ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Оптимальное управление

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ОДНИМ КЛАССОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В.М.АЛЕКСАНДРОВ

Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН

Аннотация

Предложен итерационный метод нахождения оптимального по быстродействию управления квазилинейными системами. Получена система линейных алгебраических уравнений, связывающая отклонения начальных условий нормированной сопряженной системы и отклонение конечного момента времени с отклонениями фазовых координат, порожденными нелинейностью. Описан вычислительный алгоритм и его модификации. Доказана сходимость итерационной процедуры. Приведены примеры.

Введение

Одним из широко распространенных классов нелинейных систем являются квазилинейные системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + F(x, u, t).$$

К таким системам приходим при различных способах линеаризации нелинейных систем, например, интегральной, кусочной, обобщенной, гармонической и др. Для такого класса систем важна задача нахождения оптимального управления. Разработано множество итерационных методов вычисления оптимального управления, каждый из которых обладает определенными достоинствами и недостатками [1]–[14]. Общим недостатком всех методов является большое количество итераций, необходимых для нахождения решения с заданной точностью. Поэтому актуальна разработка вычислительных методов, учитывающих специфику решаемых задач и аналитические связи, что позволяет уменьшить объем вычислений и сократить число итераций.

В работе предлагается для квазилинейных систем численный метод нахождения оптимального по быстродействию управления, основанный на модификации и развитии метода [15].

1. Постановка задачи

Пусть управляемая система описывается квазилинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_{\text{н}} = A_0(t)x_{\text{н}} + B_0(t)u + F_0(x_{\text{н}}, u, t), \quad x_{\text{н}}(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V_{\text{н}}. \tag{1.1}$$

Здесь $x_{\text{н}}$ — n-мерный вектор фазового состояния; $A_0(t)$, $B_0(t)$ — непрерывные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$ соответственно; u — m-мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-постоянных (релейных) функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| = M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}; \tag{1.2}$$

$F_0(x_{\text{н}}, u, t)$ — n-мерный вектор, содержащий нелинейные функции, которые непрерывны по x, u и ограниченны: $||F_0(x_{\text{н}}, u, t)|| \leq F_0^*$. Предполагается, что компоненты вектора управления входят аддитивно. Предполагается также, что система (1.1) переводима в начало координат ограниченным управлением (1.2), т.е. x_0 принадлежит области управляемости $V_{\text{н}}$ квазилинейной системы. Для краткости используем запись уравнения (1.1) в виде

$$\dot{x}_{\text{н}} = f(x_{\text{н}}, u, F_0(x_{\text{н}}, u, t), t), \quad x_{\text{н}}(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V_{\text{н}}. \tag{1.3}$$

Задача. *Найти допустимое управление $u(t)$, переводящее систему* (1.1) *из начального состояния $x_{\text{н}}(t_0) = x_0$ в начало координат $x_{\text{н}}(t_k) = 0$ за минимальное время $T = t_k - t_0$.*

Замечание. Сужение класса допустимых управлений (1.2) до кусочно-постоянных(релейных) функций вызвано следующим. При задании математического описания управляемого процесса задается и структура управляющего устройства. Одними из широко распространенных типов управляющих устройств являются релейные регуляторы. С математической точки зрения в этом случае управляющие воздействия должны выбираться не из широкого класса кусочно-непрерывных функций, а из узкого класса кусочно-постоянных (релейных) функций. В результате вместо традиционных ограничений $|u_j| \leq M_j, j = \overline{1,m}$ приходим к ограничениям (1.2). Для некоторых прикладных задач допустимыми (физически реализуемыми) являются только релейные управления.

Следует отметить, что для линейных систем и нелинейных систем с выделяемым линейно управлением оптимальное по быстродействию управление, которое ищется в классе кусочно-непрерывных функций, является релейным. Для нелинейных систем с невыделяемым линейно управлением оптимальное по быстродействию управление является кусочно-непрерывной функцией. Однако для квазилинейных систем с невыделяемым линейно управлением найденное оптимальное управление близко к релейному (в силу их близости к линейным системам) и различие во времени перевода системы и моментах переключений управления незначительно. В то же время нахождение и реализация с высокой точностью кусочно-непрерывного оптимального управления требует значительных вычислительных затрат.

Таким образом, учитывая специфику решаемой задачи, можно существенно упростить вычислительную процедуру.

2. Вычислительный метод решения задачи

Будем искать решение в классе кусочно-постоянных функций с предельно допустимыми значениями $u_j(t) = \pm M_j,\ \ j = \overline{1,m}$, т.е. в классе релейных управлений.

2.1. *Переход к системе с линейно выделенным управлением* Нелинейные функции $f_\xi(u_j),\ \ \xi = \overline{1,r};\ \ j = \overline{1,m}$, входящие $F_0(x_{\text{н}}, u, t)$, могут принимать только значения $f_\xi(M_j)$ и $f_\xi(-M_j)$. Поэтому нелинейные функции можно заменить на линейные функции вида

$$f_\xi(u_j) = \frac{f_\xi(M_j) + f_\xi(-M_j)}{2} + \frac{f_\xi(M_j) - f_\xi(-M_j)}{2M_j} u_j,\ \ \xi = \overline{1,r};\ \ j = \overline{1,m}. \quad (2.1)$$

Значения нелинейных функций равны значениям линейных функций при предельных значениях $u_j(t) = \pm M_j$, которые только и могут принимать управляющие параметры в силу ограничений (1.2). Эта процедура, учитывающая специфику рассматриваемой задачи (релейность управления), упрощает математическое описание управляемого процесса.

Сгруппируем линейные члены с управлением и линейные члены с фазовыми координатами. Получим нелинейную систему с *линейно выделенным управлением* вида

$$\dot{x}_{\text{н}} = [A_0(t) + C(t)]x_{\text{н}} + [B_0(t) + D(x_{\text{н}}, t)]u + F(x_{\text{н}}, t). \tag{2.2}$$

Здесь $C(t)$ и $D(x_{\text{н}}, t)$ – матрицы $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, которые появились в результате использования преобразования (2.1). Введем обозначения: $A(t) = A_0(t) + C(t)$, $B(x_{\text{н}}, t) = B_0(t) + D(x_{\text{н}}, t)$, с использованием которых (2.2) запишем так:

$$\dot{x}_{\text{н}} = A(t)x_{\text{н}} + B(x_{\text{н}}, t)u + F(x_{\text{н}}, t). \tag{2.3}$$

Выпишем функцию Понтрягина для системы (2.3)

$$H(\psi_{\text{н}}, x_{\text{н}}, u, t) = (\psi_{\text{н}}, A(t)x_{\text{н}}) + (\psi_{\text{н}}, B(x_{\text{н}}, t)u) + (\psi, F(x_{\text{н}}, t)) \tag{2.4}$$

и сопряженную систему

$$\dot{\psi}_{\text{н}} = -\left[A(t) + \frac{\partial D(x_{\text{н}}, t)}{\partial x_{\text{н}}}u + \frac{\partial F(x_{\text{н}}, t)}{\partial x_{\text{н}}}\right]^* \psi_{\text{н}}. \tag{2.5}$$

Функция Понтрягина максимальна, если управляющие параметры удовлетворяют условию

$$u_j(t) = M_j \text{sign}\Big[B_j(x_{\text{н}}, t)\Big]^* \psi_{\text{н}}(t), \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.6}$$

т.е. оптимальное управление является релейным.

В случае $D(x_{\text{н}}, t) = D(t)$ система (2.3) становится нелинейной системой с *линейным* управлением

$$\dot{x}_{\text{н}} = A(t)x_{\text{н}} + B(t)u + F(x_{\text{н}}, t). \tag{2.7}$$

В общем случае полагаем, что после использования преобразования (2.1) линейная часть нелинейной системы имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V. \tag{2.8}$$

Предполагается, что система (2.8) полностью управляема, т.е.

$$\operatorname{rank}\left[\int\limits_{t_0}^{t_k}\Phi(t_k\,,\tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_k\,,\tau)d\tau\right]=n, \tag{2.9}$$

и переводима в начало координат ограниченным управлением (1.2), т.е. x_0 принадлежит области управляемости V линейной системы. Будем также считать, что известно оптимальное по быстродействию управление $u^0(t)$, переводящее линейную систему (2.8) из начальной точки $x(t_0)=x_0$ в начало координат $x(t_k)=0$. Метод нахождения оптимального управления для линейной системы предложен в [15].

2.2. *Компенсация отклонений.* Интегрируем уравнение (1.1) на интервале $t\in[t_0,t_k]$ с заданным оптимальным управлением $u^0(t)$ для линейной системы (2.8). Система (1.1) перейдет в некоторую точку

$$x_{\text{н}}(t_k)=\int\limits_{t_0}^{t_k}f(x_{\text{н}}(\tau),u^0(\tau)\,,F_0(x_{\text{н}}(\tau),u^0(\tau),\tau),\tau)d\tau+x_{\text{н}}(t_0)\,. \tag{2.10}$$

Необходимо так изменить конечный момент времени $t=t_k$ и моменты переключений (и если потребуется, то и их число), чтобы вызванное этим изменением отклонение фазовых координат $\Delta\tilde{x}(t_k)$ компенсировало отклонение (2.10), вызванное нелинейностью $F_0(x_{\text{н}},u,t)$. Должно выполняться уравнение баланса отклонений

$$\Delta\tilde{x}(t_k)+x_{\text{н}}(t_k)=0. \tag{2.11}$$

2.3. *Определение отклонений фазовых координат при вариации моментов переключений управления.* Выпишем решение уравнения (2.8) в конечный момент времени $t=t_k$ для кусочно-постоянного управления $u(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени ν_j^p, $j=\overline{1,m}$; $p=\overline{1,r_j-1}$, и принимают значения $u_j(t)=u_j^p$, $t\in[\nu_j^{p-1},\nu_j^p]$:

$$x(t_k)=\Phi(t_k\,,t_0)x_0+\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j}\int\limits_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p}\Phi(t_k\,,\tau)B_j(\tau)u_j^p d\tau\,. \tag{2.12}$$

Изменим моменты переключений ν_j^p на $\Delta\nu_j^p$, $j=\overline{1,m}$; $p=\overline{1,r_j-1}$, а конечный момент t_k — на Δt_k. Для отклонения фазовых координат $\Delta\tilde{x}(t_k)$ получим выражение

$$\Delta\tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\int\limits_{\nu_j^p}^{\nu_j^p+\Delta\nu_j^p}\Phi(t_k\,,\tau)B_j(\tau)[u_j^p - u_j^{p+1}]d\tau + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_k}^{t_k+\Delta t_k}\Phi(t_k\,,\tau)B_j(\tau)u_j^{r_j}d\tau\,. \tag{2.13}$$

Если $\Delta\nu_j^p$ и Δt_k достаточно малы (а это, как показано ниже, достигается специальным приемом — компенсацией отклонений по частям), то можно записать следующее приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю $\Delta\nu_j^p$ и Δt_k:

$$\Delta\tilde{x}(t_k) \approx \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k\,,\nu_j^p)B_j(\nu_j^p)[u_j^p - u_j^{p+1}]\Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^{m}B_j(t_k)u_j^{r_j}\Delta t_k\,. \tag{2.14}$$

Для линейной системы (2.8) оптимальное по быстродействию управление является релейным и задается выражением:

$$u_j^0(t) = M_j\,\mathrm{sign}\,[B_j(t)]^*\psi(t), \quad j = \overline{1,m}\,, \tag{2.15}$$

где $[B_j(t)]^*$ — транспонированный j-й столбец матрицы $B(t)$; $\psi(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi(t), \quad \psi(t_0) = \psi_0\,, \tag{2.16}$$

имеющее следующий вид

$$\psi(t) = \hat{\Phi}(t,t_0)\psi(t_0)\,. \tag{2.17}$$

Здесь $\hat{\Phi}(t,t_0)$ — фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения (2.16), которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\hat{\Phi}(t,t_0)}{dt} = -A^*(t)\hat{\Phi}(t,t_0), \quad \hat{\Phi}(t_0,t_0) = I. \tag{2.18}$$

Матрица $\hat{\Phi}(t,t_0)$ выражается через фундаментальную матрицу решений прямой системы (2.8) следующим образом: $\hat{\Phi}(t,t_0) = [\Phi^{-1}(t,t_0)]^*$. Отсюда $\Phi^{-1}(t,t_0) = [\hat{\Phi}(t,t_0)]^*$.

