}{\varkappa(x,y)} \right], \ j = 1, 2, \ldots,$$

Положим

$$k = k(\xi) := \inf_{j\geq 1} \sqrt[j]{k_j}. \tag{7}$$

Будем говорить, что поток φ динамической системы $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ в смысле определения 1.1 удовлетворяет *асимптотическому условию Липшица*, если величины $k(\varphi_i, j)$ конечны для всех $i = 1, \ldots, d$ и $j \geq 1$. Заметим, что это свойство не зависит от выбора метрики ρ' и функции $\varkappa$[1]

Для $x \in \mathcal{M}$, целого положительного числа m и $\varepsilon > 0$ определим

$$B_\varepsilon(x, m, \xi) := \{y \in \mathcal{M} \mid \rho(\xi^j(x), \xi^j(y)) < \varepsilon, j = 0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Обозначим через $B_\delta(x)$ — шар с центром в точке $x \in \mathcal{M}$ радиуса δ в метрике ρ. Представим вспомогательный результат работы [1] (см. доказательство теоремы 3.1) в виде следующей леммы[2].

Лемма 1.1. *Пусть $k(\xi, j) < \infty$ для всех $j \geq 1$ и $\kappa = \kappa(\xi) > k(\xi)$ — достаточное близкое к $k(\xi)$ число. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ и произвольного натурального m найдется натуральное число l, такое, что для всякого $x \in \mathcal{M}$ выполняется включение $B_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x, m, \xi)$, где*

$$\delta = \begin{cases} \kappa^{-(m+l)}\varepsilon, & \text{если } k(\xi) \geq 1, \\ \kappa^l \varepsilon, & \text{если } k(\xi) < 1. \end{cases}$$

Как уже было сказано, системы с многомерным временем, в которых поток φ достаточно регулярный (например, липшицевый), могут иметь положительную топологическую энтропию только на пространствах с бесконечной фрактальной размерностью. Для таких пространств можно использовать другую емкостную характеристику, очень похожую на фрактальную размерность и имеющую тесную связь с топологической энтропией.

Определение 1.3. *Пусть $(\mathcal{M}, \rho)$ — компактное метрическое пространство. Величина*

$$\dim_F(\mathcal{M}, \beta) := \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log N_\varepsilon(\mathcal{M})}{(\log 1/\varepsilon)^\beta}$$

[1] При подходящем выборе функции $\varkappa$ для конкретной системы можно получить более точную оценку, нежели при отсутствии такой функции ($\varkappa \equiv 1$). Введение такой функции для оценки различных форм размерностей и энтропии было впервые предложено Г. А. Леоновым [10, 1].

[2] Мы также уточняем условие теоремы 3.1 в работе [1].

для $\beta \geq 1$ (не обязательно целого) называется β-фрактальной размерностью пространства $\mathcal{M}$.

Для не компактного метрического пространства $(\mathcal{M}, \rho)$ определим β-фрактальную размерность как верхнюю грань соответствующих величин по компактным подмножествам:

$$\dim_F(\mathcal{M}, \beta) := \sup\{\dim_F(\mathcal{K}, \beta) \mid \mathcal{K} \subset \mathcal{M},\ \mathcal{K} - \text{компакт}\}.$$

Вычислив величины (7) для координатных представителей дискретного потока можно получить оценку на топологическую энтропию динамической системы. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть $(\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ — динамическая система в смысле определения 1.1, причем дискретный поток φ удовлетворяет асимптотическому условию Липшица. Пусть $\dim_F(\mathcal{M}, d) < \infty$. Тогда*

$$h_{\text{top}}(\varphi) \leq \left[\sum_{j=1}^{d} \log \max\{1, k(\varphi_j)\}\right]^d \cdot \dim_F(\mathcal{M}, d), \tag{8}$$

где величины $k(\varphi_j)$ вычисляются по формуле (7).

Доказательство. Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ — произвольное компактное подмножество и число $\zeta > \dim_F(M, d)$ выбрано также произвольно. Тогда для всех достаточно малых величин $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{\log N_\delta(\mathcal{K})}{(\log 1/\delta)^d} < \zeta.$$

Применяя лемму 1.1 к каждому из отображений $\varphi_1, \dots, \varphi_d$, получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$, произвольного натурального m и достаточно большого натурального l выполняется неравенство $r_m(\varepsilon, \mathcal{K}) \leq N_\delta(\mathcal{K})$ при

$$\delta = (\kappa(\varphi_{j_1}))^{-(m+l)} \cdot \ldots \cdot \left(\kappa(\varphi_{j_q})\right)^{-(m+l)} \cdot \varepsilon,$$

где индексы $j_1, \dots, j_q$ таковы, что $k(\varphi_{j_i}) > 1$, причем $k(\varphi_j) \leq 1$ для j, отличных от $j_1, \dots, j_q$. Тогда, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ (что влечет малость $\delta > 0$), выполнено

$$\frac{1}{m^d} \log r_m(\varepsilon, \mathcal{K}) \leq \frac{\log N_\delta(\mathcal{K})}{(\log 1/\delta)^d} \cdot \frac{(\log 1/\delta)^d}{m^d} < \zeta \left(\frac{\log 1/\delta}{m}\right)^d. \tag{9}$$

Легко видеть, что $\frac{\log 1/\delta}{m} = \log\left(\kappa(\varphi_{j_1}) \cdot \ldots \cdot \kappa(\varphi_{j_q})\right) + O\left(\frac{1}{m}\right)$. Поэтому после перехода к верхнему пределу при $m \to +\infty$ имеет место неравенство

$$h(\varphi, \mathcal{K}) \leq \left[\log\left(\kappa(\varphi_{j_1}) \cdot \ldots \cdot \kappa(\varphi_{j_q})\right)\right]^d \cdot \zeta.$$

В силу того, что величины $\kappa(\varphi_{j_i})$ могут быть выбраны сколь угодно близкими к $k(\varphi_{j_i})$, также как и число ζ сколь угодно близким к $\dim_F(\mathcal{M}, d)$, получаем утверждение теоремы. □

Рассмотрим применение теоремы 1.2 на примере сдвига Бернулли.

