ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

ФАЗОВЫЕ ПОТОКИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ. II [1]

А. Ф. Андреев, И. А. Андреева [2]

Мы продолжаем изучение на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{R}^2}_{x,y}$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = p_0x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3 \equiv X(x,y),$$
$$\frac{dy}{dt} = ax^2 + bxy + cy^2 \equiv Y(x,y), \tag{0.1}$$

где a, b, c, p_0, $\ldots, p_3$ $(\in \mathbb{R})$ — параметры, X, Y — взаимно простые формы от x и y. В части I этого исследования [3] изучена единственная конечная особая точка $O(0,0)$ системы (0.1). Цель настоящей II-ой его части — изучить поведение траекторий этой системы в окрестности бесконечности. Применяется метод преобразований Пуанкаре [4, § 13]. Конструкция его такова. Рассматривается пространство $\mathbb{R}^3$, в нем вводится правая декартова прямоугольная система координат $O_*\xi\eta\zeta$ и берется единичная сфера S^2; фазовая плоскость $\mathbb{R}^2_{x,y}$ системы (0.1) отождествляется с плоскостью $\zeta = -1$ пространства $\mathbb{R}^3$ так, что произвольная ее точка (x,y) совпадает с точкой $(x,y,-1) \in \mathbb{R}^3$ (в частности, точка $O(0,0)$ совпадает с точкой $(0,0,-1)$). Посредством центрального проектирования (из центра O_*) плоскость $\overline{\mathbb{R}^2}_{x,y}$ отображается на сферу S^2, в

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (НШ-4609.2006.1) и РФФИ (05-01-01079), НИИММ им. акад. В.И.Смирнова СПбГУ.

частности, ее бесконечно удаленная прямая L_∞ — на экватор E этой сферы. Диаметрально противоположные точки сферы отождествляются. Эта сфера S^2 называется (по отношению к плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$) *сферой Пуанкаре*. С помощью преобразований Пуанкаре (см. § 2) система (0.1) переносится на сферу S^2. Там (в координатах Пуанкаре u, z и v, z) ищутся и исследуются ее бесконечно удаленные особые точки. Результаты исследования (с помощью ортогонального проектирования нижней половины сферы S^2 на плоскость $\mathbb{R}^2_{x,y}$) переносятся в замкнутый единичный круг $\overline{\Omega}$ этой плоскости — *круг Пуанкаре*, в окрестность его границы Γ (диаметрально противоположные точки которой также отождествляются). Сфера Пуанкаре S^2 и круг Пуанкаре $\overline{\Omega}$ суть модели проективной плоскости $\overline{\mathbb{R}^2}$ [4, § 13].

Во II-ой части мы используем понятия и обозначения, введенные в I-ой части. В частности, считаем действующим соглашение I.0.1, т. е. считаем, что в системе (0.1) первый ненулевой из коэффициентов c, b, a и первый ненулевой из коэффициентов p_3, p_2, p_1, p_0 положительны. Ссылки на объекты (формулы, теоремы и т. п.) из I-ой части даем в виде: римская цифра I, точка, номер объекта (как сделали в предыдущей фразе). Нумерацию параграфов продолжаем.

§ 2. Бесконечно удаленные особые точки системы (0.1)

Первое преобразование Пуанкаре

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z}, \quad z \neq 0 \quad \left(z = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0\right)$$

и замена времени $dt = -z^2\, d\tau$ преобразуют систему (0.1) в систему

$$\frac{du}{d\tau} = P(u)u - Q(u)z, \quad \frac{dz}{d\tau} = P(u)z, \tag{2.1}$$

где $P(u) \equiv X(1,u) = p_0 + \ldots + p_3u^3$ и $Q(u) \equiv Y(1,u) = a + bu + cu^2$ — взаимно простые полиномы. Эта система определена на сфере S^2, кроме ее большого круга $\xi = 0$, или, что равносильно, на плоскости $\mathbb{R}^2_{u,z}$ (касающейся сферы S^2 в точке $(\xi, \eta, \zeta) = (1, 0, 0)$), на которой мы и будем ее рассматривать.

Для системы (2.1) ось $z = 0$ инвариантна. На ней лежат особые точки системы: $O(0,0)$ и $O_i(u_i, 0)$, где u_i, $i = \overline{1,m}$, $m \in \{0, \ldots, 3\}$, — все вещественные корни полинома $P(u)$. Равенство $m = 0$ означает отсутствие у $P(u)$ вещественных корней. При $m \geqslant 1$ может существовать $i_0 \in \{1, \ldots, m\} : u_{i_0} = 0$; при $m \geqslant 2$ $u_1 < \ldots < u_m$.