Моменты переключений ν_j^p компонент вектора оптимального управления и их число r_j на интервале $[t_0,t_k]$ однозначно определяются функциями переключений $[B_j(t)]^*\psi(t)$, $j = \overline{1,m}$, если известно решение $\psi(t)$, т.е. известны начальные условия $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1,n}$ сопряженной системы. Тогда на p-м интервале знакопостоянства оптимального управления (2.15) можно записать $u_j^p(t) = M_j S_j(p)$, где $S_j(p) = \operatorname{sign}[B_j(t)]^*\psi(t)$, $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$. Так как $S_j(p+1) = -S_j(p)$, то $u_j^p - u_j^{p+1} = 2M_j S_j(p)$ и выражение (2.14) принимает вид

$$\Delta\tilde{x}(t_k) \approx 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k\,,\nu_j^p)B_j(\nu_j^p)M_jS_j(p)\Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^{m}B_j(t_k)M_jS_j(r_j)\Delta t_k\,. \tag{2.19}$$

Подставим (2.19) в (2.11). Получим систему из n *линейных алгебраических* уравнений, связывающих приращения $\Delta\nu_j^p$ моментов переключений ν_j^p и приращение Δt_k конечного момента времени t_k с отклонениями фазовых координат $x_{\text{н}}(t_k)$, порожденными нелинейностью $F(x_{\text{н}}, t)$:

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k\,,\nu_j^p)B_j(\nu_j^p)M_jS_j(p)\Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^{m}B_j(t_k)M_jS_j(r_j)\Delta t_k + x_{\text{н}}(t_k) = 0\,. \tag{2.20}$$

Для квазилинейной системы (2.3) вариация моментов переключений ν_j^p, $j = \overline{1,m}$; $p = \overline{1,r_j-1}$ на $\Delta\nu_j^p$, а конечного момента t_k на величину Δt_k порождает на правом конце фазовой траектории движения отклонение, которое в случае малых $\Delta\nu_j^p$ и Δt_k можно *приближенно* представить, записав следующее уравнение

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k\,,\nu_j^p)B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p)M_jS_j(p)\Delta\nu_j^p +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\Big[B_j(x_{\text{н}}(t_k),t_k)M_jS_j(r_j) + F(x_{\text{н}}(t_k),t_k)\Big]\Delta t_k + x_{\text{н}}(t_k) = 0\,. \tag{2.21}$$

В (2.21) число неизвестных $\Delta\nu_j^p$, $j = \overline{1,m}$; $p = \overline{1,r_j-1}$ и Δt_k может не быть равным числу линейных алгебраических уравнений. Моменты переключений *не являются независимыми* переменными, а однозначно определяются начальным условием сопряженной системы. Необходимо выразить $\Delta\nu_j^p$ через приращения начальных условий нормированной сопряженной системы $\Delta\hat{\psi}(t_0)$. Число последних всегда $(n-1)$. Вместе с Δt_k они образуют n неизвестных, которые и находим из решения системы n линейных алгебраических уравнений. Переход от моментов переключений к начальным условиям сопряженной системы совершенно необходим для нахождения оптимального управления, а не просто допустимого управления. При произвольном начальном задании моментов переключений возникновение новых моментов переключений и исчезновение некоторых моментов переключений в итерационной процедуре поиска оптимального управления возможно только при использовании сопряженной системы.

2.4. *Связь между приращениями моментов переключений и приращениями начальных условий нормированной сопряженной системы.* В моменты переключений функция переключения равна нулю, т.е.

$$[B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0)\psi(t_0) = 0, \quad j = \overline{1,m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}\,. \tag{2.22}$$

Введем обозначение $\hat{\psi}(t_0) = \psi(t_0)/\psi_\alpha(t_0)$, где $\alpha \in [1, n]$. Здесь $\psi_\alpha(t_0)$ — начальное условие α фазовой координаты, отличное от нуля в момент t_0. Причем α — *любое* из множества $[1, n]$, для которого $\psi_\alpha(t_0) \neq 0$. Получим систему

$$[B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0)\hat{\psi}(t_0) = 0, \quad j = \overline{1,m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}\,, \tag{2.23}$$

которая связывает моменты переключений с начальными условиями нормированной сопряженной системы $\hat{\psi}(t_0)$. Следует отметить, что такой способ нормирования позволяет уменьшить на единицу число неизвестных по сравнению с традиционным условием нормирования $(\psi(t_0), x(t_0)) = -1$.

Изменим $\hat{\psi}(t_0)$ на $\Delta\hat{\psi}(t_0)$. Это порождает изменение ν_j^p на $\Delta\nu_j^p$:

$$[B_j(\nu_j^p + \Delta\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p + \Delta\nu_j^p, t_0)[\hat{\psi}(t_0) + \Delta\hat{\psi}(t_0)] = 0, \quad j = \overline{1,m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}\,. \tag{2.24}$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами. Получим следующее приближенное выражение, связывающее отклонения моментов переключений с отклонениями начальных условий нормированной сопряженной системы

$$\Delta\nu_j^p \approx \left\{ \left\{ [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \right\} \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0)\hat{\psi}(t_0) \right\}^{-1} [B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0)\Delta\hat{\psi}(t_0), \tag{2.25}$$

$$j = \overline{1,m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}\,.$$

Для краткости записи (2.25) используем выражение

$$\Delta\nu_j^p = \mathcal{L}\Delta\hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1,m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}\,. \tag{2.25$'$}$$

Для квазилинейной системы (2.3) имеем следующее приближенное выражение, связывающее отклонения моментов переключений с отклонениями начальных условий нормированной сопряженной системы

$$\Delta\nu_j^p \approx \left\{\left\{\left[B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p)\right]^* A^*(\nu_j^p) - \left[\dot{B}_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p)\right]^*\right\}\hat{\Phi}(\nu_j^p,t_0)\hat{\psi}_{\text{н}}(t_0)\right\}^{-1} \times$$

$$\times\left[B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p)\right]^*\hat{\Phi}(\nu_j^p,t_0)\Delta\hat{\psi}(t_0), \quad j=\overline{1,m}; \quad p=\overline{1,r_j-1}\,, \qquad (2.26)$$

которое для краткости запишем так

$$\Delta\nu_j^p = \mathcal{L}'\Delta\hat{\psi}(t_0), \quad j=\overline{1,m}; \quad p=\overline{1,r_j-1}\,. \qquad (2.26)'$$

2.5. *Связь между приращениями координат прямой и сопряженной систем.* Подставим $(2.26)'$ в (2.21) и получим систему из n *линейных алгебраических* уравнений с n неизвестными:

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k,\nu_j^p)B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p)M_jS_j(p)\mathcal{L}'\Delta\hat{\psi}(t_0)+$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{m}B_j(x_{\text{н}}(t_k),t_k)M_jS_j(r_j)+F(x_{\text{н}}(t_k),t_k)\right]\Delta t_k + x_{\text{н}}(t_k)=0\,. \qquad (2.27)$$

Неизвестными в (2.27) являются $(n-1)$ отклонений $\Delta\hat{\psi}_i(t_0)$ и отклонение Δt_k конечного момента времени t_k. Система (2.27) разрешима при выполнении следующих необходимых условий: 1) система (2.3) полностью управляема; 2) начальное условие принадлежит области управляемости.

Действительно, размерность и структура фазового пространства W, порождаемого возмущением $F(x,t)$, не должна превышать размерности и соответствовать структуре фазового пространства R, порождаемого управлением, и должно $W\subseteq R$. Так как на структуру возмущения $F(x,t)$ не накладывается ограничений, то максимальная размерность порождаемого пространства равна n. Поэтому система (2.3) должна быть полностью управляемой. В противном случае (т.е., если $W\not\subseteq R$) система (2.27) несовместна и решения не существует.

Далее. Мощности управления должно быть достаточно, чтобы компенсировать рассогласования, порождаемые возмушением $F(x,t)$, т.е. порождаемые изменением моментов переключений отклонения фазовых координат $\Delta\tilde{x}_i(t_k)$, $i=\overline{1,n}$ должны компенсировать отклонения $x_{i\,\text{н}}(t_k)$, $i=\overline{1,n}$, порождаемые возмущением. Следовательно, для каждой точки фазовой траектории системы (1.1) должно существовать оптимальное управление. Другими словами, все точки фазовой траектории системы (1.1) должны принадлежать области управляемости $V_{\text{н}}$ (см. (1.3)).

2.6. *Итерационный вычислительный процесс.* Оптимальное управление квазилинейной системой формируется по алгоритму

$$u_j(t) = M_j \operatorname{sign}[B_j(x_{\text{н}}, t)]^* \psi_{\text{н}}(t), \quad t \in [t_0, t_k + \Delta t_k], \quad j = \overline{1, m}, \qquad (2.28)$$

где $\psi_{\text{н}}(t)$ – решение нелинейной сопряженной системы (2.5) на интервале $[t_0, t_k + \Delta t_k]$

$$\dot{\psi}_{\text{н}} = -\left[A(t) + \frac{\partial D(x_{\text{н}}, t)}{\partial x_{\text{н}}} u^0(t) + \frac{\partial F(x_{\text{н}}, t)}{\partial x_{\text{н}}}\right]^* \psi_{\text{н}}, \quad \psi_{\text{н}}(t_0) = \psi(t_0) + \Delta\psi(t_0). \qquad (2.29)$$

Здесь $u^0(t)$ – оптимальное по быстродействию управление линейной системой (2.8); $\psi(t_0) = \psi_0$ – начальное условие линейной сопряженной системы (2.16); $\Delta\psi(t_0)$ – найденное приращение начального условия сопряженной системы. По условию задачи $u^0(t)$ задано. Следовательно, задано и начальное условие ψ_0 сопряженной системы, соответствующей линейной системе (2.8). Из (2.27) находится нормированное приращение $\Delta\hat{\psi}(t_0)$, которое с точностью до знака совпадает с ненормированным приращением $\Delta\psi(t_0)$. Знак определяется элементарно, так как значения всех компонент $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ известны.

Оптимальное управление (2.28) переводит квазилинейную систему (2.3) за время $T = t_k + \Delta t_k - t_0$ из точки $x_{\text{н}}(t_0) = x_0$ в начало координат $x_{\text{н}}(t_k + \Delta t_k) = 0$. С помощью функции переключения $[B_j(x_{\text{н}}, t)]^* \psi_{\text{н}}(t)$ находим все моменты переключений оптимального управления на интервале $[t_0, t_k + \Delta t_k]$.

Однако из-за приближенности выражений (2.19),(2.21) и (2.26) невозможно сразу точно определить искомые значения $\Delta\psi(t_0)$ и Δt_k. Необходимо организовать итерационный вычислительный процесс. Отклонение $x_{\text{н}}(t_k)$ может быть значительным и для его компенсации необходимы большие приращения $\Delta\nu_j^p$, Δt_k, что может привести из-за линеаризации и приближенности соотношений к расходимости вычислительного процесса. Оценить "малы"или "велики"приращения $\Delta\psi_\xi(t_0)$, $\xi = \overline{1, n}$ и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Более просто оценить их по приращениям моментов переключений и конечного момента. По формуле (2.26) находим приращения моментов переключений $\Delta\nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$, которые позволяют "наглядно"судить о том, насколько необходимо изменить каждый из моментов переключений, чтобы скомпенсировать отклонение $x_{\text{н}}(t_k)$. По максимальной величине приращения $\max\limits_{j,p}[|\Delta\nu_j^p|, |\Delta t_k|]$ можно косвенно судить о близости фазовых траекторий систем (2.3) и (2.8), корректности линеаризации и о сходимости вычислительного процесса. Если $\max\limits_{j,p}[|\Delta\nu_j^p|, |\Delta t_k|] \leq \gamma(t_k - t_0)$, $0 < \gamma \ll 1$, то приращения достаточно малы и гарантируется сходимость вычислительного процесса. Если $\max\limits_{j,p}[|\Delta\nu_j^p|, |\Delta t_k|] > \gamma(t_k - t_0)$, то не гарантируется сходимость вычислительного процесса. Максимальная величина $\gamma(t_k^s - t_0)$ *характеризует* радиус локальной сходимости. Определение максимального значения γ представляет весьма сложную задачу, которая аналитически неразрешима.

Для обеспечения сходимости вычислительного процесса вводим в систему нелинейное воздействие $F(x,t)$ не сразу полностью, а по *частям.* Рассматриваем последовательно ρ_α часть нелинейного воздействия $F(x,t)$, где $\rho_\alpha < \rho_{\alpha+1} \leq 1$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$. В результате приходим к следующей итерационной процедуре вычисления приращений $\Delta\hat{\psi}(t_0)$, Δt_k.

