

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.3, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172
<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Об ацикличности кубической системы, имеющей четыре инвариантных прямых и негрубый фокус

Ушхо А.Д.,

Адыгейский государственный университет
uschho76@rambler.ru

Аннотация. Найдены достаточные условия отсутствия предельных циклов у кубической автономной дифференциальной системы, имеющей четыре инвариантных прямых и негрубый фокус. Приведены примеры, иллюстрирующие положения теоремы об ацикличности кубической системы с четырьмя инвариантными прямыми и негрубым фокусом. Рассмотрены примеры кубических дифференциальных систем с четырьмя инвариантными прямыми, имеющих предельный цикл, расположенный как внутри, так и вне параллелограмма, образованного инвариантными прямыми.

Ключевые слова: кубическая автономная дифференциальная система, инвариантная прямая, предельный цикл, внеузловая точка, негрубый фокус.

Введение

В качественной теории автономных дифференциальных систем второго порядка важную роль играет решение вопроса о сосуществовании изолированных периодических решений и инвариантных кривых. Так, в работе [1] доказано отсутствие предельных циклов системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_{10}x + a_{01}y + a_{00}), \\ \frac{dy}{dt} = y(b_{10}x + b_{01}y + b_{00}), \end{cases}$$

имеющей инвариантные прямые $x = 0$, $y = 0$. Авторы заметок [2,3] построили фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 a_{ij} x^i y^j \equiv P_3(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 b_{ij} x^i y^j \equiv Q_3(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

из траекторий которой состоят эллипс и гипербола. При этом было установлено, что эта система не имеет предельных циклов. В статье [4] доказано, что при наличии у системы (1) предельного цикла в виде эллипса, а также двух параллельных между собой инвариантных прямых она является моноциклической. Авторы статьи [5], примыкающей по своему содержанию к упомянутой нами работе [4], доказали, что система (1) не имеет изолированных периодических решений, если из ее траекторий состоят эллипс и две пересекающиеся прямые. Здесь же построен пример системы (1), имеющей алгебраический предельный цикл-эллипс и одну инвариантную прямую, но не являющейся моноциклической.

Впервые в работе [6] доказано, что дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (1) может иметь любое число интегральных прямых от одного до восьми. Из [7] следует, что система (1) не имеет изолированных периодических решений, если из ее траекторий состоят пять прямых. Поэтому естественным образом возникает вопрос: при наличии какого наибольшего числа инвариантных прямых система (1) допускает предельные циклы?

Решению этой проблемы посвящена статья [8], в которой доказано, что необходимым условием существования предельного цикла системы (1), имеющей четыре инвариантных прямых, является то, что эти прямые образуют параллелограмм. При этом ошибочно утверждается, что предельный цикл, если он существует, непременно расположен внутри параллелограмма.

В настоящей заметке приводятся примеры системы (1) с четырьмя инвариантными прямыми и предельным циклом, расположенным как внутри, так и вне параллелограмма, образованного инвариантными прямыми.

Основной результат и примеры

Пусть система (1) имеет четыре инвариантных прямых, образующих параллелограмм. Тогда посредством аффинного преобразования переменных x и y она может быть приведена к системе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(Ax + By + C), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(Mx + Ny + K), \end{cases} \quad (2)$$

где $BM \neq 0$, $AN - BM \neq 0$.

Наряду с системой (2) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{Ax + By + C}{y(y-1)} \equiv F(x, y) \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{Mx + Ny + K}{x(x-1)} \equiv G(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

где $d\tau = xy(x-1)(y-1)dt$.

Замкнутые траектории систем (2) и (3) совпадают, разве что направления на траекториях этих систем могут быть противоположными [9].

Следуя работе [10], назовем узловой точкой состояние равновесия системы (2), через которое проходят две инвариантные прямые $l^0 \in M^0$ и $l^\infty \in M^\infty$, где $M^0 = \{y = 0, y - 1 = 0\}$, $M^\infty = \{x = 0, x - 1 = 0\}$.

