

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2023

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Общая теория управления

## ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПО ОСТАНОВКЕ ДВУЗВЕННОГО МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОМ ПОДВЕСЕ

Галяев А.А.<sup>1,\*</sup>, Потапов А.П.<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова,

\*[galaev@ipu.ru](mailto:galaev@ipu.ru)

\*\*[potapov@ipu.ru](mailto:potapov@ipu.ru)

**Аннотация.** В работе рассмотрена задача быстрогодействия по успокоению двухзвенного маятника на подвижном подвесе. Данная нелинейная система с недостатком и ограничением на ресурс управления линеаризована в окрестности устойчивого положения равновесия. Для линеаризованной системы применен принцип максимума Понтрягина и получен закон оптимального управления, для определения параметров которого на основе нахождения ортогонального подпространства разработан алгоритм построения оптимального по быстродействию управления системой. В среде MATLAB проведено численное моделирование и сравнение динамики линейной и нелинейной систем при полученном законе управления.

**Ключевые слова:** принцип максимума Понтрягина, задача быстрогодействия, двухзвенный маятник.

## Введение

Разработки в области робототехники являются одними из наиболее приоритетных в современной науке. Это вызвано с все более глубоким внедрением автоматических механизмов в различные сферы жизни и техники. В связи

развитием технологий их применения возникает множество различных задач управления такими системами для эффективного позиционирования в рабочей среде и манипулирования объектами с требуемой точностью.

Особый интерес с математической точки зрения представляют манипуляторы, в силу наличия многих степеней свободы. На сегодня одними из самых распространенных и изученных методов являются методы, основанные на эвристическом поиске (напр., [1]). Однако, несмотря на значительный прогресс в этой области, применение таких методов для управления многозвенными манипуляторами достаточно затратно с точки зрения вычислений, что было показано в [2]. В связи с этим авторами настоящей работы предлагается развить аналитические методы решения задач управления системами малой размерности с недостатком ресурса управления. Известно, что с некоторой точностью для описания многозвенных манипуляторов можно использовать модели  $n$ -звенного маятника, находящегося на подвижной тележке (напр. [3]), а применение такой модели в робототехнике можно найти в [4]. Для позиционирования всей сложной нелинейной динамической системы необходимо решить задачу управления подвижной тележкой. В связи с этим зачастую применяются различные техники и асимптотические методы, такие как SDRE-техника примененная в [5] и аппроксимация Паде из [6], или их комбинации, рассмотренные в [7], [8]. Постановки задач отличаются по размерности динамической системы ([9], [10], [11]), зависящей от количества звеньев манипулятора, по критерию качества требуемого решения, отвечающего за точность и/или быстродействие ([9], [12]), а также по размерности и ограничениям, накладываемым на управляющий вектор в зависимости от количества приводов.

Одной из распространенных и хорошо исследованных задач является задача гашения колебаний груза, которые приводят к неравномерности движения подвеса, износу различных частей механизма. Такая задача гашения колебаний была рассмотрена в [9], где в качестве модели автооператора авторами был выбран однозвенный двухмассовый маятник. В рамках этой модели качестве критерия оптимальности выбран интегральный критерий, отражающий величину отклонения подвески с грузом от вертикали и величину динамической составляющей приводного усилия, который был минимизирован методом динамического программирования Беллмана, построена структурная схема системы управления и найдены параметры оптимального регулятора.

Если же говорить о временном критерии оптимальности, то можно вы-

делить работу [12]. В ней был исследован однозвенный маятник на колесе, и синтезировано оптимальное по быстродействию управление для стабилизации такого маятника в неустойчивом положении равновесия. Асимптотическая устойчивость такой системы была исследована в работе [13]. Следующим шагом в исследовании маятников на подвижном подвесе стал переход к большему числу звеньев. Для этого в работе [10] был рассмотрен  $n$ -звенный маятник в линейном приближении, найдены особые управления для квадратичного критерия. Однако точного решения для общего случая найти не удалось.

Очевидно также, что движения, как манипулятора, так и других механизмов, происходят в трехмерном пространстве. В связи с этим имеет смысл исследовать пространственные движения маятника. Работы в этом направлении были проделаны в [11], [14], [15]. В частности, в [11] построено ограниченное по модулю управление в форме обратной связи, приводящее маятник из окрестности произвольного положения равновесия в это положение равновесия за конечное время. Оптимальное управление в работе не исследовалось.

К базовым исследованиям в области колебательных систем можно отнести [16], [17], а также работы в области исследования осцилляторов. Одним из примеров последних является [18], к основным результатам которой можно отнести доказанное свойство изохронности рассмотренной системы.

В общем случае задача быстродействия, поставленная для  $n$ -звенного маятника на подвижном подвесе, достаточно сложна, и ее решение до сих пор не найдено. Поэтому, как логическое продолжение приведенных выше исследований, в настоящей работе будет рассмотрен двухзвенный маятник на подвижной тележке и решена задача быстродействия для линеаризованной модели данного маятника.

## 1 Описание динамики двухзвенного маятника на тележке

Рассмотрим двухзвенный маятник с подвижной точкой подвеса, изображенный на рис.1. Пусть масса точки подвеса (тележки)  $M$ , ее координата  $x$ , масса груза на конце каждого звена —  $m$ , длина каждого звена  $l$ . Обозначим угол отклонения  $i$ -го звена от вертикали за  $\varphi_i$ , а координаты груза на его конце за  $x_i, y_i$ , как показано на рис.1.

Тогда в силу геометрических связей между евклидовыми и угловыми ко-

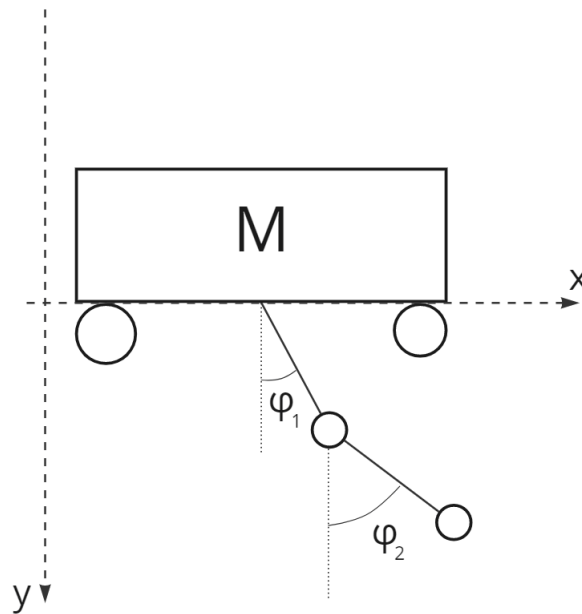


Рис. 1: Двухзвенный маятник на тележке

ординатами системы справедливы равенства

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x + l \sin \varphi_1, \\
 x_2 &= x + l \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2, \\
 y_1 &= l \cos \varphi_1, \\
 y_2 &= l(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2),
 \end{aligned} \tag{1}$$

Выпишем потенциальную ( $\Pi$ ) и кинетическую ( $K$ ) энергии данной системы:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= -mgl \cos \varphi_1 - mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \\
 K &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{M}{2} \dot{x}^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}_2^2 + ml \dot{\varphi}_1 \left( l(\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_2 + 2\dot{x} \cos \varphi_1 \right) + \\
 &\quad + \dot{x} \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 lm + \frac{\dot{x}^2 (M + 2m)}{2},
 \end{aligned}$$

Проводя необходимые операции дифференцирования, а также совершив замену  $s = x/l$ , получаем уравнения Эйлера-Лагранжа, описывающие движение приведенной системы в виде

$$2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2 \cos \varphi_1 \cdot \ddot{s} + (\dot{\varphi}_2)^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\frac{g}{l} \sin \varphi_1 = 0, \quad (2)$$

$$\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \ddot{\varphi}_2 + \ddot{s} \cos \varphi_2 + (\dot{\varphi}_1)^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{g}{l} \sin \varphi_2 = 0, \quad (3)$$

$$2\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \ddot{s} \frac{M + 2m}{m} - 2(\dot{\varphi}_1)^2 \sin \varphi_1 - (\dot{\varphi}_2)^2 \sin \varphi_2 - \frac{u}{ml} = 0. \quad (4)$$

Система (2)-(4) будет исследоваться далее.