Второе преобразование Пуанкаре

$$y = \frac{1}{z}, \quad x = \frac{v}{z}, \quad z \neq 0 \quad \left(z = \frac{1}{y}, \quad v = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0\right)$$

и та же замена времени преобразуют систему (0.1) в систему

$$\frac{dv}{d\tau} = -X(v,1) + Y(v,1)vz, \quad \frac{dz}{d\tau} = Y(v,1)z^2, \tag{2.2}$$

где $X(v,1) = p_0 v^3 + \ldots + p_3$, $Y(v,1) = av^2 + bv + c$ — взаимно простые полиномы. Эта система определена на сфере S^2, кроме ее большого круга $\eta = 0$, или, что равносильно, на плоскости $\mathbb{R}^2_{v,z}$ (касающейся сферы S^2 в точке $(\xi,\eta,\zeta) = (0,1,0)$), на которой мы и будем ее рассматривать.

Ось $z = 0$ инвариантна для системы (2.2). Если $v_\circ \in \mathbb{R}$ и $X(v_\circ,1) = 0$, то точка $(v_\circ, 0)$ — особая точка системы (2.2). Но, если при этом $v_\circ \neq 0$, то эта точка в координатах u, z имеет вид $\left(\frac{1}{v_\circ}, 0\right)$ (причем $P\left(\frac{1}{v_\circ}\right) = 0$), т.е. она дублирует особую точку $(u_\circ, 0) = \left(\frac{1}{v_\circ}, 0\right)$ системы (2.1). Точка $(v_\circ, 0) = (0,0)$ является особой для системы (2.2) лишь при $p_3 = 0$.

Определение 2.1. Особые точки систем (2.1) и (2.2), расположенные на оси $z = 0$, называются *бесконечно удаленными особыми точками системы* (0.1).

Из предварительного анализа систем (2.1) и (2.2) и определения 2.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Бесконечно удаленными особыми точками системы* (0.1) *являются*: 1) *особая точка* $O(0,0)$ *системы* (2.1), 2) *особые точки системы* (2.1) $O_i(u_i, 0)$, $i = \overline{1,m}$, $m \in \{0, \ldots, 3\}$, *соответствующие вещественным корням полинома* $P(u)$, 3) *особая точка* $O(0,0)$ *системы* (2.2) (*она является таковой лишь при* $p_3 = 0$).

Первую и последнюю из этих бесконечно удаленных особых точек будем обозначать (в этом их качестве) соответственно символами O_0 и O^0. Каждой из бесконечно удаленных особых точек O_i, $i = \overline{0,m}$, O^0 системы (0.1) соответствуют в круге Пуанкаре $\overline{\Omega}$ две диаметрально противоположные точки его границы Γ. Будем обозначать их символами: O_i^+ $(\in \Gamma|_{x>0})$, O_i^- $(\in \Gamma|_{x<0})$, $i = \overline{0,m}$, O_+^0 $(\in \Gamma|_{y>0})$, O_-^0 $(\in \Gamma|_{y<0})$.

Замечание 2.1. Координатные системы u, z и v, z, индуцируемые преобразованиями Пуанкаре в круге Пуанкаре $\overline{\Omega}$, являются первая — правой, вторая — левой. Они выглядят следующим образом. Начало системы u, z — $O_0^+(0,0)$, ось O_0^+u — дуга $(O_-^0 O_0^+ O_+^0)$ окружности Γ, ось O_0^+z — составной диаметр $(OO_0^- O_0^+ O$ круга $\overline{\Omega}$ (или симметричные им относительно центра O объекты круга $\overline{\Omega}$). Начало системы v, z — точка $O_+^0(0,0)$, ось $O_+^0 v$ — дуга $(O_0^- O_+^0 O_0^+)$ окружности Γ, ось $O_+^0 z$ — составной диаметр $(OO_-^0 O_+^0 O)$ круга $\overline{\Omega}$ (или симметричные им относительно O объекты круга $\overline{\Omega}$).

Топологический тип любой бесконечно удаленной особой точки O' системы (0.1) мы будем описывать в терминах пучков O'-кривых системы типов N (узловой пучок) и S (седловой пучок, состоит из одной O'-кривой) с помощью ее $A^{\pm}$-схем и $B^{\pm}$-схем.