Состояние равновесия системы (2), не являющееся узловой точкой, будем называть внеузловой точкой. Для внеузловых точек введем следующие обозначения:

V^0 – внеузловая точка, расположенная на инвариантной прямой $l^0 \in M^0$;

V^∞ – внеузловая точка, расположенная на инвариантной прямой $l^\infty \in M^\infty$;

$V = L^0 \cap L^\infty$ – внеузловая точка, через которую не проходит инвариантная прямая из множества $M^0 \cup M^\infty$.

Здесь $L^0 : Mx + Ny + K = 0$, $L^\infty : Ax + By + C = 0$.

Согласно введенным обозначениям через внеузловую точку $V^0 (V^\infty)$ проходит изоклина бесконечности L^∞ (изоклина нуля L^0), а замкнутая траектория системы (2) может окружать только внеузловую точку V – типа $V = L^0 \cap L^\infty$.

Замечание 1. Для удобства дальнейшего изложения систему (3) будем называть системой, порожденной системой (2).

Теорема 1. Пусть система (3) удовлетворяет одному из условий:

1) $AN = 0$; 2) $C = K = 0$; 3) каждая из главных изоклин L^0 и L^∞ проходит через две узловые точки. Тогда эта система не имеет предельных циклов.

Доказательство. Если выполняется условие 2), то система (2) не имеет внеузловой точки V – типа, следовательно, у этой системы не может быть замкнутой траектории.

Для доказательства теоремы в случае выполнения условий 1) и 3) обратимся к системе, порожденной системой (2). Если выполняется условие $A = N = 0$, то выражение

$$F'_x(x, y) + G'_y(x, y) = \frac{A}{y(y-1)} + \frac{N}{x(x-1)} \quad (4)$$

тождественно равно нулю, а значит, система (3) консервативна в областях возможного расположения внеузловой точки V – типа. Поэтому система не имеет изолированных замкнутых траекторий. При выполнении одного из условий $A = 0, N \neq 0$ и $A \neq 0, N = 0$ выражение (4) знакопостоянно в областях возможного расположения внеузловой точки V – типа. Поэтому согласно признаку Бендиксона [9] система не имеет не только предельных циклов, но и любых замкнутых траекторий в открытых областях, на которые разбивают всю фазовую плоскость инвариантные прямые множества $M^0 \cup M^\infty$.

Пусть выполняется условие 3). Для определенности полагаем, что L^∞ проходит через узловые точки $(0,1)$ и $(1,0)$, а L^0 – через узловые точки $(0,0)$ и $(1,1)$. Тогда система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(-Cx - Cy + C) \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(-Nx + Ny), CN \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Внеузловой точкой V – типа системы (5) является точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Переносим начало координат системы (5) в эту точку и сохраняя обозначения фазовых переменных, получим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{C}{4}x + \frac{C}{4}y - Cx^3 - Cx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{N}{4}x - \frac{N}{4}y - Nxy^2 + Ny^3. \end{cases} \quad (6)$$

Определитель матрицы линейного приближения системы (6) равен

$$\Delta = \frac{-CN}{8}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что при $CN > 0$ начало координат $(0,0)$ системы (6) является простым седлом, следовательно, циклов нет у системы. Если $CN < 0$, то дивергенция векторного поля системы, порожденной системой (5), знакопостоянна внутри квадрата $W = \{(x, y) / 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. По признаку Бендиксона [9] система не имеет замкнутых траекторий. Теорема доказана.

Изобразим на рис. 1 разбиение фазовой плоскости на области возможного расположения изолированных периодических решений системы (2).

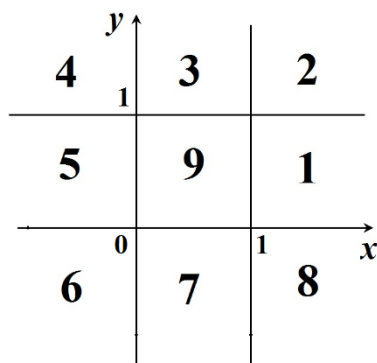


Рис. 1. Нумерация открытых областей возможного расположения предельных циклов системы (2)

Приведем примеры систем (2), имеющих четыре инвариантных прямых и предельный цикл.