## 2 Канонические уравнения движения 4-го порядка

Выразим  $\ddot{s}$  из уравнения (4), поскольку только в этом уравнении коэффициент при  $\ddot{s}$  является постоянным. Тогда

$$\ddot{s} = -\frac{1}{\mu} \left\{ 2 \cos \varphi_1 (\ddot{\varphi}_1) + \cos \varphi_2 (\ddot{\varphi}_2) - 2 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 + \gamma \right\}, \quad \text{где}$$

$$\mu = \frac{M + 2m}{m}, \quad \gamma = -\frac{u}{ml}.$$

Затем, подставим полученное выражение в уравнения (2)-(3), и, введя переменные  $\omega_i = \dot{\varphi}_i$ , получим систему дифференциальных уравнений

$$J_3 \dot{\Omega} + J_4 \Omega^{\text{sq}} - \frac{\gamma}{\mu} C + S = 0, \quad \text{где} \quad (5)$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{4 \cos^2 \varphi_1}{\mu} & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\mu} \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\mu} & 1 - \frac{\cos^2 \varphi_2}{\mu} \end{pmatrix},$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} \frac{4 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\mu} & \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\mu} \\ -\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\mu} & \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\mu} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2\alpha \sin \varphi_1 \\ \alpha \sin \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{\text{sq}} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем уравнение (5) к каноническому виду:

$$\dot{\Omega} = -J_3^{-1} \left[ J_4 \Omega^{\text{sq}} - \frac{\gamma}{\mu} C + S \right]. \quad (6)$$

Но для данного преобразования сначала требуется доказать существование обратной матрицы  $J_3^{-1}$ , что показано в следующей лемме.

**Лемма 1.**  $J_3^{-1}$  существует и  $\det J_3 > 0$  при любом  $\mu > 2$ .

*Доказательство.* Для доказательства леммы достаточно найти экстремум определителя как функции многих переменных. Полное и математически строгое доказательство леммы приведено в приложении.  $\square$

При этом в уравнениях (6) углы связаны с угловыми скоростями соотношениями

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2. \end{cases} \quad (7)$$

## 2.1 Постановка задачи оптимального управления

Будем считать, что начальные и терминальные условия заданы в виде

$$\varphi_i(0) = \varphi_i^0, \quad \omega_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\varphi_i(T) = 0, \quad \omega_i(T) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Это означает, что в начальный момент времени маятники выведены из положения равновесия.

Требуется найти закон управления  $\gamma(t)$  ( $|\gamma| < \varepsilon$ ), переводящий систему (6), (7) из положения (8) в нулевое положение (9) и минимизирующий функционал

$$J[\gamma] = \int_0^T dt \rightarrow \min_{\gamma}$$

## 2.2 ЯВНЫЙ ВИД СИСТЕМЫ (6)

Рассмотрим подробнее уравнения (6). Раскроем скобки и упростим уравнения. Учтем, что

$$J_3^{-1} = \frac{1}{\det J_3} \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \varphi_2 - \mu}{\mu} & \frac{2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\mu}{\mu} \\ \frac{2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\mu}{\mu} & -\frac{2(2 \cos^2 \varphi_1 - \mu)}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Тогда произведения  $J_3^{-1}$  на  $J_4$ ,  $C$  и  $S$  при помощи пакета символьных вычислений Maple можно преобразовать до нижеизложенных.

$$\begin{aligned} J_3^{-1} J_4 &= \frac{1}{2\mu \cdot \det J_3} \times \\ &\times \begin{pmatrix} (\mu - 2) \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2) + 2 \sin(2\varphi_1) & (2\mu - 3) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -4(\mu - 2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) & -(\mu - 2) \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2\mu \det J_3} \cdot A, \end{aligned}$$

$$J_3^{-1} C = -\frac{1}{\det J_3} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 2 \cos \varphi_1 \\ 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \varphi_1 - 2 \cos \varphi_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\det J_3} \cdot B,$$

$$\begin{aligned} J_3^{-1} S &= \frac{\alpha}{2\mu \det J_3} \begin{pmatrix} 3\mu \sin \varphi_1 + \mu \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) - 2 \sin \varphi_1 - 2 \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) \\ 2(\mu - 2)(\sin \varphi_2 - \sin(2\varphi_1 - \varphi_2)) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\alpha}{2\mu \det J_3} \cdot D. \end{aligned}$$

Тогда систему уравнений движения (6), (7) можно записать в следующем векторно-матричном виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = \omega_i, \\ \dot{\Omega} = -\frac{1}{2\mu \det J_3} \left\{ A\Omega^{\text{sq}} + 2\gamma B + \alpha D \right\}, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

### 2.3 Локальная управляемость системы

Проверим локальную управляемость системы (10) в положении равновесия. Для этого воспользуемся принципом линеаризации и критерием управляемости Калмана. Данный способ исследования управляемости описан в, например, [19], где приводится соответствующая теорема.

Справедлива лемма.

**Лемма 2.** Система (10) локально управляема в точке  $\varphi_i = 0, \omega_i = 0, i = 1, 2$ .

*Доказательство.* Для доказательства данной леммы достаточно следовать теореме о линеаризации. Полное и математически строгое доказательство леммы приведено в приложении.  $\square$

### 2.4 Исследование линеаризованной системы

Решение задачи оптимального управления для системы (10) с недостатком ресурса управления найти не удалось. Поэтому предлагается исследовать линеаризованную систему и оценить ошибку получаемого решения задачи быстродействия.

Так как система (10) локально управляема в точке  $(0, 0, 0, 0)$ , рассмотрим ее линейное приближение в окрестности этой точки и решим соответствующую задачу оптимального управления.

Разложение по Тейлору функции нескольких переменных в окрестности произвольной точки точки  $M_0$  с координатами  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  имеет вид (до 1-го порядка):

$$f(x) = f(M_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{M_0} (x_1 - x_1^0) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{M_0} (x_n - x_n^0).$$

По этой формуле получаем линейные уравнения, приближенно описывающие динамику системы (10) в окрестности исследуемой точки, в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \\ \dot{\omega}_1 = -2\alpha \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \varphi_1 + \alpha \varphi_2 + \frac{\gamma}{\mu - 2}, \\ \dot{\omega}_2 = 2\alpha \varphi_1 - 2\alpha \varphi_2. \end{cases}$$



Введем дополнительные обозначения

$$a = 2\alpha \frac{\mu - 1}{\mu - 2} > 0, \quad \hat{\gamma} = \frac{\gamma}{\mu - 2}. \quad (11)$$

В обозначениях (11) уравнения движения (10) записываются как

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \\ \dot{\omega}_1 = -a\varphi_1 + \alpha\varphi_2 + \hat{\gamma}, \\ \dot{\omega}_2 = 2\alpha\varphi_1 - 2\alpha\varphi_2. \end{cases} \quad (12)$$

Теперь задача оптимального управления для системы (12) формулируется следующим образом.

Требуется найти закон управления  $\hat{\gamma}(t)$  ( $|\hat{\gamma}| < \hat{\varepsilon}$ ), переводящий систему (12) из положения (8) в нулевое положение (9) и минимизирующий функционал

$$J[\hat{\gamma}] = \int_0^T dt \rightarrow \min_{\hat{\gamma}}. \quad (13)$$

#### 2.4.1 Принцип максимума Понтрягина

Для решения задачи оптимального управления (12), (13), (8), (9) применим принцип максимума Понтрягина. ([20]).

Функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \lambda_1(-a\varphi_1 + \alpha\varphi_2 + \hat{\gamma}) + \lambda_2(2\alpha\varphi_1 - 2\alpha\varphi_2).$$

Из нее получаем систему дифференциальных уравнений на сопряженные переменные

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = a\lambda_1 - 2\alpha\lambda_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\alpha\lambda_1 + 2\alpha\lambda_2, \\ \dot{\lambda}_1 = -\psi_1, \\ \dot{\lambda}_2 = -\psi_2. \end{cases} \quad (14)$$

Условие максимума дает закон управления вида

$$\hat{\gamma} = \hat{\varepsilon} \cdot \text{sign} \{ \lambda_1 \}.$$

Условия трансверсальности могут быть любыми, поэтому проверять их не нужно.

