ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2006
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Оптимальное управление

Асимптотически точные решения задачи об оптимальном управлении линейной пластиной при наличии внешнего воздействия.

С.А.Вакуленко ИПМаш РАН, В.О.Большой пр.61,199178,Санкт-Петербург.
e-mail: abramian@mech.ipme.ru

А.А.Абрамян

ИПМаш РАН, В.О.Большой пр.61,199178,Санкт-Петербург.,
e-mail: abramian@math.ipme.ru

1 Введение

Методы оптимальной теории управления опираются на знание математической модели объекта и входящих в эту модель параметров. Оптимальный закон управления обычно существенно зависит от параметров задачи. Абстрактная теория управления была разработана В.А.Якубовичем [1-4] и развита А.С.Матвеевым в работах [5,6]. В этой теории условие оптимальности выведено для задач весьма общего вида, сформулированных на языке функционального анализа. Использование абстрактной теории, как пишут ее авторы " целесообразно потому, что в настоящее время , по- видимому, не существует единой "хорошей" системы уравнений, которая описывала бы большую часть встречающихся в приложениях математических моделей конкретных систем, и вряд ли такая единая конкретная система уравнений вообще возможна". Применение теории оптимального управления для решения задач оптимизации управления распределенными системами рассматривалось в работах [7,8]. Теория построения асимптотических решений оптимального управления явилась содержанием монографии Акуленко [9]. Тем не менее решение вопроса о получении аналитического решения в явном виде для случая линейной системы при внешнем воздействии привело авторов работы [6] к выводу, что оптимальное управление (оптимальный регулятор) в рассмотренной задаче физически не реализуем, так как требует знания будущих воздействий. В настоящей статье рассмотрены частные случаи вышеупомянутой системы, которые позволяют получить асимптотически точные решения свободные от вышеупомянутого ограничения для случая оптимального управления упругой пластиной при действии на нее сосредоточенных толкателей. Данная задача возникает в адаптивной оптике при управлении деформируемыми зеркалами с целью коррекции искажений волнового фронта вызванных атмосферной турбулентностью.

1.1.Общая постановка задачи.

Для нахождения оптимального управления упругой пластиной при действии на нее сосредоточенных воздействий со стороны толкателей имеем следующее динамическое уравнение в матричной форме [10]:

$$\frac{dX}{dt} = AX + Bu \tag{1}$$

$$t \in [0, t_1]$$

Рассмотрим случай отсутствия шума ($dv = 0$) и полной информации о состоянии объекта.Задача состоит в нахождении величины u, которая дает минимум целевому функционалу на интервале $[0, t_1]$:

$$\Phi(x(\bullet)) = y^{tr} Q_0 y(t_1) + \int_0^{t_1} \left[y^{tr} Q_1 y(t) + u^{tr} Q_2 u \right] dt \tag{2}$$

где: Q_0, Q_1, Q_2 - заданные матрицы,определяющие функционал управления.

$$Q_0 = 0$$

$$y = X - \bar{X}$$

$\bar{X}(t)$ – данные коэффициенты,определяющие заданный прогиб $\bar{W}$. Q_2 –

определяет цену управления и матрица Q_2 имеет размер $L \times L$,

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q_1 – есть матрица размером $N \times N$. Если бы ставилась задача получения соответствия только самого прогиба при заданной аберрации, то необходимо было бы выполнение условия: $W \approx \bar{W}$. В случае, когда ставится задача получения соответствия еще и производных от прогиба, имеем:

$$W \approx \bar{W}$$

$$\dot{W} \approx \dot{\bar{W}}$$

и тогда : $Q_1 = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\tilde{Q}}_1 \end{pmatrix}$.

Где: $\tilde{Q}_1, \tilde{\tilde{Q}}_1$- обе матрицы размером $N \times N$ и заданы (по нашему выбору). Возьмем $Q_{0=0}$ и будем искать u такое ,что:

$$\begin{aligned} &\Phi(x,u) = \int\limits_0^{t_1} \left[\left(X - \bar{X}\right) Q_1 \left(X - \bar{X}\right) + uQ_2u\right] dt = \min \\ &X_t = AX + Bu, \\ &X\left.\right|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь A, B, Q_1, Q_2- заданы и ищем $u(t)$, на интервале $t \in (0, t_1)$, $u \in \Re^M$. В общем случае, как известно, не решена задача о нахождении обратной связи, поэтому зачастую не удается представить решение задачи в виде функции состояния x:

