ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем

Сташ А. Х.

Адыгейский государственный университет
aidamir.stash@gmail.com

Аннотация. В данной работе изучаются вопросы разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на положительной оси коэффициентами. Установлено существование точек на множестве дифференциальных систем, в которых все старшие и младшие показатели колеблемости нулей, корней и гиперкорней не только не являются непрерывными, но и не являются непрерывными ни сверху и ни снизу. Более того, доказана неинвариантность крайних показателей колеблемости относительно бесконечно малых возмущений. При доказательстве результатов настоящей работы, отдельно рассмотрены случаи четности и нечетности порядка матрицы системы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, линейные системы, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, показатели Ляпунова.

1. Введение

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными* оператор-функциями $A:\ \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества $\mathcal{M}^n$, состоящее из автономных систем, обозначим через $\mathcal{C}^n$, подмножество систем отвечающих линейным однородным уравнениям n-го порядка, обозначим через $\mathcal{E}^n$. Пространство решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(A)$, а подмножество всех ненулевых решений — через $\mathcal{S}_*(A)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

В работах [1, 2, 3, 4] И. Н. Сергеева на полупрямой вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем. Эти характеристики отвечают за колеблемость и блуждаемость решения. В статье [5] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым к настоящему моменту характеристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости. В работах [6, 7, 8, 9, 10] характеристические показатели [1, 2] стали называться частотами Сергеева.

В настоящей работе будем рассматривать следующие их разновидности:

– показатели колеблемости *нулей*, *корней* или *гиперкорней*;

– *верхние* или *нижние* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *точные*);

– *сильные* или *слабые* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *абсолютные*).

Подсчет последних происходит путем усреднения числа нулей (или корней, или гиперкорней) проекции решения x дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получаются слабые показатели колеблемости, а если после, то — сильные показатели колеблемости. При этом для вычисления этих характеристик решения y линейного уравнения n-го порядка осуществляется переход к вектор-функции $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$.

Как известно [11, 12, 13], показатели колеблемости нулей, корней и гиперкорней линейной дифференциальной системы совпадают в автономном случае с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы. В силу непрерывной зависимости корней многочлена от его коэффициентов следует, что сужение любой из крайних показателей колеблемости на топологическое подпространство $\mathcal{C}^n \subset \mathcal{M}^n$ есть непрерывная функция.

Кроме того, непрерывность крайних показателей колеблемости наблюдается и на топологичеком подпространстве $\mathcal{E}^2 \subset \mathcal{M}^2$ (см. [3, 14]).

В работе [15] на множестве $\mathcal{M}^2$ были найдены не только точки разрыва, но и точки неинвариантности крайних показателей колеблемости нулей относительно возмущений, исчезающих на бесконечности. Утверждения и рассуждения, проводимые в этой работе, справедливы и для крайних показателей колеблемости корней. Аналогичное свойство для показателей колеблемости гиперконей было установлено И.Н. Сергеевым в [16].

Поиски точек разрыва и неинвариантности относительно бесконечно малых возмущей при $n > 2$ на множестве $\mathcal{M}^n$ для некоторых отдельных крайних частот продолжались в работах [17, 18].

Настоящая работа посвящена исследованию на непрерывность крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем. А именно, при любом $n > 2$ доказано существование точек из множества $\mathcal{M}^n$, в которых крайние показатели колеблемости нулей, корней и гиперкорней не являются непрерывными и инвариантными относительно бесконечно малых возмущений.

2. Показатели колеблемости решений дифференциальных систем

Определение 1 [1, 2]. Для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x \in \mathcal{S}^n_*$ через $\nu^\alpha(x, m, t)$ при $\alpha \in \{0, +, *\}$ соответственно обозначим:

– число *нулей* скалярного произведения $\langle x, m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число *корней* (т.е. нулей с учетом их *кратности*) скалярного произведения $\langle x, m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число *гиперкорней* скалярного произведения $\langle x, m\rangle$ на промежутке $(0, t]$, где в процессе подсчета этого количества каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз независимо от их фактической кратности.

При каждом $\alpha \in \{0, +, *\}$ к определению 1 добавим обозначение

$$\nu^\alpha(x, m, t_1, t_2) = \nu^\alpha(x, m, t_2) - \nu^\alpha(x, m, t_1), \quad 0 < t_1 < t_2.$$

Определение 2 [1–3]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x \in \mathcal{S}^n_*$ при $\alpha \in \{0, +, *\}$

соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t)\right),$$

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t)\right).$$

По каждому из перечисленных показателей колеблемости $\omega^{\alpha} = \hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}, \check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}, \hat{\nu}^{\alpha}_{\circ}, \check{\nu}^{\alpha}_{\circ}$ образуем крайние показатели колеблемости системы $A \in \mathcal{M}^n$ с помощью формул

$$\omega^{\alpha}_1(A) = \inf_{x\in\mathcal{S}_*(A)} \omega^{\alpha}(x), \quad \omega^{\alpha}_n(A) = \sup_{x\in\mathcal{S}_*(A)} \omega^{\alpha}(x), \quad \alpha \in \{0,+,*\}$$

которые будем рассматривать как функционалы на линейном топологическом пространстве $\mathcal{M}^n$ с естественными для функции линейными операциями и равномерной на $\mathbb{R}_+$ топологией, задаваемой метрикой

$$\rho(A,B) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A(t)-B(t)|, 1\}, \quad A, B \in \mathcal{M}^n.$$

Определение 3. Назовем спектром показателя $\kappa : \mathcal{S}_*(A) \to \mathbb{R}_+$ для системы $A \in \mathcal{M}^n$ множество

$$\mathrm{Spec}_{\kappa}(A) \equiv \{\kappa(x) \,|\, x \in \mathcal{S}_*(A)\}.$$

Определение 4 [19]. Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ введем обозначение

$$\mathcal{B}(A) = \{B \in \mathcal{M}^n | \lim_{t\to+\infty} |A(t)-B(t)| = 0\},$$

при котором возмущение $B - A$ назовем бесконечно малым.

Будем говорить, что функционал ω, определенный на $\mathcal{M}^n$, не инвариантен в точке $A \in \mathcal{M}^n$ относительно бесконечно малых возмущений, если существует система $B \in \mathcal{B}(A)$, удовлетворяющая условию $\omega(B) \neq \omega(A)$.

3. Формулировки вспомогательного и основного результатов

Лемма. *Пусть последовательность положительных чисел* $t_1 < t_2 < \ldots$ *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{p\to+\infty} t_p = +\infty, \qquad \lim_{p\to+\infty} \frac{t_{p+1}}{t_p} = 1.$$

Тогда для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ *любой системы* $A \in \mathcal{M}^n$ *при каждом* $\alpha \in \{0, +, *\}$ *выполнены равенства*

$$\check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \varliminf_{p \to +\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^{\alpha}(x, m, t_p), \quad \hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \varlimsup_{p \to +\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^{\alpha}(x, m, t_p),$$

$$\check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x) \equiv \varliminf_{p \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t_p} \nu^{\alpha}(x, m, t_p), \quad \hat{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x) \equiv \varliminf_{p \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t_p} \nu^{\alpha}(x, m, t_p),$$

а при дополнительном условии $\lim\limits_{p \to +\infty} (t_{p+1} - t_p) = +\infty$, *верно еще и следующее: если для некоторого числа* $p \geqslant 0$ *в последнем пределе каждое из чисел* t_p *уменьшить на* $T_p \leqslant pT$, *а каждое из чисел* $\nu(x, m, t_p)$ *— на* $\nu_p \leqslant pT$, *то значение предела от этого не изменится.*

Доказательство этой леммы сводится к повторению рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 7 [4].

