ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2023
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мухамадиев Э., Наимов А. Н.

Вологодский государственный университет
emuhamadiev@rambler.ru
naimovan@vogu35.ru

Аннотация. В статье исследован вопрос об ограниченности произвольного решения квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при ограниченности наблюдаемых значений решения. Наблюдаемые значения решения представляют собой конечный набор скалярных произведений решения с заданными векторами. Сформулированы и доказаны теоремы об ограниченности произвольного решения при ограниченности наблюдаемых значений решения. Новизна работы состоит в том, что с применением метода предельных уравнений выведены условия, из которых следует ограниченность произвольного решения квазилинейной системы при ограниченности наблюдаемых значений решения. Практическая значимость получаемых условий заключается в том, что они выводятся в терминах свойств матрицы коэффициентов системы уравнений и матрицы коэффициентов наблюдаемых значений, не решая систему уравнений аналитически или численно. В частности, найдено достаточное условие, которое равносильно условию полной наблюдаемости, известному в математической теории управления.

Ключевые слова: квазилинейная система уравнений, ограниченное решение, наблюдаемые значения, метод предельных уравнений.

1 Введение

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in R^n, \quad t \in (-\infty, +\infty). \tag{1}$$

Здесь $n > 1$, R^n – пространство n-мерных вещественных векторов с евклидовым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, A – квадратная вещественная матрица порядка n, $f(t, y) : R^{1+n} \mapsto R^n$ – непрерывное отображение, ограниченное по t при каждом фиксированном y и удовлетворяющее условию

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|^{-1} \sup_{t\in R} |f(t, y)| = 0. \tag{2}$$

В силу условия (2) систему уравнений (1) называем квазилинейной.

Из общих свойств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1, гл. 2, §3] следует, что при выполнении условия (2) любое решение $x(t)$ системы уравнений (1) определено при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Решение $x(t)$ называем ограниченным, если

$$\sup_{t\in R} |x(t)| < \infty.$$

Исследование ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений представляет интерес с точки зрения теории и приложения дифференциальных уравнений [2] – [5]. Качественное поведение решений в целом определяется существованием ограниченных решений и взаимным расположением их фазовых траекторий. Ограниченными решениями описываются периодические, почти-периодические и рекуррентные движения в динамических системах.

Известно, что если матрица A не имеет чисто мнимых собственных значений, то система уравнений (1) имеет хотя бы одно ограниченное решение [5, гл. 5, §10], [6, гл. 1, §13]. При этом находить ограниченное решение аналитически или численно, в общем, затруднительно. А если матрица A имеет чисто мнимые собственные значения, то ни при всех возмущениях f существует ограниченное решение системы уравнений (1). Поэтому представляется актуальным вопрос об исследовании ограниченности произвольного решения $x(t)$ системы уравнений (1) при дополнительной информации об ограниченности так называемых наблюдаемых значений вида $\langle c^k, x(t) \rangle$, $k = 1, \ldots, m$ с заданными векторами c^k, $k = 1, \ldots, m$. Замысел исследования восходит к одному результату, доказанному в работе [7, гл. 5] и обобщающему теорему Эсклангона для системы линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Аналог теоремы Эсклангона для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка исследован и применен в работах [8], [9].

В настоящей работе исследованы условия на матрицу A и векторов c^k, $k = 1, \ldots, m$, обеспечивающие ограниченность произвольного решения $x(t)$ квазилинейной системы уравнений (1) при ограниченности наблюдаемых значений $\langle c^k, x(t)\rangle$, $k = 1, \ldots, m$. Сформулированы и доказаны теоремы, дополняющие известные результаты о наблюдаемости динамических систем [10], [11]. В частности, найдено достаточное условие, которое равносильно условию полной наблюдаемости, известному в математической теории управления [12, гл. 3, §2].

Установление ограниченности произвольного решения $x(t)$ при обнаружении ограниченности наблюдаемых значений $\langle c^k, x(t)\rangle$, $k = 1, \ldots, m$ можно назвать задачей идентификации ограниченных решений для системы уравнений (1). Нам не известно, исследована ли в каких-либо работах задача идентификации ограниченных решений для линейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В теории управления достаточно изучена задача наблюдаемости для линейных систем (см., напр., [10], [11]), она состоит в однозначном определении $x(t)$ по наблюдаемым значениям $\langle c^k, x(t)\rangle$, $k = 1, \ldots, m$.