Интегрируем систему нелинейных дифференциальных уравнений (2.3) при $u(t) = u^0(t)$ (т.е. при оптимальном по быстродействию управлении для линейной системы (2.8)) и *неполном* нелинейном воздействии $\rho_\alpha F(x,t)$. Вычисляем $x_{\text{н}}(\rho_\alpha, t_k)$. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (2.27) при $\rho_\alpha F(x,t)$

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j^s-1}\Phi(t_k^s, \nu_j^{p,s})B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^{p,s}), \nu_j^{p,s})M_j S_j(p)\mathcal{L}'\Delta\hat{\psi}^s(\rho_\alpha, t_0)+$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{m}B_j(x_{\text{н}}(t_k^s), t_k^s)M_j S_j(r_j^s) + \rho_\alpha F(x_{\text{н}}(t_k^s), t_k^s)\right]\Delta t_k^s(\rho_\alpha) + x_{\text{н}}(\rho_\alpha, t_k^s) = 0. \tag{2.30}$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots$$

Находим $\Delta\hat{\psi}^s(\rho_\alpha, t_0)$, $\Delta t_k^s(\rho_\alpha)$. Вычисляем по формуле (2.26) $\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)$. Если $\max\limits_{j,p}[\,|\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)|, |\Delta t_k^s(\rho_\alpha)|\,] > \gamma(t_k^s(\rho_\alpha) - t_0)$, то принимаем

$$t_k^{s+1}(\rho_\alpha) = t_k^s(\rho_\alpha) + \xi^s\Delta t_k^s(\rho_\alpha)\,, \quad \nu_j^{p,s+1}(\rho_\alpha) = \nu_j^{p,s}(\rho_\alpha) + \xi^s\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha),$$

$$\hat{\psi}^{s+1}_{\text{Н}}(\rho_\alpha, t_0) = \hat{\psi}^s{}_{\text{Н}}(\rho_\alpha, t_0) + \xi^s\Delta\hat{\psi}^s(\rho_\alpha, t_0), \tag{2.31}$$

где $\xi^s < 1$ и вычисляется по формуле

$$\xi^s = \frac{\gamma(t_k^s(\rho_\alpha) - t_0)}{\max\limits_{j,p}[\,|\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)|, |\Delta t_k^s(\rho_\alpha)|\,]}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.32}$$

Это означает, что для максимального отклонения принимаем его равным предельному значению $\gamma(t_k^s(\rho_\alpha) - t_0)$, а остальные приращения уменьшаем соответственно в ξ^s раз. Таким образом, в случае больших значений $x_{\text{н}}(\rho_\alpha, t_k^s)$ (2.10) и соответственно больших приращений $\{\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha), \Delta t_k^s(\rho_\alpha)\}$ переходим к компенсации отклонений по частям, т.е. компенсируем на каждой s итерации ξ^s часть отклонения $x_{\text{н}}(\rho_\alpha, t_k^s)$. На некоторой итерации выполняется условие

$$\max_{j,p}\left[\,|\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)|, |\Delta t_k^s(\rho_\alpha)|\,\right] \le \gamma(t_k^s(\rho_\alpha) - t_0). \tag{2.33}$$

Выполнение (2.33) означает, что фазовая траектория движения квазилинейной системы с найденным управлением достаточно близко подходит к началу координат. В этом случае полагаем $\xi^s = 1$ и продолжаем процесс вычислений управления до тех пор, пока $\|x_{\text{н}}(\rho_\alpha, t_k^s)\| \le \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, задано и характеризует необходимую точность перевода квазилинейной системы в начало координат. Полагаем $\rho = \rho_{\alpha+1}$ и продолжаем процесс вычислений до $\rho_k = 1$.

Управление квазилинейной системой формируется по алгоритму

$$u_j^s(t) = M_j \operatorname{sign}[B_j(x^s{}_{\text{н}}, t)]^* \psi^s{}_{\text{н}}(t), \quad t \in [t_0\,, t_k^s + \Delta t_k^s], \quad j = \overline{1,m}, \;\; s = 0, 1, 2... , \tag{2.34}$$

где $\psi^s{}_{\text{н}}(t)$ – решение нелинейной сопряженной системы на интервале $[t_0\,, t_k^s + \Delta t_k^s]$

$$\dot\psi^s{}_{\text{н}} = -\left[A(t) + \frac{\partial D(x^s{}_{\text{н}}, t)}{\partial x_{\text{н}}} u^{s-1}(t) + \frac{\partial F(x^s{}_{\text{н}}, t)}{\partial x_{\text{н}}}\right]^* \psi^s{}_{\text{н}}, \quad \psi^s{}_{\text{н}}(t_0) = \psi^{s-1}_{\text{н}}(t_0) +$$

$$+\Delta\psi^{s-1}(t_0), \quad s = 1, 2, 3... \tag{2.35}$$

Полагаем: $u^0(t)$ – заданное оптимальное управление системой (2.8); $\psi^0{}_{\text{н}}(t_0) = \psi_0$ – заданное начальное условие сопряженной системы, формирующее $u^0(t)$; $\Delta\psi^0(t_0) = 0$; $\Delta t_k^0 = 0$.

Таким образом, итерационный вычислительный процесс нахождения оптимального управления сводится к последовательности решений задач Коши и систем линейных алгебраических уравнений.

3. Вычислительный алгоритм

Чтобы уменьшить объем вычислений, целесообразно вычислить только фундаментальную матрицу решений сопряженной системы и через нее выразить фундаментальную матрицу решений прямой системы. С этой целью запишем (2.30) так:

$$\Phi(t_k^s\,,t_0)\left\{2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j^s-1}\Phi(t_0\,,\nu_j^{p,s})B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^{p,s}),\nu_j^{p,s})M_jS_j(p)\mathcal{L}'\Delta\hat{\psi}^s(\rho_\alpha,t_0)+\right.$$

$$\left.+\Phi(t_0\,,t_k^s)\left[\left[\sum_{j=1}^{m}B_j(t_k^s)M_jS_j(r_j^s)+\rho_\alpha F(x_{\text{н}}(t_k^s),t_k^s)\right]\Delta t_k^s(\rho_\alpha)+x_{\text{н}}(\rho_\alpha,t_k^s)\right]\right\}=0, \tag{3.1}$$

$$s=0,1,2,\ldots$$

Так как матрица фундаментальных решений $\Phi(t,t_0)$ невырождена, а $\Phi(t_0,t)=\Phi^{-1}(t,t_0)=[\hat{\Phi}(t,t_0)]^*$, систему (3.1) окончательно представим так:

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j^s-1}\left[\hat{\Phi}(\nu_j^{p,s}\,,t_0)\right]^*B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^{p,s}),\nu_j^{p,s})M_jS_j(p)\mathcal{L}'\Delta\hat{\psi}^s(\rho_\alpha,t_0)+$$

$$+\left[\hat{\Phi}(t_k^s\,,t_0)\right]^*\left[\sum_{j=1}^{m}B_j(x_{\text{н}}(t_k^s),t_k^s)M_jS_j(r_j^s)+\rho_\alpha F(x_{\text{н}}(t_k^s),t_k^s)\right]\Delta t_k^s(\rho_\alpha)+ \tag{3.2}$$

$$+\left[\hat{\Phi}(t_k^s\,,t_0)\right]^*x_{\text{н}}(\rho_\alpha,t_k^s)=0,\quad s=0,1,2,\ldots$$

Выпишем теперь по шагам итерационную процедуру нахождения оптимального по быстродействию управления.

Шаг 1. Решаем на интервале $t\in[t_0\,,t_k]$ уравнение (2.18), находим фундаментальную матрицу $\hat{\Phi}(t,t_0)$ решений линейной сопряженной системы, запоминаем значения $\hat{\Phi}(\nu_j^{p,0},t_0)$ и транспонируем матрицу.

Шаг 1$'$. Для нахождения значений фундаментальной матрицы $\hat{\Phi}(\nu_j^{p,s}+\Delta\nu_j^{p,s},t_0)$ достаточно решить уравнение (2.18) на интервале $[\nu_j^{p,s},\nu_j^{p,s}+\Delta\nu_j^{p,s}]$, используя в качестве начального значение $\hat{\Phi}(\nu_j^{p,s},t_0)$.

Шаг 2. Решаем на интервале $[t_0\,,t_k^s]$ систему обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений (2.3) с найденным управлением $u^s(t)$ (2.34) и вычисляем $x_{\text{н}}(\rho_\alpha,t_k^s)$ при $\rho_\alpha F(x_{\text{н}},t)$.

Шаг 3. Решаем систему (3.2) из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются приращения $\Delta\hat{\psi}^{(s)}(\rho_\alpha,t_0)$ нормированной сопряженной системы ($n-1$ значений) и приращение $\Delta t_k^s(\rho_\alpha)$ конечного момента $t_k^s(\rho_\alpha)$.

Шаг 4. Вычисляем приращения моментов переключений. Подставляем найденное значение $\Delta\hat{\psi}^s((\rho_\alpha, t_0)$ в (2.26) и находим $\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)$:

$$\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha) = \left\{\left\{\left[B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^{p,s}), \nu_j^{p,s})\right]^* A^*(\nu_j^{p,s}) - \left[\dot{B}_j(x_{\text{н}}(\nu_j^{p,s}), \nu_j^{p,s})\right]^*\right\}\hat{\Phi}(\nu_j^{p,s}, t_0)\times\right.$$

$$\left.\times\hat{\psi}^s(\rho_\alpha, t_0)\right\}^{-1} \times \left[B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^{p,s}), \nu_j^{p,s})\right]\hat{\Phi}(\nu_j^{p,s}, t_0)\Delta\hat{\psi}^s(\rho_\alpha, xt_0), \tag{3.3}$$

$$j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j^s - 1}.$$

Шаг 5. Проверяем выполнение условия (2.33) Если

$$\max_{j,p}\left[|\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)|, |\Delta t_k^s(\rho_\alpha)|\right] > \gamma(t_k^s(\rho_\alpha) - t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j^s - 1}, \tag{3.4}$$

где γ задано ($0 < \gamma < 1$), то ограничиваем максимальное приращение предельным значением, равным по величине $\gamma(t_k^s(\rho_\alpha) - t_0)$, а остальные приращения соответственно уменьшаем, беря лишь ξ^s часть вычисленных приращений. Полагаем

$$\xi^s = \frac{\gamma(t_k^s(\rho_\alpha) - t_0)}{\max\limits_{j,p}\left[|\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)|, |\Delta t_k^s(\rho_\alpha)|\right]}, \quad \text{где} \quad 0 < \xi^s < 1. \tag{3.5}$$

Находим новые значения $\nu_j^{p,s+1}(\rho_\alpha) = \nu_j^{p,s}(\rho_\alpha) + \xi^s\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)$; $t_k^{s+1}(\rho_\alpha) = t_k^s(\rho_\alpha) + \xi^s\Delta t_k^s(\rho_\alpha)$; $\hat{\psi}^{s+1}_{\text{н}}((\rho_\alpha, t_0) = \hat{\psi}^s{}_{\text{н}}((\rho_\alpha, t_0) + \xi^s\Delta\hat{\psi}^s(\rho_\alpha, t_0)$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j^s - 1}$ и переходим к *Шагу* $1'$.

Если $\max\limits_{j,p}\left[|\Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)|, |\Delta t_k^s(\rho_\alpha)|\right] \le \gamma(t_k^s(\rho_\alpha) - t_0)$, то принимаем $t_k^{s+1}(\rho_\alpha) = t_k^s(\rho_\alpha) + \Delta t_k^s(\rho_\alpha)$; $\nu_j^{p,s+1}(\rho_\alpha) = \nu_j^{p,s}(\rho_\alpha) + \Delta\nu_j^{p,s}(\rho_\alpha)$; $\hat{\psi}^{s+1}_{\text{н}}(\rho_\alpha, t_0) = \hat{\psi}^s{}_{\text{н}}(\rho_\alpha, t_0) + \Delta\hat{\psi}^s(\rho_\alpha, t_0)$ и переходим к *Шагу* $1'$.

Процесс вычислений с принятым ρ_α заканчивается, если выполняется условие

$$\|x_{\text{н}}(\rho_\alpha, t_k^s)\| \le \varepsilon_1, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1.$$

Величина ε_1 задана и характеризует точность перехода в начало координат при промежуточных вычислениях, т.е. при $\rho_\alpha < 1$.

Шаг 6. Полагаем $\rho = \rho_{\alpha+1}$ и переходим к *Шагу* 2. Продолжаем процесс вычислений до $\rho_k = 1$ включительно. Процесс вычислений при $\rho_k = 1$ заканчивается, если

$$\|x_{\text{н}}(t_k^s)\| \le \varepsilon_0, \quad 0 < \varepsilon_0 \ll 1.$$

Величина ε_0 задана и характеризует точность перевода квазилинейной системы в начало координат.

Замечание. В общем случае $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$, так как при промежуточных вычислениях нецелесообразно стремиться к высокой точности перевода квазилинейной системы в начало координат. Это позволяет уменьшить общее число итераций.

4. Модификации вычислительного алгоритма

Для уменьшения числа итераций модифицируем вычислительную процедуру. Дополнительно потребуем, чтобы функция $F(x, t)$ была непрерывно дифференцируема по x. Линеаризуем нелинейную систему (2.3) вдоль опорной траектории $x^0(t)$, которой является траектория линейной системы (2.8) с оптимальным по быстродействию управлением $u^0(t)$, переводящим линейную систему (2.8) из начальной точки $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за минимальное время $T = t_k - t_0$. Получаем линеаризованную систему

$$\dot{x} = \left[A(t) + \left(\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} u + \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \right) \Bigg|_{\substack{x=x^0(t)\\ u=u^0(t)}} \right] x +$$

$$\left[B(x,t) \Big|_{x=x^0(t)} \right] u\,, \tag{4.1}$$

которую представим в компактной форме

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x + \tilde{B}(t)u. \tag{4.2}$$

В модифицированной вычислительной процедуре следует всюду заменить матрицы $A(t), B(t), \Phi(t, t_0)$ на $\tilde{A}(t), \tilde{B}(t), \tilde{\Phi}(t, t_0)$ соответственно.