Имеет место

Теорема. *Для любого* $n \geqslant 3$ *в пространстве* $\mathcal{M}^n$ *существует точка, в которой ни один из крайних показателей колеблемости не является ни непрерывным, ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу, ни даже инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.*

4. Доказательство основного результата

1. *Выбор вспомогательных функций.*

Зафиксируем достаточно малое $\epsilon > 0$. Возьмем 2π периодические непрерывно-дифференцируемые функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$, возрастающие на отрезках $[0,\, \pi/2]$, $[3\pi/2,\, 2\pi]$, убывающие на $[\pi/2,\, 3\pi/2]$, а на концах указанных промежутков принимающие значения

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi(2\pi) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(2\pi) =$$

$$= \psi(0) = \psi(\pi) = \psi(2\pi) = \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}(2\pi) = 0,$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = \varphi_1(2\pi) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_1(2\pi) =$$

$$= \psi_1(0) = \psi_1(\pi) = \psi_1(2\pi) = \dot{\psi}_1(0) = \dot{\psi}_1(2\pi) = 0,$$

$$\varphi(\pi/2) = \pi/2,\ \varphi(3\pi/2) = -\pi/2,\ \psi(\pi/2) = \pi/2 - \epsilon,\ \psi(3\pi/2) = -\pi/2 + \epsilon,$$

$$\varphi_1(\pi/2) = \pi,\ \varphi(3\pi/2) = -\pi/2,\ \psi_1(\pi/2) = \pi - \epsilon,\ \psi_1(3\pi/2) = -\pi/2 + \epsilon,$$

$$\dot{\varphi}(t) \cdot \dot{\psi}(t) \cdot \dot{\varphi}_1(t) \cdot \dot{\psi}_1(t) \neq 0, \quad \forall\, t \in (0,\, \pi/2) \cup (3\pi/2,\, 2\pi) \cup (\pi/2,\, 3\pi/2),$$

$$\ddot{\varphi}(2\pi(k-1)) \cdot \ddot{\psi}(2\pi(k-1)) \cdot \ddot{\varphi}_1(2\pi(k-1)) \cdot \ddot{\psi}_1(2\pi(k-1)) \neq 0.$$

Далее, на $\mathbb{R}_+$ выбираем непрерывно-дифференцируемые функций $\phi(t), \phi_1(t)$, возрастающие при каждом $k \in \mathbb{N}$ на промежутках

$$I_{k-1} \equiv (2\pi(k-1),\, 2\pi(k-1)+\pi/2), \quad I_{k+1} \equiv (2\pi(k-1)+3\pi/2,\, 2\pi(k-1)+2\pi),$$

убывающие на

$$I_k \equiv (2\pi(k-1)+\pi/2,\, 2\pi(k-1)+3\pi/2), \quad k \in \mathbb{N},$$

а на концах указанных промежутков принимающие значения

$$\phi(\pi k) = \dot{\phi}(2\pi(k-1)) = \phi_1(\pi k) = \dot{\phi}_1(2\pi(k-1)) = 0,$$
$$\ddot{\phi}(2\pi(k-1)) \cdot \ddot{\phi}_1(2\pi(k-1)) \neq 0,$$
$$\dot{\phi}(t) \cdot \dot{\phi}_1(t) \neq 0, \quad \forall\, t \in I_{k-1} \cup I_k \cup I_{k+1},$$
$$\phi(2\pi(k-1)+\pi/2) = \pi/2 - \epsilon_k, \quad \phi(2\pi(k-1)+3\pi/2) = -\pi/2 + \epsilon_k,$$
$$\phi_1(2\pi(k-1)+\pi/2) = \pi - \epsilon_k, \quad \phi_1(2\pi(k-1)+3\pi/2) = -\pi/2 + \epsilon_k,$$

где $\{\epsilon_k\}$ - последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю.

Эти функций подберем так, чтобы для некоторых $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{R}$ выполнялись условия

$$|\dot{\psi}(t) - \dot{\varphi}(t)| \leqslant l_1\epsilon, \quad t \in [0,\, 2\pi], \tag{1}$$
$$|\dot{\psi}_1(t) - \dot{\varphi}_1(t)| \leqslant l_2\epsilon, \quad t \in [0,\, 2\pi], \tag{2}$$
$$|\dot{\phi}(t) - \dot{\varphi}(t)| \leqslant l_3\epsilon_k, \quad t \in [2\pi(k-1),\, 2\pi k], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$
$$|\dot{\phi}_1(t) - \dot{\varphi}_1(t)| \leqslant l_4\epsilon_k, \quad t \in [2\pi(k-1),\, 2\pi k], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Определим последовательность промежутков $\Delta_k \equiv (2(k-1)\pi,\, 2k\pi]$ и зададим следующие функции

$$\gamma(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in \Delta_1, \\ \psi(t), & t \in \Delta_2, \\ \varphi(t), & t \in \Delta_3, \\ \psi(t), & t \in \Delta_4, \\ \ldots, \end{cases} \qquad \gamma_1(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in \Delta_1, \\ \psi_1(t), & t \in \Delta_2, \\ \varphi_1(t), & t \in \Delta_3, \\ \psi_1(t), & t \in \Delta_4, \\ \ldots \end{cases}$$

2. *Рассуждения при любом четном $n \geqslant 2$.*

2.1. Нетрудно проверить, что матрица

$$X_n(t) = \left(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^n\right) = \begin{pmatrix} \cos\psi(t) & -\sin\psi(t) & 0 & \dots & 0 \\ \sin\psi(t) & \cos\psi(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \cos\psi(t) & -\sin\psi(t) \\ 0 & 0 & \dots & \sin\psi(t) & \cos\psi(t) \end{pmatrix}$$

является фундаментальной для системы

$$A_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot\psi(t) & 0 & \dots & 0 \\ \dot\psi(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & -\dot\psi(t) \\ 0 & 0 & \dots & \dot\psi(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n.$$

Пусть в общем решении $x_c = c_1 x_n^1 + c_2 x_n^2 + \dots + c_n x_n^n \in \mathcal{S}_*(A_n)$ ненулевой коэффициент имеет вид: c_{2k-1} или c_{2k}. Тогда для вектора

$$m^c = (0, \dots, 0, c_{2k-1}, c_{2k}, 0, \dots, 0)$$

скалярное произведение $\langle x_c(t), m^c\rangle \neq 0$ при любом $t > 0$, поэтому

$$\nu_\circ^0(x_c) = \nu_\circ^+(x_c) = \nu_\circ^*(x_c) = \nu_\bullet^0(x_c) = \nu_\bullet^+(x_c) = \nu_\bullet^*(x_c) = 0.$$

Следовательно, все старшие и младшие показатели колеблемости равны нулю.

2.2. Все рассуждения предыдущего пункта повторяются и для фундаментальной матрицы

$$Y_n(t) = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) & 0 & \dots & 0 \\ \sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) \\ 0 & 0 & \dots & \sin\phi(t) & \cos\phi(t) \end{pmatrix}$$

системы

$$B_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot\phi(t) & 0 & \dots & 0 \\ \dot\phi(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & -\dot\phi(t) \\ 0 & 0 & \dots & \dot\phi(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n.$$

2.3. Возьмем фундаментальную матрицу

$$Z_n(t) = \left(z_n^1, z_n^2, \ldots, z_n^n\right) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 & \ldots & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ 0 & 0 & \ldots & \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix}$$

системы

$$C_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot\varphi(t) & 0 & \ldots & 0 \\ \dot\varphi(t) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & 0 & -\dot\varphi(t) \\ 0 & 0 & \ldots & \dot\varphi(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n.$$

Для любых $z_c = c_1 z_n^1 + c_2 z_n^2 + \cdots + c_n z_n^n \in \mathcal{S}_*(C_n)$ и $m \in \mathbb{R}_*^n$ скалярное произведение $\langle z_c(t), m\rangle = h\sin(\varphi(t)+\varphi_0)$ тождественно равно нулю или имеет на каждом промежутке вида $(2\pi(k-1), 2\pi k]$ два нуля. Поэтому в последнем случае остается следить за тем, чтобы эти нули не были кратными. Если один из коэффициентов c_{2k-1} или c_{2k} отличен от нуля, то выбираем вектор вида $m^1 = (0, \ldots, 0, m_{2k-1}, m_{2k}, 0, \ldots, 0)$. Понятно, что решение z_c является 2π периодическим и

$$\inf_{m\in\mathbb{R}_*^2} \nu^\alpha(z_c, m, 2\pi) = \nu^\alpha(z_c, m^1, 2\pi) = 2, \quad \alpha \in \{0, +, *\},$$

где векторы m^1 и m^c не являются пропорциональными, так как $\nu^*(z_c, m^c, 2\pi) = +\infty$.

Следовательно, для выбранного решения при любом $\alpha \in \{0, +, *\}$ справедливы равенства

$$\nu_\circ^\alpha(z_c) = \lim_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z_c, m, t) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z_c, m^1, t) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{2\pi k}\nu^\alpha(z_c, m^1, 2\pi k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi k}{2\pi k} = 1,$$

$$\nu_\bullet^\alpha(z_c) = \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z_c, m, t) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z_c, m^1, t) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{2\pi k}\nu^\alpha(z_c, m^1, 2\pi k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi k}{2\pi k} = 1.$$

2.4. Система

$$D_n(t)=\begin{pmatrix} 0 & -\dot\gamma(t) & 0 & \dots & 0\\ \dot\gamma(t) & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & -\dot\gamma(t)\\ 0 & 0 & \dots & \dot\gamma(t) & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}^n$$

вместе с фундаментальной матрицей

$$U_n(t)=\left(u_n^1,u_n^2,\dots,u_n^n\right)=\begin{pmatrix} \cos\gamma(t) & -\sin\gamma(t) & 0 & \dots & 0\\ \sin\gamma(t) & \cos\gamma(t) & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \cos\gamma(t) & -\sin\gamma(t)\\ 0 & 0 & \dots & \sin\gamma(t) & \cos\gamma(t) \end{pmatrix}$$

является 4π периодической.