Новизна настоящей работы состоит в том, что с применением метода предельных уравнений [13] выведены условия, из которых следует ограниченность произвольного решения квазилинейной системы при ограниченности наблюдаемых значений решения. Данный подход позволяет исследовать задачу идентификации ограниченных решений и в тех случаях, когда в системе уравнений (1) матрица A зависит от t и x. Практическая значимость получаемых условий заключается в том, что они выводятся в терминах свойств правых частей системы уравнений. Таким образом, не решая систему уравнений вида (1) аналитически или численно, удается вывести условия, из которых следует разрешимость задачи идентификации ограниченных решений. На основе полученных результатов, в дальнейшем, можно исследовать задачу идентификации периодических решений, состоящей в установлении ω-периодичности произвольного решения $x(t)$ при ω-периодичности наблюдаемых значений.

2 Основные результаты

Вопрос об ограниченности произвольного решения $x(t)$ квазилинейной системы уравнений (1) при ограниченности наблюдаемых значений $\langle c^k, x(t)\rangle$, $k = 1, \ldots, m$ сведем к следующей оценке:

$$\max_{a\le t\le a+1} |z(t)| \le M \left(\max_{a\le t\le a+1} |z'(t) - Az(t)| + \sum_{k=1}^{m} \max_{a\le t\le a+1} |\langle c^k, z(t)\rangle| \right). \qquad (3)$$

Данная оценка должна быть верна для любых $z(t) \in C^1([a, a+1]; R^n)$ и $a \in I$, где $I = [0, +\infty)$ или $I = (-\infty, 0]$, и число $M > 0$ не зависит от $z(t)$ и a. В силу условия (2) оценка (3) обеспечивает ограниченность решения $x(t)$ системы уравнений (1) на промежутке I при ограниченности $\langle c^k, x(t)\rangle$, $k = 1, \ldots, m$ на I. Заметим, что если оценка (3) верна при $a = 0$, то она верна при любом a, так как матрица A и векторы c^k, $k = 1, \ldots, m$ не зависят от t.

Оценка (3) заимствована из оценки вида

$$\max_{a\le t\le a+1} |y^{(j)}(t)| \le M_0 \left(\max_{a\le t\le a+1} |g(t)| + \max_{a\le t\le a+1} |y(t)| \right), \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (4)$$

доказанной в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [1, гл. 13, §7] для производных $y^{(j)}(t)$, $j = 1, \ldots, n$ произвольного решения $y(t)$ уравнения

$$y^{(n)}(t) + b_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + b_n(t)y(t) = g(t), \qquad (5)$$

где $b_1(t), \ldots, b_n(t), g(t) \in C[a, a+1]$. В (4) число $M_0 > 0$ зависит только от числа $b_0 > 0$, удовлетворяющего условию

$$b_0 > \max_{a\le t\le a+1} |b_j(t)|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Из оценки (4), в частности, вытекает теорема Эсклангона [14, гл. 6, с. 98, 100] об ограниченности на промежутке I производных $y^{(j)}(t)$, $j = 1, \ldots, n$ решения $y(t)$ при ограниченности $y(t)$ и $b_1(t), \ldots, b_n(t), g(t)$ на промежутке I.

Если уравнение (5) преобразовать в систему уравнений вида (1), вводя обозначения $z_1(t) = y(t), z_2(t) = y'(t), \ldots, z_n(t) = y^{(n-1)}(t)$, то оценка (4) принимает вид (3), где $m = 1$ и $c^1 = (1, 0, \ldots, 0)^\top$. Следовательно, оценка (3) верна, если A – матрица Фробениуса и $m = 1$, $c^1 = (1, 0, \ldots, 0)^\top$. В общем случае оценка (3) не верна, например, если матрица A диагональная и $\langle c^k, x(t)\rangle = x_k(t)$ – k-я координата $x(t)$, $k = 1, \ldots, m$.

Исследуем условия, обеспечивающие оценку (3). Без ограничения общности можно считать, что векторы c^k, $k = 1, \dots, m$ линейно независимы. В этом случае $1 \le m \le n$ и матрица

$$C = [(c^1)^\top; \dots; (c^m)^\top],$$

строки которой совпадают с векторами $(c^k)^\top$, $k = 1, \dots, m$, имеет ранг, равный m: $rank(C) = m$. Если $m = n$, то оценка (3) выполняется без каких-либо условий. Поэтому представляет интерес случай, когда $rank(C) = m$ и $1 \le m < n$. Составим матрицу

$$B = [C; CA; \dots; CA^{n-1}] \tag{6}$$

по строкам матриц $C, CA, \dots, CA^{n-1}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 *Оценка (3) верна тогда и только тогда, когда* $rank(B) = n$.

