ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциально-разностные уравнения
Оптимальное управление

О задаче преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа

Мухсинов Е.М.

Таджикский Государственный Университет Права, Бизнеса и Политики
yodgor.mukhsinov@gmail.com

Аннотация. В области теории дифференциальных игр, когда игра происходит в конечномерном пространстве, фундаментальные работы выполнили академики Л. С. Понтрягин и Н. Н. Красовский. В работах Н. Н. Красовского и его сотрудников исследуются позиционные дифференциальные игры. А в подходе Л. С. Понтрягина и его сотрудников дифференциальная игра рассматривается отдельно с точки зрения преследующего и с точки зрения убегающего, что неизбежно связывает дифференциальную игру с двумя различными задачами. В данной работе в банаховом пространстве рассматривается задача преследования в смысле Л. С. Понтрягина для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа. Доказаны две теоремы о достаточных условиях разрешимости задачи преследования. Для одного примера исследована линейная дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением нейтрального типа. Найдены достаточные условия, обеспечивающие разрешимость задачи преследования.

Ключевые слова: дифференциальная игра нейтрального типа, банахово пространство, задача преследования, время преследования.

1 Введение. Постановка задачи преследования

Различные задачи из военной сферы, экономики и естественных наук в условиях конфликта или неопределенности сводятся к дифференциальным играм. В области теории дифференциальных игр, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, основопологающие работы выполнены академики Л. С. Понтрягин (см. например [1]) и Н. Н. Красовский (см. например [2]). В дальнейшем на практике возникла необходимость в моделировании игр преследования дифференциально-разностными уравнениями, в которых учитывается предистория состояния системы, что позволяет более адекватно отображать динамику игры. Дифференциальным играм преследования, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением или уравнением с запаздывающим аргументом, посвящены много работ. А вот результаты, полученные в теории дифференциальных игр преследования, когда динамика игры описывается функционально – дифференциальным уравнением нейтрального типа, являются гораздо скромными. Например, в работах [3, 4] исследована позиционная дифференциальная игра, а в работах [5, 6] исследована линейная дифференциальная игра преследования нейтрального типа с линейным ограниченным оператором в конечномерном пространстве.

В данной работе исследуется разрешимость задачи преследования в смысле Л. С. Понтрягина для квазилинейной дифференциальной игры в банаховом пространстве, когда динамика игры описывается функционально – дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла ([7], с. 43) с линейным замкнутым оператором. Используя идеи первого прямого метода Л. С. Понтрягина [1], метода преследования Н. Сатимова [8] и лемму о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения доказаны теоремы о возможности завершения преследования и описаны множество начальных положений, из которых разрешима задача преследования.

Далее, нам понадобится некоторые понятия и леммы из теории многозначных отображений [9, 10, 11, 12].

Пусть $E-$сепарабельное банахово пространство, 2^E- множество всех непустых замкнутых подмножеств E, $\mathfrak{B}-\sigma$ - алгебра борелевских подмножеств E, $\mathcal{S}-\sigma$ - алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $[0,\ \infty)$, $\mathcal{S}\bigotimes\mathfrak{B}-\sigma$ - алгебра, порожденная множествами $\mathcal{A}\times\mathcal{B}\subset[0,\infty)\times E$, где $\mathcal{A}\in\mathcal{S},\ \ \mathcal{B}\in\mathfrak{B}$. Отображение $\varphi:[0,\infty)\to E$ называется $(\mathcal{S},\mathfrak{B})$ – измеримым, если из $\mathcal{B}\in\mathfrak{B}$ следует, что $\varphi^{-1}(\mathcal{B})\in\mathcal{S}$. Многозначное отображение $P:[0,\infty)\to 2^E$ называется $(\mathcal{S}, \mathfrak{B})$ – измеримым, если множество $P^-(\mathcal{C}) = \{t \in [0,\infty) : P(t) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\}$ измеримо по Лебегу для каждого замкнутого множества $\mathcal{C} \subset E$. В дальнейшем, мы вместо "$(\mathcal{S}, \mathfrak{B})$ – измеримое отображение" будем писать просто "измеримое отображение". Отображение $y : [0,\infty) \to E$, обладающее свойством $y(t) \in P(t)$ для каждого $t \in P^-(\mathcal{C})$, называется селектором отображения P. Отображение $P : [0,\infty] \to 2^E$ называется замкнутым (секвенциально замкнутым), если ее график $\Gamma(P) = \{(t,y) \in [0,\infty] \times E : y \in P(t)\}$ является замкнутым (соответственно секвенциально замкнутым) множеством в банаховом пространстве $[0,\infty] \times E$. Здесь секвенциальная замкнутость множества $\Gamma(P)$ понимается в том смысле, что если произвольные последовательности $t_n \in [0,\infty]$ и $x_n \in P(t_n)$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty} x_n = x, \ \text{ то } \ t \in [0,\infty] \ \text{ и } \ x \in P(t).$$

Легко видно, что из замкнутости отображения следует его секвенциальная замкнутость.