Для любых $u_c=c_1u_n^1+c_2u_n^2+\dots+c_nu_n^n\in\mathcal{S}_*(D_n)$ и $m\in\mathbb{R}^n_*$ скалярное произведение $\langle u_c(t),m\rangle=h\sin(\gamma(t)+\gamma_0)$ также является 4π периодическим и на промежутке $(2\pi,4\pi]$ тождественно равно нулю или не имеет вовсе нулей или имеет два нуля. Тогда если один из коэффициентов c_{2k-1} или c_{2k} отличен от нуля, то выбираем вектор вида $m^2=(0,\dots,0,m_{2k-1},m_{2k},0,\dots,0)$, чтобы выполнялось равенство

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\nu^\alpha(u_c,m,2\pi,4\pi)=\nu^\alpha(u_c,m^2,2\pi,4\pi)=0,\quad \alpha\in\{0,+,*\},$$

при этом вектор m^2 можно выбрать непропорциональным вектору m^c. Поэтому

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\nu^\alpha(u_c,m,4\pi)=\nu^\alpha(u_c,m^2,4\pi)=2,\quad \alpha\in\{0,+,*\}.$$

Следовательно, для выбранного решения при любом $\alpha\in\{0,+,*\}$ справедливы равенства

$$\nu^\alpha_\bullet(u_c)=\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(u_c,m,t)=$$

$$=\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(u_c,m^2,t)=\lim_{k\to+\infty}\frac{\pi}{4\pi k}\nu^\alpha(u_c,m^2,4\pi k)=\lim_{k\to+\infty}\frac{2\pi k}{4\pi k}=1/2,$$

$$\nu^\alpha_\circ(u_c)=\varlimsup_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(u_c,m,t)=$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(u_c, m^2, t) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{4\pi k} \nu^\alpha(u_c, m^2, 4\pi k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi k}{4\pi k} = 1/2.$$

3. *Рассуждения для всех старших показателей колеблемости при любом нечетном $n \geqslant 3$.*

3.1. Для заданного нечетного $k \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{R}_+$ выберем n-мерные $(n = k + 2)$ вектор-функций

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ x^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, x^k(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x^{k+1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\psi(t) \\ \sin\psi(t) \end{pmatrix},$$

$$x^{k+2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\psi(t) \\ \cos\psi(t) \end{pmatrix}, \quad y^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\phi(t) \\ \sin\phi(t) \end{pmatrix}, \quad y^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\phi(t) \\ \cos\phi(t) \end{pmatrix},$$

$$z^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}, \quad z^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix},$$

$$u^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\gamma(t) \\ \sin\gamma(t) \end{pmatrix}, \quad u^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\gamma(t) \\ \cos\gamma(t) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что матрицы

$$X(t) = \left(x^1(t), \ldots, x^{k+2}(t)\right), \quad Y(t) = \left(x^1(t), \ldots, x^k(t), y^1(t), y^2(t)\right),$$

$$Z(t) = \left(x^1(t), \ldots, x^k(t), z^1(t), z^2(t)\right), \quad U(t) = \left(x^1(t), \ldots, x^k(t), u^1(t), u^2(t)\right)$$

являются фундаментальными для следующих систем

$$A(t) = \dot{X}(t)X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & -\dot{\psi}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\psi}(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n,$$

$$B(t) = \dot{Y}(t)Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & -\dot{\phi}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\phi}(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n,$$

$$C(t) = \dot{Z}(t)Z^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & -\dot{\varphi}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\varphi}(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n,$$

$$D(t) = \dot{U}(t)U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & -\dot{\gamma}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\gamma}(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n$$

соответственно.

3.2. Пусть выполняется условие $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2 > 0$ и номер отличного от нуля коэффициента равен r. Тогда для произвольного решения $x_c = c_1x^1 + \dots + c_kx^k + c_{k+1}x^{k+1} + c_{k+2}x^{k+2} \in \mathcal{S}_*(A)$ и вектора m^r с ненулевыми компонентами, за исключением r-го, выполняются равенства

$$\nu^0(x_c, m^r, t) = \nu^+(x_c, m^r, t) = \nu^*(x_c, m^r, t) = 0$$

при любом $t > 0$.

Если $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, $c_{k+1}^2 + c_{k+2}^2 \neq 0$, то для решения $x_c = c_{k+1}x^{k+1} + c_{k+2}x^{k+2}$ справедлива цепочка равенств (см. пункт 2.1 настоящего доказательства)

$$\nu^0_\bullet(x_c) = \nu^+_\bullet(x_c) = \nu^*_\bullet(x_c) = \nu^0_\circ(x_c) = \nu^+_\circ(x_c) = \nu^*_\circ(x_c) = 0.$$

из которой при любом $\omega=\nu^0_\bullet,\nu^+_\bullet,\nu^*_\bullet,\nu^0_\circ,\nu^+_\circ,\nu^*_\circ$ вытекает $\omega_n(A)=0$.

3.3. Аналогичные рассуждения приводят к равенствам

$$\omega_n(B)=0,\quad \omega_n(C)=1,\quad \omega_n(D)=1/2$$

при каждом $\omega=\nu^0_\bullet,\nu^+_\bullet,\nu^*_\bullet,\nu^0_\circ,\nu^+_\circ,\nu^*_\circ$.

4. *Рассуждения для младших показателей колеблемости при* $n=3$.

4.1. Выбираем фундаментальную матрицу

$$X_3(t)=\big(x_3^1(t),x_3^2(t),x_3^3(t)\big)=\begin{pmatrix} e^t\cos^2\psi_1(t) & e^{3t}\sin\psi_1(t) & 0\\ 0 & e^{3t}\cos\psi_1(t) & e^{2t}\sin^2\psi_1(t)\\ e^t\sin\psi_1(t) & 0 & e^{2t}\cos\psi_1(t)\end{pmatrix}$$

некоторой системы $A_3\in\mathcal{M}^3$ и в зависимости от вида решения

$$x_c(t)=c_1x_3^1(t)+c_2x_3^2(t)+c_3x_3^3(t)$$

выбранной системы подберем соответствующие векторы, которым они реже всего будут ортогональны или вообще не будут.

а). В самом деле, для решения $x_3^1\in\mathcal{S}_*(A_3)$ справедливо разложение

$$\langle x_3^1,m\rangle=e^t(m_1\cos^2\psi_1(t)+m_3\sin\psi_1(t))=$$

$$=\begin{cases} 0,\quad \text{если}\quad m_1=m_3=0,\\ e^t(-m_1\sin^2\psi_1(t)+m_3\sin\psi_1(t)+m_1).\end{cases}$$

Если $m_1=0$ и $m_3\neq0$, то при любом $k\in\mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\nu^0(x_3^1,m,2(k-1)\pi,2k\pi)=3,\quad \nu^+(x_3^1,m,2(k-1)\pi,2k\pi)=5,$$

$$\nu^*(x_3^1,m,2(k-1)\pi,2k\pi)=+\infty.$$

Если $m_3=0$ и $m_1\neq0$, то при любом $k\in\mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\nu^0(x_3^1,m,2(k-1)\pi,2k\pi)=3,\quad \nu^+(x_3^1,m,2(k-1)\pi,2k\pi)=8,$$

$$\nu^*(x_3^1,m,2(k-1)\pi,2k\pi)=+\infty.$$

Если $m_1\cdot m_3\neq0$, то равенство $\langle x_3^1,m\rangle=0$ равносильно квадратному уравнению относительно $\sin\psi_1(t)$:

$$\sin^2\psi_1(t)-\frac{m_3}{m_1}\sin\psi_1(t)-1=0.$$

Заметим, что оно имеет два корня, причем один из них по модулю больше 1, а другой меньше 1. С другой стороны, из условия $\epsilon - \pi/2 \leqslant \psi_1(t) \leqslant \pi - \epsilon$ следует двусторонняя оценка

$$-\cos\epsilon \leqslant \sin\psi_1(t) \leqslant 1, \quad -\cos\epsilon \leqslant \cos\psi_1(t) \leqslant 1.$$

Число δ_1 выберем так, чтобы выполнялось равенство $\cos\epsilon = 1 - \delta_1$. Через $S_1^2(\delta)$ и $S_3^2(\delta)$ обозначим множество векторов $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3_*$ единичной сферы, удовлетворяющих соответственно условию $m_3 = \delta m_1$ и $m_3 = \delta m_2$ при $\delta \in (0, \delta_1)$.

Для решения x_3^1 и любого вектора $m \in S_1^2(\delta)$ меньший по модулю 1 корень квадратного уравнения (получаемого из условия $\langle x_3^1, m\rangle = 0$) $\sin^2\psi_1(t) - \delta\sin\psi_1(t) - 1 = 0$ относительно $\sin\psi_1(t)$ удовлетворяет соотношению

$$-1 < \frac{\delta - \sqrt{\delta^2+4}}{2} < \delta - 1 < \delta_1 - 1 = -\cos\epsilon.$$

Поэтому скалярное произведение $\langle x_3^1, m\rangle$ не будет иметь нулей на $\mathbb{R}_+$.

