ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

Управление спектром матричной системы второго порядка с динамической обратной связью по выходу

Перепелкин Е.А.

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
eap@list.ru

Аннотация. Решается задача управления спектром линейной матричной системы второго порядка с одним входом и обратной связью по вектору выхода в виде динамического компенсатора первого порядка. Рассматриваются необходимые и достаточные условия существования решения задачи и описывается алгоритм расчета параметров обратной связи. Приводится численный пример. Особенность предлагаемого подхода заключается в том, что компенсатор содержит только одно уравнение первого порядка, в отличие от классических наблюдателей и динамических компенсаторов полного и пониженного порядка.

Ключевые слова: управление спектром, система второго порядка, динамический компенсатор.

1 Введение

Задача управления спектром линейной динамической системы является классической задачей математической теории управления. В случае статической обратной связи по выходу данная задача относится к классу трудно решаемых задач [1], [2], поскольку сводится к решению системы полиномиальных уравнений.

Динамическая обратная связь по выходу [3, с. 315] в виде наблюдателей состояния и динамических компенсаторов позволяет свести задачу синтеза обратной связи к решению систем линейных алгебраических уравнений, линейных матричных уравнений или неравенств.

В данной работе решается задача управления спектром матричной системы второго порядка. Такого рода системы встречаются в механике, электротехнике, робототехнике. В основном известны решения для систем с полной обратной связью по вектору положения и вектору скорости [4]-[8]. При неполной обратной связи решение задачи усложняется. В самом простом случае, для системы с двумя входами двумя выходами, решение задачи управления спектром при статической обратной связи по выходу сводится к последовательному решению квадратного уравнения и системы линейных алгебраических уравнений [9], [10]. В более сложных случаях необходимо решать системы полиномиальных уравнений.

В данной работе задача управления спектром решается для матричной системы второго порядка с одним входом и обратной связью по выходу в виде динамического компенсатора первого порядка. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи и описан алгоритм расчета параметров обратной связи. Особенность предлагаемого подхода заключается в том, что компенсатор содержит только одно уравнение первого порядка, в отличие от классических наблюдателей и динамических компенсаторов полного и пониженного порядка.

2 Постановка задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему, поведение которой описывается уравнением

$$\ddot{y} + A_1\dot{y} + A_2 y = bu, \tag{1}$$

где u – скалярный вход системы, y – n-мерный выход системы, A_1, A_2 – $n \times n$-матрицы, b – n- вектор-столбец.

Уравнение (1) дополним уравнениями динамической обратной связи по выходу

$$u = -fy - z, \quad \dot{z} + pz = qy, \tag{2}$$

где f, p, q – параметры обратной связи, f и q – n-вектор-строки, p – скаляр. Все матрицы, векторы и скаляр в уравнениях (1), (2) вещественные.

Матрицу

$$D(s) = \begin{bmatrix} A(s) + bf & b \\ -q & s + p \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $A(s) = E_n s^2 + A_1 s + A_2$, будем называть матрицей замкнутой системы. Здесь и далее E_n – единичная матрица размера n, s – комплексная переменная.

Под спектром системы (1), (2) будем понимать корни характеристического полинома замкнутой системы $d(s) = \det D(s)$. Спектр содержит $2n+1$ значение, поскольку $\deg d(s) = 2n + 1$.

Задача управления спектром системы (1), (2) заключается в выборе параметров обратной связи (т.е. f, p, q), при которых корни полинома $d(s)$ совпадают с заданным набором значений $S = \{s_1; s_2; \ldots; s_{2n+1}\}$. Набор S может содержать как вещественные, так и комплексные числа. При этом, поскольку коэффициенты полинома $d(s)$ вещественны, комплексные числа должны входить в S комплексно сопряженными парами. Числа в наборе S не обязательно различны. Для асимптотической устойчивости системы (1), (2) также требуется, чтобы спектр системы находился в левой части комплексной плоскости.