Дальнейшая модификация алгоритма состоит в том, что линеаризация осуществляется на каждой итерации вдоль опорной траектории $x^s(t)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ которой является траектория линейной системы с оптимальным по быстродействию управлением $u^s(t)$, переводящим линейную систему

$$\dot{x}^s(t) = \left[A(t) + \left(\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} u + \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \right) \Bigg|_{\substack{x=x^{s-1}(t)\\ u=u^{s-1}(t)}} \right] x^s +$$

$$\left[B(x,t)\Big|_{x=x^{s-1}(t)}\right]u^s\,, \tag{4.3}$$

из начальной точки $x^s(t_0)=x_0$ в начало координат $x^s(t_k^s)=0$ за минимальное время $T_s=t_k^s-t_0$. Линеаризованную на каждой итерации вдоль предыдущей траектории систему (4.3) в компактном виде запишем так

$$\dot{x}^s=\tilde{A}^s(t)x^s+\tilde{B}^s(t)u^s. \tag{4.4}$$

В итерационной вычислительной процедуре следует всюду заменить матрицы $A(t), B(t)$, $\Phi(t,t_0)$ на $\tilde{A}^s(t), \tilde{B}^s(t), \tilde{\Phi}^s(t,t_0)$ соответственно.

5. Доказательство сходимости вычислительного процесса

Докажем сходимость итерационного процесса вычислений и сходимость последовательности управлений к оптимальному управлению. Введем обозначение $\Delta z^s=(\Delta\hat{\psi}^s(t_0),\Delta t_k^s)$.

Докажем вначале *локальную* сходимость при малых отклонениях.

Теорема. *Существуют такие значения Δz_*^s, что если $\|\Delta z^s\|<\|\Delta z_*^s\|$, то $\|\Delta z^{s+1}\|<\|\Delta z^s\|$, $s=1,2,3,\dots$ и итерационный вычислительный процесс сходится с любой наперед заданной точностью, а последовательность управлений сходится к оптимальному по быстродействию управлению.*

Доказательство. Отклонения фазовых координат квазилинейной системы, вызванные вариацией моментов переключений и конечного момента, связаны приближенным соотношением

$$\Delta\tilde{x}(t_k)\approx 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k\,,\nu_j^p)B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p)M_jS_j(p)\Delta\nu_j^p+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\Big[B_j(x_{\text{н}}(t_k),t_k)M_jS_j(r_j)+F(x_{\text{н}}(t_k),t_k)\Big]\Delta t_k\,, \tag{5.1}$$

основанном на интегральном выражении (2.13). Так как подынтегральная функция непрерывна на каждом интервале $[\nu_j^p,\nu_j^p+\Delta\nu_j^p]$, $[t_k\,,t_k+\Delta t_k]$, то на основании теоремы о среднем имеем точное соотношение

$$\Delta\tilde{x}(t_k)=2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k\,,\nu_j^p+\mu_j^p\Delta\nu_j^p)B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p+\mu_j^p\Delta\nu_j^p)M_jS_j(p)\Delta\nu_j^p+$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{m}\Phi(t_k\,,t_k+\mu_j\Delta t_k)B_j(x_{\text{н}}(t_k),t_k+\mu_j\Delta t_k)M_jS_j(r_j)+F(x_{\text{н}}(t_k),t_k)\right]\Delta t_k, \tag{5.2}$$

$$0<\mu_j^p,\ \mu_j<1.$$

Применим теорему Лагранжа о конечном приращении. Получим

$$\Delta\tilde{x}(t_k)=2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k\,,\nu_j^p)B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p)M_jS_j(p)\Delta\nu_j^p+$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{m}B_j(x_{\text{н}}(t_k),t_k)M_jS_j(r_j)+F(x_{\text{н}}(t_k),t_k)\right]\Delta t_k+$$

$$+2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\mu_j^pM_jS_j(p)\frac{d\{\Phi(t_k\,,\nu_j^p+\Theta_j^p\mu_j^p\Delta\nu_j^p)B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p+\Theta_j^p\mu_j^p\Delta\nu_j^p)\}}{dt}(\Delta\nu_j^p)^2+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\mu_jM_jS_j(r_j)\frac{d\{\Phi(t_k\,,t_k+\Theta_j\mu_j\Delta t_k)B_j(x_{\text{н}}(t_k),t_k+\Theta_j\mu_j\Delta t_k)\}}{dt}(\Delta t_k)^2, \tag{5.3}$$

$$0<\Theta_j^p,\Theta_j<1,\quad 0<\mu_j^p,\mu_j<1.$$

Введем обозначения

$$\Delta\nu_j^p=\Delta\tilde{\nu}_j^p+\sigma\nu_j^p\,,\quad \Delta t_k=\Delta\tilde{t}_k+\sigma t_k\,. \tag{5.4}$$

Здесь: $\Delta\nu_j^p$, Δt_k — точные (истинные), а $\Delta\tilde{\nu}_j^p$, $\Delta\tilde{t}_k$ — вычисленные значения отклонений; $\sigma\nu_j^p$, σt_k — погрешности (ошибки) вычисления отклонений. Значения $\Delta\tilde{\nu}_j^p$, $\Delta\tilde{t}_k$ находятся из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений, которая для *вычисленных* значений становится точной:

$$\Delta\tilde{x}(t_k)=2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k\,,\nu_j^p)B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p)M_jS_j(p)\Delta\tilde{\nu}_j^p+$$

$$\left[\sum_{j=1}^{m}B_j(x_{\text{н}}(t_k),t_k)M_jS_j(r_j)+F(x_{\text{н}}(t_k),t_k)\right]\Delta\tilde{t}_k. \tag{5.5}$$

Подставив (5.4) в (5.3) и учитывая (5.5), получим уравнение

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k\,,\nu_j^p)B_j(x_{\text{н}}(\nu_j^p),\nu_j^p)M_jS_j(p)\sigma\nu_j^p+\sum_{j=1}^{m}B_j(x_{\text{н}}(t_k),t_k)M_jS_j(r_j)\sigma t_k+$$

$$+2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\mu_j^p R_1 M_j S_j(p)(\Delta\nu_j^p)^2+\sum_{j=1}^{m}\mu_j R_2 M_j S_j(r_j)(\Delta t_k)^2=0, \qquad (5.6)$$

где использованы сокращения:

$$R_1=\frac{d\{\Phi(t_k\,,\nu_j^p+\Theta_j^p\mu_j^p\Delta\nu_j^p)B_j(x_{\text{ н}}(\nu_j^p),\nu_j^p+\Theta_j^p\mu_j^p\Delta\nu_j^p)\}}{dt};$$

$$R_2=\frac{d\{\Phi(t_k\,,t_k+\Theta_j\mu_j\Delta t_k)B_j(x_{\text{ н}}(t_k),t_k+\Theta_j\mu_j\Delta t_k)\}}{dt}.$$

Для доказательства сходимости и понимания вычислительного процесса важно следующее положение. *Погрешности* $\sigma\nu_j^p$, σt_k, *полученные на* s *итерации, являются точными (истинными) значениями отклонений для* $(s+1)$ *итерации, т.е.*

$$\sigma\nu_j^{p,s}=\Delta\nu_j^{p,s+1},\quad \sigma t_k^s=\Delta t_k^{s+1}. \qquad (5.7)$$

Подставив (5.7) в (5.6), получим уравнение, связывающее отклонения на s и $(s+1)$ итерациях:

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j^s-1}\Phi(t_k^s\,,\nu_j^{p,s})B_j(x_{\text{ н}}(\nu_j^{p,s}),\nu_j^{p,s})M_jS_j(p)\Delta\nu_j^{p,s+1}+\sum_{j=1}^{m}B_j(x_{\text{ н}}(t_k^s),t_k^s)M_jS_j(r_j^s)\times$$

$$\times\Delta t_k^{s+1}=-2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j^s-1}\mu_j^{p,s}R_1M_jS_j(p)(\Delta\nu_j^{p,s})^2-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^sR_2M_jS_j(r_j^s)(\Delta t_k^s)^2. \qquad (5.8)$$

Подставим $(2.26)'$ в (5.8) и получим систему из n трансцендентных уравнений с n неизвестными, которыми являются приращения начальных условий $\Delta\hat{\psi}(t_0)$ нормированной сопряженной системы ($n-1$ значений) и отклонение Δt_k конечного момента t_k:

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k^s\,,\nu_j^{p,s})B_j(x_{\text{ н}}(\nu_j^{p,s}),\nu_j^{p,s})M_jS_j(p)\mathcal{L}'\Delta\hat{\psi}^{s+1}(t_0)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}B_j(x_{\text{ н}}(t_k^s),t_k^s)M_jS_j(r_j^s)\Delta t_k^{s+1}=\mu_j^{p,s}R_1\times \qquad (5.9)$$

$$\times M_jS_j(p)[\mathcal{L}'\Delta\hat{\psi}^s(t_0)]^2-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^sR_2M_jS_j(r_j^s)(\Delta t_k^s)^2.$$

Для компактности записи используем обозначение $\Delta z^s = (\Delta\hat{\psi}^s(t_0), \Delta t_k^s)$. В результате система (5.9) может быть представлена в следующем виде

$$\Delta z^{s+1} = P(t_k^s, \Delta z^s, \nu_j^{p,s})\Delta\tilde{z}^s\Delta z^s. \tag{5.10}$$

Здесь: Δz^s — n-мерный вектор-столбец, компонентами которого являются значения
$(\Delta\hat{\psi}^s(t_0), \Delta t_k^s)$; $\Delta\tilde{z}^s$ — диагональная матрица $(n \times n)$ с вышеуказанными элементами на диагонали; $P(t_k^s, \Delta z^s, \nu_j^{p,s})$ — матрица размеров $(n \times n)$.

Процесс вычислений сходится с любой наперед заданной точностью, если выполняется следующее *достаточное* условие

$$\|\Delta z^{s+1}\| < \|\Delta z^s\|, \quad s = 1, 2, 3 \ldots . \tag{5.11}$$

Из системы (5.10) непосредственно следует, что в силу *квадратичной* зависимости существуют такие значения Δz_*^s, что если $\|\Delta z^s\| < \|\Delta z_*^s\|$, то $\|\Delta z^{s+1}\| < \|\Delta z^s\|$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. выполняется достаточное условие сходимости (5.11).

Величины Δz^s, которые образуются на каждой итерации, *выбираются* по нашему усмотрению. Действительно, задавая коэффициент ξ^s в выражениях (2.31), тем самым определяем какая часть от *полного рассогласования* Δz, вычисленного из (2.30) при $\xi^s = 1$, будет скомпенсирована на s итерации. Если устремить параметр $\gamma \to 0$, то $\xi^s \to 0$ и, следовательно, $\Delta z^s \to 0$. Таким образом, выбирая параметр γ, выбираем тем самым Δz^s. Если Δz^s выбрано так, что $\|\Delta z^s\| < \|\Delta z_*^s\|$, то вычислительный процесс сходится с любой наперед заданной точностью, так как $\lim\limits_{s\to\infty} \|\Delta z^s\| = 0$. При этом скорость сходимости квадратичная, а $R^s = \|\Delta z_*^s\|$ характеризует радиус локальной сходимости с квадратичной скоростью сходимости.

Последовательность релейных управлений сходится к оптимальному управлению. Для линейных систем в рассматриваемой задаче быстродействия принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности при выполнении следующих условий [16]:

1. начало координат является внутренней точкой области управления;

2. выполнено условие общности положения.

Для рассматриваемых ограничений (1.2) условие 1 выполнено, т.е. $0 \in \operatorname{int} U$.

Условие общности положения выполнено, если

$$\operatorname{rank}[B\omega, AB\omega, \ldots, A^{n-1}B\omega] = n, \tag{5.12}$$

где w — вектор, совпадающий по направлению с одним из ребер многогранника U. В случае рассматриваемых ограничений (1.2) выполнение условия (5.12) равносильно выполнению условий

$$\mathrm{rank}\,[B_j\,, AB_j\,, \ldots, A^{n-1}B_j] = n, \quad \forall\, j \in [1, m], \tag{5.13}$$

т.е. выполнение условия общности положения адекватно выполнению условий *покомпонентной* полной управляемости. Однако в работе предполагается, что выполняется лишь условие полной управляемости (2.9), т.е. допускается выполнение условия управляемости не для каждой компоненты вектора управления, а хотя бы для одной (или нескольких), но не обязательно для каждой. Условие общности положения (5.12) является более *жестким*, чем условие полной управляемости (2.9). Для скалярного управления эти условия совпадают. Поэтому для скалярного управления последовательность релейных управлений сходится к оптимальному управлению, которое единственно. В случае векторного управления оптимальное управление может быть неединственным. В этом случае последовательность релейных управлений сходится к одному из оптимальных управлений.