Для решения x_3^3 и вектора $m \in S_3^2(\delta)$ проводятся аналогичные рассуждения. Следовательно, при каждом $\alpha \in \{0, +, *\}$ выполняются соотношения

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(x_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = \nu^\alpha(x_3^1, m_3^1(\delta), 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 0,$$

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(x_3^3, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = \nu^\alpha(x_3^3, m_3^3(\delta), 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 0,$$

из которых следует цепочка равенств

$$\nu_\circ^0(x_3^1) = \nu_\circ^+(x_3^1) = \nu_\circ^*(x_3^1) = \nu_\bullet^0(x_3^1) = \nu_\bullet^+(x_3^1) = \nu_\bullet^*(x_3^1) =$$
$$= \nu_\circ^0(x_3^3) = \nu_\circ^+(x_3^3) = \nu_\circ^*(x_3^3) = \nu_\bullet^0(x_3^3) = \nu_\bullet^+(x_3^3) = \nu_\bullet^*(x_3^3) = 0.$$

б). Решение x_3^2 вращается против часовой стрелки на угол $\pi - \epsilon$, затем по часовой стрелке вращается на угол $1,5\pi - 2\epsilon$, далее, возвращаясь назад, занимает исходное положение. За это время решение бывает ортогонольно не менее двух раз любому напред заданному направлению. Поэтому при каждом $\alpha \in \{0, +, *\}$ и $m_3^2 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$ имеет место

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(x_3^2, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = \nu^\alpha(x_3^2, m_3^2, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 2,$$

а значит, справедливы равенства

$$\nu_\circ^0(x_c) = \nu_\circ^+(x_c) = \nu_\circ^*(x_c) = \nu_\bullet^0(x_c) = \nu_\bullet^+(x_c) = \nu_\bullet^*(x_c) = 1.$$

в). Для остальных решений $x_c \in \mathcal{S}_*(C_3)$ при $c_2 \neq 0$ в силу теоремы 2 работы [4] найдутся такие $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in [0,\, \epsilon]$, что при любом $t > 0$ для вектора $m_3^2(\epsilon) = \big(\sqrt{2} - \epsilon_1, \sqrt{2} - \epsilon_2, \epsilon_3\big)$ справедливо неравенство $\nu^*(x_c, m_3^2(\epsilon), t) < +\infty$ и

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(x_c, m, t) = \nu^\alpha(x_c, m_3^2(\epsilon), t), \quad \alpha \in \{0, +, *\}.$$

При этом функция $\nu^\alpha(x_c, m_3^2(\epsilon), t)$ при $t \to +\infty$ эквивалентна $\nu^\alpha(x_3^2, m_3^2, t)$.

Если же $c_2 = 0$, то найдется вектор $m_3^3(\delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^3_*$ при котором функция $\nu^\alpha(x_c, m_3^3(\delta, \epsilon), t)$ при $t \to +\infty$ будет эквивалентна функции $\nu^\alpha(x_3^3, m_3^3(\delta), t)$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\mathrm{Spec}_\kappa(A_3) = \{0; 1\}, \quad \kappa = \nu^0_\circ, \nu^0_\bullet, \nu^+_\circ, \nu^+_\bullet, \nu^*_\circ, \nu^*_\bullet.$$

4.2. Все рассуждения предыдущего пункта полностью повторяются для слабых показателей колеблемости решений некоторой системы $B_3 \in \mathcal{M}^3$ с фундаментальной матрицей

$$Y_3(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos^2 \phi_1(t) & e^{3t} \sin \phi_1(t) & 0 \\ 0 & e^{3t} \cos \phi_1(t) & e^{2t} \sin^2 \phi_1(t) \\ e^t \sin \phi_1(t) & 0 & e^{2t} \cos \phi_1(t) \end{pmatrix}$$

за исключением тех случаев, когда векторы (на которых реализуется минимум) не зависят от δ. В остальных случаях к рассуждениям из предыдущего пункта добавляем условие $\delta \to 0$, поэтому

$$\mathrm{Spec}_\kappa(B_3) = \{0; 1\}, \quad \kappa = \nu^0_\circ, \nu^+_\circ, \nu^*_\circ.$$

4.3. Рассмотрим систему $C_3 \in \mathcal{M}^3$ с фундаментальной матрицей

$$Z_3(t) = \big(z_3^1(t), z_3^2(t), z_3^3(t)\big) = \begin{pmatrix} e^t \cos^2 \varphi_1(t) & e^{3t} \sin \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & e^{3t} \cos \varphi_1(t) & e^{2t} \sin^2 \varphi_1(t) \\ e^t \sin \varphi_1(t) & 0 & e^{2t} \cos \varphi_1(t) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при изменении $\varphi_1(t) \in [-\frac{\pi}{2},\, \pi]$ функции $\sin \varphi_1(t)$ и $\cos \varphi_1(t)$ принимают все значения из отрезка $[-1,\, 1]$.

Докажем, что для любого вектора $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3_*$ и произвольного решения

$$z_c(t) = c_1 z_3^1(t) + c_2 z_3^2(t) + c_3 z_3^3(t) \in \mathcal{S}_*(C_3)$$

скалярное произведение $\langle z_c, m \rangle$ либо тождественно равно нулю, либо имеет на каждом полуинтервале длины 2π не менее двух нулей, быть может начиная с некоторого достаточно большого момента времени.

а). В самом деле, для решения $z_3^3 \in \mathcal{S}_*(C_3)$ справедливо разложение

$$\langle z_3^3, m\rangle = e^{2t}(m_2 \sin^2\varphi_1(t) + m_3\cos\varphi_1(t)) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad m_2 = m_3 = 0, \\ e^{2t}(-m_2\cos^2\varphi_1(t) + m_3\cos\varphi_1(t) + m_2). \end{cases}$$

Если $m_2 = 0$ и $m_3 \neq 0$, то функция $\langle z_3^3, m\rangle = m_3 e^{2t}\cos\varphi_1(t)$ на каждом полуинтервале длины 2π имеет 3 нуля, 4 корня и бесконечно много гиперкорней.

Если $m_2 \neq 0$ и $m_3 = 0$, то функция $\langle z_3^3, m\rangle$ на каждом полуинтервале длины 2π имеет 3 нуля, 10 корней и бесконечно много гиперкорней.

Если $m_2 \cdot m_3 \neq 0$, то равенство $\langle z_3^3, m\rangle = 0$ равносильно квадратному уравнению относительно $\cos\varphi_1(t)$

$$\cos^2\varphi_1(t) - \frac{m_3}{m_2}\cos\varphi_1(t) - 1 = 0.$$

Заметим, что оно имеет два корня, причем один из них по модулю больше 1, а другой меньше 1, обозначим его через l.

Если вектор $m \in \mathbb{R}^3_*$ подобран так, что $0 < l < 1$, то справедливы равенства

$$\nu^0(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = \nu^+(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = \nu^*(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = 4.$$

Если вектор $m \in \mathbb{R}^3_*$ подобран так, что $-1 < l < 0$, то справедливы равенства

$$\nu^0(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = \nu^+(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = \nu^*(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = 2.$$

Для решения z_3^1 проводятся аналогичные рассуждения, а для решения z_3^2 повторяются рассуждения из пункта 4.1. б) настоящего доказательства. Следовательно, выполнены равенства

$$\nu^0_\circ(z_3^1) = \nu^+_\circ(z_3^1) = \nu^*_\circ(z_3^1) = \nu^0_\bullet(z_3^1) = \nu^+_\bullet(z_3^1) = \nu^*_\bullet(z_3^1) =$$

$$= \nu^0_\circ(z_3^2) = \nu^+_\circ(z_3^2) = \nu^*_\circ(z_3^2) = \nu^0_\bullet(z_3^2) = \nu^+_\bullet(z_3^2) = \nu^*_\bullet(z_3^2) =$$

$$= \nu^0_\circ(z_3^3) = \nu^+_\circ(z_3^3) = \nu^*_\circ(z_3^3) = \nu^0_\bullet(z_3^3) = \nu^+_\bullet(z_3^3) = \nu^*_\bullet(z_3^3) = 1.$$

Значения показателей колеблемости на остальных решениях $z_c \in \mathcal{S}_*(C_3)$ не меняются (см. пункт 4.1. в). Таким образом, имеем

$$\mathrm{Spec}_\kappa(C_3) = \{1\}, \quad \kappa = \nu^0_\circ, \nu^0_\bullet, \nu^+_\circ, \nu^+_\bullet, \nu^*_\circ, \nu^*_\bullet.$$