Для системы уравнений (14) справедлива следующая лемма

**Лемма 3.** *Общее решение системы (14) записывается в виде*

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = W_1 X_1 e^{\beta_1 t} + W_2 X_2 e^{\beta_2 t} + W_3 X_3 e^{\beta_3 t} + W_4 X_4 e^{\beta_4 t},$$

где

$$\beta_{1,2,3,4} = \pm \frac{i}{2} \sqrt{2a + 4\alpha \pm 2\sqrt{(a - 2\alpha)^2 + 8\alpha^2}},$$

$$X_i = \left\{ \frac{\beta_i^2 + 2\alpha}{\alpha} \beta_i, \beta_i, \frac{\beta_i^2 + 2\alpha}{\alpha}, 1 \right\}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

*Доказательство.* Доказательство леммы представляет собой решение системы линейных дифференциальных уравнений и приведено в приложении.  $\square$

Введем обозначения

$$w_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2a + 4\alpha + 2\sqrt{(a - 2\alpha)^2 + 8\alpha^2}}, \quad (15)$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2a + 4\alpha - 2\sqrt{(a - 2\alpha)^2 + 8\alpha^2}}. \quad (16)$$

Нетрудно заметить, что собственные числа  $\beta_i$  связаны с введенными обозначениями  $w_j$  соотношениями

$$\beta_1 = iw_1, \quad \beta_2 = -iw_1, \quad \beta_3 = iw_2, \quad \beta_4 = -iw_2.$$

Применим формулу Эйлера. Так как  $\text{Re}\{\beta_i\} = 0$ , то верны следующие преобразования.

$$\begin{aligned}
 X_1 e^{\beta_1 t} &= (\cos(w_1 t) + i \sin(w_1 t)) X_1 = \\
 &= \begin{pmatrix} i \beta_1 \frac{\beta_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_1 t) \\ i \beta_1 \sin(w_1 t) \\ \frac{\beta_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_1 t) \\ \cos(w_1 t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \frac{\beta_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_1 t) \\ \beta_1 \cos(w_1 t) \\ i \frac{\beta_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_1 t) \\ i \sin(w_1 t) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -w_1 \frac{-w_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_1 t) \\ -w_1 \sin(w_1 t) \\ \frac{-w_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_1 t) \\ \cos(w_1 t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \frac{-w_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_1 t) \\ w_1 \cos(w_1 t) \\ \frac{-w_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_1 t) \\ \sin(w_1 t) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_2 e^{\beta_2 t} &= X_2 e^{-\beta_1 t} = (\cos(w_1 t) - i \sin(w_1 t)) X_2 = \\
 &= \begin{pmatrix} -i \beta_2 \frac{\beta_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_1 t) \\ -i \beta_2 \sin(w_1 t) \\ \frac{\beta_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_1 t) \\ \cos(w_1 t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_2 \frac{\beta_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_1 t) \\ \beta_2 \cos(w_1 t) \\ -i \frac{\beta_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_2 t) \\ -i \sin(w_1 t) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -w_1 \frac{-w_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_1 t) \\ -w_1 \sin(w_1 t) \\ \frac{-w_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_1 t) \\ \cos(w_1 t) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} w_1 \frac{-w_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_1 t) \\ w_1 \cos(w_1 t) \\ \frac{-w_1^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_1 t) \\ \sin(w_1 t) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

Аналогично преобразовывая другие вектора, получим, что

$$\begin{aligned}
 X_3 e^{\beta_3 t} &= \begin{pmatrix} -w_2 \frac{-w_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_2 t) \\ -w_2 \sin(w_2 t) \\ \frac{-w_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_2 t) \\ \cos(w_2 t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_2 \frac{-w_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_2 t) \\ w_2 \cos(w_2 t) \\ \frac{-w_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_2 t) \\ \sin(w_2 t) \end{pmatrix}, \\
 X_4 e^{\beta_4 t} &= \begin{pmatrix} -w_2 \frac{-w_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_2 t) \\ -w_2 \sin(w_2 t) \\ \frac{-w_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_2 t) \\ \cos(w_2 t) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} w_2 \frac{-w_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \cos(w_2 t) \\ w_2 \cos(w_2 t) \\ \frac{-w_2^2 + 2\alpha}{\alpha} \sin(w_2 t) \\ \sin(w_2 t) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Исходя из вида общего решения сопряженной системы, принципа максимума и последних четырех равенств, можно сделать вывод, что оптимальное управление  $\hat{\gamma}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= \hat{\varepsilon} \cdot \text{sign} \{ \lambda_1(t) \} = \\ &= \hat{\varepsilon} \cdot \text{sign} \{ W_1 \sin(w_1 t) + W_2 \cos(w_1 t) + W_3 \sin(w_2 t) + W_4 \cos(w_2 t) \}. \end{aligned} \quad (17)$$

**Замечание 1.** Для управления вида (17) особый режим управления отсутствует.

#### 2.4.2 Решение системы уравнений движения

Следующим шагом решим систему неоднородных уравнений (12).

Известно, что для решения неоднородной системы вида  $\dot{y} = Ay(t) + f(t)$ , удовлетворяющего начальным условиям  $y(t_0) = y^0$ , имеет место формула Коши

$$y(t) = W(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t W(t, s)f(s)ds,$$

где  $W(x, y)$  — матрица Коши однородной системы.

Подробное решение системы (12) приведено в приложении. После всех преобразований оно записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{w_1^2 - w_2^2} \left\{ (c_2 \cos w_1 t + c_1 \cos w_2 t) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t [d_1 \sin(w_1 t - w_1 s) - d_2 \sin(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \frac{1}{\alpha(w_1^2 - w_2^2)} \left\{ \left( w_2 d_2 c_2 \cos(w_1 t) + w_1 d_1 c_1 \cos(w_2 t) \right) + \right. \\ &\quad \left. + d_1 d_2 \int_0^t [w_2 \sin(w_1 t - w_1 s) - w_1 \sin(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\omega_1(t) = -\frac{1}{w_1^2 - w_2^2} \left\{ (w_1 c_2 \sin(w_1 t) + w_2 c_1 \sin(w_2 t)) - \int_0^t [w_1 d_1 \cos(w_1 t - w_1 s) - w_2 d_2 \cos(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds \right\}, \quad (20)$$

$$\omega_2(t) = -\frac{w_1 w_2}{\alpha(w_1^2 - w_2^2)} \left\{ \left( d_2 c_2 \sin(w_1 t) + d_1 c_1 \sin(w_2 t) \right) - d_1 d_2 \int_0^t [\cos(w_1 t - w_1 s) - \cos(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds \right\}. \quad (21)$$

При это введены обозначения

$$\begin{aligned} c_1 &= -(-w_1^2 + a)\varphi_1^0 + \alpha\varphi_2^0, \quad c_2 = (-w_2^2 + a)\varphi_1^0 - \alpha\varphi_2^0, \\ d_1 &= \frac{-w_2^2 + a}{w_1}, \quad d_2 = \frac{-w_1^2 + a}{w_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Постоянные  $w_1, w_2, c_1, c_2, d_1, d_2, a$  определяются через соотношения (15), (22), (11), исходя из параметров маятника  $\mu, \alpha$  и начальных условий  $\varphi_1^0, \varphi_2^0$ .

### 2.4.3 Исследование закона оптимального управления

Закон управления, аналогичный (17), был подробно исследован в [21], [22]. Воспользуемся методом, описанным в этих исследованиях, и получим закон оптимального управления в классе 3-х переключений.

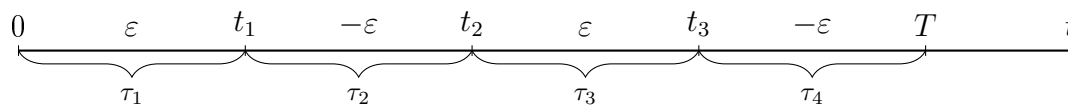


Рис. 2: Связь переменных  $\tau$  и  $t$ , начальное управление  $\varepsilon$ .