Пример 1.2. Пусть $\left(\{\sigma^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}, \rho_\alpha)\right)$ — динамическая система из примера 1.1. Обозначим $\mathcal{M} = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Напомним, что метрика ρ_α задается для фиксированного вещественного числа $\alpha \in (1, +\infty)$ с помощью равенства (6). Легко видеть, что координатные отображения $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ в метрике ρ_α являются липшицевыми с константой α. В частности, $k(\sigma_j) \leq \alpha$. С учетом равенства $h_{\mathrm{top}}(\sigma) = \log|\mathbb{A}|$ и теоремы 1.2 заключаем, что

$$\dim_F(\mathcal{M}, d) \geq \frac{\log|\mathbb{A}|}{(d\log\alpha)^d}.$$

На самом деле, величину $\dim_F(\mathcal{M}, d)$ в метрике ρ_α легко сосчитать. Для этого в начале посчитаем $N_{\alpha^{-T}}(\mathcal{M})$ для натурального числа T. Пусть $B_{\alpha^{-T}}(x)$ — метрический шар с центром в точке x радиуса α^{-T}, то есть,

$$B_{\alpha^{-T}}(x) = \{y \in \mathcal{M} \mid \rho_\alpha(x, y) < \alpha^{-T}\} = \{y \in \mathcal{M} \mid x_{\mathbf{s}} = y_{\mathbf{s}} \ \forall \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{s}| \leq T\}.$$

Теперь видно, что если $y \in B_{\alpha^{-T}}(x)$, то $B_{\alpha^{-T}}(y) = B_{\alpha^{-T}}(x)$. Поэтому шаров, образующих покрытие $\mathcal{M}$ не меньше, чем различных индексов $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d$, таких что $|\mathbf{s}| \leq T$. С другой стороны, шары, с всевозможными центрами, различающимися на «квадрате» $|\mathbf{s}| \leq T$, образуют покрытие $\mathcal{M}$. Поэтому $N_{\alpha^{-T}}(\mathcal{M}) = |\mathbb{A}|^{(2T-1)^d}$. Пусть теперь $\varepsilon > 0$ — достаточно маленькое число. Выберем T так, чтобы $\alpha^{-T-1} \leq \varepsilon < \alpha^{-T}$. Тогда

$$\frac{\log N_{\alpha^{-T}}(\mathcal{M})}{(\log\alpha^{T+1})^d} \leq \frac{\log N_\varepsilon(\mathcal{M})}{(\log 1/\varepsilon)^d} \leq \frac{\log N_{\alpha^{-T-1}}(\mathcal{M})}{(\log\alpha^T)^d}$$

или

$$\left(\frac{2T-1}{T+1}\right)^d \cdot \frac{\log|\mathbb{A}|}{(\log\alpha)^d} \leq \frac{\log N_\varepsilon(\mathcal{M})}{(\log 1/\varepsilon)^d} \leq \left(\frac{2T+1}{T}\right)^d \cdot \frac{\log|\mathbb{A}|}{(\log\alpha)^d}.$$

Переходя к верхнему пределу при $\varepsilon \to 0+$ получаем, что

$$\dim_F(\mathcal{M}, d) = \left(\frac{2}{\log\alpha}\right)^d \log|\mathbb{A}|.$$

Далее можно наблюдать содержательность оценки топологической энтропии, получаемой с помощью теоремы 1.2

$$\log|\mathbb{A}| = h_{\mathrm{top}}(\sigma) \le (2d)^d \log|\mathbb{A}|.$$

1.4 Относительная топологическая энтропия

Этот раздел мы начнем с пояснения проблемы, связанной с представленным ранее подходом. Предположим наличие динамической системы $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M},\rho))$, в которой координатные представители потока φ удовлетворяют условию Липшица (а значит и асимптотическому условию Липшица).

Определение 1.4. *Пусть $(\mathcal{M},\rho)$ — метрическое пространство. Будем называть показателем емкости пространства $\mathcal{M}$ следующую величину (конечную или бесконечную)*

$$d_F(\mathcal{M}) := \inf\{\beta \in [1;+\infty) \mid \dim_F(\mathcal{M},\beta) < \infty\}.$$

Теорема 1.2 накладывает жесткие ограничения на структуру динамической системы: если d — размерность времени в системе, то для фазового пространства обязательно должно быть выполнено равенство $d_F(\mathcal{M}) = d$, иначе топологическая энтропия системы может оказаться тривиальной. В случае, если $d_F(\mathcal{M}) < d$ это действительно так: в этом случае $\dim_F(\mathcal{M},d) = 0$ и поэтому оценка (8) дает нам, что $h_{\mathrm{top}}(\varphi,\mathcal{M}) = 0$. Если $d_F(\mathcal{M}) > d$, то, вспоминая доказательство неравенства (9) и немного модифицируя его, можно заключить, что подход, используемый в доказательстве теоремы, дает оценку в виде бесконечности. Можно предположить, что для достаточно регулярных систем нетривиальность оценки (8) влечет нетривиальность величины топологической энтропии, и наоборот. Тот факт, что для клеточных автоматов переход на многомерную решетку с сохранением сущности клеточного автомата — итерации, одномерности времени — привел к тому, что их топологическая энтропия стала бесконечной [4], есть ни что иное, как подтверждение наших слов.

Таким образом, явление равенства нулю или бесконечности топологической энтропии возникает зачастую по той причине, что показатель емкости фазового пространства $d_F(\mathcal{M})$ оказывается не согласованным с размерностью времени в системе d, а определение топологической энтропии это никак не учитывает. В таких ситуациях можно немного изменить определение топологической энтропии и, как будет видно далее, такой подход может оказаться полезным. Для компактного подмножества $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ положим

$$h_{\mathrm{rel}}(\varphi, \mathcal{K}) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m^{d_F(\mathcal{M})}} \log r_m(\varepsilon, \mathcal{K}) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m^{d_F(\mathcal{M})}} \log s_m(\varepsilon, \mathcal{K}), \tag{10}$$

где величины $r_m(\varepsilon, \mathcal{K})$ и $s_m(\varepsilon, \mathcal{K})$ определены в разделе 1.1.

Определение 1.5. *Пусть $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ — динамическая система в смысле определения 1.1 с равномерно непрерывным дискретным потоком φ и $d_F(\mathcal{M}) < \infty$. Тогда величина*

$$h_{\mathrm{rel}}(\varphi) := \sup\{h_{\mathrm{rel}}(\varphi, \mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \subset \mathcal{M},\ \mathcal{K} \text{ — компакт}\}$$

называется относительной топологической энтропией.