4.4. Возьмем общее решение

$$u_c(t) = c_1 u_3^1(t) + c_2 u_3^2(t) + c_3 u_3^3(t)$$

некоторой системы $D_3 \in \mathcal{M}^3$ с фундаментальной матрицей

$$U_3(t) = \big(u_3^1(t), u_3^2(t), u_3^3(t)\big) = \begin{pmatrix} e^t \cos^2 \gamma_1(t) & e^{3t} \sin \gamma_1(t) & 0 \\ 0 & e^{3t} \cos \gamma_1(t) & e^{2t} \sin^2 \gamma_1(t) \\ e^t \sin \gamma_1(t) & 0 & e^{2t} \cos \gamma_1(t) \end{pmatrix}.$$

С помощью рассуждений, проводимых в пункте 4.1 настоящего доказательства, для решений $u_3^1(t), u_3^2(t), u_3^3(t)$ подберем векторы $m \in \mathbb{R}^3_*$, на которых реализуются минимумы в определениях показателей колеблемости:

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(u_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = \nu^\alpha(u_3^1, m_3^1, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = 2,$$

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(u_3^2, m, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = \nu^\alpha(u_3^2, m_3^2, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = 4,$$

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(u_3^3, m, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = \nu^\alpha(u_3^3, m_3^3, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = 2,$$

где $m_3^2 = \big(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\big)$. Откуда при любом $\alpha \in \{0, +, *\}$ следуют равенства

$$\nu_\circ^\alpha(u_3^1) = \nu_\bullet^\alpha(u_3^1) = \nu_\circ^\alpha(u_3^3) = \nu_\bullet^\alpha(u_3^3) = 0,5, \quad \nu_\circ^\alpha(u_3^2) = \nu_\bullet^\alpha(u_3^2) = 1.$$

Понятно, что новых значений показателей колеблемости на других решениях u_c, отличных от 0,5 и 1, не будет, поэтому

$$\mathrm{Spec}_\kappa(D_3) = \{0,5; 1\}, \quad \kappa = \nu_\circ^0, \nu_\bullet^0, \nu_\circ^+, \nu_\bullet^+, \nu_\circ^*, \nu_\bullet^*.$$

5. *Рассуждения для младших показателей колеблемости при любом нечетном* $n > 3$.

Выберем фундаментальные матрицы

$$\mathrm{diag}\left[Z_3(t), A_\psi(t), \ldots A_\psi(t)\right], \quad \mathrm{diag}\left[Z_3(t), A_\phi(t), \ldots A_\phi(t)\right],$$

$$\mathrm{diag}\left[Z_3(t), A_\varphi(t), \ldots A_\varphi(t)\right], \quad \mathrm{diag}\left[Z_3(t), A_\gamma(t), \ldots A_\gamma(t)\right],$$

где $Z_3(t)$ взята из п. 4.3 настоящего доказательства и $A_u(t) = \begin{pmatrix} \cos u(t) & -\sin u(t) \\ \sin u(t) & \cos u(t) \end{pmatrix}$, некоторых систем $A_n, B_n, C_n, D_n \in \mathcal{M}^n$.

Если в формулах общих решений этих систем коэффициенты $c_4, c_5, \ldots, c_n$ равны нулю, то вектор $m \in \mathbb{R}^n_*$ с первыми тремя ненулевыми компонентами выбираем согласно рассуждениям, проводимым в пункте 4.3 настоящего доказательства. Пусть в формуле общего решения второй системы хотя бы один из коэффициентов $c_4, c_5, \ldots, c_n$ отличен от нуля и его номер равен r. Тогда выбираем вектор $m \in \mathbb{R}^n_*$ с нулевыми компонентами за исключением r-го. Тогда при любом $\varkappa = \nu^0_\circ, \nu^+_\circ, \nu^*_\circ, \nu^0_\bullet, \nu^+_\bullet, \nu^*_\bullet$ справедливы равенства

$$\mathrm{Spec}_\varkappa(A_n) = \mathrm{Spec}_\varkappa(B_n) = \{0;1\}, \quad \mathrm{Spec}_\varkappa(C_n) = \{1\}, \quad \mathrm{Spec}_\varkappa(D_n) = \{0,5;1\}.$$

6. *Существование точек неинвариантности для младших сильных показателей колеблемости при $n = 3$.*

6.1. Сначала выберем вспомогательные монотонные функции $\vartheta, \eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, обладающие свойствами

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \leqslant 0, \\ 1, & \text{если} \quad t \geqslant 1, \end{cases} \qquad \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \leqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

Для множества $\mathrm{M} \equiv \left[\sqrt{1,125} - \epsilon,\ \sqrt{1,125} + \epsilon\right]$ зададим семейство систем $A_{\overline{\mu}} \in \mathcal{M}^3$, зависящее от последовательности параметров $\overline{\mu} \equiv (\mu_1, \mu_2, \ldots) \in \mathrm{M}^\infty$, фундаментальная матрица $X_{\overline{\mu}}(t)$ которой при любом фиксированном значении p имеет соответственно представление:

$$\begin{pmatrix} \mu_p & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [t_{p-1} + 2\pi,\ r_p]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \mu_p + \vartheta(2/\pi(t - r_p))(1 - \mu_p) & 1 + \vartheta(2/\pi(t - r_p))(\mu_p - 1) & \sin t \\ \vartheta(2/\pi(t - r_p)) & -\sin t & 1 \\ \vartheta(2/\pi(t - r_p)) & -1 + \vartheta(2/\pi(t - r_p)) & -\sin t \end{pmatrix}$$

при $t \in [r_p,\ r_p + \pi/2]\,,$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p & 1 \\ 1 & -1 + \vartheta(2/\pi(t - r_p)) & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [r_p + \pi/2,\ r_p + \pi]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [r_p + \pi,\ r_p + 3\pi/2]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p & 1 \\ 1 & 0 & -\sin t \\ -\sin t & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [r_p + 3\pi/2,\ r_p + 2\pi]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p & \cos t \\ \cos t & 0 & -\sin t \\ -\sin t & 0 & -\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [r_p + 2\pi,\ s_p]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p + \vartheta(2/\pi(t-s_p))(1-\mu_p) & 1 + \vartheta(2/\pi(t-s_p))(\mu_p - 1) \\ 1 & \vartheta(2/\pi(t-s_p)) & -\sin t \\ -\sin t & \vartheta(2/\pi(t-s_p)) & -1 + \vartheta(2/\pi(t-s_p)) \end{pmatrix}$$

при $t \in [s_p,\ s_p + \pi/2]$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin t & \mu_p \\ 1 & 1 & -1 + \vartheta(2/\pi(t-s_p)) \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [s_p + \pi/2,\ s_p + \pi]\,,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin t & \mu_p \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [s_p + \pi,\ s_p + 3\pi/2]\,,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin t & \mu_p \\ -\sin t & 1 & 0 \\ -1 & -\sin t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [s_p + 3\pi/2,\ s_p + 2\pi]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \mu_p \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [s_p + 2\pi,\ \tau_p]\,,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin t & \mu_p + \vartheta(2/\pi(t-\tau_p))(1-\mu_p) \\ -\sin t & 1 & 0 \\ -\eta(2/\pi(t-\tau_p)) & -\sin t & 0 \end{pmatrix}$$

при $t \in [\tau_p,\ \tau_p + \pi/2]$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 + \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - \tau_p - \frac{\pi}{2}\right)) & 2\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - \tau_p - \frac{\pi}{2}\right)) \\ 0 & -1 & 4\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - \tau_p - \frac{\pi}{2}\right)) \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[\tau_p + \frac{\pi}{2},\, \tau_p + \frac{3\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} \eta(\frac{4}{\pi}\left(t - \tau_p - \frac{3\pi}{4}\right)) & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[\tau_p + \frac{3\pi}{4},\, \tau_p + \pi\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 1) & 1 & 1 \\ -1 + \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - \tau_p - \pi\right)) & 2 & 2 \\ -e^{-t}(\cos t + \eta(\frac{4}{\pi}\left(t - \tau_p - \pi\right))) & -1 - 3\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - \tau_p - \pi\right)) & 4 \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[\tau_p + \pi,\, \tau_p + \frac{5\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 1) & 1 & \sin 2t \\ 0 & 2 & 2 \\ -e^{-t}\cos t & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[\tau_p + \frac{5\pi}{4},\, \tau_p + \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 1) & 1 & \sin 2t \\ 0 & 2 & 2\cos 2t \\ -e^{-t}\cos t & -4\cos 2t & 4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[\tau_p + \frac{3\pi}{2},\, \tau_p + \frac{7\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 1) & 1 & \sin 2t \\ 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ -e^{-t}\cos t & -4\cos 2t & -4\sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[\tau_p + \frac{7\pi}{4},\, \tau_p + 2\pi\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 1) & \cos 2t & \sin 2t \\ 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ -e^{-t}\cos t & -4\cos 2t & -4\sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[\tau_p + 2\pi,\, q_p\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 1) & 1 & \sin 2t \\ 0 & -2\sin 2t & 2 \\ -e^{-t}\cos t & -4 & -4\sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[q_p,\, q_p + \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 1) & 1 & 1 \\ 2\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - q_p - \frac{\pi}{4}\right)) & -2 & 2 \\ -e^{-t}\cos t & -4 + \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - q_p - \frac{\pi}{4}\right))\,(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-q_p - 3\pi/4} + 4) & -4 \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[q_p + \frac{\pi}{4},\, q_p + \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 1) & \eta(\frac{4}{\pi}\left(t - q_p - \frac{\pi}{2}\right)) & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -e^{-t}\cos t & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-q_p - 3\pi/4} & -4 \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[q_p + \frac{\pi}{2},\, q_p + \frac{3\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 1) & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -e^{-t}\left(\cos t + \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - q_p - \frac{3\pi}{4}\right))\right) & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[q_p + \frac{3\pi}{4},\, q_p + \pi\right]$,