Пример 1 [8]. $\forall \mu \in R$ система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2(1 - 4x^2)[(3 + 2\mu)x - 8y], \\ \frac{dy}{dt} = (3 + 8y - 16y^2)(3x - 2y) \end{cases} \quad (8)$$

имеет инвариантные прямые: $x - 0.5 = 0$, $x + 0.5 = 0$, $y + 0.25 = 0$, $y - 0.75 = 0$.

Начало координат системы (8) является единственной внеузловой точкой V – типа, и она расположена в области 9. При сколь угодно малых положительных значениях μ простой неустойчивый фокус $(0,0)$ окружает хотя бы один грубый устойчивый предельный цикл.

Пример 2. $\forall \mu \in R$ система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4(x - 1)(x + 1)[(1 + \mu)x - 4y], \\ \frac{dy}{dt} = (y + 1)(y + 2)(4x - 2y) \end{cases} \quad (9_\mu)$$

имеет инвариантные прямые: $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $y + 1 = 0$, $y + 2 = 0$. Внеузловой точкой V – типа системы (9_μ) является начало координат $(0,0)$. Эта точка является негрубым фокусом системы (9_0) .

В самом деле, характеристические числа состояния равновесия $(0,0)$ системы (9_0) чисто мнимые, а именно $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{7}i$.

Непосредственные вычисления показывают, что третья фокусная величина $\alpha_3(0,0) = -\frac{107\pi}{112\sqrt{7}} < 0$. Согласно монографии [11] точка $(0,0)$ – устойчивый негрубый фокус системы (9_0) . При переходе к сколь угодно малым положительным значениям μ негрубый

фокус превращается в грубый фокус противоположной устойчивости. При этом из негрубого фокуса рождается устойчивый предельный цикл, окружающий точку $(0,0)$.

Таким образом, система (9_μ) при сколь угодно малых положительных значениях μ имеет простой предельный цикл, окружающий простой неустойчивый фокус.

В результате параллельного переноса и преобразования подобия система (9_μ) приводится к системе (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)[(-16-16\mu)x+32y-56+8\mu], \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(8x-2y). \end{cases} \quad (10)$$

Для системы (10) внеузловая точка $V\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ является неустойчивым простым фокусом, окруженным простым устойчивым предельным циклом, разумеется, при достаточно малых положительных значениях μ .

Как видим, $A = -16 - 16\mu < 0$, $N = -2 < 0$, то есть имеет место случай $AN > 0$, а внеузловая точка $V\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ расположена в области 3.

Негрубый фокус $V\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ системы (10) или что то же самое, точка $(0,0)$ системы (9_0) не окружает предельный цикл. Действительно, функции $\alpha(x, y) = \frac{-10x + 7y - 3}{7(y^2 + 3y + 2)}$ и

$\beta(x, y) = \frac{3x + 3}{7(x^2 - 1)}$ суть решения уравнения

$F'_x(x, y) + G'_y(x, y) = \alpha(x, y)G(x, y) - \beta(x, y)F(x, y)$, где $F(x, y), G(x, y)$ – правые части первого и второго уравнения соответственно системы, порожденной системой (9_0) .

Так как выражение $D(\alpha, \beta) = \alpha'_x + \beta'_y = -\frac{10}{7(y^2 + 3y + 2)}$ отрицательно в области возможного расположения предельных циклов, то в силу теоремы 4.4 [12] система (9_0) может иметь разве что один простой устойчивый предельный цикл. Поэтому он не может окружать устойчивый фокус.

В связи с рассмотренным примером 2 следует отметить, что квадратичная система при наличии негрубого фокуса и инвариантной прямой не имеет предельных циклов [13].