В случае компактного фазового пространства величина $h_{\mathrm{rel}}(\varphi)$ все также описывается в терминах открытых покрытий $\mathfrak{A}$ пространства $\mathcal{M}$:

$$h_{\mathrm{rel}}(\varphi) = \sup_{\mathfrak{A}} \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m^{d_F(\mathcal{M})}} \log N \left(\bigvee_{\mathbf{t} \in C_m} \varphi^{-\mathbf{t}} \mathfrak{A} \right). \tag{11}$$

Нетрудно показать, что имеет место следующий аналог теоремы 1.2.

Теорема 1.3. *Пусть $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ — динамическая система в смысле определения 1.1, причем дискретный поток φ удовлетворяет асимптотическому условию Липшица. Пусть $d_F = d_F(\mathcal{M}) < \infty$ и $\dim_F(\mathcal{M}, d_F) < \infty$. Тогда*

$$h_{\mathrm{rel}}(\varphi) \le \left[\sum_{j=1}^{d} \log \max\{1, k(\varphi_j)\} \right]^{d_F} \cdot \dim_F(\mathcal{M}, d_F), \tag{12}$$

где величины $k(\varphi_j)$ вычисляются по формуле (7).

Замечание 1.3. Стоит отметить, что такой подход может и не давать содержательного результата: уже ранее процитированные авторы в своей второй работе по энтропии клеточных автоматов [5] показали, что увеличение показателя степени m в определении топологической энтропии приводит к ее нулевому значению. На самом деле, это проблема всех динамических систем, в которых время одномерно ($d = 1$) и $d_F(\mathcal{M}) > d$. Если $d = 1$, то верхний предел в равенстве (4), который называется *энтропией относительно покрытия* $\mathfrak{A}$, можно заменить обычным пределом, причем этот предел будет конечным [8, 10]. Поэтому увеличение показателя степени в m приведет к тому, что энтропия относительно любого покрытия будет равна нулю. В той же работе [5] было предложено некоторое решение этой проблемы для клеточных автоматов с помощью добавления к величине топологической энтропии относительно покрытия $\mathfrak{A}$ нормировочного множителя, зависящего от покрытия $\mathfrak{A}$.

Мы же далее будем рассматривать только ситуации, в которых $d > d_F(\mathcal{M})$. При этом условии $h_{\text{top}}(\varphi)$ оказывается нулевой, а это значит, что топологическая энтропия относительно любого покрытия равна нулю. Но при понижении показателя степени с d до $d_F(\mathcal{M})$ обратного эффекта (топологическая энтропия относительно покрытия станет бесконечной) произойти не может в силу теоремы 1.3, которая гарантирует равномерную ограниченность этих величин.

1.5 Линейные системы с дискретным многомерным временем

Здесь мы рассмотрим один класс динамических систем с дискретным многомерным временем, на примере которого можно наблюдать целесообразность понятия относительной топологической энтропии и полученных ранее результатов.

Пусть $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ и ρ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$. Зададим d-мерный дискретный поток на $\mathcal{M}$ с помощью линейных отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Пусть $A_1, \ldots, A_d$ — матрицы координатных представителей в каноническом базисе $\mathbb{R}^n$. Тогда условие, при котором $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ порождают дискретный поток (возможно полугрупповой, если хотя бы одно из координатных отображений необратимо), записывается как

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad 1 \le i, j \le d. \tag{13}$$

Динамическая система с многомерным временем, порожденная линейными отображениями $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$, удовлетворяющими свойству (13), называется *линейной системой с дискретным многомерным (d-мерным) временем.* Ввиду того, что координатные представители такой системы глобально липшицевы и $\dim_F \mathbb{R}^n = n$ (и следовательно, $d_F(\mathbb{R}^n) = 1$), при $d > 1$ топологическая энтропия такой системы равна нулю.

Особенности линейных систем позволяют намного упростить определение 1.5 относительной топологической энтропии. Во-первых, метрика ρ_m, определенная равенством (2), инвариантна относительно сдвига, поэтому величины $s_m(\varepsilon, \mathcal{K})$, рассматриваемые в определении, не зависят от сдвига компакта $\mathcal{K}$.

В частности, можно ограничиться, например, единичным кубом в $\mathbb{R}^n$. Из однородности линейного преобразования следует то, что $s_m(\varepsilon, \mathcal{K})$ не зависит также и от ε. Это позволяет дать эквивалентное определение относительной топологической энтропии для линейных систем аналогично тому, как это сделано в работе [24].

Зафиксируем линейную систему с дискретным d-мерным временем:

$$\left(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathbb{R}^n, \rho)\right). \tag{14}$$

Пусть μ_L — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}_0 \subset \mathbb{R}^n$ — компактное подмножество с непустой внутренностью и $x_0 \in \mathcal{K}_0$ — внутренняя точка. Как и прежде $C_m = \{0, \ldots, m-1\}^d \subset \mathbb{Z}^d$. Рассмотрим для произвольного $\mathbf{t} \in C_m$ множества $\mathcal{K}_{\mathbf{t}} := \mathcal{K}_0 - x_0 + \varphi^{\mathbf{t}} x_0$ и положим

$$\mathcal{E}_m := \bigcap_{\mathbf{t}\in C_m} \varphi^{-\mathbf{t}} \mathcal{K}_{\mathbf{t}}.$$

Легко видеть, что $\mu_L(\mathcal{E}_m) > 0$. Тогда относительную топологическую энтропию системы (14) можно вычислять по формуле

$$h_{\mathrm{rel}}(\varphi) = \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \log \frac{1}{\mu_L(\mathcal{E}_m)}. \tag{15}$$

Доказательство корректности равенства (15) ничем не отличается от приведенного в работе [24] для случая $d = 1$. Далее мы проведем верхнюю и нижнюю оценку относительной топологической энтропии системы (14). Заметим, что в одномерном случае ($d = 1$) можно получить точное равенство, но при $d > 1$ учесть все эффекты, возникающие при композиции итераций нескольких линейных отображений уже проблематично.