Обозначим времена моментов переключения за  $t_1, t_2, t_3$ , а длительности промежутков постоянства управления за  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  (см. рис. 2). Тогда, так как в момент переключения управление равно нулю, верна система

$$\begin{cases} W_1 \sin(w_1 t_1) + W_2 \cos(w_1 t_1) + W_3 \sin(w_2 t_1) + W_4 \cos(w_2 t_1) = 0, \\ W_1 \sin(w_1 t_2) + W_2 \cos(w_1 t_2) + W_3 \sin(w_2 t_2) + W_4 \cos(w_2 t_2) = 0, \\ W_1 \sin(w_1 t_3) + W_2 \cos(w_1 t_3) + W_3 \sin(w_2 t_3) + W_4 \cos(w_2 t_3) = 0. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в векторно-матричном виде

$$WQ = 0, \quad \text{где} \tag{23}$$

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \sin(w_1 t_1) & \sin(w_1 t_2) & \sin(w_1 t_3) \\ \cos(w_1 t_1) & \cos(w_1 t_2) & \cos(w_1 t_3) \\ \sin(w_2 t_1) & \sin(w_2 t_2) & \sin(w_2 t_3) \\ \cos(w_2 t_1) & \cos(w_2 t_2) & \cos(w_2 t_3) \end{pmatrix}.$$

В работе [22] было показано, что выполнение равенства (23) является необходимым условием экстремальности.

Положим, что в начальный момент времени управление (17) равняется  $+\hat{\varepsilon}$ . Тогда, учитывая терминальные условия (9), можно свести систему уравнений (18)–(21) к системе алгебраических уравнений относительно длительностей промежутков постоянства управления. Для этого нужно взять интегралы в уравнениях (18)–(21) на промежутках постоянства управления (аналогичные преобразования были выполнены в [21]). Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} c_2 \cos(w_1 T) + c_1 \cos(w_2 T) + \hat{\varepsilon} \left( 2 \left[ \frac{d_1}{w_1} \cos(w_1(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{d_2}{w_2} \cos(w_2(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - \frac{d_1}{w_1} \cos(w_1(\tau_3 + \tau_4)) + \frac{d_2}{w_2} \cos(w_2(\tau_3 + \tau_4)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d_1}{w_1} \cos(w_1 \tau_4) - \frac{d_2}{w_2} \cos(w_2 \tau_4) \right] - \frac{d_1}{w_1} \cos(w_1 T) + \right. \\ \left. + \frac{d_2}{w_2} \cos(w_2 T) - \frac{d_1}{w_1} + \frac{d_2}{w_2} \right) = 0, \tag{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left( w_2 d_2 c_2 \cos(w_1 T) + w_1 d_1 c_1 \cos(w_2 T) \right) + \\ & \quad + \frac{d_1 d_2 \hat{\varepsilon}}{\alpha} \left( 2 \left[ \frac{w_2}{w_1} \cos(w_1(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - \frac{w_1}{w_2} \cos(w_2(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{w_2}{w_1} \cos(w_1(\tau_3 + \tau_4)) + \frac{w_1}{w_2} \cos(w_2(\tau_3 + \tau_4)) + \frac{w_2}{w_1} \cos(w_1 \tau_4) - \frac{w_1}{w_2} \cos(w_2 \tau_4) \right] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{w_2}{w_1} \cos(w_1 T) + \frac{w_1}{w_2} \cos(w_2 T) - \frac{w_2}{w_1} + \frac{w_1}{w_2} \right) = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - (w_1 c_2 \sin(w_1 T) + w_2 c_1 \sin(w_2 T)) + \\ & \quad + \hat{\varepsilon} \left( d_1 \sin(w_1 T) - d_2 \sin(w_2 T) + 2 \left[ d_2 \sin(w_2(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - d_1 \sin(w_1(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - d_2 \sin(w_2(\tau_3 + \tau_4)) + d_1 \sin(w_1(\tau_3 + \tau_4)) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + d_2 \sin(w_2 \tau_4) - d_1 \sin(w_1 \tau_4) \right] \right) = 0, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{w_1 w_2}{\alpha} \left( d_2 c_2 \sin(w_1 T) + d_1 c_1 \sin(w_2 T) \right) + \frac{w_1 w_2 d_1 d_2}{\alpha} \times \hat{\varepsilon} \left( \frac{1}{w_1} \sin\{w_1 T\} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{w_2} \sin\{w_2 T\} + 2 \left[ \frac{1}{w_2} \sin(w_2(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - \frac{1}{w_1} \sin(w_1(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{w_2} \sin(w_2(\tau_3 + \tau_4)) + \frac{1}{w_1} \sin(w_1(\tau_3 + \tau_4)) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{w_2} \sin(w_2 \tau_4) - \frac{1}{w_1} \sin(w_1 \tau_4) \right] \right) = 0. \quad (27) \end{aligned}$$

В системе (24)–(27)  $T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$ .

Таким образом, чтобы решить задачу оптимального управления, нужно:

1. Решить систему алгебраических уравнений (24)–(27), найдя промежутки постоянства управления;
2. Найти времена моментов переключения управления;
3. Решить систему (23), тем самым найдя функцию  $\lambda_1(t)$ ;
4. Выбрать из корней уравнений (24)–(27) те, для которых  $\lambda_1(t)$  удовлетворяет выбранному классу переключений и начальным условиям, а также минимизирует время;

#### 2.4.4 Численное моделирование

Для демонстрации работы алгоритма проведем математическое моделирование динамики линеаризованной системы. Выберем следующие параметры модели:  $\mu = 5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\hat{\varepsilon} = 1$ .

Выберем следующие начальные условия:  $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = -0.5$ ,  $\omega_1^0 = \omega_2^0 = 0$ ,  $\hat{\gamma}(0) = +\hat{\varepsilon}$ .

Тогда остальные постоянные, входящие в уравнения динамики, будут приблизительно равны значениям, указанным ниже

$$\begin{aligned} a &= 2.667, \\ w_1 &= 1.9458, \quad w_2 = 0.9383, \\ c_1 &= -1.0598, \quad c_2 = -0.3931, \\ d_1 &= 0.9180, \quad d_2 = -1.1933. \end{aligned}$$

Промежутки постоянства управления и моменты переключения, удовлетворяющие выбранному начальному условию  $\hat{\gamma}(0)$ , находятся из решения системы (24)-(27), принадлежат классу трех переключений и приблизительно равны

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0.3233, & t_1 &= 0.3233, \\ \tau_2 &= 1.2935, & t_2 &= 1.6168, \\ \tau_3 &= 0.5474, & t_3 &= 2.1461, \\ \tau_4 &= 0.7541. & T &= 2.9183. \end{aligned}$$

Используя полученные значения, находим матрицу  $Q$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5884 & -0.0044 & -0.8770 \\ 0.8086 & -1.000 & -0.4806 \\ 0.2987 & 0.9986 & 0.8962 \\ 0.9544 & 0.0538 & -0.4437 \end{pmatrix}.$$

Далее, восстановим из уравнений (23) закон оптимального управления. Коэффициенты  $W_i$  будут равны

$$W^T = \begin{pmatrix} -0.3795 \\ -0.2145 \\ -0.2429 \\ 0.4917 \end{pmatrix}.$$



Тогда можем построить функцию  $\lambda_1(t)$  и оптимальное управление  $\hat{\gamma}(t)$ , графики которых приведены соответственно на рис. 3,4.