Определение 2. 2. Пусть O' — произвольная бесконечно удаленная особая точка системы (0.1). 1) Слово из букв N, S, порядок следования которых в нем совпадает с порядком следования пучков типов N, S O'-кривых системы, примыкающих к O' из области $z > 0$ $(z < 0,)$ при полуобходе точки O' в этой области в направлении возрастания u или, что равносильно, в направлении убывания v, будем называть А$^{+(-)}$-*схемой точки* O' и обозначать символом $A_{O'}^{+(-)}$.

2) Слово из букв E, H, P, порядок следования которых в нем совпадает с порядком следования O'-секторов Бендиксона типов E, H, P при полуобходе точки O' в области $z > 0$ $(z < 0)$ в направлении возрастания u или, что то же, убывания v, будем называть В$^{+(-)}$-*схемой точки* O' и обозначать символом $B_{O'}^{+(-)}$.

Отметим, что В$^{+(-)}$-схема особой точки O' легко может быть составлена по ее А$^{+(-)}$-схеме по тому же правилу, по которому в части I составлялась В-схема точки O по ее А-схеме.

§ 3. Исследование бесконечно удаленной особой точки O_0

Речь идет об особой точке $O(0,0)$ системы (2.1). Пусть число $u = 0$ — корень полинома $P(u)$ кратности $k \geqslant 0$. Тогда $P(u) = p_k u^k + \ldots + p_3 u^3$, $k \in \{0, \ldots, 3\}$, $p_k \neq 0$.

3. 1. $k = 0$, т. е. $p_0 \neq 0$. В этом случае система (2.1) имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = (p_0 u + \ldots) - (a + \ldots)z, \quad \frac{dz}{d\tau} = (p_0 + \ldots)z, \tag{3.1}$$

где $\ldots$ всюду означает члены высшего порядка относительно u. Линейная часть системы (3.1) невырожденная: корни ее характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = p_0 \Longrightarrow$ [2, гл. III, § 5] для (3.1) справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Если в системе* (2.1) $P(0) = p_0 \neq 0$, *то для нее особая точка* $O(0,0)$ — *узел: при* $a \neq 0$ — *вырожденный, при* $a = 0$ — *особый (дикритический),* $A_O^{+(-)} = N(N)$. *В частности, при* $ap_0 > 0$ (< 0) $A_O^+ = N_+ (N_-)$, $A_O^- = N_- (N_+)$. *Здесь* $N_+ (N_-)$ — *пучок типа* N, *состоящий из* O_+*-кривых (из* O_-*-кривых).*

3.2. $k \in \{1,2,3\}$, т. е. $p_0 = 0$, $a \neq 0$. В этом случае для системы (2.1) особая точка O — нильпотентна (для нее $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $a \neq 0$). В общем случае такая особая точка $\mathbb{R}^2$-системы изучена, например, в [1, гл. 6; 2, гл. V]. Имея ввиду воспользоваться результатами из [2], сделаем следующее замечание.

Замечание 3.1. В [2] на стр. 142–144 есть небольшие погрешности. Пользуясь случаем, покажем, как их исправить. Для этого достаточно сделать следующее.

1) Стр. 142. Окончание (пп. 4), 5)) теоремы 2.1 лучше сформулировать так: "4) α — *четное,* $a > 0 \Longrightarrow$ *точка* O — *седло-узел, ее* Б-*тип* PH^2 (*рис. 2.5, если* $(-1)^{\beta+1}b > 0$; *его отражение относительно оси* Ox, *если* $(-1)^{\beta+1}b < 0$); 5) α — *четное,* $a < 0$: *этот случай приводится к случаю* 4) *заменой в уравнении* (2.3) : $x \to -x$."

2) Стр. 143. В 6-ой строке надо оставить лишь равенство "$i = 1,2$."В п. 2.2.1 последнюю фразу второго абзаца и первую фразу третьего надо заменить следующими: "Отметим, что при $a > 0$ $u_1u_2 < 0$. При $a < 0$ для уравнения (2.15) особая точка $(0, u_1)$, $|u_1| < |u_2|$, — узел; через нее проходит решение $x = 0$, $|u - u_1| < \delta$, $\delta > 0$, к ней примыкают решения вида $u = u(x)$, $0 < x < \delta$."

3) Стр. 144. Фразу во 2-ой и 3-ей строках надо заменить следующей: "Отметим, что при $a < 0$ имеют место неравенства: $bu_i > 0$, $i = 1,2$." 12-ю строку надо заменить на "2) $a < 0$, β — четное, $b > 0$ $(b < 0)$: П,К,П,К (К,П,К,П);"

Замечание 3.2. В [2] пучки O-кривых системы типов N и S обозначены соответственно символами П и К.