Эквивалентная постановка задачи заключается в выборе параметров обратной связи, при которых полином $d(s)$ совпадает с заданным полиномом $\bar{d}(s)$, корни которого есть числа из набора S.

3 Алгоритм синтеза обратной связи

Рассмотрим полином $a(s) = \det A(s)$. Заметим, что $\deg a(s) = 2n$. Запишем $a(s)$ в виде

$$a(s) = s^{2n} + a_1 s^{2n-1} + \cdots + a_{2n}.$$

Обозначим через $A^*(s)$ присоединенную к $A(s)$ матрицу, которую запишем в виде матричного полинома

$$A^*(s) = E_n s^{2n-2} + B_1 s^{2n-3} + \cdots + B_{2n-2},$$

где B_i, $i = \overline{1, 2n-2}$ – $n \times n$-матрицы.

Из равенства $A(s)A^*(s) = a(s)E$ следует, что коэффициенты полинома $a(s)$ и матрицы B_i связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
&B_1 + A_1 = a_1 E_n,\\
&B_2 + A_1 B_1 + A_2 = a_2 E_n,\\
&B_3 + A_1 B_2 + A_2 B_1 = a_3 E_n,\\
&\dots\\
&B_{2n-2} + A_1 B_{2n-3} + A_2 B_{2n-4} = a_{2n-2} E_n.
\end{aligned} \tag{4}$$

Если известны коэффициенты полинома $a(s)$, то матрицы B_i могут быть найдены последовательно из соотношений (4).

Заметим, что коэффициенты полинома $a(s)$ можно найти как коэффициенты характеристического полинома матрицы

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -A_2 & -A_1 \end{bmatrix},$$

поскольку

$$\det(sE_{2n} - \bar{A}) = \det \begin{bmatrix} sE_n & -E_n \\ A_2 & sE_n + A_1 \end{bmatrix} = \det A(s).$$

Утверждение 1 *Характеристический полином замкнутой системы равен*

$$d(s) = (s+p)a(s) + (f(s+p) + q)A^*(s)b. \tag{5}$$

Доказательство. Справедливы следующие преобразования определителя матрицы замкнутой системы (3)

$$\begin{aligned}
\det D(s) = \det &\begin{bmatrix} A(s) + bf & b \\ -q & s+p \end{bmatrix} = \\
= \det &\begin{bmatrix} A(s) + b(f + (s+p)^{-1}q) & b \\ 0 & s+p \end{bmatrix} = \\
&= (s+p) \det \big(A(s) + b(f + (s+p)^{-1}q)\big) = \\
&= (s+p) \big(\det A(s) + (f + (s+p)^{-1}q)A^*(s)b\big) = \\
&= (s+p)a(s) + (f(s+p) + q)A^*(s)b.
\end{aligned}$$

Здесь мы применили равенство $\det(A + bc) = \det A + cA^*b$, где b – вектор-столбец, c – вектор-строка [11, с. 133]. Утверждение доказано.

Составим $2n \times 2n$-матрицу

$$C = \begin{bmatrix} b & B_1 b & B_2 b & \dots & B_{2n-2}b & 0 \\ 0 & b & B_1 b & \dots & B_{2n-3}b & B_{2n-2}b \end{bmatrix}.$$

Следующее утверждение формулирует необходимое и достаточное условие существования решения задачи управления спектром системы (1), (2) и одновременно описывает алгоритм решения этой задачи.

Утверждение 2 *Спектр системы* (1), (2) *можно произвольно задать, выбирая параметры обратной связи f, p и q, тогда и только тогда, когда матрица C невырождена.*

Доказательство. Обозначим

$$\pi_k = \begin{bmatrix} s^k & s^{k-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} & a_2 & \dots & a_{2n} \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} b & B_1 b & \dots & B_{2n-2}b \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$a(s) = s^{2n} + \begin{bmatrix} a_1 & \hat{a} \end{bmatrix} \pi_{2n-1}(s),$$
$$sa(s) = s^{2n+1} + a_1 s^{2n} + \begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \end{bmatrix} \pi_{2n-1}(s),$$
$$A^*(s)b = \begin{bmatrix} 0 & B \end{bmatrix} \pi_{2n-1}(s), \quad sA^*(s)b = \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} \pi_{2n-1}(s).$$

Здесь 0 это скаляр или нулевой вектор-столбец.