Теорема 1.4. *Пусть* $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d}, (\mathbb{R}^n, \rho))$ *— линейная система с дискретным d-мерным временем. Пусть $\lambda_1^{(j)}, \ldots, \lambda_n^{(j)}$ — собственные числа (с учетом кратности) линейного отображения φ_j и $\lambda^{(j)} := \max\limits_{1\le l\le n} |\lambda_l^{(j)}|$. Имеет место оценка*

$$\max_{1\le j\le d} \sum_{l=1}^{n} \max\{0, \log|\lambda_l^{(j)}|\} \le h_{\mathrm{rel}}(\varphi) \le n \cdot \sum_{j=1}^{d} \max\{0, \log \lambda^{(j)}\}. \tag{16}$$

Доказательство. Покажем нижнюю оценку, используя равенство (15). Ясно, что для всякого $1 \le j \le d$ и произвольного натурального m выполнено включение

$$\mathcal{E}_m := \bigcap_{\mathbf{t}\in C_m} \varphi^{-\mathbf{t}} \mathcal{K}_{\mathbf{t}} \subset \bigcap_{l=0}^{m-1} \varphi_j^{-l} \mathcal{K}_{l\cdot\mathbf{e}_j} =: \widetilde{\mathcal{E}}_m,$$

где $\mathbf{e}_j$ — j-ый вектор в каноническом базисе $\mathbb{R}^d$. Отсюда получаем, что

$$h_{\mathrm{rel}}(\varphi) = \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \log \frac{1}{\mu(\mathcal{E}_m)} \geq \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \log \frac{1}{\mu(\widetilde{\mathcal{E}}_m)} = \sum_{l=1}^{n} \max\{0, \log|\lambda_l^{(j)}|\}.$$

Последнее равенство доказано в [24], теорема 2.1[1]. Для получения верхней оценки применим теорему 1.3. В условиях теоремы положим $p(x,y) \equiv 1$ и $\rho'(x,y) \equiv \rho(x,y)$. Как уже было сказано, $d_F(\mathbb{R}^n) = 1$ и $\dim_F(\mathbb{R}^n, d_F(\mathbb{R}^n)) = \dim_F(\mathbb{R}^n) = n$. Линейное отображение φ_j^l липшицево с константой $\|\varphi_j^l\|$, где под нормой понимается операторная норма. Поэтому выполнено неравенство $k(\varphi_j, l) \leq \|\varphi_j^l\|$ и, как следствие, $k(\varphi_j) \leq \|\varphi_j^l\|^{\frac{1}{l}}$ для всех $l \geq 1$. Величина $\|\varphi_j^l\|^{\frac{1}{l}}$, по теореме о спектральном радиусе, стремится к $\lambda^{(j)}$ при $l \to +\infty$, поэтому $k(\varphi_j) \leq \lambda^{(j)}$. Осталось применить оценку (12). $\square$

Заметим, что положительность верхней оценки влечет положительность нижней. Также нетрудно построить пример, в котором эти оценки будут совпадать.

2 Топологическая энтропия в системах с непрерывным многомерным временем

2.1 Топологическая энтропия по направлению и ее оценка

В начале приведем определение динамической системы с непрерывным многомерным временем.

Определение 2.1. *Пусть $(\mathcal{M}, \rho)$ — метрическое пространство и φ — d-мерный непрерывный (по времени) поток на $\mathcal{M}$ (определение см. в начале раздела 1.1). Пара $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ называется динамической системой с непрерывным многомерным (d-мерным) временем. Пространство $(\mathcal{M}, \rho)$ называется фазовым пространством.*

Непрерывный d-мерный поток на $\mathcal{M}$ можно задать с помощью попарно коммутирующих одномерных непрерывных потоков $\{\varphi_1^t\}_{t\in\mathbb{R}}, \ldots, \{\varphi_d^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ на $\mathcal{M}$ по формуле

$$\varphi^{\mathbf{t}} = \varphi_1^{t_1} \circ \ldots \circ \varphi_d^{t_d}, \quad \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{17}$$

[1]Причем сам результат (о топологической энтропии линейного отображения) принадлежит Р. Боуэну [11], а идея использованная при доказательстве в работе [24] состоит в наблюдении за изменением объема под действием системы. Такой подход, в более общем виде, был ранее представлен в работе [20].

Как и в случае с дискретным (по времени) потоком, верно обратное: полагая все кроме j-ой координаты вектора $\mathbf{t}$ нулевыми, получим выражение для соответствующего одномерного потока $\{\varphi_j^t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Равенство (17) будем называть *координатным представлением непрерывного потока* φ. Каждый момент времени $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d$ задает дискретный поток $\{\varphi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{p}}\}_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d}$ на $\mathcal{M}$ определяемый следующим образом:

$$\varphi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{p}} := \varphi^{\mathbf{tp}}, \quad \mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d. \tag{18}$$

Обратим внимание на обозначения. Будем считать, что символ $\varphi_{\mathbf{t}}$ указывает на семейство $\{\varphi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{p}}\}_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d}$. Используя координатное представление потока φ (17), получим

$$\varphi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{p}} = \varphi^{\mathbf{tp}} = \varphi_1^{t_1 n_1}\circ\ldots\circ\varphi_d^{t_d n_d}, \quad \mathbf{p} = (n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{Z}^d,$$

поэтому j-го координатного представителя семейства $\varphi_{\mathbf{t}}$ для удобства будем обозначать символом $\varphi_j^{t_j}$ (это отличается от ранее принятого в разделе 1.1 обозначения).

Пусть $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^d$ и $\mathbf{s}>0$. Введем куб в пространстве многомерного времени

$$Q_{\mathbf{s}} := \{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d \mid 0\le t_i\le s_i,\ i=1\ldots d\}. \tag{19}$$

Будем гоорить, что d-мерный непрерывный (по времени) поток φ *равномерно непрерывен на* $\mathcal{M}$, если для любого $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^d, \mathbf{s}>0$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, такое что неравенство $\rho(\varphi^{\mathbf{t}}(x),\varphi^{\mathbf{t}}(y))<\varepsilon$ выполнено для всех $\mathbf{t}\in Q_{\mathbf{s}}$, как только $\rho(x,y)\le\delta$ для $x,y\in\mathcal{M}$. В частности, если фазовое пространство $\mathcal{M}$ — компактно, то любой непрерывный (по времени) поток на $\mathcal{M}$ является равномерно непрерывным на $\mathcal{M}$. Теперь перейдем к доказательству аналога степенного правила Боуэна [11] для топологической энтропии систем с многомерным временем (определение 1.2).