Для изучения особой точки $O(0,0)$ системы (2.1) в настоящем случае 3.2 применим результаты [2, § V.2], откорректированные согласно замечанию 3.1. Следуя [2, лемма V.2.1] произведем в системе (2.1) замену переменных по формулам

$$Q(u)d\tau = -dt_1, \quad z = \psi(u) + z_1,$$

где $\psi(u) = R(u)u$, $R(u) \equiv \frac{P(u)}{Q(u)} = r_k u^k + \dots$, $r_k = \frac{p_k}{a} \neq 0$, так что $\psi(u) =$

$r_k u^{k+1} + \ldots$. Получим систему

$$\frac{du}{dt_1} = z_1, \quad \frac{dz_1}{dt_1} = f_1(u) + g_1(u) z_1, \tag{3.2}$$

где

$$f_1(u) = -R^2(u)u = -r_k^2 u^{2k+1} + \ldots \equiv a_1 u^\alpha + \ldots,$$
$$g_1(u) = -R(u) - \psi'(u) = -(k+2) r_k u^k + \ldots \equiv b_1 u^\beta + \ldots .$$

Это система вида (V.2.2) [2], причем для нее (в обозначениях близких к таковым из (V.2.2)) $\alpha = 2k+1$, $\beta = k$, $a_1 = -r_k^2 < 0$, $b_1 = -(k+2) r_k \neq 0$, т. е. имеет место случай 2 [2, с. 142]: $\alpha = 2\beta + 1$, его подслучай 1) $d_1 \equiv b_1^2 + 4a_1(\beta+1) = (kr_k)^2 > 0 \Longrightarrow$ ([2, с. 143], замечание 3.1, п. 2)) система (2.2) имеет следующие O-кривые:

$$z_1 = h_1(u) \equiv -\frac{r_k}{k+1} u^{k+1} + \ldots \tag{3.3$_1$}$$

и

$$z_1 = h_2(u) \equiv -r_k u^{k+1} + \ldots . \tag{3.3$_2$}$$

В каждой из областей $|u| > 0$ первые образуют пучок типа N, вторые — пучок типа S.

Возвращаясь к переменным τ, u, z и к системе (2.1), заключаем, что последняя имеет в рассматриваемом случае лишь следующие O-кривые:

$$z = \psi(u) + h_1(u) \equiv -\frac{kp_k}{(k+1)a} u^{k+1} + \ldots, \ u \neq 0, \tag{3.4$_1$}$$

и

$$z_1 = \psi(u) + h_2(u) \equiv 0, \ u \neq 0. \tag{3.4$_2$}$$

Первые в каждой из областей $|u| > 0$ образуют один пучок типа N, вторые суть полуоси оси $z = 0$.

Из этого (с учетом асимптотики O-кривых (3.4$_1$) при $u \to 0$) вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. 2. *Если в системе* (2.1) $P(u) = p_k u^k + \ldots + p_3 u^3$, $k \geqslant 1$, $ap_k \neq 0$, *то ее O-кривые, отличные от полуосей оси* $z = 0$, *образуют два пучка типа* $N : N_+$ *и* N_-. *Если* $k = 1$ *или* 3, *эти пучки лежат в области* $ap_k z > 0$ *так, что при* $ap_k > 0$ $A_O^{+(-)} = N_- N_+ \, (\emptyset)$, *а при* $ap_k < 0$ $A_O^{+(-)} = \emptyset$ $(N_- N_+)$. *Если* $k = 2$, *то они лежат в областях* $ap_2 uz > 0$ *так, что при* $ap_2 > 0$ $A_O^{+(-)} = N_+ \ (N_-)$, *а при* $ap_2 < 0$ $A_O^{+(-)} = N_- \ (N_+)$.

3. 3. $A^\pm$**-схемы и** $B^\pm$**-схемы точки** O_0. Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает следующщя теорема.

Теорема 3.1. *Пусть для полинома $P(u)$ из системы (2.1) число $u = 0$ является корнем кратности $k \in \{0, \ldots, 3\}$. Тогда в зависимости от значения числа k и знака числа ap_k $\mathrm{A}^{\pm}$-схемы и $\mathrm{B}^{\pm}$-схемы особой точки O системы (2.1), т. е. бесконечно удаленной особой точки O_0 системы (0.1), имеют вид, указанный в таблице* 3.1.