Из ([9], с. 219-221) вытекает следующая

Лемма 1 (о существовании измеримого селектора). *Если отображение $P : [0,\infty) \to 2^E$ измеримо, то у него существует измеримый селектор.*

В дальнейшем, X, Y - сепарабельные банаховы пространства, Z - банахово пространство, $U([0,\infty), Z)$ – множество всех измеримых отображений, действующих из $[0,\infty)$ в Z. Тогда, в силу леммы 1 из работы ([10], с. 56) вытекает следующая важная

Лемма 2 (о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения). *Пусть Y-сепарабельное банахово пространство, отображения $P : [0,\infty) \to 2^Y$ и $\varphi : [0,\infty) \to X$ измеримы, а отображение $g : Y \times Z \times [0,\ \infty) \to X$ локально равномерно непрерывно по $(u,v) \in Y \times Z$ и измеримо по $t \in [0,\ \infty)$. Если для любых $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ и почти всех $t \in [0,\infty)$ имеет место включение*

$$\varphi(t) \in g(P(t),\ v(t),\ t),$$

то отображение $t \to \{u \in P(t) : \varphi(t) = g(u,\ v(t),\ t)\}$ замкнутозначно, измеримо и имеет измеримый селектор, то есть существует измеримое отображение $u(\cdot) : [0,\infty) \to Y$ такое, что $u(t) \in P(t)$ и $\varphi(t) = g(u(t),\ v(t),\ t)$ для почти всех $t \in [0,\ \infty)$.

Замечание 1. *В силу ([11], с. 86) заключение леммы 2 верно и в том случае, когда в условиях леммы вместо локально равномерно непрерывности* *отображении* $g : Y \times Z \times [0,\ \infty) \to X$ *по* (u, v) *требуется непрерывность по* (u, v) *и сепарабельность банахово пространства* X.

В данной работе квазилинейная дифференциальная игра описывается дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-h) = Ax\,(t) + Bx\,(t-h) + F(u\,(t)\,, v\,(t)\,, t) \tag{1}$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра.

В игре (1) $t \geq 0,\ h > 0,\ x\,(t) \in X,\ u(\cdot) \in U([0, \infty),\ Y)-$ управления преследования, $v\,(\cdot) \in U\,([0, \infty)\,, Z)-$ управления убегания, $C : X \to X,\ B : X \to X-$ линейные ограниченные операторы, а линейный замкнутый оператор А $: D \to X$ имеющий плотную в X область определения D, является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы ([13], с. 208) . Используя эту полугруппу, можно построить фундаментальное решение $\varPhi\,(t)$, для которого справедливо равенство

$$\dot{\varPhi}(t) - C\dot{\varPhi}(t-h) = A\varPhi\,(t) + B\varPhi\,(t-h) \tag{2}$$

и $\varPhi\,(0) = I-$ единичный оператор, а $\varPhi\,(t) = 0$ при $t < 0$.

Известно ([14], с. 268), что однородная задача Коши (1) с начальным положением

$$x(s) = \varphi(s), \quad -h \leq s \leq 0, \tag{3}$$

где $\varphi(\cdot)-$ абсолютно непрерывная функция, имеет единственное абсолютно непрерывное решение. Поэтому, следуя А.Фридману ([15], с. 95) и Ю. С. Осипову ([16], с. 1314) дадим следующее

Определение 1. *Если отображение* $t \to F(u(t), v(t), t)$ *локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1) с начальным положением (3) и соответствующим управлением* $u(\cdot), v(\cdot)$ *будем называть отображение*

$$x\,(t) = [\varPhi\,(t) - \varPhi\,(t-h)\,C]\,\varphi\,(0) + \int_{-h}^{0} \varPhi\,(t-s-h)\,[B\varphi\,(s) + C\dot{\varphi}\,(s)]\,ds +$$

$$+\int_{0}^{t} \varPhi\,(t-s)\,F\,(u\,(s)\,, v\,(s)\,, s)\,ds, \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера ([17], с. 93).