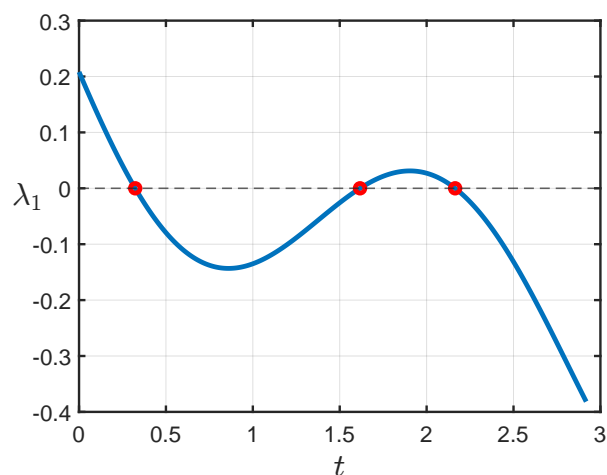


Рис. 3: Зависимость  $\lambda_1(t)$  для выбранных значений параметров

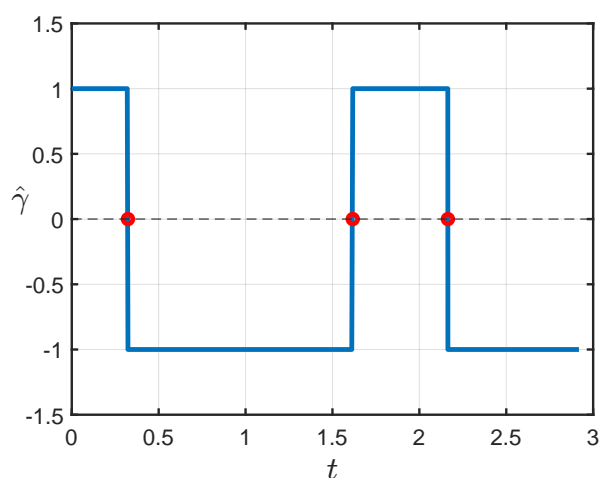


Рис. 4: Зависимость  $\hat{\gamma}(t)$  для выбранных значений параметров

Проводя численное моделирование движения линейной системы, можно убедиться, что система приходит в нулевое положение по углам и угловым скоростям, как показано на рис. 5,6.

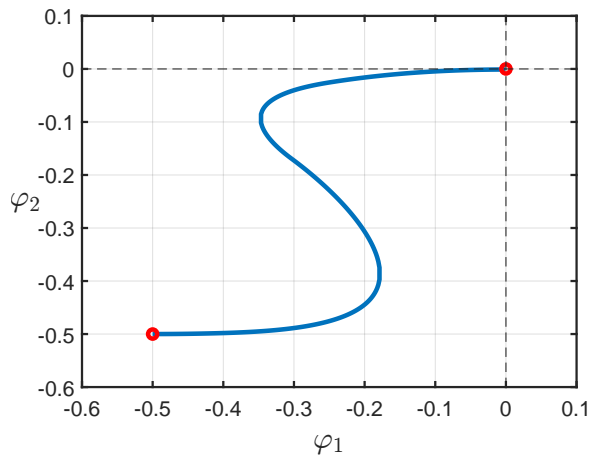


Рис. 5: Траектория движения системы в фазовой плоскости  $\varphi_1, \varphi_2$ .

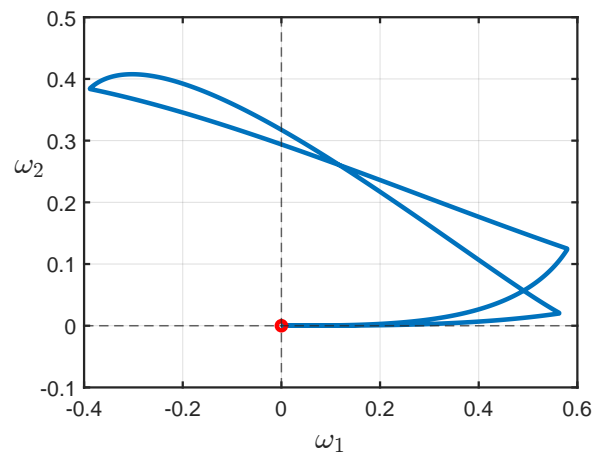


Рис. 6: Траектория движения системы в фазовой плоскости  $\omega_1, \omega_2$ .

### 3 Сравнение динамики линейной и нелинейной системы

Рассчитаем ошибку фазовых координат, возникающую вследствие линеаризации системы. Для этого смоделируем движение нелинейной системы при законе управления, полученном для линейной системы. На рис. 7, 8 приведены траектории движения нелинейной системы в фазовой плоскости углов и угловых скоростей соответственно при значениях параметров

$$\mu = 5, \alpha = 1, \varepsilon = 1,$$

$$\varphi_i^0 = -0.1, \omega_i^0 = 0, \hat{\gamma}(0) = +\varepsilon.$$

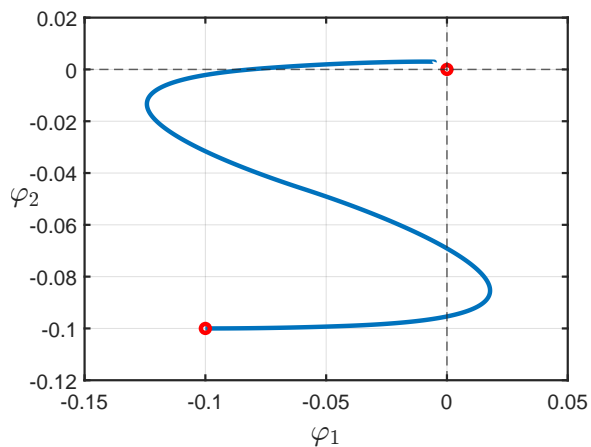


Рис. 7: Траектория движения линейной системы в фазовой плоскости углов.

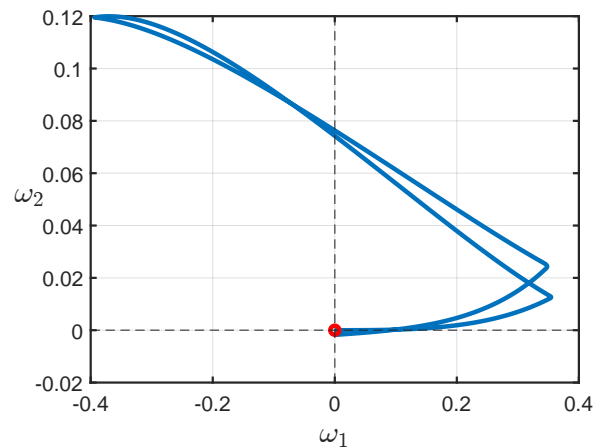


Рис. 8: Траектория движения нелинейной системы в фазовой плоскости углов

Проведем моделирование для нескольких начальных условий и составим таблицу погрешностей линейной системы (во всех случаях  $\omega_i^0 = 0$ ). Погрешности будем считать по формулам

$$\Delta\varphi = \sqrt{(\varphi_1(T))^2 + (\varphi_2(T))^2}, \quad \Delta\omega = \sqrt{(\omega_1(T))^2 + (\omega_2(T))^2},$$

$$\Delta = \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\omega)^2}.$$

| $\varphi_1^0$ | $\varphi_2^0$ | Ошибка по углам $\Delta\varphi$ | Ошибка по скоростям $\Delta\omega$ | Суммарная ошибка $\Delta$ |
|---------------|---------------|---------------------------------|------------------------------------|---------------------------|
| -0.1          | -0.1          | 0.0059                          | 0.0020                             | 0.0062                    |
| -0.2          | -0.2          | 0.0130                          | 0.0179                             | 0.0222                    |
| -0.3          | -0.3          | 0.0151                          | 0.0339                             | 0.0371                    |
| -0.4          | -0.4          | 0.0098                          | 0.0339                             | 0.0353                    |
| -0.5          | -0.5          | 0.0078                          | 0.0239                             | 0.0251                    |
| -0.6          | -0.6          | 0.0328                          | 0.0647                             | 0.0725                    |
| -0.7          | -0.7          | 0.0680                          | 0.1165                             | 0.1349                    |
| -0.8          | -0.8          | 0.1212                          | 0.1485                             | 0.1917                    |
| -0.9          | -0.9          | 0.1731                          | 0.1156                             | 0.2082                    |

Таблица 1: Погрешности линейного метода при различных начальных условиях

Как видно из таблицы 1 и рисунков 7, 8 при  $-0.1 \leq \varphi_i^0 < 0$  суммарная ошибка на порядок меньше начальных условий. Это позволяет пренебречь ошибкой в данном случае и считать ее малой, т.е. считать, что при  $\varphi_i^0$  лежащих в указанном полуинтервале нелинейная система также приходит в терминальную точку  $(0, 0)$  при управлении, полученном для линейной системы.