Таблица 3.1. $A^{\pm}$- и $B^{\pm}$-схемы точки O_0.

k	ap_k	$A^+_{O_0}$	$A^-_{O_0}$	$B^+_{O_0}$	$B^-_{O_0}$
0	0	N	N	P	P
0, 2	$+(-)$	$N_+\,(N_-)$	$N_-\,(N_+)$	$P\,(P)$	$P\,(P)$
1, 3	$+(-)$	$N_-\,N_+\ (\emptyset)$	$\emptyset\ (N_-N_+)$	$E\,(H)$	$H\,(E)$

§ 4. Исследование бесконечно удаленных особых точек O_i, $i = \overline{1, m}$, отличных от O_0

В этом параграфе речь идет об особых точках системы (2.1) $O_i(u_i, 0)$, $i = \overline{1, m}$, для которых $u_i \neq 0$. Пусть $(u_i, 0)$ — любая из них, $k_i \in \{1, 2, 3\}$ — кратность корня u_i полинома $P(u)$.

Полагая в (2.1) $u = u_i + v$, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= P(u_i + v)(u_i + v) - Q(u_i + v)z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= P(u_i + v)z, \end{aligned} \tag{4.0}$$

где $P(u_i+v) = \frac{1}{k_i!}P^{(k_i)}(u_i)v^{k_i} + \ldots$, $Q(u_i+v) = Q(u_i) + \ldots$, $P^{(k_i)}(u_i)Q(u_i) \neq 0$, $\ldots$ означает члены высшего порядка относительно v. Для нее мы должны изучить особую точку $O(0, 0)$.

4.1. $k_i = 1$. В этом случае система (4.0) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= (P'(u_i)u_i v + \ldots) - (Q(u_i) + \ldots)z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= (P'(u_i)v + \ldots)z. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ее характеристические корни в точке O суть $\lambda_1 = P'(u_i)u_i \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Последовательные замены переменных

$$P'(u_i)\,u_i\,d\tau = dt_1, \quad v = \frac{1}{r_i u_i} z + y_1, \quad r_i = \frac{P'(u_i)}{Q(u_i)},$$

и перестановка уравнений приводят систему (4.1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt_1} &= z\left(\frac{1}{r_i u_i^2} z + \frac{1}{u_i} y_1 + \ \dots\right) \equiv \xi(z, y_1), \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= y_1 + \eta(z, y_1), \end{aligned} \tag{4.1$'$}$$

где $\dots$ означает члены высшего порядка относительно z и y_1, а $\eta(z, y_1)$ — полином, состоящий из таких членов. Система (4.1$'$) есть система вида (V.1.1) [2, с.120]. Чтобы изучить ее особую точку $O(0,0)$, применим к ней теорему V.1.1 [2, с.130]. Для этого разрешим уравнение $y_1 + \eta(z, y_1) = 0$ в окрестности точки $(0,0)$ относительно y_1 и подставим полученную функцию $y_1 = \psi(z) \equiv o(z)$ под знак функции $\xi(z, y_1)$. Получим функцию $\alpha(z) = \frac{1}{r_i u_i^2} z^2 + \ \dots$, для которой $\alpha'(0) = 0$, $\alpha''(0) = \frac{2}{r_i u_i^2} \neq 0 \Longrightarrow$ [2, теорема V.1.1] для системы (4.1$'$) $O(0,0)$ — седло-узел: ось $z = 0$ — сепаратрисное многообразие, разделяющее седловую и узловую области, область $r_i z > 0$ — узловая, область $r_i z < 0$ — седловая. В этих областях O-кривые системы примыкают к точке O вдоль полуосей оси $y_1 = 0$.

Возвращаясь к переменным v, z, τ и к системе (4.1), на основании предыдущего заключаем, что для нее справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. 1. *Особая точка $O(0,0)$ системы (4.1) (т. е. бесконечно удаленная особая точка $O_i(u_i, 0)$ системы (0.1), $u_i \neq 0$, $k_i = 1$) — седло–узел. Седловую и узловую области разделяет инвариантная прямая $z = 0$; область $r_i z > 0$ — узловая, область $r_i z < 0$ — седловая; в любой из них O-кривые системы примыкают к точке O вдоль прямой $z = r_i u_i v$. $A^{\pm}$-схемы точки O (O_i) имеют вид:*

$$u_i > 0 \ (< 0),\ r_i > 0 \Longrightarrow A_O^+ = N_+ \,(N_-),\ A_O^- = S_- \,(S_+),$$

$$u_i > 0 \ (< 0),\ r_i < 0 \Longrightarrow A_O^+ = S_- \,(S_+),\ A_O^- = N_+ \,(N_-).$$

4. 2. $k_i \in \{2,\, 3\}$. В этом случае для системы (4.0) особая точка $O(0,0)$ нильпотентна: для нее $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $Q(u_i) \neq 0$. Замена времени $Q(u_i + v)\,d\tau =$