$$u = F(x) \quad .$$

Однако, в рассматриваемом в этой главе случае задача может быть полностью решена благодаря своей линейно-квадратичной структуре. Для построения решения воспользуемся методом, предложенным в [6] в рамках абстрактной теории оптимизации.Для использования подхода, предложенного в [6], приведем уравнения нашей задачи к виду, используемому в этой работе. Положим $Z = X - \bar{X}$, тогда имеем $Z = X + \bar{X}$ и получим:

$$\begin{aligned} &\tfrac{dZ}{dt} = AZ + Bu + g(t) \\ &g(t) = A\bar{X} - \tfrac{d\bar{X}}{dt} \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, получим задачу:

$$\begin{aligned} &\tfrac{dZ}{dt} = AZ + Bu + g(t) \\ &Z(0) = Z_0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\Phi = \int\limits_0^T [(Q_1 Z, Z) + (Q_2 u, u)]dt \to \min \tag{6}$$

Ищем u, дающее минимум функционалу Φ. Следуя [6], рассмотрим для этого два матричных уравнения:

$$\begin{cases} Bu = \tfrac{dU}{dt} \\ U(0) = I \end{cases} \tag{7}$$

Первое из этих уравнений - эволюционное, где матрица U размером N×N. Далее рассмотрим уравнение Риккати:

$$\begin{aligned} &\tfrac{dR}{dt} + RA + AR + Q_1 = RBQ_2^{-1}(RB)^{tr} \\ &R(T) = 0; \end{aligned} \tag{8}$$

если $Q_2 = a_0 I$, то правая часть есть $a_0^{-1} RB\tilde{B}R$. Если B такие $b_0 I$,то это есть просто $a_0^{-1} b_0 R^2$. Строим вектор S с помощью соотношения:

$$S(t) = U^{tr}(t) \int\limits_t^T U(\tau) R(\tau) g(\tau) d\tau \quad (1.9)$$

В этом соотношении $R(\tau)g(\tau)$- вектор размерности N. Определяем $\tilde{B}$по формулам:

$$\begin{aligned} &\tilde{B} = A + Br(t) \\ &r(t) = -(R(t)B)Q_2^{-1} \end{aligned} \tag{9}$$

$\tilde{B}$ – матрица размером N×N, r – размером N×M. Определяем ρ по формуле:

$$\rho = -Q_2^{-1} B^{tr} S$$

Тогда оптимальное управление есть:

$$u(t) = r^{tr}(t) X(t) + \rho(t) \qquad (10)$$

Как отмечено в [6] при наличии внешнего воздействия $g(t)$ оптимальный регулятор физически не реализуем, так как он зависит от будущих значений внешнего воздействия, т.е. от будущих значений переменной X (t) (или в конечном счете от -$\bar{W}(x, y, t)$),что приводит к сложности его дальнейшего практического использования. Этот недостаток связан не с методом решения, а с постановкой задачи. Однако, с помощью этих формул можно численно оценить минимальное значение цены управления, а также приведенное решение может быть использовано при решении стохастического варианта задачи с указанным информационным ограничением.

1.2.Асимптотически точные решения. Рассмотрим случаи, когда возможно построение приближенного решения, дающего возможность найти обратную связь в явном виде.

Случай1.

Будем строить управление (приближенное) $u^0(t)$, минимизирующее следующее выражение:

$$\left\| A\bar{X} - \frac{d\bar{X}}{dt} - Bu^0 \right\|^2 \to \min$$

то есть ищем $u^0(t)$ такое, что:

$$\mathrm{K}(u^0) = \sum_i (g_i(t) + \sum_k B_{ik} u_k^0)^2 \to \min$$

$$g = A\bar{X} - \tfrac{d\bar{X}}{dt}$$

Это стандартная задача квадратичной аппроксимации, решение которой находится из системы:

$$\sum_{R'} T_{KK'} u_{K'}^0 = b_K$$

где:

$$T_{KK'} = \sum_{i=1}^{N} B_{ik}B_{ik'}$$

$$b_K = \sum_{i=1}^{N} g_i B_{iK}$$

Предположим , что $u^0(t)$- найдено . Строим теперь управление в виде:

$$u = u^0 + \tilde{u}$$

$\tilde{u}(t)-$ неизвестная поправка к управлению $u^0(t)$. Здесь член $A\bar{X} - \dot{\bar{X}} + Bu^0$ заменен на ноль, что является погрешностью данной постановки. Тогда получаем приближенное управление для $\tilde{u}(t)$, полагая, что

$$\left\| A\bar{X} - \dot{\bar{X}} + Bu^0 \right\| -$$

малая величина.Это ведет к формуле:

$$\tilde{u} = r(t)X;$$

$$r(t) = -RBQ_2^{-1}$$

R- решение уравнение Риккати на промежутке (0,T):

$$\tfrac{dR}{dt} + AR + RA + Q_1 = -RBQ_2^{-1}BR$$

$$R(T) = 0$$

Здесь матрица A содержит параметры пластины. Рассмотрим еще два возможных метода решения предыдущей задачи для других видов поведения подынтегральных функций.
Случай2.
Предположим,что $U(\tau)R(\tau)$из (9) экспоненциально убывают при $\tau \to \infty$, а функция g(t) есть медленная функция времени. Этот случай, когда внешнее воздействие более медленное, чем внутренние характерные процессы, определяющие диссипацию в самой системе. Тогда S(t) может быть приближенно оценена как :

$$S(t) \cong U^{tr}(t) \left(\int_t^T U(\tau)R(\tau)d\tau \right) g(t) \tag{11}$$

величины U, R - не зависят от входного воздействия. Теперь она не зависит от будущих значений времени. Здесь в (12) величина $g(t)$, берется в момент воздействия. Таким образом, окончательно предполагается, что выполняется условие:

$$g(\varepsilon t) \Rightarrow S_{aproxim} + 0(\varepsilon)$$

Рассмотрим теперь вопрос, убывают ли величины U и R. Выкинем из уравнения для R квадратичный член и рассмотрим уравнение:

$$\frac{dR}{dt} + AR + RA = -Q_1$$

Вряд ли можно рассчитывать на убывание указанных выше величин U и R при $t \to \infty$, однако, так как время окончания наблюдений при использовании пластины телескопа не фиксируется, необходимо быть уверенным в том, что система имеет хорошее долговременное поведение. Предположим, что все матричные коэффициенты постоянны (не зависят от времени), тогда можно ожидать, что при подходящих условиях решение уравнения Риккати будет приближаться к стационарному. Соответствующие условия зависят от асимптотических свойств уравнения Риккати. Рассмотрим вначале задачу о детерминированном регуляторе:

минимизировать $\int\limits_0^T (X'(t)QX(t) + u'(t)Ru(t))dt + X'(T)FX(T)$ (13) при условии $\dot{X} = AX(t) + Bu(t)$, $X(0) = X_0$ На первый взгляд кажется , что для детерминированного регулятора необходима управляемость пары (A,B). Действительно, если пара (A,B) не управляемая, то согласно теореме Калмана о канонической структуре, можно так выбрать систему координат, что в ней уравнение (10) приобретает вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}^1 \\ \dot{X}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

и компонента X^1не регулируется входным сигналом. Однако, остается еще возможность саморегуляции процесса X^1, которая действительно осуществляется, если матрица A_{11} устойчива (все ее собственные значения имеют отрицательные действительные части). Пару (A,B) , обладающую этим свойством , будем называть стабилизирующей. В соответствии с теоремами, доказанными в [11] , введенную терминологию оправдывает следующий результат. Предложение. Пара (A,B) является стабилизирующей тогда и только тогда, когда существует (m×n) – матрица K такая , что матрица A+BK устойчива. Отсюда следует, что для стабилизирующей системы существует по крайней мере одно такое управление в виде линейной обратной связи $u = KX$, что соответствующая система (13) устойчива. Таким образом, при решении рассмотренной ранее в этом параграфе задачи скорее возможна стабилизация $R(t)$,то есть:

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = R^*$$

где: $AR^* + R^*A = -Q_1 - R^*BQ_2^{-1}(R^*B)^{tr}$ В самом деле, существуют теоремы [11] ,которые показывают ,что это верно если спектр A лежит в левой полуплоскости.