Характеристический полином замкнутой системы (5) можно записать в следующем виде

$$d(s) = s^{2n+1} + (p + a_1)s^{2n} +$$
$$+ \left(p \begin{bmatrix} a_1 & \hat{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} + (fp + q) \begin{bmatrix} 0 & B \end{bmatrix}\right) \pi_{2n-1}(s).$$

Построим полином

$$\bar{d}(s) = \prod_{i=1}^{2n+1} (s - s_i) = s^{2n+1} + \bar{d}_1 s^{2n} + \dots + \bar{d}_{2n+1},$$

корнями которого являются числа из набора S. Этот полином запишем в виде

$$\bar{d}(s) = s^{2n+1} + \bar{d}_1 s^{2n} + \hat{d}\pi_{2n-1}(s),$$

где

$$\hat{d} = \begin{bmatrix} \bar{d}_2 & \bar{d}_3 & \dots \bar{d}_{2n+1} \end{bmatrix}.$$

Полиномы $d(s)$ и $\bar{d}(s)$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их коэффициенты. Следовательно, $d(s) = \bar{d}(s)$ тогда и только тогда когда

$$p + a_1 = \bar{d}_1, \tag{6}$$

$$p \begin{bmatrix} a_1 & \hat{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} + (fp + q) \begin{bmatrix} 0 & B \end{bmatrix} = \hat{d}. \tag{7}$$

Значение параметра p однозначно определяется из равенства (6). Обозначим $r = fp + q$. Равенство (7) запишем в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} f & r \end{bmatrix} C = \hat{d} - p \begin{bmatrix} a_1 & \hat{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Система уравнений (8) имеет решение относительно векторов f и r при любом векторе $\hat{d}$ тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$. Это решение является единственным и может быть записано в виде

$$\begin{bmatrix} f & r \end{bmatrix} = \left(\hat{d} - p \begin{bmatrix} a_1 & \hat{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \end{bmatrix} \right) C^{-1}.$$

Если векторы f и r найдены, то $q = r - fp$.

Таким образом, мы доказали, что спектр системы (1), (2) можно произвольно задать, выбирая параметры обратной связи f, p, q, тогда и только тогда, когда матрица C невырождена. Утверждение доказано.

Алгоритм расчета параметров обратной связи заключается в следующем. Задаем желаемый спектр системы с обратной связью. Находим коэффициенты полинома $\bar{d}(s)$. Полагаем $p = \bar{d}_1 - a_1$. Решаем систему уравнений (8). Находим $q = r - fp$.

4 Пример

Пусть

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,8 & -9,3 & -3,1 \\ -3,6 & 1,2 & 4,2 \\ 5,3 & 2,7 & -2,6 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} -0,2 & 4,3 & 3,5 \\ 2,9 & -3,4 & 4,2 \\ 1,4 & 4,7 & 4,2 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} -3,1 \\ 7,4 \\ -5,2 \end{bmatrix}.$$

Полином

$$a(s) = s^6 + 2,4s^5 - 36,23s^4 - 110,71s^3 - 609,743 + 119,56 + 44,079.$$

Матрицы

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1,4 & 9,3 & 3,1 \\ 3,6 & 1,2 & -4,2 \\ -5,3 & -2,7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -13,66 & -36,85 & -38,84 \\ 10 & 10,55 & -9 \\ -17,48 & -64,25 & -32,52 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -17,2 & 45,12 & -35,74 \\ 50,8 & 2,27 & -36,71 \\ 7,25 & -7,55 & 29,29 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} -34,02 & -1,61 & 29,96 \\ -6,3 & -5,74 & 10,99 \\ 18.39 & 6,96 & -11,79 \end{bmatrix}.$$

Зададим желаемый спектр системы с обратной связью равным

$$S = \{-1,5 + 3i;\ -1,5 - 3i;\ -0,3 + 7i;\ -0,3 - 7i;\ -0,5;\ -0,6;\ -0,7\}.$$

Тогда

$$\bar{d}(s) = s^7 + 5,4s^6 + 69,69s^5 + 269,934s^4 + 896,7443s^3 + \\ + 1171,9233s^2 + 623,2651s + 115,9751.$$

Параметр обратной связи $p = \bar{d}_1 - a_1 = 3$.