Теорема доказана.

Докажем сходимость при больших, но ограниченных отклонениях Δz^s. Воздействия $F(x,t)$ предполагаются ограниченными и такими, что вся фазовая траектория, движения системы (1.1), включая начальную точку $x(t_0) = x_0$, принадлежит области управляемости $V_{\text{Н}}$ квазилинейной системы. Область управляемости V линейной системы является незамкнутым выпуклым (при ограничениях (1.2)) множествам, совпадающим со всем пространством X в случае устойчивого оператора $A(t)$. Если оператор $A(t)$ неустойчив, то область управляемости является ограниченным незамкнутым выпуклым множеством. Наличие нелинейного воздействия $F(x,t)$ приводит к изменению границы области управляемости и, в частности, может привести к сужению области управляемости $V_{\text{Н}}$ квазилинейной системы по сравнению с областью управляемости V линейной системы, т.е. $V_{\text{Н}} \subset V$. В этом случае увеличение нелинейного воздействия $\mu F(x,t)$ (увеличение параметра μ) может привести к потере управляемости, т.е. $x_0 \notin V_{\text{Н}}$, и поэтому не существует оптимального управления, переводящего квазилинейную систему из $x(t_0) = x_0$ в начало координат. Однако по условию задачи предполагается, что $x_0 \in V_{\text{Н}}$ и, следовательно, оптимальное управление существует. Поэтому рассматриваются ограниченные воздействия $F(x,t)$, при которых $x_0 \in V_{\text{Н}}$.

Итак, если $\max\limits_{j,p}\,[|\Delta\nu_j^p|, |\Delta t_k|] > \gamma(t_k - t_0)$, то не гарантируется сходимость вычислительного процесса. Для обеспечения сходимости вычислительного процесса компенсируем отклонение $x_{\text{н}}(t_k)$ не сразу полностью, а *по частям*, вводя последовательно ρ часть отклонения $x_{\text{н}}(t_k)$. Сделать это можно следующим образом. Запишем уравнение (1.1) так

$$\dot{x}_{\text{н}} = A(t)x_{\text{н}} + B(t)u + \rho F(x_{\text{н}}, t), \quad x_{\text{н}}(t_0) = x_0\,, \quad x_0 \in V_{\text{н}}, \tag{5.14}$$

где $\rho \in (0,1]$ — скаляр. *Существует* такое значение $\rho^{(1)}$, при котором $\max\limits_{j,p}[|\Delta\nu_j^{p,1}|, |\Delta t_k^{(1)}|] = \gamma(t_k^{(1)} - t_0)$. Находим $t_k^{(2)} = t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}$, $\nu_j^{p,2} = \nu_j^{p,1} + \Delta\nu_j^{p,1}$. С этими значениями моментов переключений $(\nu_j^{p,2})$ и конечного времени $(t_k^{(2)})$ оптимальное по быстродействию управление переводит квазилинейную систему (5.14) с коэффициентом $\rho = \rho^{(1)}$ из точки $x_{\text{н}}(t_0) = x_0$ в начало координат $x_{\text{н}}(t_k^{(2)}) = 0$ за минимальное время $T^{(2)} = t_k^{(2)} - t_0$. Это означает, что скомпенсирована $\rho^{(1)}$ часть воздействия $F(x_{\text{н}}, t)$. Затем находим $\rho^{(2)} > \rho^{(1)}$ такое, при котором $\max\limits_{j,p}[|\Delta\nu_j^{p,2}|, |\Delta t_k^{(2)}|] = \gamma(t_k^{(2)} - t_0)$. В результате приходим к итерационной процедуре вычисления отклонений (2.30) – (2.35). Отклонения на каждой итерации находятся в *допустимой* локальной области, из которой достигается сходимость с квадратичной скоростью.

6. Примеры

Класс нелинейных систем необычайно широк. Однако непрерывная функция может быть аппроксимирована степенным или гармоническим рядом. Поэтому рассмотрим сходимость квазилинейных систем с такими нелинейными функциями.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{1\,\text{н}} = x_{2\,\text{н}}\,, \\
&\begin{matrix} \dot{x}_{2\,\text{н}} = x_{3\,\text{н}} + \\ \dot{x}_{3\,\text{н}} = x_{4\,\text{н}} + \end{matrix}\ \mu \begin{pmatrix} 0.175x_{2\,\text{н}}^2 + 0.07|x_{1\,\text{н}}| + 0.007u^3, \\ 0.105x_{3\,\text{н}}^2 + 0.084u^2, \end{pmatrix} \\
&\dot{x}_{4\,\text{н}} = a_{41}x_{1\,\text{н}} + a_{42}x_{2\,\text{н}} + a_{43}x_{3\,\text{н}} + a_{44}x_{4\,\text{н}} + bu, \quad |u| = M.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Линейная часть системы (6.1)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\,, \\
\dot{x}_2 &= x_3\,, \\
\dot{x}_3 &= x_4\,, \\
\dot{x}_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + bu,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

при $a_{41} = -2.9684$; $a_{42} = -5.84$; $a_{43} = -6.33$; $a_{44} = -3.4$ имеет следующие комплексно-сопряженные собственные значения матрицы A: $\lambda_{1,2} = -0.784 \pm j\,0.986$; $\lambda_{3,4} = -0.916 \pm j\,1.016$. Для линейной системы (6.2) задано оптимальное по быстродействию управление $u^0(t)$, переводящее линейную систему из начальной точки $x(t_0) = (1, 1, 1, 1)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за минимальное время $T = t_k - t_0 = 2.801092$ (при $b = 4$; $M = 5$). Оптимальное управление имеет следующие моменты переключений: $\nu_1 = 0.975101$; $\nu_2 = 1.925302$; $\nu_3 = 2.561475$; $t_k = 2.801092$.

В табл. 1 приведены вычисленные на каждой итерации значения моментов переключений ν_i^s, конечного момента времени t_k^s и значение нормы $\|x_{\text{н}}(t_k^s)\|$ нелинейной системы в конечный момент.

Табл. 1

s	ν_1^s	ν_2^s	ν_3^s	t_k^s	$\|x_{\text{н}}(t_k^s)\|$
0	0.975101	1.925302	2.561475	2.801092	4.794784
1	1.325237	1.797405	2.696121	2.894311	1.025540
2	1.389727	1.964122	2.865906	3.093792	0.197154
3	1.424328	2.002866	2.894071	3.125106	0.099619
4	1.430397	2.002604	2.897749	3.130455	0.009005
5	1.429662	2.003024	2.897469	3.130485	0.002254
6	1.429878	2.003004	2.897589	3.130578	0.000324
7	1.429847	2.003015	2.897577	3.130576	0.000068
8	1.429854	2.003014	2.897581	3.130579	0.000010
9	1.429853	2.003015	2.897580	3.130579	0.000002

Табл. 2

s	ν_1^s	ν_2^s	ν_3^s	t_k^s	$\|x_{\text{н}}(t_k^s)\|$
0	1.024893	1.926200	2.520141	2.738086	4.652104
1	1.367154	1.912854	2.741278	2.912424	0.731068
2	1.524256	2.086353	3.042936	3.276477	1.290936
3	1.581072	2.191264	3.042688	3.271540	0.419815
4	1.590118	2.166296	3.042041	3.270019	0.101799
5	1.581622	2.167497	3.038677	3.266940	0.010572
6	1.583658	2.168380	3.040148	3.268107	0.002197
7	1.583604	2.168403	3.040171	3.268259	0.000084
8	1.583626	2.168422	3.040194	3.268282	0.000045
9	1.583629	2.168424	3.040197	3.268287	0.000003

Из опыта численного моделирования для различных динамических систем целесообразно принять $\gamma = \frac{1}{2^{n-1}}$, где n — порядок системы (1.1). При вычислениях принято $\mu = 1$ и $\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = 0.125$.

Следует отметить, что на первой итерации происходит выход на ограничение: приращение $\Delta\nu_1 = 0,412065$ и превышает максимальное значение $\gamma(t_k^s - t_0)$, которое в данном случае равно 0.350136. Вводится параметр $\xi^1 = 0,849711$, принимается $\Delta\nu_1 = 0.350136$ и пропорционально уменьшаются другие приращения.

Из табл. 1 видно, что четырех итераций достаточно, чтобы найти ε-оптимальное управление нелинейной системой с точностью 10^{-2}, шести итераций — с точностью 10^{-3}, семи итераций — 10^{-4}, девяти итераций — с точностью 10^{-5}.

В табл. 2 приведены результаты вычислений при переходе из другой начальной точки $x(t_0) = (0, 0, 4, 0)$ в начало координат. Оптимальное по быстродействию управление линейной системой, переводящее (6.2) из $x(t_0) = (0, 0, 4, 0)$ в $x(t_k) = 0$, имеет следующие моменты переключений: $\nu_1 = 1.024893$; $\nu_2 = 1.926200$; $\nu_3 = 2.520141$; $t_k = 2.738086$. Последовательность значений оптимального управления $\{-5; +5; -5; +5\}$. Принято $\mu = 1$

и $\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = 0,125$. Процесс вычислений в данном случае происходит с выходом на ограничение на первой и второй итерациях. На первой итерации приращение $\Delta\nu_1^1 = 0,514431$ превышает максимальное значение $\gamma(t_k^1 - t_0)$, которое равно 0.342261. Вводится параметр $\xi^1 = 0,665318$, принимается $\Delta\nu_1^1 = 0.342261$ и пропорционально уменьшаются другие приращения. На второй итерации приращение $\Delta t_k^{(2)} = 0,412151$ превышает максимальное значение $\gamma(t_k^1 - t_0) = 0.364053$. Вводится параметр $\xi^{(2)} = 0,883299$, принимается $\Delta t_k^{(2)} = 0.364053$ и пропорционально уменьшаются другие приращения. О величине воздействия на систему нелинейных членов можно *косвенно* судить по: 1) норме $\|x_{\text{н}}(t_k^0)\|$ отклонения нелинейной системы от начала координат в конечный момент $t = t_k^0$ (т.е. на нулевой итерации) с управлением $u^0(t)$, которое при $s = 0$ совпадает с оптимальным управлением для линейной системы; 2) изменению конечного момента (t_k^N) и моментов переключений (ν_i^N) оптимального управления нелинейной системой по сравнению с оптимальным управлением линейной системой; 3) числу выходов на ограничение в итерационной процедуре и по числу итераций.

В табл.3 и 4 приведены результаты вычислений и показано, как влияет изменение величины воздействия $F(x_{\text{н}}, u)$ на : 1) норму $\|x_{\text{н}}(t_k^0)\|$ отклонения нелинейной системы от начала координат; 2) конечный момент t_k^N оптимального управления нелинейной системой; 3) число итераций (N), которое необходимо для вычисления ε-оптимального управления с точностью 10^{-5}. В табл.3 и 4 приведены также номера (s_i^*) итераций, на которых происходит выход на ограничение(3.4), и приведен номер (i) момента переключения ν_i, для которого приращение $\Delta\nu_i^s$ превысило предельное значение ($i = 4$ соответствует приращению Δt_k). Рассматривалась система (6.1), которой соответствует запись: $\dot{x}_{\text{н}} = Ax_{\text{н}} + Bu + F(x_{\text{н}}, u)$. В систему вводится параметр μ: $\dot{x}_{\text{н}} = Ax_{\text{н}} + Bu + \mu F(x_{\text{н}}, u)$. В табл.3 приведены результаты вычислений для различных значений μ при переводе нелинейной системы из начальной точки $x_{\text{н}}(t_0) = (1, 1, 1, 1)$ в начало координат $x_{\text{н}}(t_k^N) = 0$.

Табл. 3

μ	$\|x_{\text{н}}(t_k^0)\|$	t_k^N	N	s_i^*
0.125	0.616296	2.833593	4	
0.25	1.192587	2.868560	5	
0.5	2.303456	2.945290	6	
0.75	3.460485	3.031801	7	
1	4.794784	3.130579	9	1_1
1.25	6.532580	3.245903	12	1_1
1.5	9.286268	3.384071	19	$1_1,\ 2_3$
1.75	16.111595	3.554023	42	$1_1, 2_3, 3_4$
1.9	38.285654	3.676450	1275	$1_1, 2_3, 3_4$

Табл. 4

μ	$\|x_{\text{н}}(t_k^0)\|$	t_k^N	N	s_i^*
0.125	0.561319	2.785758	4	
0.25	1.097049	2.837110	5	
0.5	2.149911	2.953096	5	
0.75	3.272966	3.093048	7	1_1
1	4.652104	3.268287	9	$1_1, 2_4$
1.25	6.861847	3.498180	10	$1_1, 2_4$
1.5	14.28105	3.823022	18	$1_1, 2_3, 3_4$
1.6	43.95325	3.771812	28	$1_1, 2_3, 3_4, 4_4$
1.63	12986.49	4.061372	31	$1_2, 2_1, 3_3, 4_4$

В табл.4 приведены результаты вычислений для различных μ при переводе нелинейной системы из начальной точки $x_{\text{н}}(t_0) = (0, 0, 4, 0)$ в начало координат $x_{\text{н}}(t_k^N) = 0$.