$-dt_1$ приводит (4.0) к виду

$$\frac{dz}{dt_1} = -R_i(v)z, \quad \frac{dv}{dt_1} = z - R_i(v)(u_i + v), \tag{4.2}$$

где $R_i(v) = \frac{P(u_i+v)}{Q(u_i+v)} \equiv r_i v^{k_i} + \ \dots\ , \ r_i = \frac{P^{(k_i)}(u_i)}{k_i! Q(u_i)} \neq 0.$

Это система вида (V.2.1) [2, с.131]. Следуя [2], произведем в ней замену

$$z = \psi(v) + z_1, \quad \psi(v) \equiv R_i(v)(u_i + v) \equiv r_i u_i v^{k_i} + \ \dots\ . \tag{4.3}$$

Получим систему вида

$$\frac{dv}{dt_1} = z_1, \quad \frac{dz_1}{dt_1} = f_1(v) + g_1(v) z_1 \equiv Z_1(v, z_1), \tag{4.4}$$

$$\text{где} \quad \begin{aligned} & f_1(v) = -R_i^2(v)(u_i + v) \equiv -r_i^2 u_i v^{2k_i} + \ \dots\ =: \\ & a_1 v^\alpha + \ \dots\ , \ g_1(v) = -\psi'(v) = -k_i r_i u_i v^{k_i - 1} + \end{aligned}$$

$+ \dots\ =: b_1 v^\beta + \ \dots\ .$ Здесь $\alpha = 2k_i$, $\beta = k_i - 1$, $a_1 = -r_i^2 u_i$, $b_1 = -k_i r_i u_i$ $\Longrightarrow$ для системы (4.4) имеет место случай V.2.1 [2, с.136]: $\alpha > 2\beta + 1$. На основании результатов исследования этого случая в [2, с. 139–140] заключаем: система (4.4) имеет лишь следующие O-кривые

$$-z_1 = \frac{b_1}{\beta+1} v^{\beta+1} + \ \dots\ = r_i u_i v^{k_i} + \ \dots\ , \quad v \neq 0, \tag{4.5$_1$}$$

одну O_+-кривую и одну O_--кривую, и

$$z_1 = -\frac{a_1}{b_1} v^{\alpha-\beta} + \ \dots\ = -\frac{r_i}{k_i} v^{k_i+1} + \ \dots\ , \quad v \neq 0, \tag{4.5$_2$}$$

пучок O-кривых типа N в области $u_i v > 0$ и пучок O-кривых типа S в области $u_i v < 0$.

Возвращаясь по формулам (4.3) к переменным v, z и к системе (4.2), на основании сказанного выше заключаем, что для последней справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. 2. *Особая точка системы* (4.2) $O(0,0)$ (*т. е. бесконечно удаленная особая точка системы* (0.1) $O_i(u_i, 0)$, *для которой* $u_i \neq 0$, $k_i \in \{2, 3\}$) *есть седло-узел. К ней примыкают следующие O-кривые системы:* $z = 0$, $v \neq 0$, *и*

$$z = r_i u_i v^{k_i} + \ \dots\ , \ v \neq 0. \tag{4.6}$$

Если $k_i = 2$, то O-кривые (4.6) лежат в области $r_i u_i z > 0$ и образуют в ее подобласти $u_i v > 0$ пучок типа N, а в подобласти $u_i v < 0$ — пучок типа S; $A^{\pm}$-схемы точки O (O_i) имеют вид:

$$u_i > 0\ (< 0), r_i > 0 \implies A^+_O = S_- N_+\,(\emptyset),\ A^-_O = \emptyset\,(N_- S_+),$$

$$u_i > 0\ (< 0), r_i < 0 \implies A^+_O = \emptyset\,(N_- S_+)\,,\ A^-_O = S_- N_+\,(\emptyset).$$

Если $k_i = 3$, то O-кривые (4.6) лежат в областях $r_i u_i v z > 0$ и образуют в области $u_i v > 0$ пучок типа N, а в области $u_i v < 0$ — пучок типа S; $A^{\pm}$-схемы точки O (O_i) таковы же, что и при $k_i = 1$.