Найдем некоторые достаточные условия отсутствия у системы (2) предельных циклов.

Рассмотрим внеузловую точку V – типа системы (2) $V_0(x_0, y_0)$, где

$$\begin{cases} x_0 = \frac{KB - CN}{AN - MB}, \\ y_0 = \frac{MC - AK}{AN - MB}. \end{cases} \quad (11)$$

В результате переноса начала координат системы (2) в точку V_0 получим систему (обозначения фазовых переменных x, y сохранены):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x + x_0)(x + x_0 - 1)(Ax + By), \\ \frac{dy}{dt} = (y + y_0)(y + y_0 - 1)(Mx + Ny). \end{cases} \quad (12)$$

Определитель матрицы линейного приближения системы (12) равен

$$\Delta = x_0 y_0 (x_0 - 1)(y_0 - 1) \bar{\Delta} \quad (13)$$

где $\bar{\Delta} = AN - BM$, x_0, y_0 следует заменить по формулам (11).

Из (13) следует, что $V_0(x_0, y_0)$ – седло, если выполнено одно из условий

$$\begin{cases} AN - BM > 0, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) < 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} AN - BM < 0, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) > 0. \end{cases}$$

Поэтому, если у системы (2) есть предельный цикл, то по необходимости выполняется одно из условий

$$\begin{cases} AN - BM > 0, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) > 0 \end{cases} \quad (14)$$

и

$$\begin{cases} AN - BM < 0, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) < 0. \end{cases} \quad (15)$$

При выполнении (14) предельный цикл может окружать внеузловую точку V – типа, расположенную в одной из областей 2,4,6,8,9, а при выполнении (15) – в одной из областей 1,3,5,7.

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что функции $\alpha(x, y) = \frac{rx + sy}{y^2 - y}$,

$\beta(x, y) = \frac{mx + ny}{x^2 - x}$ являются решениями уравнения

$$F'_x(x, y) + G'_y(x, y) = \alpha(x, y)G(x, y) - \beta(x, y)F(x, y)$$

в том и только в том случае, когда выполняются условия

$$\begin{cases} r = \frac{A(m+1)}{M}, \\ n = \frac{N(s-1)}{B}, \\ ANB(m+1) + M^2Bs - MB^2m - ANM(s-1) = 0, \\ AK(m+1) - MCm + AM = 0, \\ KBs - CN(s-1) + BN = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Если выражение

$$D(\alpha, \beta) = \alpha'_x + \beta'_y = \frac{A(m+1)}{M} \frac{1}{y^2 - y} + \frac{N(s-1)}{B} \frac{1}{x^2 - x} \quad (17)$$

отлично от нуля, то согласно [12] система (2) не имеет предельного цикла, окружающего внеузловую точку V – типа $V_0(x_0, y_0)$.

Действительно, согласно теореме 4.4 [12] в силу знакопостоянства выражения (17) предельный цикл, если он существует, является грубым. С другой стороны, предельный цикл l , если существует, то расположен в одной из открытых областей, изображенных на рис.1, а значит на l выражение (17) отлично от нуля. Поэтому l – двукратный, то есть негрубый предельный цикл (см. [12, с. 97]). Полученное противоречие доказывает отсутствие предельного цикла вокруг внеузловой точки V – типа.

Из выше изложенного следует

Теорема 2. Если выполняются условия

$$\begin{cases} ANB(m+1) + M^2Bs - MB^2m - ANM(s-1) = 0, \\ AK(m+1) - MCm + AM = 0, \\ KBs - CN(s-1) + BN = 0, \\ |m+1| + |s-1| > 0, \\ r = \frac{A(m+1)}{M}, \\ n = \frac{N(s-1)}{B} \end{cases} \quad (18)$$

и одна из серий неравенств

$$\begin{cases} BM < AN < 0, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) > 0, \\ (m+1)(s-1) \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

и

$$\begin{cases} 0 < AN < BM, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) < 0, \\ (m+1)(s-1) \leq 0, \end{cases} \quad (20)$$

то система (2) не имеет предельного цикла, окружающего единственную внеузловую точку V – типа, расположенную в одной из областей 1-9 (см. рис. 1).