В дальнейшем предполагаем, что отображение $F : Y \times Z \times [0, \infty) \to X$ измеримо по $t \in [0, \infty)$ и непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$ и существует локально суммируемая функция $\xi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ такая, что при любых $u \in Y, v \in Z, t \in [0,\infty)$ имеет место неравенство $||F(u,v,t)|| \le \xi(t)$. Это предположение обеспечивает локально интегрируемость отображении $t \to F(u(t),v(t),t)$ по Бохнеру.

Для игры (1) дадим следующее определение и задачу преследования в смысле Л. С. Понтрягина.

Определение 2. *В игре* (1) *из начального положения* $\varphi(s)\,,\quad -h \le s \le 0,\ \ \varphi(0) \in X\backslash M$ *возможно завершение преследования, если существует число* $T = T(\varphi) \ge 0$ *такое, что для любого измеримого отображения* $v(\cdot) \in U([0,\ T]\,,\ Z)$ *в каждый момент* $t \in [0,\ T]$, *зная уравнение* (1) *и значения* $v(t)$ *и* $x(s)\,, 0 \le s \le t$, *можно выбрать значение* $u(t)$ *таким образом, что* $u(\cdot) \in U([0,\ T]\,,\ Y)$ *и* $x(T_1) \in M$ *при некотором* $T_1 \in [0,\ T]\,,$ *где* $x(\cdot)-$*решение задачи* (1) *с начальным положением* (3), *соответствующее управлениям* $u(\cdot)$ *и* $v(\cdot)$. *При этом число* $T = T(\varphi)$ *называется гарантированным временем преследования.*

Задача преследования. Найти множество начальных положений, из которых в игре (1) возможно завершение преследования.

2 Основные результаты

В дальнейшем, следуя ([12], с. 206), введем понятие интеграла от многозначного отображения $P : [0,\infty) \to 2^X$. По определению

$$\int_0^t P(s)\,ds = \left\{ \int_0^t p(s)\,ds : p(\cdot) \in \mathbb{B} \right\},$$

где $\mathbb{B}$ – множество локально на $[0,\infty)$ интегрируемых по Бохнеру селекторов отображения P. При этом, если $\mathbb{B} = \emptyset$, то $\int_0^t P(s)\,ds = \emptyset$, а если $\mathbb{B} \ne \emptyset$ и $t = 0$, то $\int_0^t P(s)\,ds = \{0\}$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *начальное положение* $\varphi(s)\,,\ -h \le s \le 0,\ \ \varphi(0) \in X\backslash M$ *такое, что при некотором* $T \ge 0$ *имеет место включение*

$$[\varPhi(T) - \varPhi(T-h)\,C]\,\varphi(0) +$$

$$+\int_{-h}^{0}\Phi\left(T-s-h\right)\left[B\varphi\left(s\right)+C\dot{\varphi}\left(s\right)\right]ds\in W_1\left(T\right), \tag{5}$$

где

$$W_1\left(t\right)=M-\int_{0}^{t}\bigcap_{v\in Z}\Phi\left(t-s\right)F\left(Y,v,s\right)ds$$

при $t\in[0,T]$*;*

2) *многозначное отображение* $t\to W_1(t), t\in[0,T]$, *секвенциально замкнуто.*

Тогда из начального положения $\varphi(\cdot)$ *возможно завершение преследования с гарантированным временем преследования* $T_0=\min\left\{t\in[0,T]:\ \text{для которых выполняется}\ \ (5)\right\}$.

Доказательство. В начале, покажем, что множество $\{t\in[0,T]:$ для которых выполняется $(5)\}$ замкнуто. Действительно, пусть $t_n\in[0,T], \lim_{n\to\infty}t_n=t$ и

$$z(t_n)=\left[\Phi\left(t_n\right)-\Phi\left(t_n-h\right)C\right]\varphi\left(0\right)+$$

$$+\int_{-h}^{0}\Phi\left(t_n-s-h\right)\left[B\varphi\left(s\right)+C\dot{\varphi}\left(s\right)\right]ds\in W_1\left(t_n\right).$$

Тогда, в силу абсолютно непрерывности отображения $t\to z(t)$ имеем: $\lim_{n\to\infty}z(t_n)=z(t)$. А в силу секвенциальной замкнутости отображения $t\to W_1(t)$ имеем включение $z(t)\in W_1(t)$. Поэтому, множество $\{t\in[0,T]:$ для которых выполняется $(5)\}$ замкнуто. Следовательно, в силу (5) для T_0 имеем:

$$\left[\Phi\left(T_0\right)-\Phi\left(T_0-h\right)C\right]\varphi\left(0\right)+$$

$$+\int_{-h}^{0}\Phi\left(T_0-s-h\right)\left[B\varphi\left(s\right)+C\dot{\varphi}\left(s\right)\right]ds\in W_1\left(T_0\right). \tag{6}$$