Из табл.3 и 4 видно, что алгоритм нахождения оптимального управления работоспособен даже при существенном воздействии нелинейности на процесс перевода динамической системы. Число итераций (N), время перевода (t_k^N) и первоначальная норма отклонения ($||x_{\text{н}}(t_k^0)||$) возрастают по мере увеличения нелинейного воздействия (μ).

В табл.5 для различных значений максимально допустимого шага (параметра γ) и двух случаев начальных условий приведено число итераций (N), которое необходимо для нахождения ε-оптимального управления с точностью 10^{-5}. Приведены также номера итераций (s^*), на которых происходит выход на ограничение. Из табл.5 видно, что для фиксированного $\mu \leq 1$ при изменении величины максимального шага (параметра γ) в широких пределах $\frac{1}{2^{n+2}} < \gamma < \frac{1}{2^{n-3}}$ число итераций остается практически неизменным. Это позволяет выбрать любое значение γ из этого интервала. *Некритичность к выбору величины максимального шага (параметра γ) является важным свойством рассматриваемого алгоритма.* Из таблицы также видно, что чрезмерное уменьшение шага (γ) приводит к значительному увеличению числа итераций, а чрезмерное увеличение шага (γ) – к расходимости вычислительного процесса при значительном нелинейном воздействии. Поэтому по условию задачи нелинейные воздействия ограничены.

Табл. 5

$x_{\text{н}}(t_0) = (1,1,1,1)$																
μ	$\gamma = \frac{1}{2^{n+3}} =$ 1/128		$\gamma = \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{64}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{32}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{16}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{4}$		$\gamma = 0.375$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-3}} =$ 1/2	
	N	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*
0.25	**9**	1–6	**6**	1–3	**5**	1	**5**		**5**		**5**		**5**		**5**	
0.5	**15**	1–11	**10**	1–5	**7**	1, 2	**6**	1	**6**		**6**		**6**		**6**	
0.75	**20**	1–16	**13**	1–8	**9**	1–4	**7**	1	**7**		**7**		**7**		**7**	
1	**24**	1–20	**15**	1–10	**11**	1–5	**9**	1, 2	**9**	1	**8**		**8**		**8**	
1.25	**31**	1–25	**19**	1–12	**14**	1–6	**12**	1–3	**12**	1	**13**		**13**		**13**	
1.5	**41**	1–32	**26**	1–16	**20**	1–8	**18**	1–4	**19**	1, 2	**21**		**22**		**23**	
1.75	**54**	1–42	**40**	1–21	**40**	1–10	**40**	1–5	**41**	1–3	**49**	1				
1.9	**1009**	1–49	**1153**	1–25	**951**	1–12	**1203**	1–6	**1214**	1–3			**1295**	1	**1289**	1,2
$x_{\text{н}}(t_0) = (0,0,4,0)$																
μ	$\gamma = \frac{1}{2^{n+3}} =$ 1/128		$\gamma = \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{64}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{32}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{16}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{4}$		$\gamma = 0.375$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-3}} =$ 1/2	
	N	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*
0.25	**9**	1–6	**7**	1–3	**5**	1	**5**		**5**		**5**		**5**		**5**	
0.5	**16**	1–12	**10**	1–6	**7**	1–3	**6**	1	**5**		**5**		**5**		**5**	
0.75	**22**	1–17	**13**	1–9	**9**	1–4	**7**	1–2	**7**	1	**7**		**7**		**7**	
1	**29**	1–24	**17**	1–12	**12**	1–6	**9**	1–3	**9**	1–2	**9**		**9**		**9**	
1.25	**40**	1–34	**24**	1–17	**15**	1–8	**11**	1–4	**10**	1–2	**13**	1–3	**15**	1–3	–	
1.5	**60**	1–50	**33**	1–25	**26**	1–12	**21**	1–6	**18**	1–3	**22**	1–3	**29**	1–9	–	
1.6	**72**	1–59	**45**	1–29	**33**	1–15	**27**	1–7	**28**	1–4	–		–		–	
1.63	**75**	1–62	**47**	1–31	**36**	1–16	**29**	1–8	**31**	1–4	–		–		–	

Рассмотрим влияние на сходимость и число итераций задания *начальных* значений моментов переключений (ν_i^0) и конечного момента времени (t_k^0). В качестве начальных выше принимались значения оптимального по быстродействию управления линейной системой (6.2), соответствующие заданному начальному условию $x(t_0)$. Будем умножать эти моменты переключений и конечный момент на некоторый коэффициент λ. Таким образом, коэффициенту $\lambda = 1$ соответствуют значения моментов переключений оптимального по быстродействию управления линейной системой (6.2). В табл. 6 приведены результаты вычислений для различных λ. Приведены: начальные значения конечного момента (t_k^0) и моментов переключений ($\nu_i^0, i = \overline{1,3}$); норма ($||x_{\text{ н}}(t_k^0||$) нелинейной системы (6.1) в конечный момент t_k^0, соответствующая управлению с этими моментами переключений; число итераций (N), которое необходимо для нахождения ε- оптимального управления с точностью 10^{-5}.

Табл. 6

$x_{\text{н}}(t_0) = (1,1,1,1)$						
λ	t_k^0	ν_1^0	ν_2^0	ν_3^0	$\|\|x(t_k^0)\|\|$	N
0.3	0.840328	0.292530	0.577591	0.768443	5.036671	18
0.4	1.120437	0.390040	0.770121	1.024590	4.634273	15
0.6	1.680656	0.585061	1.155181	1.536885	3.947951	12
0.8	2.240874	0.780081	1.540242	2.049180	3.949823	10
1.0	2.801093	0.975101	1.925302	2.561475	4.794784	9
1.2	3.361311	1.170121	2.310363	3.073770	7.351796	9
1.4	3.921530	1.365141	2.695423	3.586065	20.460040	10
$x_{\text{н}}(t_0) = (0,0,4,0)$						
λ	t_k^0	ν_1^0	ν_2^0	ν_3^0	$\|\|x(t_k^0)\|\|$	N
0.4	1.095235	0.409958	0.770480	1.008057	7.652813	17
0.6	1.642852	0.614936	1.155720	1.512085	5.867468	11
0.8	2.190469	0.819915	1.540960	2.016113	4.807148	10
1.0	2.738087	1.024894	1.926200	2.520141	4.652104	9
1.2	3.285704	1.229873	2.311440	3.024170	5.899396	9
1.4	3.833322	1.434851	2.696680	3.528198	10.866552	10
1.5	4.107130	1.537340	2.889300	3.780212	29.909029	12

Из табл. 6 видно, что изменение в широких пределах *начальных* значений моментов переключений и конечного момента не нарушают сходимости алгоритма, но приводят к увеличению числа итераций, если начальные значения отличаются от значений для линейной системы. Поэтому к выбору начальных значений моментов переключений и конечного момента не предъявляется жестких требований. Выбор в качестве начального приближения для квазилинейной системы оптимального управления линейной системой приводит к уменьшению числа итераций.

Рассмотрим другую систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{1\,\text{н}} &= x_{2\,\text{н}} \\
\dot{x}_{2\,\text{н}} &= x_{3\,\text{н}} \\
\dot{x}_{3\,\text{н}} &= x_{4\,\text{н}}
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
&+ \\ &+ \\ &+
\end{aligned}
\;\mu
\begin{pmatrix}
0.12\sin x_{2\,\text{н}}\,, \\
0.015x_{3\,\text{н}}^3 + 0.002u^3\sin x_3, \\
0.6\cos x_{1\,\text{н}} + 0.1\sqrt[3]{|x_{3\,\text{н}}|} + 1 + 0.015u^2 x_2,
\end{pmatrix}
\tag{6.3}
$$

$$\dot{x}_{4\,\text{н}} = -2.9684x_{1\,\text{н}} - 5.84x_{2\,\text{н}} - 6.33x_{3\,\text{н}} - 3.4x_{4\,\text{н}} + 4u + 0.3|x_{1\,\text{н}}|,$$

$$|u| = 5.$$

Линейная часть системы (6.3) совпадает с (6.2).

В табл.7 приведены вычисленные на каждой итерации значения моментов переключений ν_i^s, конечного момента t_k^s, нормы нелинейной системы в конечный момент t_k^s при переводе системы (6.3) из начального состояния $x_{\text{н}}(t_0) = (1,1,1,1)$ в начало координат $x_{\text{н}}(t_k^N) = 0$. Принято $\mu = 1$ и $\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = 0.125$. Последовательность значений ε-оптимального управления $\{-5; +5; -5; +5\}$. Следует отметить, что процесс вычислений происходит без выхода на ограничение.

Табл. 7

s	ν_1^s	ν_2^s	ν_3^s	t_k^s	$\|x_{\text{н}}(t_k^s)\|$
0	0.975100	1.925302	2.561475	2.801092	1.801072
1	1.119350	1.949068	2.829536	3.047631	0.300994
2	1.073800	1.928557	2.753081	2.987520	0.185640
3	1.085369	1.931805	2.768674	3.008329	0.027583
4	1.081891	1.930918	2.764925	3.004528	0.008517
5	1.082978	1.931203	2.765896	3.005566	0.002308
6	1.082635	1.931094	2.765585	3.005250	0.000727
7	1.082739	1.931134	2.765677	3.005353	0.000182
8	1.082709	1.931119	2.765651	3.005324	0.000047
9	1.082717	1.931125	2.765657	3.005332	0.000011
10	1.082716	1.931123	2.765656	3.005331	0.000004

Из табл.7 видно, что четырех итераций достаточно для нахождения ε-оптимального управления нелинейной системой (6.3) с точностью 10^{-2}, шести итераций — с точностью 10^{-3}, восьми итераций — 10^{-4} и десяти итераций — с точностью 10^{-5}.

В табл.8 приведены вычисленные на каждой итерации значения моментов переключений ν_i^s, конечного момента t_k^s, нормы нелинейной в конечный момент t_k^s при переводе системы (6.3) из начального состояния $x_{\text{н}}(t_0) = (0,0,4,0)$ в начало координат $x_{\text{н}}(t_k^s) = 0$. Принято $\mu = 1$ и $\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = 0.125$. Последовательность значений ε-оптимального управления $\{-5; +5; -5; +5\}$.

Табл. 8

s	ν_1^s	ν_2^s	ν_3^s	t_k^s	$\Vert x_{\text{н}}(t_k^s)\Vert$
0	1.024893	1.926200	2.520141	2.738086	1.514483
1	1.202891	2.122747	2.856877	3.080347	1.024182
2	1.307812	2.162743	3.022147	3.260837	0.196084
3	1.267253	2.135661	2.966795	3.203131	0.075350
4	1.280142	2.145822	2.976980	3.215269	0.031714
5	1.276040	2.141175	2.973423	3.210972	0.014409
6	1.277064	2.143055	2.974244	3.212186	0.007313
7	1.276957	2.142351	2.974162	3.211966	0.003365
8	1.276865	2.142584	2.974100	3.211950	0.001506
9	1.276957	2.142523	2.974171	3.212010	0.000612
10	1.276900	2.142531	2.974126	3.211967	0.000247
11	1.276929	2.142535	2.974149	3.211991	0.000089
12	1.276916	2.142531	2.974139	3.211980	0.000032
13	1.276921	2.142533	2.974143	3.211985	0.000011
14	1.276919	2.142532	2.974141	3.211983	0.000004

В табл.9 и 10 показано, как влияет изменение величины воздействия $F(x,u)$ на: 1) норму $\Vert x_{\text{н}}(t_k^0)\Vert$ отклонения нелинейной системы от начала координат; 2) конечный момент t_k^N оптимального управления нелинейной системой; 3) число итераций (N), которое необходимо для вычисления оптимального управления с точностью 10^{-5}. Приведены также номера итераций (s^*) и номера моментов переключений (i), на которых происходит выход на ограничение.

Табл. 9

μ	$\Vert x_{\text{н}}(t_k^0)\Vert$	t_k^N	N	s_i^*
0.125	0.245771	2.819296	4	
0.25	0.491532	2.839696	5	
0.5	0.972792	2.886755	7	
0.75	1.418677	2.941902	8	
1	1.801072	3.005331	10	
1.25	2.091779	3.077372	16	1_3
1.5	2.275072	3.158886	28	1_3
1.75	2.350861	3.251161	62	1_3
1.9	2.354694	3.312725	521	$1_3, 2_4$

В табл.9 приведены результаты вычислений для различных значений параметра μ при переводе нелинейной системы (6.3) в начало координат из начальной точки $x_{\text{н}}(t_0) = (1,1,1,1)$, а в табл.10 — из начальной точки $x_{\text{н}}(t_0) = (0,0,4,0)$.