Пример 3. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(-x-2y+3), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(x+y-1) \end{cases} \quad (21)$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 ($m = 0, s = 1$) и имеет внеузловую точку V – типа $V_1(-1,2)$.

Третья фокусная величина точки V_1 равна $\alpha_3(V_1) = -\frac{\pi}{16} < 0$. Согласно монографии [11] V_1 – устойчивый негрубый фокус.

Величина $D(\alpha, \beta) = -\frac{1}{y(y-1)} < 0$ (см. (17)) в области 4, и система (21) ациклична.

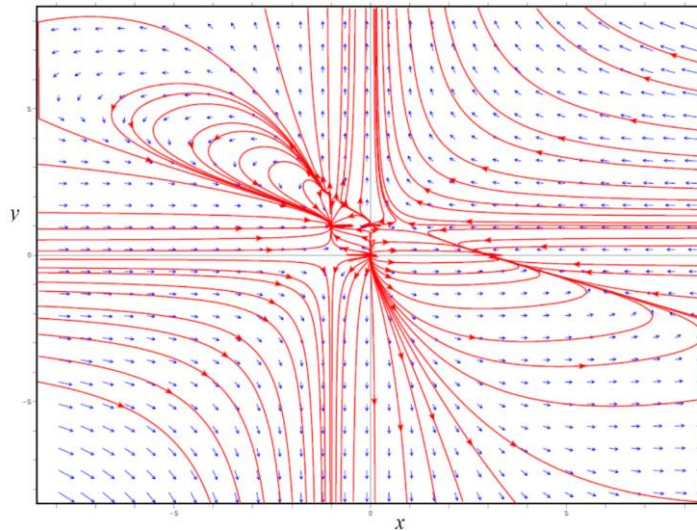


Рис. 2. Фазовый портрет системы (21)

Пример 4. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(-x-y+1), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(2x+y-4) \end{cases} \quad (22)$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 ($m = 1, s = 0$) и имеет внеузловую точку V – типа $V_2(3, -2)$, расположенную в области 8. Так как третья фокусная величина точки $V_2(3, -2)$ равна

$$\alpha_3(V_2) = \frac{\pi}{24} > 0 \text{ и } D(\alpha, \beta) = \frac{1}{x(x-1)} > 0, \text{ то эта точка есть неустойчивый негрубый фокус [11].}$$

Система (22) не имеет предельного цикла, окружающего V_2 .

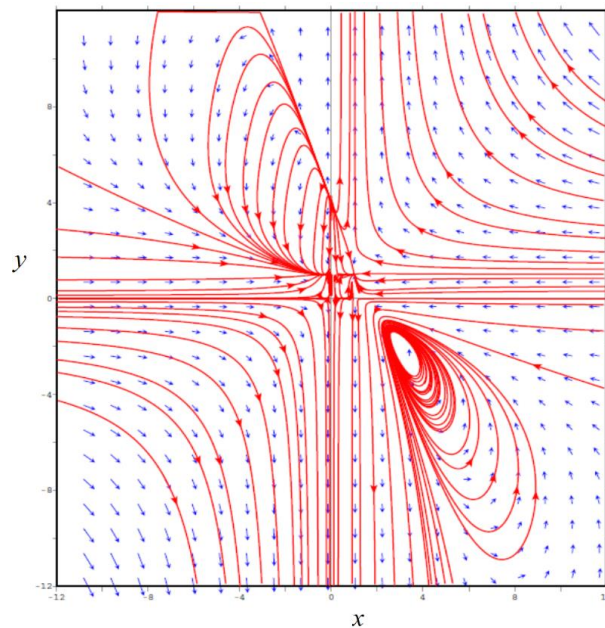


Рис. 3. Фазовый портрет системы (22)