Следствие 1 *Если* $rank(B) = n$, *то ограниченность произвольного решения* $x(t)$ *системы уравнений (1) вытекает из ограниченности* $Cx(t)$.

Теорема 1 при $m = 1$ и $c^1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$ доказана в работе [7, гл. 5], где теорема Эсклангона обобщена для системы линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Условие $rank(B) = n$ в математической теории управления [12, гл. 3, §2] называют условием полной наблюдаемости. Таким образом, установлено, что оценка (3) равносильна условию полной наблюдаемости.

В случае $rank(B) < n$ теорему 1 можно дополнить одним результатом. Для этого введем матрицу

$$P_\varepsilon = \prod_{\substack{\lambda \in \sigma(A), \\ \varepsilon Re\lambda > 0}} (A - \lambda E)^{p(\lambda)} \prod_{\substack{\lambda \in \sigma(A), \\ Re\lambda = 0}} (A - \lambda E), \tag{7}$$

где $\sigma(A)$ – спектр матрицы A, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, E – единичная матрица, $p(\lambda)$ – алгебраическая кратность $\lambda \in \sigma(A)$. Если множество $\{\lambda \in \sigma(A) : \varepsilon Re\lambda \ge 0\}$ пусто, то полагаем $P_\varepsilon = E$. Введение матрицы P_ε связано с тем, что произвольное решение автономной системы $v' = Av$ ограничено при $\varepsilon t \le 0$ лишь при выполнении условия $P_\varepsilon v(0) = 0$ (см., напр., [5, гл. 5, с. 359]).

В дополнении к теореме 1 имеет место

Теорема 2 *Пусть выполнено условие*

$$rank[B; P_\varepsilon] = n, \tag{8}$$

где ε равно -1 или 1, матрицы B и P_ε определяются формулами (6) и (7). Тогда для произвольного решения $x(t)$ системы уравнений (1) верна импликация

$$\sup_{\varepsilon t \geq 0} |Cx(t)| \quad \Longrightarrow \quad \sup_{\varepsilon t \geq 0} |x(t)|. \tag{9}$$

Теоремы (1) и (2) доказаны методом предельных уравнений, примененным в работе [13] при исследовании ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой подход позволяет обобщить полученные результаты в случае, когда матрица A зависит от t и x.

3 Доказательства теорем

В этом параграфе приведем доказательства теорем 1 и 2. Сначала проверим справедливость следующей леммы.

Лемма 1 *Для произвольного вектора $u \in R^n$ тождество $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in (t_1, t_2)$ равносильно равенствам*

$$Cu = 0, \quad CAu = 0, \quad \ldots, \quad CA^{n-1}u = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть имеет место тождество $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in (t_1, t_2)$. Проверим, что $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in R$. Для этого достаточно показать, что при любом $v \in R^m$ функция $\varphi(t) = \langle Ce^{tA}u, v\rangle$ тождественно равна нулю на R.

Найдем производных функции $\varphi(t)$: $\varphi^{(k)}(t) = \langle CA^k e^{tA}u, v\rangle$, $k = 1, 2, \ldots$. Далее, воспользуемся тем, что согласно теореме Гамильтона-Кэли [15, с. 93] матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению:

$$A^n + q_1 A^{n-1} + \ldots + q_{n-1}A + q_n E = O,$$

где

$$\lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + \ldots + q_{n-1}\lambda + q_n \equiv det(\lambda E - A).$$

Отсюда вытекает, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению

$$y^{(n)}(t) + q_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + q_{n-1}y'(t) + q_n y(t) = 0, \quad t \in R^n.$$

Для данного уравнения только нулевое решение может обращаться в ноль тождественно на каком-либо интервале. Так как по условию $\varphi(t) \equiv 0$, $t \in (t_1, t_2)$, поэтому $\varphi(t) \equiv 0$, $t \in R$. Следовательно, имеет место тождество $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in R$. Данное тождество дифференцируя k раз и полагая $k = 0, 1, \dots, n-1$, $t = 0$ получаем равенства (10).