Табл. 10

μ	$\Vert x_{\text{н}}(t_k^0)\Vert$	t_k^N	N	s_i^*
0.125	0.225015	2.794199	4	
0.25	0.444775	2.851649	5	
0.5	0.846766	2.969371	6	
0.75	1.184942	3.089875	10	1_4
1	1.514482	3.211983	14	1_4
1.25	1.961278	3.335628	23	1_4
1.5	2.594586	3.462525	42	$1_4, 2_3$
1.75	3.333614	3.596504	206	$1_4, 2_3$
1.8	3.476959	3.624686	850	$1_4, 2_3$

В табл.11 для различных значений максимально допустимого шага (параметра γ) и двух случаев начальных условий приведено число итераций (N), которое необходимо для нахождения ε-оптимального управления с точностью 10^{-5}.

Табл. 11

$x_{\text{н}}(t_0) = (1,1,1,1)$																
μ	$\gamma = \frac{1}{2^{n+3}} =$ 1/128		$\gamma = \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{64}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{32}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{16}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{4}$		$\gamma = 0.375$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-3}} =$ 1/2	
	N	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*
0.25	**5**	1	**5**		**5**		**5**		**5**		**5**		**5**		**5**	
0.5	**9**	1–3	**7**	1,2	**6**	1	**7**		**7**		**7**		**7**		**7**	
0.75	**13**	1–6	**10**	1–3	**9**	1	**8**		**8**		**8**		**8**		**8**	
1	**17**	1–9	**14**	1–4	**13**	1,2	**12**	1	**10**		**10**		**10**		**10**	
1.25	**24**	1–12	**18**	1–6	**17**	1–3	**17**	1	**16**	1	**15**		**15**		**15**	
1.5	**35**	1–16	**28**	1–8	**18**	1–4	**26**	1,2	**28**	1	**27**		**27**		**27**	
1.75	**59**	1–20	**53**	1–10	**44**	1–5	**57**	1,2	**62**	1	**59**		**59**		**59**	
1.9	**275**	1–22	**282**	1–11	**485**	1–5	**419**	1–3	**521**	1,2	–		–		–	
$x_{\text{н}}(t_0) = (0,0,4,0)$																
μ	$\gamma = \frac{1}{2^{n+3}} =$ 1/128		$\gamma = \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{64}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{32}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{16}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{4}$		$\gamma = 0.375$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-3}} =$ 1/2	
	N	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*
0.25	**9**	1–5	**6**	1,2	**5**	1	**5**		**5**		**5**		**5**		**5**	
0.5	**15**	1–10	**10**	1–5	**8**	1,2	**7**	1	**6**		**6**		**6**		**6**	
0.75	**22**	1–15	**15**	1–7	**11**	1–4	**10**	1,2	**10**	1	**10**		**10**		**10**	
1	**30**	1–20	**20**	1–10	**16**	1–5	**14**	1,2	**14**	1	**15**	1	**15**		**15**	
1.25	**38**	1–25	**29**	1–12	**24**	1–6	**22**	1–3	**23**	1	**23**	1	**24**		**24**	
1.5	**57**	1–30	**43**	1–15	**39**	1–7	**39**	1–4	**42**	1,2	**43**	1	–		–	
1.75	**173**	1–35	**176**	1–17	**183**	1–9	**193**	1–4	**206**	1,2	**230**	1	–		–	
1.8	**528**	1–36	**558**	1–18	**634**	1–9	**706**	1–5	**850**	1,2	**1044**	1	–		–	

Приведены также номера итераций s^*, на которых происходит выход на ограничение.

В табл. 12 показано влияние на число итераций задания начальных значений моментов переключений и конечного момента. Приведены: начальные значения конечного момента (t_k^0) и моментов переключений ($\nu_i^0, i=\overline{1,3}$); норма ($||x_{\text{н}}(t_k^0||$) нелинейной системы (6.3) в конечный момент t_k^0, соответствующая управлению с этими моментами переключений; число итераций (N), которое необходимо для нахождения ε- оптимального управления с точностью 10^{-5}.

Табл. 12

$x_{\text{н}}(t_0)=(1,1,1,1)$						
λ	t_k^0	ν_1^0	ν_2^0	ν_3^0	$\|\|x(t_k^0)\|\|$	N
0.5	1.400546	0.487550	0.962651	1.280738	2.810990	18
0.6	1.680656	0.585061	1.155181	1.536885	2.411769	17
0.8	2.240874	0.780081	1.540242	2.049180	1.489036	14
1.0	2.801093	0.975101	1.925302	2.561475	1.801072	10
1.2	3.361311	1.170121	2.310363	3.073770	4.048621	12
1.4	3.921530	1.365141	2.695423	3.586065	6.334232	13
1.6	4.481748	1.560161	3.080483	4.098361	10.466371	17
1.8	5.041967	1.755182	3.465544	4.610656	21.545052	18
2.0	5.602185	1.950202	3.850604	5.122951	37.747329	23
2.2	6.162404	2.145222	4.235665	5.635246	45.297384	25
$x_{\text{н}}(t_0)=(0,0,4,0)$						
λ	t_k^0	ν_1^0	ν_2^0	ν_3^0	$\|\|x(t_k^0)\|\|$	N
0.7	1.916661	0.712426	1.348340	1.764099	3.090287	16
0.8	2.190469	0.819915	1.540960	2.016113	2.598710	15
1.0	2.738087	1.024894	1.926200	2.520141	1.514483	14
1.2	3.285704	1.229873	2.311440	3.024170	2.689813	15
1.4	3.833322	1.434851	2.696680	3.528198	5.122547	15
1.6	4.380939	1.639830	3.081920	4.032226	7.842297	15
1.8	4.928556	1.844809	3.467160	4.536254	14.481923	22
2.0	5.476174	2.049788	3.852400	5.040283	30.809315	22
2.2	6.023791	2.254767	4.237640	5.544311	46.208248	25
2.4	6.571408	2.459745	4.622880	6.048339	45.925172	29
2.5	6.845217	2.562235	4.815500	6.300353	39.710139	37

Из табл. 12 видно, что изменение в широком диапазоне начальных значений моментов переключений и конечного момента не нарушают сходимости алгоритма, но приводят к увеличению числа итераций, если начальные значения отличаются от значений для линейной системы. Выбор для квазилинейной системы в качестве начального приближения оптимального управления линейной системой приводит к уменьшению числа итераций.

Рассмотрим другой вид нелинейностей

$$\begin{aligned} &\dot{x}_{1\text{ н}} = x_{2\text{ н}}, \\ &\left.\begin{aligned}\dot{x}_{2\text{ н}} &= x_{3\text{ н}} + \\ \dot{x}_{3\text{ н}} &= x_{4\text{ н}} + \end{aligned}\right. \mu \begin{pmatrix} 0.1x^2_{2\text{ н}} + 0.16x^2_{1\text{ н}} - 0.002u^3, \\ 0.075x^2_{3\text{ н}}, \end{pmatrix} \\ &\dot{x}_{4\text{ н}} = -2.9684x_{1\text{ н}} - 5.84x_{2\text{ н}} - 6.33x_{3\text{ н}} - 3.4x_{4\text{ н}} + 4u, \quad |u| = 5. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Линейная часть системы (6.4) совпадает с (6.2).

В табл. 13 приведены вычисленные на каждой итерации значения моментов переключений ν_i^s, конечного момента t_k^s, нормы нелинейной системы в конечный момент t_k^s при переводе системы (6.4) из начального состояния $x_{\text{ н}}(t_0) = (1,1,1,1)$ в начало координат $x_{\text{ н}}(t_k^N) = 0$.

Табл. 13

s	ν_1^s	ν_2^s	ν_3^s	t_k^s	$\|x_{\text{ н}}(t_k^s)\|$
0	0.975101	1.925302	2.561475	2.801093	2.274862
1	1.315316	2.068933	2.760462	2.979203	0.919194
2	1.476863	2.307533	2.961495	3.223415	0.203866
3	1.490100	2.286738	2.967433	3.213544	0.063118
4	1.495171	2.289943	2.967182	3.212318	0.008748
5	1.496445	2.290444	2.967963	3.213087	0.002584
6	1.496752	2.290458	2.968039	3.213124	0.000625
7	1.496837	2.290486	2.968061	3.213138	0.000160
8	1.496859	2.290491	2.968069	3.213144	0.000042
9	1.496865	2.290493	2.968070	3.213145	0.000011
10	1.496866	2.290493	2.968071	3.213145	0.000003

Табл. 14

s	ν_1^s	ν_2^s	ν_3^s	t_k^s	$\|x_{\text{ н}}(t_k^s)\|$
0	1.024894	1.926200	2.520141	2.738087	1.477443
1	1.283542	2.123826	2.765161	2.988181	0.409645
2	1.363122	2.207590	2.846473	3.082435	0.148342
3	1.379977	2.206581	2.853282	3.086280	0.038221
4	1.385019	2.208138	2.854530	3.087158	0.010302
5	1.386384	2.208494	2.855019	3.087577	0.002889
6	1.386748	2.208559	2.855119	3.087649	0.000770
7	1.386848	2.208582	2.855147	3.087670	0.000209
8	1.386875	2.208588	2.855154	3.087676	0.000057
9	1.386882	2.208590	2.855157	3.087678	0.000015
10	1.386884	2.208590	2.855157	3.087678	0.000004

В табл. 13 приведены вычисленные на каждой итерации значения моментов переключений ν_i^s, конечного момента t_k^s, нормы нелинейной системы в конечный момент t_k^s при переводе системы (6.4) из начального состояния $x_{\text{н}}(t_0) = (1, 1, 1, 1)$ в начало координат $x_{\text{н}}(t_k^N) = 0$. В табл. 14 приведены результаты вычислений при переходе из другой начальной точки $x_{\text{н}}(t_0) = (0, 0, 4, 0)$. Принято $\mu = 1$ и $\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = 0.125$. Процесс вычислений происходит без выхода на ограничение. Последовательность значений ε-оптимального управления $\{-5; +5; -5; +5\}$. Из таблиц видно, что четырех итераций достаточно, чтобы найти ε-оптимальное управлений нелинейной системой с точностью 10^{-2}, шести итераций — с точностью 10^{-3}, восьми итераций — 10^{-4}, десяти итераций — с точностью 10^{-5}.

В табл. 15 и 16 показано, как влияет изменение величины воздействия $\mu F(x, u)$ на: 1) норму $\|x_{\text{н}}(t_k^0)\|$ отклонения в момент $t = t_k^0$ нелинейной системы от начала координат; 2) конечный момент t_k^N оптимального управления нелинейной системой; 3) число итераций (N), которое необходимо для вычисления оптимального управления с точностью 10^{-5}. Приведены номера итераций (s^*) и номера моментов переключений (i), на которых происходит выход на ограничение.

Табл. 15

μ	$\|x_{\text{н}}(t_k^0)\|$	t_k^N	N	s_i^*
0.125	0.215131	2.831469	4	
0.25	0.438522	2.865480	5	
0.5	0.929166	2.947577	7	
0.75	1.516063	3.057184	8	
1	2.274862	3.213145	10	
1.25	3.401517	3.457541	12	$1_1, 2_4$
1.5	5.617277	3.917529	13	$1_1, 2_1, 3_2, 4_2$
1.75	13.025709	5.742437	21	$1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1,$ $6_2, 7_3, 8_4, 9_4, 10_4$

Табл. 16

μ	$\|x_{\text{н}}(t_k^0)\|$	t_k^N	N	s_i^*
0.125	0.135102	2.767936	3	
0.25	0.278319	2.800321	5	
0.5	0.599054	2.874499	6	
0.75	0.986171	2.966587	8	
1	1.477443	3.087678	10	
1.25	2.150811	3.260396	11	1_1
1.5	3.221706	3.540283	13	$1_1, 2_4$
1.75	5.499020	4.131038	15	$1_1, 2_4, 3_2, 4_2$
1.9	8.864645	5.259159	19	$1_1, 2_1, 3_1, 4_1,$ $5_2, 6_4, 7_4, 8_4$

В табл. 15 приведены результаты вычислений для различных значений параметра μ при переводе нелинейной системы (6.4) в начало координат из начальной точки $x_{\text{н}}(t_0) = (1, 1, 1, 1)$, а в табл. 16 — из начальной точки $x_{\text{н}}(t_0) = (0, 0, 4, 0)$.

Из табл. 15 и 16 видно, что алгоритм работоспособен при значительном нелинейном эффекте. Число итераций (N), время перевода t_k^N и первоначальная норма $(||x_{\text{н}}(t_k^0)||)$ возрастают по мере увеличения нелинейного воздействия (μ).