Пример 5. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(-2x-6y-6), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(x+2y+1) \end{cases} \quad (23)$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 ($m = 1, s = 4$) и имеет внеузловую точку $V_3(3, -2)$. Как показывают вычисления, третья фокусная величина точки V_3 равна $\alpha_3(V_3) = -\frac{5\pi}{72\sqrt{2}} < 0$,

$D(\alpha, \beta) = -\frac{4}{y^2 - y} - \frac{1}{x^2 - x} < 0$, то есть V_3 – устойчивый негрубый фокус, расположенный в области 8. Система (23) ациклична.

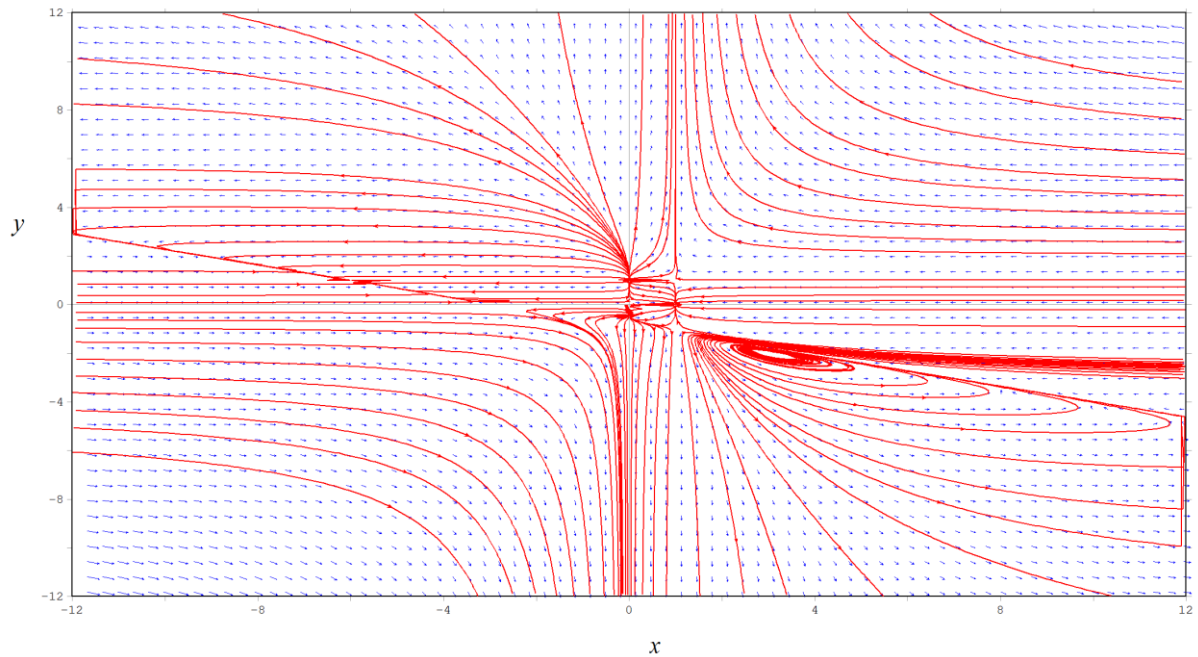


Рис. 4. Фазовый портрет системы (23)

Пример 6. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)\left(x+y-\frac{2}{5}\right), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(2x+y-1) \end{cases} \quad (24)$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 ($s = 1, m = 5$) и $V_4\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ – внеузловая точка, являющаяся

неустойчивым негрубым фокусом ($\alpha_3(V_4) = \frac{\pi}{8} > 0$). Величина (17) задана формулой

$D(\alpha, \beta) = \frac{3}{y^2 - y} > 0$ в области 7 расположения точки V_4 . Негрубый фокус V_4 не окружает предельный цикл, то есть система (24) ациклична.