Теорема 2.1. *Пусть* $(\{\varphi^{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d},(\mathcal{M},\rho))$ — *динамическая система в смысле определения 2.1 и поток* φ *равномерно непрерывен на* $\mathcal{M}$. *Тогда для всякого* $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ *выполнено равенство*

$$h_{\mathrm{top}}(\varphi_{\boldsymbol{t}}) = \alpha^d h_{\mathrm{top}}(\varphi_{\frac{\boldsymbol{t}}{\alpha}}),$$

где $\alpha>0$ — *произвольное число.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{s},\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d$ и $\mathbf{s},\mathbf{t}>0$. Покажем, что $h_{\mathrm{top}}(\varphi_{\mathbf{t}})\le\left|\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{s}}\right|^d h_{\mathrm{top}}(\varphi_{\mathbf{s}})$. Пусть $\mathcal{K}\subset\mathcal{M}$ — произвольный компакт. В силу равномерной непрерывности потока имеем:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x,y\in\mathcal{M}\ \rho(x,y)\le\delta\Rightarrow\rho(\varphi^{\mathbf{q}}(x),\varphi^{\mathbf{q}}(y))\le\varepsilon\ \forall\mathbf{q}\in Q_{\mathbf{s}}.$$

Возьмем теперь множество $\mathcal{F}$, которое (C_k, δ)-порождает $\mathcal{K}$ (относительно $\varphi_{\mathbf{s}}$), то есть

$$\forall x \in \mathcal{K}\ \exists y \in \mathcal{F} : \rho(\varphi^{\mathbf{sp}} x, \varphi^{\mathbf{sp}} y) \le \delta\ \forall \mathbf{p} \in C_k.$$

Отсюда

$$\forall x \in \mathcal{K}\ \exists y \in \mathcal{F} : \rho(\varphi^{\mathbf{sp}+\mathbf{q}} x, \varphi^{\mathbf{sp}+\mathbf{q}} y) \le \varepsilon\ \forall \mathbf{p} \in C_k, \forall \mathbf{q} \in Q_{\mathbf{s}}.$$

Таким образом, заключаем, что $\mathcal{F}$ — (C_m, ε)-порождает $\mathcal{K}$ (относительно $\varphi_{\mathbf{t}}$), если $m\mathbf{t} \le k\mathbf{s}$, то есть, при $k \ge m \left|\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{s}}\right|$. Следовательно,

$$r_m(\varepsilon, \mathcal{K}, \varphi_{\mathbf{t}}) \le r_{\left\lfloor m\left|\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{s}}\right|\right\rfloor+1}(\delta, \mathcal{K}, \varphi_{\mathbf{s}}),$$

$$\frac{1}{m^d} \log r_m(\varepsilon, \mathcal{K}, \varphi_{\mathbf{t}}) \le \frac{1}{m^d} \log r_{\left\lfloor m\left|\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{s}}\right|\right\rfloor+1}(\delta, \mathcal{K}, \varphi_{\mathbf{s}}).$$

Отсюда

$$h(\varphi_{\mathbf{t}}, \mathcal{K}) \le \left|\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{s}}\right|^d h(\varphi_{\mathbf{s}}, \mathcal{K}).$$

Учитывая произвольный выбор компакта $\mathcal{K}$, получаем требуемое:

$$h_{\text{top}}(\varphi_{\mathbf{t}}) \le \left|\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{s}}\right|^d h_{\text{top}}(\varphi_{\mathbf{s}}). \tag{20}$$

Теперь для $\mathbf{t} > 0$ и $\alpha > 0$ имеем $h_{\text{top}}(\varphi_{\mathbf{t}}) \le \alpha^d h_{\text{top}}\left(\varphi_{\frac{\mathbf{t}}{\alpha}}\right) \le \alpha^d \frac{1}{\alpha^d} h_{\text{top}}(\varphi_{\mathbf{t}})$. Предположим что координаты вектора $\mathbf{t}$ ненулевые и имеют разные знаки. Не умаляя общности, считаем, что $t_1 < 0$ и $t_k > 0$ при $2 \le k \le d$ (в противном случае повторим нижеследующую процедуру для всех отрицательных индексов). Рассмотрим другой $d-$мерный непрерывный поток ψ определяемый равенством $\psi^{\mathbf{s}} = \varphi^{(-s_1, s_2, \ldots, s_d)}$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{t}' = (-t_1, t_2, \ldots, t_d) > 0$. Имеем

$$\psi^{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}'} = \psi^{\mathbf{pt}'} = \varphi^{\mathbf{pt}} = \varphi^{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}.$$

Значит, $h_{\text{top}}(\varphi_{\mathbf{t}}) = h_{\text{top}}(\psi_{\mathbf{t}'}) = \alpha^d h_{\text{top}}(\psi_{\frac{\mathbf{t}'}{\alpha}}) = \alpha^d h_{\text{top}}(\varphi_{\frac{\mathbf{t}}{\alpha}})$. Если имеется нулевая координата $t_k = 0$, то соответствующий координатный представитель семейства $\varphi_{\mathbf{t}}$ будет тождественным отображением. Это позволяет понизить размерность времени потока и повторить те же рассуждения, что и выше. Если же $\mathbf{t} = 0$, то очевидно, что $h_{\text{top}}(\varphi_{\mathbf{t}}) = 0$. $\square$

Приведем аналог степенного правила Боуэна для относительной топологической энтропии (определение 1.5).

Теорема 2.2. *Пусть* $(\{\varphi^{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d}, (\mathcal{M},\rho))$ *— динамическая система в смысле определения 2.1 и поток* φ *равномерно непрерывен на* $\mathcal{M}$*. Пусть фазовое пространство имеет конечный показатель емкости, то есть* $d_F = d_F(\mathcal{M}) < \infty$*. Тогда для всякого* $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ *выполнено равенство*

$$h_{\mathrm{rel}}(\varphi_{\boldsymbol{t}}) = \ \alpha^{d_F} h_{\mathrm{rel}}(\varphi_{\frac{\boldsymbol{t}}{\alpha}}),$$

где $\alpha > 0$ *— произвольное число.*

Как следует из этих теорем, величину $h_{\mathrm{top}}(\varphi_{\mathbf{t}}, \mathcal{M})$, где $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d$ — нормированный вектор, разумно называть *топологической энтропией по направлению* $\boldsymbol{t}$. Соответственно, величина $h_{\mathrm{rel}}(\varphi_{\mathbf{t}}, \mathcal{M})$, где $\mathbf{t}$ — нормированный вектор, называется *относительной топологической энтропией по направлению* $\boldsymbol{t}$.

Будем называть непрерывный (по времени) поток на $\mathcal{M}$ *равномерно липшицевым на* $\mathcal{M}$, если для некоторого $T_0 > 0$ множество констант Липшица отображений $\varphi^{\mathbf{t}}$, где $|\mathbf{t}| < T_0$, ограничено.