$$\begin{pmatrix} \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - q_p - \pi\right)) & e^{-t}(\cos t + 1) & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - q_p - \pi\right)) & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[q_p + \pi,\, q_p + \frac{5\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) & 1 \\ 2 & -2\eta(\frac{4}{\pi}\left(t - q_p - \frac{5\pi}{4}\right)) & 2 \\ 4 & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[q_p + \frac{5\pi}{4},\, q_p + \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[q_p + \frac{3\pi}{2},\, q_p + \frac{7\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) & 1 \\ 2 & 0 & -2\sin 2t \\ -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[q_p + \frac{7\pi}{4},\, q_p + 2\pi\right],$$

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) & \cos 2t \\ 2\cos 2t & 0 & -2\sin 2t \\ -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t & -4\cos 2t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[q_p + 2\pi,\, h_p\right],$$

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) & 1 \\ 2 & 0 & -2\sin 2t \\ -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p,\, h_p + \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-t}(\cos t + 1) & 1 \\ 2 & 2\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{\pi}{4}\right)) & -2 \\ -4 & -e^{-t}\cos t & -4 + \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{\pi}{4}\right))\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-h_p - 3\pi/4} + 4\right) \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[h_p + \frac{\pi}{4},\, h_p + \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-t}(\cos t + 1) & \eta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{\pi}{2}\right)) \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -e^{-t}\cos t & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-h_p - 3\pi/4} \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p + \frac{\pi}{2},\, h_p + \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-t}(\cos t + 1) & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -e^{-t}\left(\cos t + \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{\pi}{4}\right))\right) & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[h_p + \frac{3\pi}{4},\, h_p + \pi\right]$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \pi\right)) & e^{-t}(\cos t + 1) \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 4\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \pi\right)) & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p + \pi,\, h_p + \frac{5\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) \\ 2 & 2 & -2\eta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{5\pi}{4}\right)) \\ -4 & 4 & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p + \frac{5\pi}{4},\, h_p + \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p + \frac{3\pi}{2},\, h_p + \frac{7\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) \\ -2\sin 2t & 2 & 0 \\ -4 & -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p + \frac{7\pi}{4},\, h_p + 2\pi\right],$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t & 0 \\ -4\cos 2t & -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [h_p + 2\pi,\, t_p],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t & e^{-t}(\cos t + 1) \\ -2\sin 2t & 2 & 0 \\ -4 & -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[t_p,\, t_p + \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & e^{-t}(\cos t + 1) \\ -2 & 2 & \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - t_p - \frac{\pi}{4}\right)) \\ -4 & -4 & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[t_p + \frac{\pi}{4},\, t_p + \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1+\vartheta(\frac{2}{\pi}\left(t-t_p-\frac{\pi}{2}\right))\,(\mu_p-1) & 1 & e^{-t}(\cos t+1) \\ -2\eta(\frac{2}{\pi}\left(t-t_p-\frac{\pi}{2}\right)) & 2 & 1 \\ -4\eta(\frac{2}{\pi}\left(t-t_p-\frac{\pi}{2}\right)) & -4 & -e^{-t}(\cos t+\vartheta(\frac{2}{\pi}\left(t-t_p-\frac{\pi}{2}\right))) \end{pmatrix}$$

при $t\in\left[t_p+\frac{\pi}{2},\, t_p+\pi\right]$,

$$\begin{pmatrix} \mu_p & 1 & 0,5\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-t_p-\pi\right)) \\ 0 & 2-\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-t_p-\pi\right)) & 1 \\ 0 & -4+3\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-t_p-\pi\right)) & \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-t_p-\pi\right)) \end{pmatrix}$$

при $t\in\left[t_p+\pi,\, t_p+\frac{5\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} \mu_p & 1 & 0,5\sin 2t \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[t_p+\frac{5\pi}{4},\, t_p+\frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} \mu_p & 1 & 0,5\sin 2t \\ 0 & -\sin t & 1 \\ 0 & -1 & -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[t_p+\frac{3\pi}{2},\, t_p+2\pi\right],$$

где $t_0\equiv 0$ и

$$r_p\equiv t_{p-1}+2\pi+2\pi p,\quad s_p\equiv r_p+2\pi+2\pi p,\quad \tau_p\equiv s_p+2\pi+2\pi p,$$

$$q_p\equiv \tau_p+2\pi+2\pi p,\quad h_p\equiv q_p+2\pi+2\pi p,\quad t_p\equiv h_p+2\pi+2\pi p.$$

6.2. Зафиксируем произвольное $p\in\mathbb{N}$ и для заданного решения $x\in\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})$, вектора $m\in\mathbb{R}^3$ при любом $\alpha\in\{0,+,*\}$ обозначим

$$\nu^\alpha(x,m,I_p)\equiv\nu^\alpha(y,m,t_{p-1}+2\pi,r_p)+\nu^\alpha(x,m,r_p+2\pi,s_p)+\nu^\alpha(x,m,s_p+2\pi,\tau_p)+$$

$$+\nu^\alpha(x,m,\tau_p+2\pi,q_p)+\nu^\alpha(x,m,q_p+2\pi,h_p)+\nu^\alpha(x,m,h_p+2\pi,t_p).$$

Пусть задано отображение $\varphi\colon\mathbb{R}^3\to\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})$, переводящее каждую ненулевую точку $c\equiv(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3_*$ в решение

$$\varphi(c)=x_c\equiv c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3\in\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}}). \tag{5}$$

Последовательность

$$t_0=0,\qquad t_p=t_{p-1}+12\pi+12\pi p,\quad p\in\mathbb{N},$$

удовлетворяет условиям

$$\lim_{p\to+\infty} t_p = +\infty, \quad \lim_{p\to+\infty} (t_p - t_{p-1}) = +\infty,$$

а значит, обладает свойством

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{t_p}{t_{p-1}} = 1 + \lim_{p\to+\infty} \frac{24\pi}{t_{p-1}} + 12\pi \cdot \lim_{p\to+\infty} \frac{p-1}{t_{p-1}} = 1.$$

Последовательность $\{t_p\}$ удовлетворяет условиям леммы, поэтому при использовании формул для сильных показателей колеблемости можно не брать в расчет при каждом $p \in \mathbb{N}$ полуинтервалы

$$(t_{p-1},\, t_{p-1}+2\pi]\,,\, (r_p,\, r_p+2\pi]\,, \ldots, (q_p,\, q_p+2\pi]\,,\, (h_p,\, h_p+2\pi] \tag{6}$$

(т. е. не учитывать их вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число нулей, корней или гиперкорней, ни в само это число).

Для этого в зависимости от точки $c \in \mathbb{R}^3_*$ укажем такой вектор $m \in \mathbb{R}^3$, при котором функция $\langle x_c, m\rangle$ на каждом из указанных участков будет иметь ограниченное число гиперкорней (6) и наименьшее общее число нулей, корней или гиперкорней на промежутках

$$(t_{p-1}+2\pi, r_p],\, (r_p+2\pi, s_p],\, (s_p+2\pi, \tau_p], \ldots, (q_p+2\pi, h_p],\, (h_p+2\pi, t_p]. \tag{7}$$

6.3. Для любых векторов $g, h \in \mathbb{R}^3_*$ через $C(g,h)$ обозначим любую содержащую их двумерную плоскость, а через L_1 – объединение осей Oc_1, Oc_2, Oc_3 (ниже в доказательстве теоремы начало координат всюду игнорируется). Для векторов $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ введем обозначение

$$L_2 \equiv C(e_1,e_2) \cup C(e_2,e_3) \cup C(e_1,e_3).$$

Введем в рассмотрение вектор $m^3_\epsilon = (1-\epsilon_1, \epsilon_2, 1-\epsilon_3)$. Для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})$ в силу теоремы 2 работы [4] найдутся такие $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in [0,\, \epsilon]$, что при любом $t > 0$ справедливо неравенство $\nu^*(x, m^3_\epsilon, t) < +\infty$.

а). При $c \in L_1$ и $\alpha \in \{0, +, *\}$ минимумы в $\nu^\alpha_\bullet(x_c)$ реализуется на векторе m^3_ϵ, поскольку на $\mathbb{R}_+$ функция $\langle y, m^3_\epsilon\rangle$, где $y = (e^{-t}(\cos t + 1),\, 0,\, -e^{-t}\cos t)^T$, отделена от нуля, а значит, при любом $p \in \mathbb{N}$ выполняется $\nu^\alpha(x_c, m^3_\epsilon, I_p) = 12p$.