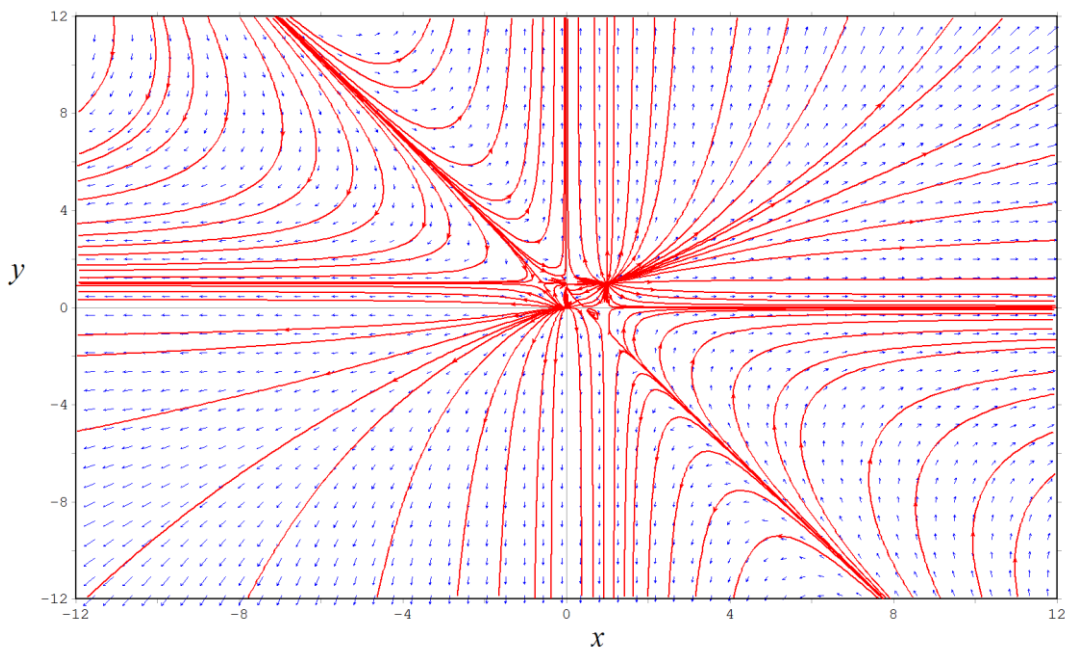


Рис. 5. Фазовый портрет системы (24)

Замечание 2. Все внеузловые точки системы (2), удовлетворяющие условиям теоремы 2, являются негрубыми фокусами.

Теорема 3. При выполнении условий (18) и одной из серий неравенств (19) и (20) внеузловая точка $V_0(x_0, y_0)$ системы (2) является негрубым фокусом кратности 1, причем устойчивым (неустойчивым), если $AB(B + M) < 0 (> 0)$.

Доказательство. Запишем систему (12) в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_0(x_0 - 1)Ax + x_0(x_0 - 1)By + (2x_0 - 1)Ax^2 + (2x_0 - 1)Bxy + Ax^3 + Bx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = y_0(y_0 - 1)Mx + y_0(y_0 - 1)Ny + (2y_0 - 1)Mxy + (2y_0 - 1)Ny^2 + Mxy^2 + Ny^3. \end{cases} \quad (25)$$

Согласно теореме 2 начало координат $(0,0)$ системы (25) является негрубым фокусом, поэтому выполняются условия

$$x_0(x_0 - 1)A + y_0(y_0 - 1)N = 0, \quad (26)$$

$$x_0y_0(x_0 - 1)(y_0 - 1)(AN - BM) > 0. \quad (27)$$

Введем обозначения: $x_0(x_0 - 1) = \delta$, $y_0(y_0 - 1) = \gamma$, тогда из (26) следует соотношение $\delta = \frac{-\gamma N}{A}$, а неравенство (27) примет вид $\delta\gamma(AN - BM) > 0$. С учетом введенных обозначений система (25) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\gamma Nx - \frac{\gamma NB}{A}y + (2x_0 - 1)Ax^2 + (2x_0 - 1)Bxy + Ax^3 + Bx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma Mx + \gamma Ny + (2y_0 - 1)Mxy + (2y_0 - 1)Ny^2 + Mxy^2 + Ny^3. \end{cases} \quad (28)$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что третья фокусная величина начала координат $(0,0)$ системы (28) равна $\alpha_3(0,0) = \frac{\pi A(B+M)}{4B\sqrt{\mu}}$, где $\mu = \gamma^2(MNB/A - N^2) > 0$.