Пусть задан равномерно липшицевый на $\mathcal{M}$ поток φ имеющий координатное представление $\varphi^{\mathbf{t}} = \varphi_1^{t_1}\circ\ldots\circ\varphi_d^{t_d},\ \mathbf{t}\in\mathbb{R}^d$. Рассмотрим функции

$$\nu^{(j)}(t) := \inf\{c\in\mathbb{R}_+ \mid \rho(\varphi_j^t(x), \varphi_j^t(y)) \le c\rho(x,y)\ \forall x,y\in\mathcal{M}\}.$$

Ясно, что

$$\rho(\varphi_j^{t_1+t_2}(x), \varphi_j^{t_1+t_2}(y)) \le \nu^{(j)}(t_1)\nu^{(j)}(t_2)\rho(x,y),$$

поэтому функция $\nu^{(j)}(t)$ субаддитивна, то есть, $\nu^{(j)}(t_1+t_2) \le \nu^{(j)}(t_1)\nu^{(j)}(t_2)$, и существует конечный предел

$$\nu^{(j)} := \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log\nu^{(j)}(t). \tag{21}$$

В теореме 1.2 положим $\varkappa\equiv 1$ и $\rho'\equiv\rho$. Пусть $\mathbf{t} = (t_1,\ldots,t_d)\in\mathbb{R}^d$ и $\mathbf{t} > 0$. Тогда можно оценить величину $h_{\mathrm{top}}(\varphi_{\mathbf{t}}, \mathcal{M})$ с помощью теоремы 1.2. Легко видеть, что $k(\varphi_j^{t_j}, l) \le \nu^{(j)}(t_j\cdot l)$ и, как следствие, выполнено

$$\log k(\varphi_j^{t_j}) \le \frac{1}{l}\log\nu^{(j)}(t_j\cdot l) = \frac{t_j}{t_j\cdot l}\log\nu^{(j)}(t_j\cdot l)\ \ \forall l\ge 1.$$

Переходя к пределу при $l\to\infty$, получаем, что

$$\log k(\varphi_j^{t_j}) \le t_j\nu^{(j)}. \tag{22}$$

При произвольных $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d$ с ненулевыми координатами проделаем трюк с заменой знаков у координат как при доказательстве теоремы 2.1. Если некоторые координаты вектора $\mathbf{t}$ равны нулю, то соответствующие этим координатам величины $\nu^{(j)}$ также равны нулю. Так что в случае произвольного

$\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ неравенство (22) принимает вид

$$\log k(\varphi_j^{t_j}) \leq |t_j|\nu^{(j)}. \tag{23}$$

Из этих рассуждений вытекают следующие результаты.

Теорема 2.3. *Пусть* $(\{\varphi^{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ *— динамическая система в смысле определения 2.1 и поток* φ *равномерно липшицев на* $\mathcal{M}$. *Пусть* $\dim_F(\mathcal{M}, d) < \infty$. *Тогда для всякого* $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ *имеет место оценка*

$$h_{\mathrm{top}}(\varphi_{\boldsymbol{t}}) \leq \left[\sum_{j=1}^{d} |t_j| \max\{0, \nu^{(j)}\}\right]^d \cdot \dim_F(\mathcal{M}, d),$$

где величины $\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(d)}$ *вычисляются по формуле (21).*

Теорема 2.4. *Пусть* $(\{\varphi^{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ *— динамическая система в смысле определения 2.1 и поток* φ *равномерно липшицев на* $\mathcal{M}$. *Пусть* $d_F = d_F(\mathcal{M}) < \infty$ *и* $\dim_F(\mathcal{M}, d_F) < \infty$. *Тогда для всякого* $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ *имеет место оценка*

$$h_{\mathrm{rel}}(\varphi_{\boldsymbol{t}}) \leq \left[\sum_{j=1}^{d} |t_j| \max\{0, \nu^{(j)}\}\right]^{d_F} \cdot \dim_F(\mathcal{M}, d_F),$$

где величины $\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(d)}$ *вычисляются по формуле (21).*

Теоремы 2.3 и 2.4 в частности показывают, что величины $h_{\mathrm{top}}(\varphi_{\mathbf{t}}, \mathcal{M})$ и $h_{\mathrm{rel}}(\varphi_{\mathbf{t}}, \mathcal{M})$ равномерно ограничены по $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, $|\mathbf{t}| \leq 1$. Более того, из неравенства (20) легко получить, что своего наибольшего значения (по единичному шару) энтропия достигает на векторе, состоящем из единиц: $\mathbf{t} = (1, \ldots, 1)$. Это мотивирует к введению следующего определения.

Определение 2.2. *Пусть* $(\{\varphi^{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d}, (\mathcal{M}, \rho))$ *— динамическая система в смысле определения 2.1 и поток* φ *равномерно непрерывен на* $\mathcal{M}$. *Тогда топологической энтропией называется величина*

$$h_{\mathrm{top}}(\varphi) := h_{\mathrm{top}}(\varphi_{\boldsymbol{t}}),$$

где $\boldsymbol{t} = (1, \ldots, 1)$ *— вектор в* $\mathbb{R}^d$, *состоящий из единиц.*

Соответственно величину $h_{\mathrm{rel}}(\varphi) := h_{\mathrm{rel}}(\varphi_{\mathbf{t}})$, где $\mathbf{t} = (1, \ldots, 1)$, будем называть *относительной топологической энтропией* системы с непрерывным временем.

Теперь теоремы 2.3 и 2.4 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 2.5. *Пусть* $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d},(\mathcal{M},\rho))$ *— динамическая система в смысле определения 2.1 и поток* φ *равномерно липшицев на* $\mathcal{M}$*. Пусть* $\dim_F(\mathcal{M},d)<\infty$*. Тогда имеет место оценка*

$$h_{\rm top}(\varphi)\le\left[\sum_{j=1}^{d}\max\{0,\nu^{(j)}\}\right]^d\cdot\dim_F(\mathcal{M},d),$$

где величины $\nu^{(1)},\dots,\nu^{(d)}$ *вычисляются по формуле (21).*

Теорема 2.6. *Пусть* $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d},(\mathcal{M},\rho))$ *— динамическая система в смысле определения 2.1 и поток* φ *равномерно липшицев на* $\mathcal{M}$*. Пусть* $d_F=d_F(\mathcal{M})<\infty$ *и* $\dim_F(\mathcal{M},d_F)<\infty$*. Тогда имеет место оценка*

$$h_{\rm rel}(\varphi)\le\left[\sum_{j=1}^{d}\max\{0,\nu^{(j)}\}\right]^{d_F(\mathcal{M})}\cdot\dim_F(\mathcal{M},d_F(\mathcal{M})),$$

где величины $\nu^{(1)},\dots,\nu^{(d)}$ *вычисляются по формуле (21).*

2.2 Вполне интегрируемые системы

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — банаховы пространства. Через $L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ обозначим множество линейных отображений из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{F}$.