Ошибка резко возрастает в двух точках: при  $\varphi_i^0 = -0.2$  и при  $\varphi_i^0 = -0.7$ . Это связано с тем, что линеаризация проводилась в окрестности точки  $(0, 0)$ , поэтому возрастание погрешности линеаризации при удалении от этой точки естественно.

В случае большой ошибки фазовых координат в терминальной точке можно построить новый закон управления по предложенному алгоритму, считая начальными условиями точку, в которую пришла нелинейная система. Полученный таким образом закон управления уже не будет оптимальным, однако, позволит решить задачу управления нелинейной системой.

## 4 Заключение

В работе была рассмотрена задача быстрогодействия по остановке двухзвенного физического маятника на подвижном подвесе. В результате задача была формализована в виде 4-х мерной задачи быстрогодействия с условиями на углы и угловые скорости маятника. В такой формулировке была доказана локальная управляемость системы в устойчивом положении равновесия. Далее система была линеаризована в окрестности данного положения. Для линейной системы удалось решить задачу быстрогодействия, и предложить алгоритм поиска оптимального по быстроддействию управления в классе трех переключений. Для полученного алгоритма проведено численное моделирование.

Дальнейшая работа будет направлена на изучение других классов переключения, а также на исследование и разработку методов решения задачи быстрогодействия в нелинейном случае, в том числе при увеличении количества звеньев маятника.

## 5 Приложение

### 5.1 Доказательство леммы 1

*Доказательство.* Для доказательства леммы посчитаем определитель матрицы  $J_3^{-1}$ , возьмем производные и, пользуясь необходимым условием экстремума, найдем минимум определителя как функции двух переменных  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и параметра  $\mu$ .

$$\det J_3 = -\frac{1}{\mu} \left\{ \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)\mu - 4 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \right. \\ \left. + 2 \cos^2 \varphi_2 + 4 \cos^2 \varphi_1 - 2\mu \right\}.$$

Этот определитель можно записать в виде

$$\det J_3 = \frac{1}{\mu} \hat{J}, \quad \text{где}$$

$$\hat{J} = 2 \left[ \mu - \cos^2 \varphi_2 \right] - \mu \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + 4 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 4 \cos^2 \varphi_1.$$

Найдем минимум  $\hat{J}$  через необходимые условия экстремума.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \hat{J} = -4 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - 4 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + 2\mu \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 8 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_2} \hat{J} = -4 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 4 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ - 2\mu \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 4 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 = 0.$$

Эти уравнения можно преобразовать до системы

$$\begin{cases} \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2)(\mu - 2) + 2 \sin 2\varphi_1 = 0, \\ -\sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2)(\mu - 2) = 0. \end{cases}$$

Так как мы принимаем  $\mu > 2$ , то

$$\begin{cases} \sin 2\varphi_1 = 0, \\ \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2) = 0. \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi k}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi n}{2}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Будем рассматривать  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ . Тогда остается только 16 комбинаций, которые приведены ниже.

$$\begin{aligned} &\{0, 0\}, \quad \dots, \quad \{0, \frac{3\pi}{2}\}, \\ &\dots \dots \dots \\ &\{\frac{3\pi}{2}, 0\}, \quad \dots, \quad \{\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

Если перебрать все точки, то определитель может равняться  $\mu$ ,  $\mu - 2$ ,  $2(\mu - 1)$ ,  $2(\mu - 2)$ . Очевидно, что  $\mu > \mu - 2$ , а  $2(\mu - 1) > 2(\mu - 2)$ , так как  $\mu > 2$ . Решая три неравенства, записанные ниже, завершим доказательство леммы.

$$\begin{aligned} \mu < 2(\mu - 1) &\iff \mu > 1, \\ \mu < 2(\mu - 2) &\iff \mu > 4, \\ \mu - 2 < 2(\mu - 1) &\iff \mu > 0. \end{aligned}$$

Первое и третье неравенства выполнены всегда, в силу того, что  $\mu > 2$ . Тогда следует рассмотреть случаи  $\mu > 4$  и  $\mu < 4$ .

При  $\mu > 4$  верно, что  $2(\mu - 1) > 2(\mu - 2) > \mu > \mu - 2$  и  $\hat{J} > 0$ .

При  $\mu < 4$  верно, что  $2(\mu - 1) > \mu > 2(\mu - 2) > \mu - 2$ . Так как  $\mu > 2$ , то  $\hat{J} > 0$ .

Получается, что  $\hat{J} > 0$  при любых значениях  $\mu$ . Но тогда и  $J_3 > 0$  при любых значениях  $\mu$ . Таким образом, лемма доказана.  $\square$

## 5.2 Доказательство леммы 2

*Доказательство.* В соответствии с определением линеаризации системы, посчитаем нужные для применения теоремы производные.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K & L \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$K_1^1 = -\frac{\alpha}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{D_1}{\|J_3\|} \Big|_{(0,0,0)}, \quad K_1^2 = -\frac{\alpha}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \frac{D_1}{\|J_3\|} \Big|_{(0,0,0)},$$

$$K_2^1 = -\frac{\alpha}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{D_2}{\|J_3\|} \Big|_{(0,0,0)}, \quad K_2^2 = -\frac{\alpha}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \frac{D_2}{\|J_3\|} \Big|_{(0,0,0)}.$$

$$L_1^1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{A_1^i}{\|J_3\|} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \omega_i^2 \Big|_{(0,0,0)} = 0.$$

Под обозначением  $|_{(0,0,0)}$  имеется ввиду взятие производной в точке  $\varphi_i = 0, \omega_i = 0, \gamma = 0$ .

Аналогично можно получить  $L_j^i = 0$  для всех элементов матрицы  $L$ .

Производя все необходимые вычисления, можно получить, что

$$K = \begin{pmatrix} 4\mu \frac{\mu-1}{\mu-2} & -4\mu \\ -2\mu & 4\mu \end{pmatrix}, \quad L = 0.$$

Аналогично

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\mu-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда линеаризацию систему можно записать в виде (28).

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} v, \quad z \in \mathbb{R}^4, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Отсюда следует, что ранг матрицы управляемости равен четырем. Следовательно линеаризация системы (10) около положения равновесия  $(\{\vec{0}, \vec{0}\}, 0)$  управляема согласно критерию Калмана. Отсюда следует локальная управляемость системы (10) около данной точки, в соответствии с теоремой о линеаризации. Таким образом, лемма доказана.

□

### 5.3 Решение системы (14)

Чтобы найти вид функции  $\lambda_1$ , решим систему (14). Система однородна и линейна, поэтому ее частные решения будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = X e^{\beta t}.$$

Коэффициенты  $\beta$  определяются из характеристического уравнения

$$\det(P - \beta E) = 0, \quad \text{где } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -2\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 2\alpha \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — матрица системы (14),}$$

$E$  — единичная матрица. Решая характеристическое уравнение

$$\beta^4 + (a + 2\alpha)\beta^2 + 2\alpha(a - \alpha) = 0$$

и производя замену  $\beta^2 = b$ , получаем корни  $b_{1,2}$ .

$$b^2 + (a + 2\alpha)b + 2\alpha(a - \alpha) = 0$$

$$D = (a + 2\alpha)^2 - 8\alpha(a - \alpha) = a^2 - 4a\alpha + 12\alpha^2 = (a - 2\alpha)^2 + 8\alpha^2 > 0 \quad (29)$$

$$b_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( a + 2\alpha \pm \sqrt{(a - 2\alpha)^2 + 8\alpha^2} \right)$$

Определим знак корней  $b_{1,2}$ . При знаке «+», корень  $b_1 < 0$ . В случае знака «−» определим, когда корень  $b_2 < 0$ . Для этого решим следующее неравенство.

$$a + 2\alpha > \sqrt{(a - 2\alpha)^2 + 8\alpha^2},$$

Так как коэффициенты  $a, \alpha > 0$ , а также корень в правой части неравенства больше нуля, то обе части неравенства можно возвести в квадрат.