4. 3. $A^{\pm}$-схемы и $B^{\pm}$- схемы особых точек O_i, $i = \overline{1, m}$, отличных от O_0. Из лемм 4.1 и 4.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. 1. *Пусть u_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, — ненулевой вещественный корень полинома $P(u)$, k_i ($\in \{1, 2, 3\}$) — его кратность, $r_i := \frac{P^{(k_i)}(u_i)}{k_i! Q(u_i)}$. Тогда в зависимости от значения k_i и знаков чисел r_i и u_i A$^{\pm}$-схемы и B$^{\pm}$-схемы особой точки $O_i(u_i, 0)$ системы (2.1), (т. е. бесконечно удаленной особой точки $O_i \neq O_0$ системы (0.1)), имеют вид, указанный в таблице 4.1.*

Таблица 4. 1. $A^{\pm}$-схемы и $B^{\pm}$-схемы точки $O_i \neq O_0$.

u_i	k_i	r_i	$A^+_{O_i}$	$A^-_{O_i}$	$B^+_{O_i}$	$B^-_{O_i}$
$+\,(-)$	1, 3	$+$	$N_+\,(N_-)$	$S_-\,(S_+)$	$P\,(P)$	HH
$+\,(-)$	1, 3	$-$	$S_-\,(S_+)$	$N_+\,(N_-)$	HH	$P\,(P)$
$+\,(-)$	2	$+$	$S_- N_+\,(\emptyset)$	$\emptyset\,(N_-\,S_+)$	$HP\,(H)$	$H\,(PH)$
$+\,(-)$	2	$-$	$\emptyset\,(N_-\,S_+)$	$S_- N_+\,(\emptyset)$	$H\,(PH)$	$HP\,(H)$

§ 5. Исследование бесконечно удаленной особой точки O^0

Пусть в системе (0.1) $p_3 = 0$. Тогда система (2.2) имеет изолированную особую точку $O(0, 0)$, которую мы и должны сейчас изучить. Учитывая соглашение I.0.1, достаточно рассмотреть нижеследующие случаи 5.1–5.3. В каждом из них в процессе исследования мы будем записывать систему (2.2) в правой системе координат zOv.

5. 1. $p_3 = 0$, $p_2 > 0$, $c > 0$. В этом случае система (2.2) имеет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = Y(v,1)z^2, \quad \frac{dv}{d\tau} = -X(v,1) + Y(v,1)zv, \tag{5.1}$$

где $X(v,1) = p_2v + p_1v^2 + p_0v^3$, $Y(v,1) = c + bv + av^2$, Ее характеристические корни в особой точке O суть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -p_2 < 0$. Замена времени $p_2 d\tau = -dt_1$ придает ей вид

$$\frac{dz}{dt_1} = -\frac{c}{p_2}z^2(1 + \ \dots) \equiv \xi(z,v) \quad \frac{dv}{dt_1} = v(1 + \dots) \equiv v + \eta(z,v), \tag{5.1$'$}$$

где $\dots$ означает члены высшего порядка относительно v или относительно z и v. Это система вида (V.1.1) [2, с. 120]. Применим к ней теорему V.1.1 [2, с. 130].

Разрешая уравнение $v + \eta(z,v) = 0$ в окрестности точки $(0,0)$ относительно v, получим функцию $v = \psi(z) \equiv 0$; подставляя ее под знак $\xi(z,v)$, получим функцию $\alpha(z) = -\frac{cz^2}{p_2}$, для которой $\alpha'(0) = 0$, $\alpha''(0) = -\frac{2c}{p_2} < 0$. Следовательно [2, теорема V.1.1], для системы (5.1$'$) особая точка O — седлоузел, для которого ось $z = 0$ разделяет седловую $(z > 0)$ и узловую $(z < 0)$ области. Ось $v = 0$ также инвариантна. Все это верно и для системы (5.1). $A^{\pm}$-схемы точки O системы (5.1) (т. е. особой точки O^0 системы (0.1)) таковы: $A^+_O = S_0$, $A^-_O = N_0$, (здесь S_0 лежит на оси $v = 0$, N_0 — пучок O-кривых, касающихся в O оси $v = 0$).

5. 2. $p_3 = p_2 = 0$, $p_1 > 0$, $c > 0$. В этом случае система (2.2) имеет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = cz^2(1 + \dots), \quad \frac{dv}{d\tau} = v(cz - p_1v + \ \dots). \tag{5.2}$$

Она имеет невырожденное однородное квадратичное приближение, которое и определяет топологический тип ее особой точки $O(0,0)$ [2, § III.4]. Последнее же в данном случае легко исследуется методом изоклин. Оказывается, что к точке O примыкают лишь следующие O-кривые системы (5.2): полуоси осей z и v и два пучка O-кривых типа N — по одному в каждой из координатных четвертей $zv < 0$.