Рассмотрим уравнение

$$x'(\mathbf{t})=f(x(\mathbf{t}),u(\mathbf{t})) \tag{24}$$

с начальным условием

$$x(\mathbf{t}_0)=x_0. \tag{25}$$

Здесь $\mathbf{t},\mathbf{t}_0\in\mathbb{R}^d$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, $f\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n)$ — непрерывно дифференцируемое отображение и $u\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^k$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Решением задачи (24)-(25) называется непрерывно дифференцируемая функция $x(\mathbf{t})=x(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,x_0)$, которая удовлетворяет уравнению (24) для всех $\mathbf{t}$ из некоторой окрестности $\mathbf{t}_0$ и начальному условию (25). Если для любых начальных данных $(\mathbf{t}_0,x_0)$ существует единственное решение $x(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,x_0)$ задачи (24)-(25), то уравнение (24) называется *вполне интегрируемым.*

Необходимое и достаточное условие вполне интегрируемости уравнения (24) в терминах правой части дает теорема Фробениуса (теорема 3.1 в [2]). В этой же книге можно найти условия глобальности, а также непрерывной и даже гладкой зависимости решения от начальных данных.

Если правая часть уравнения (24) не зависит от u, то уравнение (24) автономно и, при выполнении условий вполне интегрируемости и глобальности решения, порождает динамическую систему с непрерывным многомерным временем.

2.2.1 Линейные системы с непрерывным многомерным временем

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами в координатной форме [2]:

$$dx = [A_1 x(\mathbf{t})]dt_1 + \ldots + [A_d x(\mathbf{t})]dt_d, \tag{26}$$

где $A_1, \ldots, A_d$ — матрицы порядка $n \times n$. Решением уравнения (26) называется любая непрерывно дифференцируемая функция $x\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая уравнению для всех $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$.

Уравнение (26) является частным случаем уравнения (24). Условие вполне интегрируемости требует, чтобы матрицы $A_1, \ldots, A_d$ попарно коммутировали:

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad 1 \le i, j \le d. \tag{27}$$

При выполнении этого условия всякое решение уравнения (26) определено для всех $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ и задача

$$dx = [A_1 x(\mathbf{t})]dt_1 + \ldots + [A_d x(\mathbf{t})]dt_d, \tag{28}$$

$$x(0) = x_0 \tag{29}$$

имеет единственное решение, которое можно найти по формуле

$$x(\mathbf{t}) = x(\mathbf{t}, x_0) = W(\mathbf{t}) x_0, \tag{30}$$

где $W(\mathbf{t}) = e^{A_1 t_1 + \ldots + A_d t_d}$ — фундаментальный оператор. Определим d-мерный непрерывный поток в $\mathbb{R}^n$ равенством

$$\varphi^{\mathbf{t}}(x_0) = x(\mathbf{t}, x_0), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда соответствующая динамическая система с непрерывным многомерным временем $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d}, (\mathbb{R}^n, \rho))$ называется *линейной системой с непрерывным многомерным (d-мерным) временем.*

Теорема 2.7. *Пусть* $(\{\varphi^{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d}, (\mathbb{R}^n, \rho))$ *— линейная система с непрерывным* d*-мерным временем, порожденная уравнением (26). Пусть* $\lambda_1^{(j)}, \ldots, \lambda_n^{(j)}$ *— собственные числа (с учетом кратности) матрицы* A_j *и* $\lambda^{(j)} := \max\limits_{1\le l\le n} \operatorname{Re}\lambda_l^{(j)}$. *Имеет место оценка*

$$\log e \cdot \max_{1\le j\le d} \sum_{l=1}^{n} \max\{0, \operatorname{Re}\lambda_l^{(j)}\} \le h_{\mathrm{rel}}(\varphi) \le \log e \cdot n \cdot \sum_{j=1}^{d} \max\{0, \lambda^{(j)}\} \qquad (31)$$

Доказательство. Применим теорему 1.4 для оценки относительной топологической энтропии системы, порожденной семейством $\varphi_{\mathbf{t}}$, где $\mathbf{t} = (1, \ldots, 1)$. Из равенства (30) следует, что j−ый коoридантный представитель φ_j^1 этого семейства задается матричной экспонентой e^{A_j}. Собственные числа матричной экспоненты e^{A_j} являются экспонентами от собственных чисел матрицы A_j. Отсюда легко следует утверждение теоремы. □

Как и в случае линейных систем с дискретным временем, в теореме 2.7 положительность верхней оценки влечет положительность нижней. Также в данном случае удобно понимать под log натуральный логарифм, чтобы избавиться от множителя $\log e$ в оценке (31).

2.2.2 Управляемость линейных систем с непрерывным многомерным временем

Рассмотрим задачу управления для линейной системы в координатном виде:

$$\frac{\partial x}{\partial t_j}(\mathbf{t}) = A_j x(\mathbf{t}) + B_j u(\mathbf{t}), \quad 1 \le j \le d, \qquad (32)$$

$$x(0) = x_0, \qquad (33)$$

где $A_1, \ldots A_d$ — матрицы размера $n \times n$, $B_1, \ldots, B_d$ — матрицы размера $n \times k$, а
$u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ — некоторая функция (подробнее об ограниченях на u будет сказано ниже). Система уравнений в частных производных первого порядка (32) является частным случаем уравнения (24) (при непрерывно дифференцируемых u) и при $u = 0$ эквивалентна линейному уравнению с постоянными коэффициентами (28). Одно из условий вполне интегрируемости для уравнения (32) уже нам знакомо:

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad 1 \le i, j \le d. \qquad (34)$$

Второе условие накладывает ограничение на возможное управление u (в случае непрерывной дифференцируемости):

$$A_iF_j + \frac{\partial F_i}{\partial t_j} = A_jF_i + \frac{\partial F_j}{\partial t_i}, \quad 1 \le i, j \le d, \tag{35}$$

где $F_j(\mathbf{t}) = B_ju(\mathbf{t})$.