Рассмотрим вопрос о применимости этих результатов к нашей задаче. Однако спектр A - это собственные частоты колебаний, а они чисто мнимые. Если нет диссипации или демпфирования, то$AX = \lambda X$, $\lambda-$ чисто мнимые: $\omega^2 = \lambda$- круговая частота. Рассмотрим уравнение для U. Это уравнение (3) с матрицей $\tilde{B}$ из (9). Можно показать, что спектр B также не лежит в левой полуплоскости, для разных управлений $r(t)$ он либо выходит в положительную полуплоскость, либо чисто мнимый. Следовательно, нельзя рассчитывать на экспоненциальное убывание.Чтобы справиться с возникшей проблемой, предлагается ввести в уравнение задачи дополнительные члены, приводящие к диссипации, вида $\alpha\dot{W}$:

$$W_{tt} + \alpha W_t + \Delta\Delta W = f$$

(пластина с диссипацией). Все реальные объекты, в том числе пластина, имеют диссипацию или демпфирование. Тогда A приобретает вид:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha I & I \\ -M & 0 \end{pmatrix}$$

$$ReSpec < -\delta < 0.$$

При этом можно считать M диагональной. Спектр смещается в левую полуплоскость на величину α:

$$X_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2}$$

Рассмотрим $\tilde{B}$. Она имеет вид:

$$\tilde{B} = A + Br(t)$$

Согласно общей теории [11], если пара (A,B) стабилизируема, то R(t) стремится к $R(\infty) = R^*$:

$$AR^* + R^*A = -Q_1 + R^*BQ_2^{-1}BR^*$$

Если Q_2 “велико“ (например, диагональная матрица с большими по величине элементами), то:

$$R^* \approx A^{-1}Q_1$$

Тогда: $\tilde{B} = A + B(RB)Q_2^{-1}$. Величина B(RB) -мала и следовательно $distance(SpecA, Spec\tilde{B})$ тоже мала, а тогда $Spec\tilde{B}$ лежит в левой полуплоскости и $\tilde{B} \to \tilde{B}^*$ при $t \to \infty$. Следовательно, решение(2) экспоненциально убывает. Аналогичный результат можно получить для малых B. В этом случае имеет место приближенное решение, определенное с помощью (9).

$$u(t) = U^{tr}(\int_t^T U(\tau)R(\tau)d\tau)g(t)$$

Для затухающего поведения U (τ) и R(τ) $\to$ R_∞, можно применять это выражение для $T \to \infty$. Отметим, что скорость приближения R к пределу R_∞:

$$|R(t) - R_\infty| < C\exp(-t/T)$$

где параметр T описывает время релаксации, соответствующее демпфированию. Если входящий сигнал имеет характерное время изменения T_{inp}. Тогда условие применимости метода имеет вид:

$$T_{inp} << T.$$

Случай 3.

Рассмотрим теперь случай когда g(t) быстро осциллирует, то есть $\bar{X}(\tau)(\bar{W}(\tau))$ высокочастотная вибрация). Для решения задачи будем использовать результаты, полученные для осциллирующих интегралов в [12]. Пусть

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(x)\exp(i\lambda\tilde{S}(x))dx \quad (14)$$

где: λ - большой параметр. Для практически важных приложений подынтегральная функция должна быть вещественной, и можно предположить, что:

$$f(t) = \varphi(t)\cos\lambda\tilde{S}(t)$$

Тогда :

$$\int_t^T \varphi(\tau)\cos\lambda\tilde{S}(\tau)d\tau = Re\int_t^T \varphi\exp(i\lambda\tilde{S}(\tau))d\tau$$

Следуя общей теории, изложенной в [12] не экспоненциально малый вклад в интеграл , который не есть величина порядка O (λ^{-n}) для любого n, возникает в следующих двух случаях:

1. вклад от концевых точек a и b;
2. вклад от точек стационарной фазы, где $\tilde{S}'(x) = 0$, если таковые имеются.