Следовательно, для ненулевых решений построенного уравнения имеет место следующие соотношения

$$\nu^{\alpha}_{\bullet}(x_c) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^{\alpha}(x_c,m,t_p) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi\sum\limits_{i=1}^{p}\nu^{\alpha}(x_c,m,I_i)}{\sum\limits_{i=1}^{p}12\pi i} = \\ = \lim_{p\to+\infty}\frac{\pi(1\cdot 12+2\cdot 12+\cdots+p\cdot 12)}{12\pi(1+2+\cdots+p)} = 1. \tag{8}$$

б). Пусть $c\in L_2$ и $\alpha\in\{0,+,*\}$. При любом фиксированном $p\in\mathbb{N}$ (быть может начиная с некоторого номера p_0) для любой функции

$$f\in\{c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\mid c_1,c_2\in\mathbb{R},\ c_1\cdot c_2\neq 0,\ t\in(\tau_p+2\pi,\ q_p]\cup(q_p+2\pi,\ h_p]\}\cup \\ \cup\{c_2x_2(t)+c_3x_3(t)\mid c_2,c_3\in\mathbb{R},\ c_2\cdot c_3\neq 0,\ t\in(q_p+2\pi,\ h_p]\cup(h_p+2\pi,\ t_p]\}\cup \\ \cup\{c_1x_1(t)+c_3x_3(t)\mid c_1,c_3\in\mathbb{R},\ c_1\cdot c_3\neq 0,\ t\in(\tau_p+2\pi,\ q_p]\cup(h_p+2\pi,\ t_p]\},$$

любого ненулевого вектора $m\in\mathbb{R}^3_*$, неколлинеарного вектору $m^4=(4,0,1)$, скалярное произведение $\langle f,m\rangle$ на соответствующих промежутках из (7) имеет $12p$ нулей, среди которых нет кратных.

Для любых $p\in\mathbb{N}$, функции

$$g\in\{c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\mid c_1,c_2\in\mathbb{R},\ c_1\cdot c_2\neq 0,\ t\in(t_{p-1}+2\pi,\ r_p]\cup(r_p+2\pi,\ s_p]\}\cup \\ \cup\{c_2x_2(t)+c_3x_3(t)\mid c_2,c_3\in\mathbb{R},\ c_2\cdot c_3\neq 0,\ t\in(r_p+2\pi,\ s_p]\cup(s_p+2\pi,\ \tau_p]\}\cup \\ \cup\{c_1x_1(t)+c_3x_3(t)\mid c_1,c_3\in\mathbb{R},\ c_1\cdot c_3\neq 0,\ t\in(t_{p-1}+2\pi,\ r_p]\cup(s_p+2\pi,\ \tau_p]\}$$

скалярное произведение $\langle g,m^3_{\epsilon}\rangle$ на соответствующих промежутках из (7) вовсе не будет иметь нулей, поэтому при любых $p\in\mathbb{N}$ и $\alpha\in\{0,+,*\}$ справедливо равенство $\nu^{\alpha}(x_c,m^3_{\epsilon},I_p)=14p$. Откуда получаем

$$\nu^{\alpha}_{\bullet}(x_c) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^{\alpha}(x_c,m,t_p) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi\sum\limits_{i=1}^{p}\nu^{\alpha}(x_c,m,I_i)}{\sum\limits_{i=1}^{p}12\pi i} = \\ = \lim_{p\to+\infty}\frac{14\pi(1+2+\cdots+p)}{12\pi(1+2+\cdots+p)} = \frac{7}{6}. \tag{9}$$

в). Для любого $\alpha\in\{0,+,*\}$ обозначим через G^{α} множество точек $c\in\mathbb{R}^3_*\setminus L_2$, для которых минимум в $\nu^{\alpha}_{\bullet}(x_c)$ реализуется на векторе m^4. Действительно, на каждом из промежутков

$$(\tau_p+2\pi,q_p],\ (q_p+2\pi,h_p],\ (h_p+2\pi,t_p] \tag{10}$$

функция $\langle x_c, m^4\rangle$ отделена от нуля, а при любом другом неколлинеарном векторе $m \in \mathbb{R}^3_*$ функция $\langle x_c, m^4\rangle$ на каждом из полуинтервалов (10) будет иметь $12p$ нулей (быть может начиная с некоторого номера p).

Теперь для вычисления значений сильных показателей колеблемости указанных решений остается посчитать число нулей, корней и гиперкорней функции $\langle x_c, m^4\rangle$ на каждом из промежутков

$$(t_{p-1} + 2\pi, r_p], \quad (r_p + 2\pi, s_p], \quad (s_p + 2\pi, \tau_p]. \tag{11}$$

На том из трех промежутков (11), на котором $x_i(t) = \mu_p$ функция $\langle x_c, m^4\rangle$ представима в виде

$$\langle x_c, m^4\rangle = \sqrt{18(c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2)}\sin(t+\psi) + 4c_i\mu_p$$

или

$$\frac{\langle x_c, m^4\rangle}{\sqrt{18}} = \sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2}\sin(t+\psi) + c_i\rho_p,$$

где $\psi \in \mathbb{R}$ — вспомогательный угол и $\rho_p = \frac{4\mu_p}{\sqrt{18}}$.

Пусть для векторов $c \in G^\alpha$ и номера $i \in \{1, 2, 3\}$ выполнено условие

$$c_i^2\rho_p^2 > c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2 \tag{12}$$

(здесь и всюду ниже индекс 0 отождествлен с индексом 3, а индекс 4 — с индексом 1). Тогда имеет место оценка

$$\sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2} < |c_i\rho_p|,$$

гарантирующая отсутствие нулей функции $\langle x_c, m^4\rangle$ на рассматриваемом промежутке.

Аналогично, при условии

$$\rho_p^2 c_i^2 < c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$$

на упомянутом промежутке функция $\langle x_c, m^4\rangle$ имеет $2p$ нулей, корней и гиперкорней, а при условии

$$\rho_p^2 c_i^2 = c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$$

— столько же корней, ровно вдвое меньше нулей и бесконечно много гиперкорней. Понятно, что в данном случае $c \notin G^*$, и минимум в определении сильных показателей колеблемости гиперчастот решений $\varphi(c)$, $c \in \left(\mathbb{R}^3_* \setminus L_2\right) \setminus G^*$ реализуется на векторе m^3_ϵ, так как на промежутках (11) функция $\langle x_c, m^3_\epsilon\rangle$, не имеет гиперкорней, а на каждом из промежутков (10) имеет $4p$ гиперкорней. Эти рассуждения справедливы и для остальных сильных показателей колеблемости в случае если $\left(\mathbb{R}^3_* \setminus L_2\right) \setminus G^\alpha \neq \varnothing$. Следовательно, выполняется

$$\nu^\alpha_\bullet(x) = 1, \quad c \in \left(\mathbb{R}^3_* \setminus L_2\right) \setminus G^\alpha, \quad \alpha \in \{0, +, *\}.$$

г). Обозначим через V_i подмножество пространства $\mathbb{R}^3_*$, состоящее из точек, удовлетворяющих неравенству (12), и представляющее собой в пространстве $\mathbb{R}^3_*$ круглый конус (точнее, его внутренность, каковую и будем подразумевать в дальнейшем под словом конус), ось которого совпадает с i-ой осью координат (натянутой на вектор e_i), а раствор — тем больше, чем больше значение ρ_p.

Следуя И.Н. Сергееву (см. [1]), через $U_{i,j} \subset \mathbb{R}^3_*$ обозначим множество точек, принадлежащих ровно i из трех конусов V_1, V_2, V_3 и при этом лежащих на границе ровно j из оставшихся. Тогда для величин $\nu^0_\bullet$, $\nu^+_\bullet$ и $\nu^*_\bullet$ при любом $c \in \mathbb{R}^3_* \setminus L_2$ справедливы равенства

$$\nu^0_\bullet(x_c) = \begin{cases} 0, & c \in U_{3,0}, \\ \frac{1}{12}, & c \in U_{2,1}, \\ \frac{1}{6}, & c \in U_{2,0} \cup U_{1,2}, \\ \frac{1}{4}, & c \in U_{1,1} \cup U_{0,3}, \\ \frac{1}{3}, & c \in U_{1,0} \cup U_{0,2}, \\ \frac{5}{12}, & c \in U_{0,1}, \\ \frac{1}{2}, & c \in U_{0,0}, \end{cases}$$

$$\nu^+_\bullet(x_c) = \begin{cases} 0, & c \in U_{3,0}, \\ \frac{1}{6}, & c \in U_{2,1} \cup U_{2,0}, \\ \frac{1}{3}, & c \in U_{1,2} \cup U_{1,1} \cup U_{1,0}, \\ \frac{1}{2}, & c \in U_{0,0} \cup U_{0,1} \cup U_{0,2} \cup U_{0,3}, \end{cases}$$

$$\nu^*_\bullet(x_c) = \begin{cases} 0, & c \in U_{3,0}, \\ \frac{1}{3}, & c \in U_{1,0}, \\ \frac{3}{2}, & c \in U_{0,1} \cup U_{0,2} \cup U_{1,1} \cup U_{0,3} \cup U_{1,2} \cup U_{2,1}, \\ \frac{1}{6}, & c \in U_{2,0}, \\ \frac{1}{2}, & c \in U_{0,0}, \end{cases}$$

причем здесь перечислены все возможные значения этих величин.