Табл. 17

$x_{\text{н}}(t_0) = (1, 1, 1, 1)$																
μ	$\gamma = \frac{1}{2^{n+3}} =$ 1/128		$\gamma = \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{64}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{32}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{16}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{4}$		$\gamma = 0.375$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-3}} =$ 1/2	
	N	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*
0.25	**7**	1–3	**6**	1	**5**	1	**5**		**5**		**5**		**5**		**5**	
0.5	**13**	1–8	**9**	1–3	**7**	1	**7**		**7**		**7**		**7**		**7**	
0.75	**20**	1–14	**13**	1–6	**10**	1–3	**9**	1	**8**		**8**		**8**		**8**	
1	**29**	1–22	**18**	1–10	**13**	1–5	**11**	1,2	**10**		**10**		**10**		**10**	
1.25	**41**	1–33	**25**	1–16	**17**	1–8	**13**	1–4	**12**	1,2	**11**		**11**		**11**	
1.5	**64**	1–56	**37**	1–28	**23**	1–14	**17**	1–7	**13**	1–4	–		–		**14**	2
1.75	**144**	1–135	**78**	1–68	**45**	1–34	**28**	1–18	**21**	1–10	–		–			
$x_{\text{н}}(t_0) = (0, 0, 4, 0)$																
μ	$\gamma = \frac{1}{2^{n+3}} =$ 1/128		$\gamma = \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{64}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{32}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{16}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8}$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{4}$		$\gamma = 0.375$		$\gamma = \frac{1}{2^{n-3}} =$ 1/2	
	N	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*	**N**	s^*
0.25	**6**	1,2	**5**		**5**		**5**		**5**		**5**		**5**		**5**	
0.5	**11**	1–6	**8**	1–3	**7**	1	**6**		**6**		**6**		**6**		**6**	
0.75	**16**	1–10	**12**	1–5	**9**	1,2	**8**	1	**8**		**8**		**8**		**8**	
1	**23**	1–15	**15**	1–7	**12**	1–3	**10**	1	**10**		**10**		**10**		**10**	
1.25	**32**	1–24	**21**	1–11	**15**	1–5	**13**	1,2	**11**	1	**11**		**11**		**11**	
1.5	**46**	1–37	**28**	1–18	**19**	1–9	**15**	1–4	**13**	1,2	**12**	2	**12**		**12**	
1.75	**74**	1–64	**42**	1–32	**26**	1–16	**19**	1–8	**15**	1–4	**26**	2–12	–		**14**	2
1.9	**122**	1–112	**67**	1–56	**39**	1–28	**26**	1–14	**19**	1–8	–		–		–	

В табл. 17 для различных значений максимально допустимого шага (параметра γ) и двух случаев начальных условий приведено число итераций (N), которое необходимо для нахождения ε-оптимального управления с точностью 10^{-5}. Приведены также номера итераций (s^*), на которых происходит выход на ограничение. Из табл. 17 видно, что и в случае нелинейной системы (6.4) для фиксированного $\mu \leq 1$ число итераций остается практически неизменным при изменении величины максимального шага (параметра γ) в широких пределах $\frac{1}{2^{n+2}} \leq \gamma \leq \frac{1}{2^{n-3}}$. Некритичность к величине максимального шага упрощает выбор параметра γ.

В табл. 18 показано влияние на число итераций задания начальных значений моментов переключений и конечного момента. Приведены: начальные значения конечного момента (t_k^0) и моментов переключений ($\nu_i^0, i = \overline{1,3}$); норма ($||x_{\text{н}}(t_k^0||$) нелинейной системы (6.4) в конечный момент t_k^0, соответствующая управлению с этими моментами переключений; число итераций (N), которое необходимо для нахождения ε- оптимального управления с точностью 10^{-5}.

Из табл. 18 видно, что изменение в широком диапазоне начальных значений моментов переключений и конечного момента не нарушают сходимости алгоритма, но приводят к увеличению числа итераций, если начальные значения отличаются от значений для линейной системы. Выбор для квазилинейной системы в качестве начального приближения оптимального управления линейной системой приводит к уменьшению числа итераций.

Табл. 18

$x_{\text{н}}(t_0) = (1,1,1,1)$						
λ	t_k^0	ν_1^0	ν_2^0	ν_3^0	$\|\|x(t_k^0)\|\|$	N
0.2	0.560218	0.195020	0.385060	0.512295	4.004317	24
0.4	1.120437	0.390040	0.770121	1.024590	3.329191	17
0.6	1.680656	0.585061	1.155181	1.536885	2.979331	14
0.8	2.240874	0.780081	1.540242	2.049180	2.462823	11
1.0	2.801093	0.975101	1.925302	2.561475	2.274862	10
1.2	3.361311	1.170121	2.310363	3.073770	3.101426	9
1.4	3.921530	1.365141	2.695423	3.586065	5.125620	10
1.6	4.481748	1.560161	3.080483	4.098361	7.857931	12
1.8	5.041967	1.755182	3.465544	4.610656	15.611930	14
$x_{\text{н}}(t_0) = (0,0,4,0)$						
λ	t_k^0	ν_1^0	ν_2^0	ν_3^0	$\|\|x(t_k^0)\|\|$	N
0.2	0.547617	0.204979	0.385240	0.504028	6.864583	23
0.4	1.095235	0.409958	0.770480	1.008057	4.150657	17
0.6	1.642852	0.614936	1.155720	1.512085	2.751683	14
0.8	2.190469	0.819915	1.540960	2.016113	2.098410	11
1.0	2.738087	1.024894	1.926200	2.520141	1.477443	10
1.2	3.285704	1.229873	2.311440	3.024170	1.941458	9
1.4	3.833322	1.434851	2.696680	3.528198	3.823630	10
1.6	4.380939	1.639830	3.081920	4.032226	6.914886	12
1.8	4.928556	1.844809	3.467160	4.536254	13.889927	14
2.0	5.476174	2.049788	3.852400	5.040283	1203.1147	17

Следует отметить, что при произвольном задании конечного момента и моментов переключений последние могут случайно оказаться ближе к искомым оптимальным значениям. Естественно, что число необходимых итераций в этом случае будет меньше. Для квазилинейной системы (6.4) при переводе ее из точки $x_{\text{н}}(t_0) = (1,1,1,1)$ в начало координат $x_{\text{н}}(t_k) = 0$ конечный момент и моменты переключения оптимального управления следующие: t_k=3.213145; ν_1=1.496866; ν_2=2.290493; ν_3=2.968071. Из табл. 18 нетрудно видеть, что при λ=1.2 начальное значение конечного момента и моментов переключений ближе к этим искомым оптимальным значениям. Поэтому число итераций меньше. Аналогично и для другого начального условия $x_{\text{н}}(t_0) = (0,0,4,0)$. Оптимальное управление имеет следуюшие значения: t_k=3.087678; ν_1=1.386884; ν_2=2.208590; ν_3=2.855157. При λ=1.2 начальные значения ближе к оптимальным и поэтому число итераций меньше.

Рассмотрим для системы (6.4) вычислительную процедуру нахождения оптимального по быстродействию управления в классе кусочно-непрерывных функций. Полагаем b_2=0.002; b_4=4. Без ограничений на управление функция Понтрягина $H\Big(\psi(t), x(t), u(t)) = (\psi(t), \dfrac{dx}{dt}\Big)$ достигает максимума, если одновременно выполняются условия:

$$1)\ \frac{\partial H}{\partial u} = -3\mu b_2\psi_2 u^2 + b_4\psi_4; \quad 2)\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -6\mu b_2\psi_2 u < 0.$$

С учетом ограничения на управление $|u| \le M$ необходимо проверить значения функции Понтрягина на концах при $u_{1,2} = \pm M$. Функция $H(\psi(t), x(t), u(t))$ достигает максимума по $u \in U$ одновременно с максимумом функции $\Delta H(\psi(t), x(t), u(t)) = -\mu b_2\psi_2 u^3 + b_4\psi_4 u$. В результате приходим к следующей вычислительной процедуре.

Если $\sqrt{\left|\dfrac{b_4\psi_4(t)}{3\mu b_2\psi_2(t)}\right|} \ge M$, то вычисляем $\Delta H(\psi, x, u)$ для двух значений $u_{1,2} = \pm M$. Оптимальным управлением $u^0(t)$ является то значение u_i, $i = \overline{1,2}$, для которого функция $\Delta H(\psi, x, u)$ максимальна.

Если $\sqrt{\left|\dfrac{b_4\psi_4(t)}{3\mu b_2\psi_2(t)}\right|} \le M$, то вычисляем $\Delta H(\psi, x, u)$ для четырех значений $u_{1,2} = \pm M$; $u_{3,4} = \pm\sqrt{\left|\dfrac{b_4\psi_4(t)}{3\mu b_2\psi_2(t)}\right|}$. Оптимальным управлением $u^0(t)$ является то значение $u_i, i = \overline{1,4}$, для которого функция $\Delta H(\psi, x, u)$ максимальна.

В табл. 19 приведены для различных значений μ времена перевода системы (6.4) из точки $x(t_0) = (1,1,1,1)$ в начало координат в случае кусочно-непрерывного ($t_k^{\text{н}}$) и кусочно-постоянного ($t_k^{\text{р}}$) управлений.

Табл. 19

μ	t_k^p	$t_k^{\text{н}}$	$\frac{t_k^p - t_k^{\text{н}}}{t_k} \cdot 100\%$
0.25	2.865479	2.865367	0.0039 %
0.5	2.947576	2.947116	0.0156 %
0.75	3.057183	3.056092	0.0357 %

Из табл. 19 видно, что времена перевода для кусочно-непрерывного управления меньше и различие растет при увеличении μ, т.е. при увеличении нелинейного воздействия. Однако это различие во времени перевода очень мало и вряд ли оправдано значительным увеличением объема вычислений, вызванным необходимостью уменьшения шага интегрирования.

Заключение

Задача нахождения оптимального управления квазилинейной системой сводится к последовательности решений задач Коши и систем линейных алгебраических уравнений. Алгоритм учитывает специфику решаемой задачи — релейность управления и квазилинейность математического описания управляемого процесса. Релейность управления позволяет перейти от нелинейной системы по x и u к нелинейной системе с линейно выделенным управлением. Квазилинейность описания управляемого процесса позволяет использовать приближенные линейные соотношения. Число необходимых итераций возрастает при увеличении требуемой точности решения и величины нелинейного воздействия. При изменении максимально допустимого шага (параметра γ) в широких пределах число итераций остается практически неизменным, что существенно упрощает выбор шага. Некритичность к выбору параметра γ является важной особенностью рассматриваемого алгоритма. Изменеие в широких пределах начальных значений моментов переключений и конечного момента времени не нарушает сходимости алгоритма. Выбор в качестве начального приближения для квазилинейной системы оптимального управления линейной системой приводит к уменьшению числа итераций. Алгоритм вычисления оптимального управления сохраняет работоспособность даже при значительном нелинейном воздействии. Модификация алгоритма позволяет уменьшить число итераций в случае малых нелинейных воздействий, однако требует выполнения условия непрерывной дифференцируемости нелинейных функций.

Список литературы

[1] Neustadt L.W. Synthesizing time optimal control systems// J. Math. Analys. and Applic. 1960. V. 1. № 3–4. P. 484–493.

[2] Eaton J.H. An iterative solution to time-optimal control// J. Math. Analys. and Applic. 1962. V. 5. № 2. P. 329–344.

[3] Кирин Н.Е. К решению общей задачи линейного быстродействия// Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. № 1. С. 16–22.

[4] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Построение последовательных приближений для некоторых задач оптимального управления// Автоматика и телемеханика. 1966. Т. 27. № 2. С. 5–17.

[5] Пшеничный Б.Н., Соболенко Л.А. Ускоренный метод решения задачи линейного быстродействия// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 6. С. 1343–1351.

[6] Дубовицкий А.Я., Рубцов В.А. Линейные быстродействия// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 5. С. 937–949.

[7] Гиндес В.Б. Один метод последовательных приближений для решения линейных задач оптимального управления// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1970. Т. 10. № 1. С. 216–223.

[8] Васильев О.В., Тятюшкин А.И. К численному решению задач линейного быстродействия// Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та. 1973. Вып.2. С. 57–69.

[9] Белолипецкий А.А. Численный метод решения линейной задачи оптимального управления сведением ее к задаче Коши// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1977. Т. 17. № 6. С. 1380–1386.

[10] Любушин А.А. О применении модификации метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1982. Т. 22. № 1. С. 30–35.

[11] Дюркович Е. Численный метод решения линейных задач быстродействия с оценкой точности// Доклады АН СССР. 1982. Т. 265. № 4. С. 793–797.

[12] Киселев Ю.Н., Орлов М.В. Численные алгоритмы линейных быстродействий // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31. № 12. С. 1763–1771.

[13] Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н., Орлов М.В. Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина // Труды математического института им. В.А.Стеклова РАН. 1995. Т. 211. С. 3-31.

[14] Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.

[15] Александров В.М. Численный метод решения задачи линейного быстродействия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. № 6. С. 918–931.

[16] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.