$A^{\pm}$-схемы точки O (O^0) (с учетом замечания 2.1 и определения 2.2) выглядят так: $A^+_{O^0} = S_0N_+$, $A^-_{O^0} = N_-S_0$.

5. 3. $p_3 = p_2 = p_1 = 0$, $p_0 > 0$, $c > 0$. В этом случае система (2.2) имеет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = (c + \dots)z^2, \quad \frac{dv}{d\tau} = (c + \dots)zv - p_0v^3, \tag{5.3}$$

где ... означает члены высшего порядка относительно v. Чтобы изучить ее особую точку $O(0,0)$ применим метод исключительных направлений [2, гл. II].

Уравнение исключительных прямых для системы (5.3) имеет вид: $F(z,v) \equiv 0$, т. е. исключительными являются все прямые, проходящие через точку O. Все они, кроме $z=0$, обыкновенные, а потому [2, § II.5] вдоль каждой O-полупрямой, кроме разве лишь полуосей оси $z=0$, к точке O примыкает единственная O-кривая системы (5.3).

Изучим для особой точки O системы (5.3) особую исключительную прямую $z=0$. Для этого произведем в (5.3) последовательно две замены:

$$z = uv,\ \ v \neq 0, \quad \text{и} \quad v^2\, d\tau = dt_1. \tag{5.4}$$

Получим систему

$$\frac{du}{dt_1} = p_0 u, \qquad \frac{dv}{dt_1} = (c+\ldots)u - p_0 v, \tag{5.5}$$

для которой мы должны выяснить вопросы о существовании полутраекторий вида

$$u = u(v), \quad u(v) \not\equiv 0, \quad u(v) \to 0 \ \text{при} \ v \to 0, \tag{5.6}$$

и о структуре их совокупности. Но для системы (5.5) точка $O(0,0)$ — седло с инвариантными многообразиями $u=0$ и $u = \frac{2p_0}{c}v + \ldots$. Следовательно, она имеет лишь две полутраектории вида (5.6): $u = \frac{2p_0}{c}v + \ldots$, $v \neq 0$. Из этого в силу (5.4) следует, что для системы (5.3) к точке O вдоль полуосей оси $z=0$ примыкают ровно две O-кривые, отличные от этих полуосей: $z = \frac{2p_0}{c}v^2 + \ldots$, $v \neq 0$.

Таким образом, для системы (5.3) $A^{\pm}$-схемы точки $O\,(O^0)$ имеют вид: $A^+_{O^0} = S_+NS_0NS_- = S_0NS_-$, $A^-_{O^0} = NS_0N = N$, а $B^{\pm}$-схемы — вид: $B^+_{O^0} = HPH$, $B^-_{O^0} = P$.

Из результатов пп. 5.1–5.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. 1. *Пусть в системе* (2.2) $p_3 = 0$, *а полином* $X(v,1)$ *имеет число* $v=0$ *корнем кратности* $k^0 \in \{1,2,3\}$. *Тогда в зависимости от значения* k^0 (*и с учетом соглашения* $I.0.1$) $\mathrm{A}^{\pm}$*-схемы и* $\mathrm{B}^{\pm}$*-схемы особой точки* $O(0,0)$ *системы* (2.2), *т. е. бесконечно удаленной особой точки* O^0 *системы* (0.1), *имеют вид, указанный в таблице* 5.1.

Таблица 5. 1. $A^{\pm}$- и $B^{\pm}$-схемы точки O^0.

k^0	$A^+_{O^0}$	$A^-_{O^0}$	$B^+_{O^0}$	$B^-_{O^0}$
1	S_0	N_0	HH	P
2	S_0N_-	N_+S_0	HP	PH
3	$S_+NS_0NS_- = S_+NS_-$	$NS_0N = N$	$HPPH = HPH$	P

В этой таблице $S_0 :=$ O^0-кривая, лежащая на оси $v = 0$, $N_0 :=$ пучок типа N O^0-кривых, примыкающих к точке O^0 вдоль оси $v = 0$, $S_{+(-)} :=$ O-кривая, примыкающая к O^0 вдоль полуоси $z = 0$, $v > 0$ $(v < 0)$.

Литература

1. Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1979. 136 с.

2. Андреев А. Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. СПб.: Изд. С.-Петербург. ун-та, 2003. 160 с.

3. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2007, N 4. С. 17–26.

4. Андронов А. А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

Андреев Алексей Федорович — профессор кафедры дифференциальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета;

Дом. телефон: 271–64–27
раб. телефон: 428–69–59, местн. 3059

Андреева Ирина Алексеевна — доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета;

Дом. телефон: 271–64–27
E-mail: irandr@inbox.ru