$$(a + 2\alpha)^2 > (a - 2\alpha)^2 + 8\alpha^2,$$

$$a^2 + 4a\alpha + 4\alpha^2 > a^2 - 4a\alpha + 4\alpha^2 + 8\alpha^2,$$

$$8a\alpha > 8\alpha^2,$$

$$a > \alpha \iff 2\alpha \frac{\mu - 1}{\mu - 2} > \alpha,$$

$$2(\mu - 1) > \mu - 2 \iff 2\mu - 2 > \mu - 2 \iff \mu > 0.$$

Последнее неравенство верно при любых значениях параметров системы, значит оба корня  $b_{1,2} < 0$ . Следовательно все собственные числа  $\beta_i$  чисто комплексные, т.е. в системе присутствуют только колебательные движения. В таком случае

$$\beta_{1,2,3,4} = \pm \frac{i}{2} \sqrt{2a + 4\alpha \pm 2\sqrt{(a - 2\alpha)^2 + 8\alpha^2}}.$$

Собственные вектора  $X_{1,2,3,4}$ , соответствующие этим значениям, определяются из системы уравнений (30).

$$(\beta_{1,2,3,4} \cdot 1 - P)X_{1,2,3,4} = \theta, \quad \text{где } \theta \text{ — нулевой элемент.} \quad (30)$$

Следовательно, можно записать общее решение сопряженной системы как

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = W_1 X_1 e^{\beta_1 t} + W_2 X_2 e^{\beta_2 t} + W_3 X_3 e^{\beta_3 t} + W_4 X_4 e^{\beta_4 t}.$$

Решая систему уравнений (30) и выбирая  $X_i^4 = 1$ , можно найти вид собственных векторов  $X_i$ , соответствующих собственным значениям  $\beta_i$ .

$$X_i = \left\{ \frac{\beta_i^2 + 2\alpha}{\alpha} \beta_i, \beta_i, \frac{\beta_i^2 + 2\alpha}{\alpha}, 1 \right\}, \quad i = \overline{1, 4}.$$



## 5.4 Решение системы (12)

Напомним, что из себя представляет система (12).

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \\ \dot{\omega}_1 = -a\varphi_1 + \alpha\varphi_2 + \hat{\gamma} \\ \dot{\omega}_2 = 2\alpha\varphi_1 - 2\alpha\varphi_2. \end{cases}$$

Известно, что для решения такой неоднородной системы вида  $\dot{y} = Ay(t) + f(t)$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(t_0) = y^0$ , имеет место формула Коши

$$y(t) = W(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t W(t, s)f(s)ds,$$

где  $W(x, y)$  — матрица Коши однородной системы.

Найдем матрицу Коши однородной системы. По аналогии с системой (14) общим решением системы (12) является столбец

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = V_1 Y_1 e^{\beta_1 t} + V_2 Y_2 e^{\beta_2 t} + V_3 Y_3 e^{\beta_3 t} + V_4 Y_4 e^{\beta_4 t}.$$

Решая уравнение на собственные вектора и выбирая  $Y_i^1 = 1$ , получаем собственные вектора  $Y_i$ .

$$Y_i = \left\{ 1, \frac{\beta_i^2 + a}{\alpha}, \beta_i, \frac{\beta_i^2 + a}{\alpha} \beta_i \right\}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

По аналогии с решениями сопряженной системы можно преобразовать полученные частные решения  $Y_i e^{\beta_i t}$ . Тогда ФСР однородной системы есть совокупность четырех векторов

$$\begin{pmatrix} \cos(w_1 t) \\ \frac{-w_1^2+a}{\alpha} \cos(w_1 t) \\ -w_1 \sin(w_1 t) \\ -w_1 \frac{-w_1^2+a}{\alpha} \sin(w_1 t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(w_1 t) \\ \frac{-w_1^2+a}{\alpha} \sin(w_1 t) \\ w_1 \cos(w_1 t) \\ w_1 \frac{-w_1^2+a}{\alpha} \cos(w_1 t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \cos(w_2 t) \\ \frac{-w_2^2+a}{\alpha} \cos(w_2 t) \\ -w_2 \sin(w_2 t) \\ -w_2 \frac{-w_2^2+a}{\alpha} \sin(w_2 t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(w_2 t) \\ \frac{-w_2^2+a}{\alpha} \sin(w_2 t) \\ w_2 \cos(w_2 t) \\ w_2 \frac{-w_2^2+a}{\alpha} \cos(w_2 t) \end{pmatrix}.$$

Матрицант системы  $M(t)$  в таком случае записан ниже.

$$\begin{pmatrix} \cos(w_1 t) & \sin(w_1 t) & \cos(w_2 t) & \sin(w_2 t) \\ \frac{-w_1^2+a}{\alpha} \cos(w_1 t) & \frac{-w_1^2+a}{\alpha} \sin(w_1 t) & \frac{-w_2^2+a}{\alpha} \cos(w_2 t) & \frac{-w_2^2+a}{\alpha} \sin(w_2 t) \\ -w_1 \sin(w_1 t) & w_1 \cos(w_1 t) & -w_2 \sin(w_2 t) & w_2 \cos(w_2 t) \\ -w_1 \frac{-w_1^2+a}{\alpha} \sin(w_1 t) & w_1 \frac{-w_1^2+a}{\alpha} \cos(w_1 t) & -w_2 \frac{-w_2^2+a}{\alpha} \sin(w_2 t) & w_2 \frac{-w_2^2+a}{\alpha} \cos(w_2 t) \end{pmatrix}.$$

Известно, что матрица Коши системы выражается через матрицант следующим образом

$$W(t, s) = M(t)M^{-1}(s), \quad \text{где, в нашем случае,}$$

$$M^{-1}(s) = \frac{1}{w_1^2 - w_2^2} \times \\ \times \begin{pmatrix} (-w_2^2 + a) \cos(w_1 s) & -\alpha \cos(w_1 s) & -\frac{-w_2^2+a}{w_1} \sin(w_1 s) & \frac{\alpha}{w_1} \sin(w_1 s) \\ (-w_2^2 + a) \sin(w_1 s) & -\alpha \sin(w_1 s) & \frac{-w_2^2+a}{w_1} \cos(w_1 s) & -\frac{\alpha}{w_1} \cos(w_1 s) \\ -(-w_1^2 + a) \cos(w_2 s) & \alpha \cos(w_2 s) & \frac{-w_1^2+a}{w_2} \sin(w_2 s) & -\frac{\alpha}{w_2} \sin(w_2 s) \\ -(-w_1^2 + a) \sin(w_2 s) & \alpha \sin(w_2 s) & -\frac{-w_1^2+a}{w_2} \cos(w_2 s) & \frac{\alpha}{w_2} \cos(w_2 s) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $w_1 \neq w_2$ , т.к. детерминант (29) всегда больше нуля.

Тогда по формуле Коши имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = M(t) \cdot M^{-1}(0) \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t M(t) \cdot M^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{\gamma}(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$

Вводя обозначения

$$c_1 = -(-w_1^2 + a)\varphi_1^0 + \alpha\varphi_2^0, c_2 = (-w_2^2 + a)\varphi_1^0 - \alpha\varphi_2^0,$$

$$d_1 = \frac{-w_2^2 + a}{w_1}, d_2 = \frac{-w_1^2 + a}{w_2}$$

и подставляя начальные условия, систему можно привести к виду

$$\frac{1}{w_1^2 - w_2^2} M(t) \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{w_1^2 - w_2^2} \int_0^t M(t) \begin{pmatrix} -d_1 \sin(w_1 s) \hat{\gamma}(s) \\ d_1 \cos(w_1 s) \hat{\gamma}(s) \\ d_2 \sin(w_2 s) \hat{\gamma}(s) \\ -d_2 \cos(w_2 s) \hat{\gamma}(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подробнее и преобразуем первое уравнение системы.

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{w_1^2 - w_2^2} \left\{ (c_2 \cos w_1 t + c_1 \cos w_2 t) + \int_0^t \hat{\gamma}(s) \left[ -d_1 \sin(w_1 s) \cos(w_1 t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d_1 \cos(w_1 s) \sin(w_1 t) + d_2 \sin(w_2 s) \cos(w_2 t) - d_2 \cos(w_2 s) \sin(w_2 t) \right] ds \right\} = \\ &= \frac{1}{w_1^2 - w_2^2} \left\{ (c_2 \cos w_1 t + c_1 \cos w_2 t) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \hat{\gamma}(s) \left[ d_2 \{ \sin(w_2 s) \cos(w_2 t) - \cos(w_2 s) \sin(w_2 t) \} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - d_1 \{ \sin(w_1 s) \cos(w_1 t) - \cos(w_1 s) \sin(w_1 t) \} \right] ds \right\} = \\ \varphi_1(t) &= \frac{1}{w_1^2 - w_2^2} \left\{ (c_2 \cos w_1 t + c_1 \cos w_2 t) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left[ d_1 \sin(w_1 t - w_1 s) - d_2 \sin(w_2 t - w_2 s) \right] \hat{\gamma}(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично, учитывая вид постоянных (22), можно преобразовать второе уравнение системы.