Вклад от концевой точки x=a равен:

$$F_1 \cong -\varphi(a) \frac{1}{i\lambda \tilde{S}'(a)} \exp(i\lambda \tilde{S}(a)) \tag{12}$$

Вклад от точки стационарной фазы есть O $(\lambda^{-0.5})$. Задача состоит в том, чтобы найти ситуации, когда главный вклад дает(12). Для этого снова рассмотрим устройство(например телескоп), имеющее диссипацию, что всегда имеет место на практике. Тогда интеграл имеет вид:

$$I(t) = \int\limits_t^T U^{tr}(\tau) R(\tau) g(\tau) d\tau \tag{13}$$

Предположим, что $U^{tr}(\tau)$ экспоненциально убывает, $R(\tau) \to R^*$, принимая во внимание тот факт, что g(t) – быстро осциллирующая функция вида:

$$g(t) = \varphi Re \exp(i\lambda S(\tau))$$

где $\varphi-$ гладкая функция. Тогда, можно ожидать , что если точки стационарной фазы такие, что S'=0 или отсутствуют, или достаточно удалены от t*, корня уравнения S'=0, тогда интеграл имеет вид:

$$I(t) \approx -U^{tr}(t) R(t) \varphi(t) Re \frac{\exp(i\lambda S(t))}{i\lambda S'(t)} \tag{14}$$

Чтобы вычислить эту величину, необходимо выразить неизвестное выражение S' через входной сигнал g(t). Заметим, что:

$$\tilde{S} = \frac{1}{i\lambda} \ln \frac{g}{\varphi}$$

$$Re \frac{\exp(i\lambda \tilde{S})}{i\lambda \tilde{S}'} = \frac{\sin \lambda \tilde{S}}{\lambda \tilde{S}'}$$

$$\lambda \tilde{S}' \cong \frac{\tilde{g}'}{\sin \lambda \tilde{S}}$$

$$(\lambda\tilde{S}')^{-1} \cong \frac{\sin\lambda\tilde{S}}{\tilde{g}'}$$

$$\tilde{g} = \cos\lambda S$$

Итак имеем:

$$Re\frac{\exp(i\lambda\tilde{S})}{i\lambda S'} \cong \frac{1-\tilde{g}^2}{\tilde{g}'}$$

Таким образом, алгоритм решения задачи следующий. Разлагаем $g(t)$ в амплитуду φ и фазу S:

$$g(t) = \varphi(t)\cos\lambda\tilde{S} = \varphi(t)\tilde{g}$$

где: $|\tilde{g}| \leq 1$. Окончательно, управление имеет вид:

$$u(t) = r^{tr}(t)X + \rho(t) \tag{15}$$

$$\rho = -Q_2^{-1}B^{tr}S$$

$$S \cong -U^{tr}R(t)\tfrac{1-\tilde{g}^2}{\tilde{g}'}\varphi(\tau)$$

$$g = \varphi\cos\lambda S$$

Заключение. В результате проведенного исследования были найдены аналитические асимптотически точные решения задачи об оптимальном управлении для: -случая внешнего воздействия, которое изменяется медленнее, чем демпфируются процессы внутри системы; -случая быстро осциллирующего внешнего воздействия. Полученные решения обладают следующими преимуществами перед другими возможными, но приближенными решениями поставленной задачи. Управление происходит в режиме реального времени в виде обратной связи без временных погрешностей, необходимых при использовании других регуляторов. Раз вычисленные значения для подынтегральных выражений-матриц, входящих в решение задачи в виде обратной связи , остаются одними и теми же для рассчитываемого объекта (пластины). Это делает возможным заранее просчитать возможные варианты для случая неизвестного заранее внешнего воздействия.

Список литературы

[1] Якубович В.А. К абстрактной теории оптимального управления1, Сибирский мат.журн. 1977. т.18, 3.

[2] Якубович В.А. К абстрактной теории оптимального управления 2, Сибирский мат.журн. 1978. т. 19, 2.

[3] Якубович В.А. К абстрактной теории оптимального управления 3, Сибирский мат.журн. 1979. т. 20, 4.

[4] Якубович В.А. К абстрактной теории оптимального управления 1, Сибирский мат.журн. 1979. т. 20, 5.

[5] Матвеев А.С., Якубович В.А. Абстрактная теория оптимального управления. Спб., Издательство СпГУ, 1994.

[6] Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. Спб., Издательство СпГУ, 2003.

[7] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.Наука. 1968.

[8] Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления.М.Наука. 1973.

[9] Акуленко Л.Д., Асимптотические методы оптимального управления. М.Наука. 1987

[10] A.A.Abramian "Optimal control of elastic mirror" Proc. 15 European seminar "Mathematics for Industry", Delft, 2004. pp 23-29.

[11] Дэвис М.Х.А. Линейное оцениваний и стохастическое управление. М.Наука ,1984.

[12] Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды.М.Наука,1987.