При выполнении условий вполне интегрируемости решение задачи (32)-(33) обозначим как $x(\mathbf{t}, x_0, u)$. В общем случае, нужное управление u может иметь разрывы первого рода, поэтому условия вполне интегрируемости (35) выполняются лишь локально, на открытых множествах. Если допустить, что множество разрывов первого рода управления u есть конечное объединение многообразий (в $\mathbb{R}^d_+$) размерности не больше чем $d-1$, то решение $x(\mathbf{t}, x_0, u)$ можно построить поэтапно. В этом случае управление u будем называть *допустимым управлением*. Пусть $\mathfrak{U}$ — множество всех допустимых управлений. Для $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ множество

$$\mathcal{C}(\mathbf{t}) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathfrak{U} \ : \ x(\mathbf{t}, x_0, u) = 0\}$$

называется *управляемым множеством для момента времени* $\boldsymbol{t}$. Множество $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{\mathbf{t} \ge 0} \mathcal{C}(\mathbf{t})$ называется *полным управляемым множеством.* Будем называть систему (32) *управляемой*, если $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. Для $1 \le j \le d$ рассмотрим матрицы

$$G_j = [B_j, A_1B_j, \dots, A_dB_j, \dots, A_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot A_d^{k_d}B_j, \dots, A_1^{n-1}\cdot\ldots\cdot A_d^{n-1}B_j], \ \ k_j \le n-1$$

размера $n \times kn^d$. Матрица $G = [G_1, \dots, G_d]$ называется *матрицей управляемости* системы (32). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.8 ([25], теорема 3.4)**.** *Пусть* $\operatorname{rank} G = n$ *и* $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ *для любого собственного числа* λ *матриц* $A_1, \dots, A_d$. *Тогда система (32) управляема.*

Как видно из теоремы 2.7, положительность топологической энтропии системы, порожденной уравнением

$$\frac{\partial x}{\partial t_j}(\mathbf{t}) = A_jx(\mathbf{t}), \quad 1 \le j \le d, \tag{36}$$

равносильна наличию хотя бы одного собственного числа с положительной вещественной частью у одной из матриц $A_1, \dots, A_d$. Поэтому условие $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ в теореме 2.8 эквивалентно равенству нулю относительной топологической энтропии такой системы.

Благодарности

Эта работа поддержана российским научным фондом (проект 14-21-00041) и Санкт-Петербургским государственным университетом.

Список литературы

[1] Бойченко, В. А., Леонов, Г. А. Прямой метод Ляпунова в оценках топологической энтропии, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1995, том 231, стр. 62-75.

[2] Гайшун, И. В., Кириллова, Ф. М. *Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения*, Изд-во Наука и Техника, 1983.

[3] Колмогоров, А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, *ДАН СССР*, 1958, том 119, вып. 5, стр. 861-864.

[4] Лакштанов, Е. Л., Лангваген, Е. С. Критерий бесконечности топологической энтропии многомерных клеточных автоматов, *Проблемы передачи информации*, 2004, том 40, вып. 2, стр. 70-72.

[5] Лакштанов, Е. Л., Лангваген, Е. С. Энтропия многомерных клеточных автоматов, *Проблемы передачи информации*, 2006, том 42, вып. 1, стр. 43-51.

[6] Синай, Я. Г. О понятии энтропии динамической системы, *ДАН СССР*, 1959, том 124, вып. 4, стр. 768–771.

[7] Синай, Я. Г. *Современные проблемы эргодической теории*, Москва, Изд-во Физматлит, 1995.

[8] Adler, R. L., Konheim, A. G., McAndrew, M. H. Topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, том 114, вып. 2, стр. 309–319.

[9] Anosov, D. V. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1967, том 90, стр. 3-210.

[10] Boichenko, V. A., Leonov, G. A., Reitmann, V. *Dimension Theory for Ordinary Differential Equations*, Teubner Wiesbaden, 2005.

[11] Bowen, R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, том 153, вып. 2, стр. 401–414.

[12] Ito, S. An estimate from above for the entropy and the topological entropy of a C^1- diffeomorphism, *Proc. Japan Acad.*, 1970, том 46, вып. 3, стр. 226–230.

[13] Kuznetsov, N. V. The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method, *Physics Letters A*, 2016, том 380, вып. 25, стр. 2142-2149.

[14] Kuznetsov, N. V., Alexeeva, T. A., Leonov, G. A. Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations, *Nonlinear Dynamics*, стр. 1-7 (http://dx.doi.org/10.1007/s11071-016-2678-4).

[15] Leonov, G. A. Formulas for the Lyapunov dimension of attractors of the generalized Lorenz system, *Doklady Mathematics*, 2013, том 87, вып. 3, стр. 264-268.

[16] Leonov, G. A., Kuznetsov, N. V., Korzhemanova, N. A., Kusakin, D. V. Lyapunov dimension formula for the global attractor of the Lorenz system, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016 (http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.04.032).

[17] Leonov, G. A., Alexeeva, T. A., Kuznetsov, N. V. Analytic exact upper bound for the Lyapunov dimension of the Shimizu-Morioka system, *Entropy*, 2015, том 17, вып. 7, стр. 5101-5116.

[18] Lind, D., Schmidt, K. Symbolic and algebraic dynamical systems, in book: *Handbook of Dynamical Systems*, 2002, том 1, стр. 765–812.

[19] Millionshchikov, V. M. A formula for the entropy of a smooth dynamical system, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1976, том 12, стр. 2188-2192.

[20] Newhouse, S. E. Entropy and volume, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1988, том 8, вып. 8, стр. 283-299.

[21] Oseledets, V. I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic exponents for dynamical systems, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1968, том 19, стр. 179-210.

[22] Pesin, Y. B. *Dimension theory in dynamical systems: contemporary views and applications*, University of Chicago Press, 2008.

[23] Schmidt, K. Multi-dimensional symbolic dynamical systems, in book: *Codes, Systems, and Graphical Models*, Springer, 2001, стр. 67–82.

[24] Sun, H. Topological entropy of linear systems and its application to optimal control, Master's Thesis, Hong Kong University of Science and Technology, 2008.

[25] Udriste, C. Multitime controllability, observability and bang-bang principle, *J. Optim. Theory Appl.*, 2008, том 139, вып. 1, стр. 141-157.