Обратно, если имеют место равенства (10), то из теоремы Гамильтона-Кэли следует, что $CA^k u = 0$ при любом целом $k \geq 0$. Отсюда по определению матричной экспоненты выводим $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in R$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть верна оценка (3). Покажем, что $rank(B) = n$. Действительно, если $rank(B) < n$, то система уравнений (10) имеет ненулевое решение u_0. Тогда для вектор-функции $z_0(t) = e^{tA}u_0$ имеем: $|z_0(t)| > 0$, $z_0'(t) - Az_0(t) \equiv 0$ и $Cz_0(t) \equiv 0$ (согласно лемме 1). А это противоречит оценке (3).

Достаточность. Пусть $rank(B) = n$. Предположим, что оценка (3) неверна. Тогда существуют бесконечные последовательности $a_j \in I$, $z_j(t) \in C^1([a_j, a_j + 1]; R^n)$, $j = 1, 2, \dots$ такие, что

$$\max_{a_j \leq t \leq a_j+1} |z_j(t)| > j \left(\max_{a_j \leq t \leq a_j+1} |z_j'(t) - Az_j(t)| + \max_{a_j \leq t \leq a_j+1} |Cz_j(t)| \right), j = 1, 2, \dots.$$

Рассмотрим вектор-функции

$$v_j(t) = r_j^{-1} z_j(t + a_j), \quad t \in [0, 1], \quad j = 1, 2, \dots,$$

где r_j – максимум функции $|z_j(t)|$ на отрезке $[a_j, a_j + 1]$. Для этих вектор-функций имеем:

$$1 = \max_{0 \leq t \leq 1} |v_j(t)| > j \left(\max_{0 \leq t \leq 1} |v_j'(t) - Av_j(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |Cv_j(t)| \right), j = 1, 2, \dots.$$

Переходя к пределу вдоль равномерно сходящейся подпоследовательности вектор-функций $v_{j_1}(t), v_{j_2}(t), \dots$, получаем функцию $v(t) \in C^1([0, 1]; R^n)$ такую, что

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |v(t)| = 1, \quad v'(t) - Av(t) \equiv 0, \quad Cv(t) \equiv 0.$$

Отсюда выводим:

$$v(t) \equiv e^{tA}v(0), \quad v(0) \neq 0, \quad Ce^{tA}v(0) \equiv 0.$$

Из последнего тождества, в силу леммы 1, следует, что система уравнений (10) имеет ненулевое решение, что противоречит условию $rank(B) = n$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнено условие (8). Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon = 1$. Предположим, что существует решение $x(t)$ системы уравнений (1) такое, что

$$\sup_{t\geq 0} |Cx(t)| < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0} |x(t)| = \infty.$$

Рассмотрим последовательность вектор-функций $x_j(t) = r_j^{-1}x(t+t_j)$, $t \in [-t_j, j-t_j]$, $j = 1, 2, \ldots$, где t_j, r_j – точка максимума и максимум функции $|x(t)|$ на отрезке $[0, j]$. Очевидно, $r_j \to +\infty$, $t_j \to +\infty$ при $j \to \infty$. Для этих вектор-функций при каждом $j = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$x_j'(t) = Ax_j(t) + r_j^{-1}f(t+t_j, r_jx_j(t)), \quad t \in (-t_j, j-t_j),$$

$$|x_j(0)| = \max_{t\in[-t_j, j-t_j]} |x_j(t)| = 1, \qquad \max_{t\in[-t_j, j-t_j]} |Cx_j(t)| \leq r_j^{-1} \sup_{t\geq 0} |Cx(t)|.$$

Данная последовательность вектор-функций равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом отрезке $[-l, 0] \subset (-\infty, 0]$. На основании теоремы Арцела перейдем к пределу на расширяющихся отрезках $[-l, 0]$, $l = 1, 2, \ldots$. В результате получаем ненулевое решение $x_0(t)$ системы уравнений

$$v'(t) = Av(t), \quad v(t) \in \mathbb{C}^n, \tag{11}$$

удовлетворяющее условиям

$$\sup_{t\leq 0} |v(t)| < \infty, \tag{12}$$

$$Cv(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \leq 0. \tag{13}$$

Для решений системы уравнений (11) условие (12) равносильно условию $P_1v(0) = 0$, где матрица P_1 определяется формулой (7) (см., напр., [5, гл. 5, с. 359]). А условие (13) в силу леммы 1 равносильно системе уравнений

$$Cv(0) = 0, \quad CAv(0) = 0, \quad \ldots, \quad CA^{n-1}v(0) = 0.$$

Следовательно, $x_0(0)$ является ненулевым решением системы линейных алгебраических уравнений

$$[B; P_1]w = 0, \quad w \in \mathbb{C}^n.$$

Полученное противоречит условию (8).