Покажем, что $B+M \neq 0$.

Предположим противное. Тогда первое неравенство $0 < AN < BM$ серии (20) не выполняется. Вместе с тем из трех первых уравнений системы (18) следует, что $s=1, m=-1$, то есть не выполняется неравенство $|m+1| + |s-1| > 0$. По теореме 1 $A \neq 0, B \neq 0$ (в противном случае V_0 не является внеузловой точкой V -типа). Таким образом, $\alpha_3 \neq 0$, и точка $(0,0)$ - негрубый фокус кратности 1 [11], устойчивый (неустойчивый), если $AB(B+M) < 0(> 0)$. Теорема доказана.

Замечание 3. Тип устойчивости негрубого фокуса систем (21) - (24) определяется легко на основании теоремы 3.

Замечание 4. Условия теоремы 2 являются достаточными условиями ацикличности кубической дифференциальной системы, имеющей негрубый фокус и четыре инвариантных прямых.

Литература

- [1] Баутин Н.Н. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18, №1. С. 128.
- [2] Белевец П.С., Валеева Р.Т. Об одном классе динамических систем с двумя частными алгебраическими интегралами. Волжский математический сборник. 1973. Вып. 16. С. 52-54.
- [3] Белевец П.С., Валеева Р.Т. Качественная картина в целом одного класса динамических систем. Волжский математический сборник. 1973. Вып. 16. С. 55-60.
- [4] Столяров В.В. О предельных циклах и ограниченности одной динамической системы. Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25, №10. С. 1823-1824.
- [5] Ушхо Д.С., Тешев Р.М. Предельные циклы одной кубической дифференциальной системы. Вестник Адыгейского гос. ун-та. 2002. Вып. 3-4(7-8). С. 139-143.
- [6] Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми. Дифференциальные и интегральные уравнения. 1977. Вып. 1. С. 19-22.
- [7] Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Математический сборник. 1992. Т. 183, №3. С. 76-94.
- [8] Ушхо Д.С., Ушхо А.Д. О сосуществовании предельных циклов и линейных частных интегралов кубических дифференциальных систем на плоскости. Труды ФОРА. 2004. №9. С.20-24.
- [9] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
- [10] Ушхо Д.С. и др. Об одном методе исследования числа инвариантных прямых полиномиальных векторных полей n -ой степени. Вестник Адыгейского гос. ун-та. 2018. Вып.4(231). С. 15-27.
- [11] Андронов А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1967. 488 с.
- [12] Отроков Н.Ф. Аналитические интегралы и предельные циклы. Горький: Волго-Вятское книжное издательство, 1972. 216 с.
- [13] Черкас Л.А. Об отсутствии предельных циклов одного уравнения, имеющего негрубый фокус. Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 5. С. 779-783.

On the acyclicity of a cubic differential system having four invariant straight lines and a unstable focus

Ushho A.D

Adygea State University
uschho76@rambler.ru

Abstract. The sufficient conditions for the absence of limit cycles in a cubic autonomous differential system having four invariant straight lines and a unstable focus are found. Examples illustrating the provisions of the acyclicity theorem of a cubic system with four invariant straight lines and a unstable focus are given. Examples of cubic differential systems with four invariant lines having a limit cycle located both inside and outside the parallelogram formed by invariant straight lines are considered.

Keywords: cubic autonomous differential system, invariant straight line, limit cycle, off-knot point, non-rough focus.