6.4. Проследим за изменением возможных спектров сильных показателей колеблемости системы $A_{\overline{\mu}}$ при изменении последовательности $\overline{\mu} \in \mathrm{M}^\infty$.

а). Если выполняется равенство $\mu_p = \sqrt{1,125}$ (которое равносильно $\rho_p = 1$) при любом $p \in \mathbb{N}$, то конусы V_1, V_2 и V_3 только касаются друг друга, причем только попарно, и все точки касания лежат на шести конкретных прямых (см. п. Б. доказательства леммы 16 [1]). Поэтому непустыми являются только множества $U_{0,0}$, $U_{0,1}$, $U_{1,0}$ и $U_{0,2}$, поэтому, учитывая равенства (8)-(9), искомые множества значений оказываются следующими

$$\mathrm{Spec}_{\nu^0_\bullet}(A_{\overline{\mu}}) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\}, \quad \mathrm{Spec}_{\nu^+_\bullet}(A_{\overline{\mu}}) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\},$$

$$\mathrm{Spec}_{\nu^*_\bullet}(A_{\overline{\mu}}) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\}.$$

При $c = (2,1,1) \in U_{1,0}$ скалярное произведение $\langle x_c, m^4\rangle$ на каждом из промежутков (6) вовсе не имеет нулей, поэтому младшие сильные показатели колеблемости нулей, корней и гиперкорней системы $A_{\overline{\mu}}$ действительно равны 1/3.

б). Если же выполняется неравенство $\mu_p > \sqrt{1,25}$ (из которого следует $1 < \rho_p < \sqrt{2}$) при любом $p \in \mathbb{N}$, то конусы уже попарно пересекаются, но не имеют общих для них всех точек, даже граничных (см. п. В. доказательства леммы 16 [1]). При этом также и граница любого конуса пересекается с любым другим конусом, как и с его границей.

Следовательно, к предыдущему списку непустых множеств добавляются еще два множества $U_{2,0}$ и $U_{1,1}$, поэтому

$$\mathrm{Spec}_{\nu^0_\bullet}(A_{\overline{\mu}}) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\},$$

$$\mathrm{Spec}_{\nu^+_\bullet}(A_{\overline{\mu}}) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\}, \quad \mathrm{Spec}_{\nu^*_\bullet}(A_{\overline{\mu}}) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\}.$$

В этом случае 1/6 действительно является наименьшим значением сильных показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней системы $A_{\overline{\mu}}$. В самом деле, решения $c = (c_1, c_2, c_3) \in U_{2,0}$ системы

$$\begin{cases} \rho_p^2 c_1^2 > c_2^2 + c_3^2, \\ \rho_p^2 c_2^2 > c_1^2 + c_3^2, \\ \rho_p^2 c_3^2 < c_1^2 + c_2^2 \end{cases}$$

выберем следующим образом: $c_3 = 1$, а c_1, c_2 - положительными, достаточно большими и сколь угодно близкими (можно даже $c_1 = c_2$). Для таких точек

$c \in G^\alpha$ скалярное произведение $\langle x_c, m^4 \rangle$ на каждом из промежутков (6) будет отделена от нуля.

6.5. При любом $\alpha \in \{0, +, *\}$ примером точки неинвариантности относительно бесконечно малых возмущений для младших сильных показателей колеблемости ω_1^α служит система $A_{\sqrt{1,125}}$ из построенного в настоящем доказательстве семейства, взятое при постоянной последовательности $\mu_1 = \mu_2 = \cdots \equiv \sqrt{1,125}$, т.е. относящееся к пункту 6.4. а), в котором $\omega_1^\alpha(A_{\sqrt{1,125}}) = 1/3$.

Действительно, эта система обладает тем свойством, что в любой ее окрестности (в силу непрерывности семейства систем по $\overline{\mu}$) найдется возмущенная система $A_{\overline{\mu}}$ из того же семейства, но попадающее под пункт 6.4. б) доказательства настоящей теоремы, а значит, удовлетворяющее равенству $\omega_1^\alpha(A_{\overline{\mu}}) = 1/6$.

Более того, если возмущенную систему $A_{\overline{\mu}}$ подчинить дополнительному условию $\mu_p \to \sqrt{1,125}$ при $p \to \infty$, то для него, помимо указанного равенства, будет выполнено условие $A_{\overline{\mu}} \in \mathcal{B}(A_{\sqrt{1,125}})$, из которого следует, что функционал ω_1^α не инвариантен в точке $A_{\sqrt{1,125}}$ относительно бесконечно малых возмущений.

7. *Завершение доказательства при $n \geqslant 3$.*

В пунктах 2–5 настоящего доказательства построили при любом $n \geqslant 2$ системы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t) \in \mathcal{M}^n$.

7.1. Из условия (1) и оценок

$$\rho(D, A) = \|D - A\| = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |D(t) - A(t)| =$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sqrt{(\dot\gamma(t) - \dot\psi(t))^2 + (-\dot\gamma(t) + \dot\psi(t))^2} = \sqrt{2} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\dot\gamma(t) - \dot\psi(t)| \leqslant 2\sqrt{2}\epsilon,$$

$$\rho(D, C) = \|D - C\| = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |D(t) - C(t)| = \sqrt{2} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\dot\gamma(t) - \dot\varphi(t)| \leqslant 2\sqrt{2}\epsilon$$

следует, что возмущения $D - A$, $D - C$ являются равномерно малыми. Поэтому в любой достаточно малой окрестности системы D, все крайние частоты которого равны $1/2$, найдутся системы вида A, C с нулевыми и единичными крайними частотами соответственно. Последнее означает не только разрывность всех крайних частот в точке D но и то, что все крайние частоты в этой же точке D не являются ни полунепрерывными снизу, ни полунепрерывными сверху.

7.2. Возмущение $D - B$ является бесконечно малым при $t \to +\infty$ поскольноку на основании оценки (3) имеем

$$\lim_{t\to+\infty}|D(t)-B(t)| = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{(\dot{\phi}(t)-\dot{\gamma}(t))^2+(-\dot{\phi}(t)+\dot{\gamma}(t))^2} =$$

$$= \sqrt{2}\lim_{t\to+\infty}|\dot{\phi}(t)-\dot{\gamma}(t)| = 0,$$

но соответствующие крайние частоты систем B и D не совпадают. Последнее означает, что все крайние частоты не являются инвариантными в точке D.

Теорема полностью доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения//Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249-294.

[2] Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка//Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414-442.

[3] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы// Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76. № 1. С. 149-172.

[4] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем// Мат. сб. 2013. Т. 204. 1. С. 119-138.

[5] Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем// Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177-219.

[6] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I//Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1302-1320.

[7] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II// Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1595–1609.

[8] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений// Доклады НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31.

[9] Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений// Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425.

[10] Войделевич А.С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений// Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32.

[11] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы// Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. 6. С. 908.

[12] Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы// Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75-93.

[13] Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 558-568.

[14] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка// Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 21–26.

[15] Сташ А.Х. О разрывности крайних частот на множестве линейных двумерных дифференциальных систем// Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. - Вып. 4 (125). С. 25-31.

[16] Сергеев И.Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 1. С. 21–26.

[17] Сташ А.Х. О разрывности младших частот нулей и корней на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего

порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2016. - Вып. 1 (176). С. 17-24.

[18] Сташ А.Х. О разрывности старших частот на множестве линейных однородных многомерных дифференциальных систем//Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2018. - Вып. 4 (231). С. 28-32.

[19] Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений// Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.

On the discontinuity of extreme exponents of oscillation on a set of linear homogeneous differential systems

Stash A. Kh.

Adyghe State University
aidamir.stash@gmail.com

Abstract. In this paper, we study the questions of the discontinuity of the extreme oscillation exponents on the set of linear homogeneous differential systems with continuous coefficients defined on the positive semiaxis. The existence of systems, for which all the higher and lower exponents of the oscillation zeros, roots and hyper-roots are not continuous either from above or from below, is established. Moreover, the non-invariance of the extreme exponent of oscillations with respect to infinitesimal small perturbations is proved. When proving the results of this work, the cases of evenness and odd order of the system matrix are considered separately.

Keywords: differential equations, linear systems, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Lyapunov exponents.