Теорема 2 доказана.

4 Пример

В качестве примера рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \\ x_2'(t) = x_3(t) + f_2(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \\ x_3'(t) = f_3(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \end{cases} \tag{14}$$

где $f = (f_1, f_2, f_3)^\top : R^4 \mapsto R^3$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условию (2). Системе уравнений (14) соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Спектр матрицы A пересекается с мнимой осью iR. Поэтому ни при всех возмущениях f система уравнений (14) имеет ограниченное решение, например, при $f = (0, 0, 1))^\top$.

Возьмем $C = (c_1, c_2, c_3)$ и по формулам (6), (7) найдем

$$B = [C; CA; CA^2] = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, \qquad P_\varepsilon = A, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Условие (8) выполняется лишь при $c_1 \neq 0$. В этом случае имеет место равенство $rank(B) = 3$. Следовательно, согласно теореме 1 для произвольного решения $x(t)$ системы уравнений (14) при любом $a \in R$ верна оценка

$$\max_{a \le t \le a+1} |x(t)| \le M \left(\max_{a \le t \le a+1} |f(t, x(t))| + \max_{a \le t \le a+1} |Cx(t)| \right), \tag{15}$$

где $M > 0$ не зависит от $x(t)$, f и a. В силу условия (2) для любого $\delta \in (0, M)$ существует $M_\delta > 0$ такое, что при всех $t \in R$, $y \in R^3$ имеет место неравенство $|f(t, y)| < \delta|y| + M_\delta$. Учитывая это неравенство, из оценки (15) выводим:

$$\max_{a \le t \le a+1} |x(t)| \le (1 - \delta M)^{-1} \left(M_\delta + \max_{a \le t \le a+1} |Cx(t)| \right).$$

Таким образом, если $C = (c_1, c_2, c_3)$ и $c_1 \neq 0$, то для произвольного решения $x(t)$ системы уравнений (14) из ограниченности $Cx(t)$ следует ограниченность $x(t)$. Если к тому же $M_\delta = 0$ и $Cx(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Если возьмем

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

то для матриц A и C условие (8) не выполняется.

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за высказанные ценные замечания. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00032 (https://rscf.ru/project/23-21-00032/).

Список литературы

[1] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[2] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИФМЛ, 1959.

[3] Плисс В. А . Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964.

[4] Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

[5] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

[6] Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

[7] Наимов А. Н. Исследования по теории краевых задач. Диссер. на соиск. учен. степ. док. физ.-мат. наук. Худжанд, 2000.

[8] Коструб И. Д. Неравенства типа Ландау—Адамара для гладких векторных функций и теорема Эсклангона для нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Вестник факультета прикл. матем. и механики. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2010. № 8. С. 233—243.

[9] Перов А. И., Коструб И. Д. Об ограниченных решениях слабо нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка. Сибир. матем. журн. 2016. Т. 57, № 4. С. 830-849.

[10] Воронов А. А., Ким Д. П., Лохин В. М. и др. Теория автоматического управления. Часть II. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1986.

[11] Зубов В. И. Лекции по теории управления. Учебное пособие. 2-е изд. СПб.: Изд-во "Лань", 2009.

[12] Леонов Г. А. Введение в теорию управления. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.

[13] Мухамадиев Э. К теории ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 4. С. 635–646.

[14] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.

[15] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.

ON THE BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF A QUASILINEAR SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mukhamadiev E., Naimov A. N.

Vologda State University
emuhamadiev@rambler.ru
naimovan@vogu35.ru

Abstract. In the paper, the question of the boundedness of an arbitrary solution of a quasilinear system of ordinary differential equations is investigated under boundedness of the observed values of the solution. The observed values of the solution are a finite set of scalar products of the solution with given vectors. In terms of the properties of the matrix of coefficients of the system of equations and the matrix of coefficients of observed values, theorems on the boundedness of an arbitrary solution with boundedness of the observed values are formulated and proved. The novelty of this paper is that using the method of limit equations, estimates are derived from which the boundedness or stability follows an arbitrary solution of a quasilinear system in terms of boundedness or stability of the observed values of the solution.

Keywords: quasilinear system of equations, bounded solution, observed values, limit equation method.

Acknowledgments. The authors are grateful the reviewer for the valuable remarks. The research was supported by the grant Russian Science Foundation No. 23-21-00032 (https://rscf.ru/project/23-21-00032/).