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\alpha(w_1^2 - w_2^2)} \left( (-w_1^2 + a)c_2 \cos(w_1 t) + (-w_2^2 + a)c_1 \cos(w_2 t) \right) + \\ + \frac{1}{\alpha(w_1^2 - w_2^2)} \int_0^t [d_1(-w_1^2 + a) \sin(w_1 t - w_1 s) - \\ - d_2(-w_2^2 + a) \sin(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds,$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\alpha(w_1^2 - w_2^2)} \left\{ \left( w_2 d_2 c_2 \cos(w_1 t) + w_1 d_1 c_1 \cos(w_2 t) \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t [w_2 d_1 d_2 \sin(w_1 t - w_1 s) - w_1 d_1 d_2 \sin(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds \right\}.$$

Преобразованные таким образом уравнения системы записаны ниже.

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{w_1^2 - w_2^2} \left\{ (c_2 \cos w_1 t + c_1 \cos w_2 t) + \right. \\ \left. + \int_0^t [d_1 \sin(w_1 t - w_1 s) - d_2 \sin(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds \right\},$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\alpha(w_1^2 - w_2^2)} \left\{ \left( w_2 d_2 c_2 \cos(w_1 t) + w_1 d_1 c_1 \cos(w_2 t) \right) + \right. \\ \left. + d_1 d_2 \int_0^t [w_2 \sin(w_1 t - w_1 s) - w_1 \sin(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds \right\},$$

$$\omega_1(t) = -\frac{1}{w_1^2 - w_2^2} \left\{ (w_1 c_2 \sin(w_1 t) + w_2 c_1 \sin(w_2 t)) - \right. \\ \left. - \int_0^t [w_1 d_1 \cos(w_1 t - w_1 s) - w_2 d_2 \cos(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds \right\},$$

$$\omega_2(t) = -\frac{w_1 w_2}{\alpha(w_1^2 - w_2^2)} \left\{ \left( d_2 c_2 \sin(w_1 t) + d_1 c_1 \sin(w_2 t) \right) - \right. \\ \left. - d_1 d_2 \int_0^t [\cos(w_1 t - w_1 s) - \cos(w_2 t - w_2 s)] \hat{\gamma}(s) ds \right\}.$$

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта молодежных научных школ Института проблем управления РАН 2022-2023.

## Список литературы

- [1] Cohen B. J., Chitta S., Likhachev M., Search-based planning for manipulation with motion primitives // Proceedings: IEEE International Conference on Robotics and Automation. — 2010. — P. 2902–2908.
- [2] Hart P. E., Nilsson N. J., Raphael B. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths // IEEE transactions on Systems Science and Cybernetics — 1968. — Т.4. — № 2. — P. 100–107.
- [3] Изабель Ф., Рогелио Л. Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий // М., Ижевск: ООО «Компьютерная динамика». — 2012. — С. 312.
- [4] Kim JY., Park IW., Oh JH. Walking Control Algorithm of Biped Humanoid Robot on Uneven and Inclined Floor // J Intell Robot Syst. — 2007. — № 48. — P. 457-484.
- [5] Семион А. А. Управление перевернутым маятником регулятором, с коэффициентами, зависящими от состояния // Межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов им. Е.В. Арменского: Материалы конференции. — 2018. — С. 30-31.
- [6] Danik Y., Dmitriev M. The Construction of Stabilizing Regulators Sets for Nonlinear Control Systems with the Help of Padé Approximations // Advanced Structured Materials. — 2021. — № 139. — P. 45–62.

- [7] Danik Y., Dmitriev M. Construction of Approximate Parametric Sets of Regulators for Weakly Nonlinear Discrete Control Problems on the Semi-axis based on the Asymptotic Expansions // Conference: 2022 15th International Conference Management of large-scale system development. — 2022. — P. 1–5.
- [8] Даник Ю. Э. Стабилизирующий регулятор для нелинейных систем на основе нечеткой матричной Паде аппроксимации // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2021. — № 1. — С. 42–49.
- [9] Овцов С. А., Сарака В. В. Разработка оптимальной системы управления роботом-манипулятором гальванической линии для погашения колебаний подвески в переходных режимах // Труды БГТУ. Серия 3: Физико-математические науки и информатика. — 2017. — Т. 194. — № 1. — С. 63–68.
- [10] Манита Л. А., Ронжина М. И. Оптимальный синтез в задаче управления  $n$ -звенным перевернутым маятником на движущемся основании // Оптимальное управление, СМФН. — 2015. — № 56. — С. 129–144.
- [11] Ананьевский И. М., Анохин Н. В. Управление пространственным движением многозвенного перевернутого маятника с помощью момента, приложенного к первому звену // Прикладная математика и механика. — 2014. — Т. 78. — № 6. — С. 755–765.
- [12] Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. Управляемый маятник на подвижном основании // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2013. — № 1. — С. 9–23.
- [13] Рапопорт Л. Б., Генералов А. А. Управление перевернутым маятником на колесе // Автомат. и телемех. — 2022. — № 8. — С. 3–28.
- [14] Shiriaev A. S., Ludvigsen H., Egeland O. Swinging up the spherical pendulum via stabilization of its first integrals // Automatica. — 2004. — Т. 40. — № 1. — P. 73–85.
- [15] Aguilar-Ibáñez C., Suárez-Castañón M, Gutiérrez-Frias O. The direct Lyapunov method for the stabilisation of the Furuta pendulum // International Journal of Control. — 2010. — № 83. — P. 2285–2293.
- [16] Андриевский Б. Р., Гузенко П. Ю., Фрадков А. Л. Управление нелинейными колебаниями механических систем методом скоростного градиента // Автомат. и телемех. — 1996. — № 4. — С. 456–467.

- [17] Белецкий В., Индейцев Д., Фрадков А. (ред.) Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления // Санкт-Петербург: Санкт-Петербургская издательско-книготорговая фирма «Наука». — 2009. — С. 527.
- [18] Галяев А. А. Задача оптимального управления осциллятором с целью обнуления его энергии при ограничении на управляющее воздействие // Автомат. и телемех. — 2009. — № 3. — С. 24–33.
- [19] Сачков Ю. Л. Введение в геометрическую теорию управления. // М.: URSS. — 2021. — С. 160.
- [20] Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1960. — Т.24 — № 1. — С. 3–42.
- [21] Берлин Л. М., Галяев А. А., Лысенко П. В. Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами // Алгебра, геометрия и комбинаторика, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2022. — № 215. — С. 40–51.
- [22] Берлин Л. М., Галяев А. А. Условия экстремума при ограниченном скалярном управлении двумя несинхронными осцилляторами в задаче быстрого действия // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2022. — № 505. — С. 86–91.

## A TIME-OPTIMAL PROBLEM OF STOPPING A TWO-LINK PENDULUM ON A MOVABLE MOUNT

A. A. Galaev, A. P. Potapov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences

**Abstract.** The work considers a time-optimal problem of stopping a two-link pendulum on a movable mount. Given nonlinear system with the lack of and limitation on the control resource is linearized in the neighborhood of a stable equilibrium position. For a linearized system the Pontryagin maximum principle is used and the optimal control law obtained. To estimate parameters of the law basing on finding out an orthogonal subspace was an algorithm developed for constructing a time-optimal system control. In the Matlab environment a numerical simulation and a comparison of the dynamics of linear and nonlinear systems with the obtained control law were made.

**Keywords:** Pontryagin maximum principle, time-optimal problem, two-link pendulum.

### Acknowledgements

The work was carried out with the support of the program for the development of Youth scientific schools of the Institute of Control Sciences RAS 2022–2023.