Матрица

$$C = \begin{bmatrix} -3,1 & 57,04 & -28,376 & 573,056 & -62,244 & 0 \\ 7,4 & 19,56 & 93,87 & 50,21 & -80,094 & 0 \\ -5,2 & -29,55 & -252,158 & -230,653 & 55,803 & 0 \\ 0 & -3,1 & 57,04 & -28,376 & 573,056 & -62,244 \\ 0 & -5,2 & -29,55 & -252,158 & -230,653 & 55,803 \end{bmatrix}$$

невырожденная. Система уравнений (8) имеет единственное решение

$$f = \begin{bmatrix} 3,3171 & 13,1419 & -2,2602 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 2,8515 & -2,2718 & -0,3715 \end{bmatrix}.$$

Вектор

$$q = \begin{bmatrix} -7,0999 & -41,6976 & 6,409 \end{bmatrix}.$$

Проверка показывает, что спектр системы с обратной связью совпадает с заданным. Все вычисления выполнялись с помощью системы компьютерной математики Scilab.

5 Заключение

Решена задача управления спектром для матричной системы второго порядка с обратной связью по выходу в виде динамического компенсатора первого порядка. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи. Описан алгоритм расчета параметров компенсатора, который сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрен численный пример.

Список литературы

[1] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 5, 2005, С. 7–46.

[2] Eremenko A., Gabrielov A. Pole placement by static output feedback for generic linear systems// SIAM J. Control Optim. 41(1). 2002, pp. 303-312.

[3] Sontag E. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. Springer-Verlag, 1998.

[4] Chu E.K. Pole assignment for second-order systems // Mechanical Systems and Signal Processing. 16(1), 2002. pp. 39–59.

[5] Henrion D. Šebek M. Kučera V. Robust pole placement for second-order systems: An LMI approach // Kybernetika. 41(1), 2005, pp. 1–14.

[6] Abdelaziz T.H.S. Robust pole placement for second-order linear systems using velocity-plus-acceleration feedback // IET Control Theor. Appl. 7(14), 2013, pp. 1843–1856.

[7] Abdelaziz T.H.S. Robust pole assignment using velocity-acceleration feedback for second-order dynamical systems with singular mass matrix // ISA Trans. 57, 2015, pp. 71-84.

[8] Zhang J., Ouyang H., Zhang Y., Ye J. Partial quadratic eigenvalue assignment in vibrating systems using acceleration and velocity feedback // Inverse Problems in Science and Engineering. 23(3), 2015, pp. 479–497.

[9] Перепелкин Е.А. О задаче управления спектром системы второго порядка // Дифференциальные уравнения. 53(11), 2017, С. 1555-1558.

[10] Перепелкин Е.А. Управление спектром системы второго порядка с обратной связью по ускорению// Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. №44, 2018, С. 25-30.

[11] Bernstein D.S. Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas. Princeton University Press, 2009.

Control of spectrum of second-order matrix system with dynamic output feedback

Perepelkin E.A.

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
eap@list.ru

Abstract. The control problem of the spectrum of a linear matrix second-order system with one-input and multi-output feedback in the form of a first-order dynamic compensator is solved. Necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the problem are considered and an algorithm for calculating the feedback parameters is described. A numerical example is given. A feature of the proposed approach is that the compensator contains only one first-order equation, in contrast to classical observers and full- and reduced-order dynamic compensators.

Key words: control of spectrum, second-order system, dynamic compensator.