Далее, из соотношения (6) вытекает существования точки $m\in M$ и интегрируемого селектора $\omega\left(\cdot\right)$ отображении

$s\to\bigcap_{v\in Z}\Phi\left(t-s\right)F\left(Y,v,s\right),\ \ s\in[0,T_0]$, что имеет место равенство

$$\left[\Phi\left(T_0\right)-\Phi\left(T_0-h\right)C\right]\varphi\left(0\right)+\int_{-h}^{0}\Phi\left(T_0-s-h\right)\left[B\varphi\left(s\right)+C\dot{\varphi}\left(s\right)\right]ds=$$

$$=m-\int_{0}^{T_0}\omega(s)ds \tag{7}$$

Так как $X, Y-$ сепарабельные банаховы пространства, отображение $(u, v, s) \rightarrow F(u, v, s)$ непрерывно по (u, v) и измеримо по t, а отображения $s \rightarrow \bigcap\limits_{v \in Z} \Phi(T_0 - s) F(Y, v, s)$ и $s \rightarrow \omega(s)$ измеримы, то из соотношения $\omega(s) \in \bigcap_{v \in Z} \Phi(T_0 - s) F(Y, v, s)$ в силу леммы 2 и замечании 1 для любого измеримого управления убегания $v(\cdot) \in U([0, T_0], Z)$ найдется такое измеримое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T_0], Y)$, что

$$\omega(s) = \Phi(T_0 - s) F(u(s), v(s), s) \tag{8}$$

для почти всех $s \in [0, T_0]$. Поэтому для решения задачи (1), (3) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на отрезке $[0, T_0]$ в силу (4), (7) и (8) имеем:

$$x(T_0)) = [\Phi(T_0) - \Phi(T_0 - h) C] \varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(T_0 - s - h) [B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)] ds +$$

$$+ \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - s) F(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= m - \int_0^{T_0} \omega(s) ds + \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - s) F(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= m - \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - s) F(u(s), v(s), s) ds +$$

$$+ \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - s) F(u(s), v(s), s) ds = m \in M, \quad \text{т.е.} \quad x(T_0) \in M.$$

Следовательно, из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время T_0. При этом, исходя из информации о $v(t)$ и $\varphi(0)$ выбор измеримого управления $u(t)$ осуществляется по формуле (8). Если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $x(s), 0 \leq s \leq t$, то время преследования будет не более числа T_0. Поэтому, из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершения преследования с гарантированным временем преследования T_0. □

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) терминальное множество M выпукло и при любых $v \in Z$, $s \in [0, T]$ множество $\Phi(T - s) F(Y, v, s)$ замкнуто;

2) начальное положение $\varphi(s)$, $-h \le s \le 0$, $\varphi(0) \in X \backslash M$ *такое, что при некотором* $T \ge 0$ *имеет место включение*

$$[\Phi(T) - \Phi(T-h)C]\varphi(0) +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \Phi(T-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds \in W_2(\gamma(\cdot), T), \tag{9}$$

где

$$W_2(\gamma(\cdot), T) = \begin{cases} M, & \text{при} \quad T = 0, \\ \int_0^T \bigcap_{v \in Z}[\gamma(s)M - \Phi(T-s)F(Y,v,s)]ds, & \text{при} \quad T > 0, \end{cases}$$

а интегрируемая функция $\gamma(\cdot) : [0,T] \to [0,\infty)$ *такая, что* $\int_0^T \gamma(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} = 1$;
3) многозначное отображение $t \to W_2(\gamma(\cdot), t)$, $t \in [0,T]$ *секвенциально замкнуто.*

Тогда из начального положения $\varphi(\cdot)$ *возможно завершение преследования с гарантированным временем преследования* $T_0 = \min\{t \in [0,T] : \ \text{для которых выполняется} \ (9)\}$.

Доказательство. Рассуждая как в теореме 1, из секвенциальной замкнутости отображения $t \to W_2(\gamma(\cdot), t)$ и из абсолютной непрерывности отображения

$$t \to [\Phi(t) - \Phi(t-h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(t-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds$$

получаем, что множество $\{t \in [0,T] : \ \text{для которых выполняется} \ (9)\}$ замкнуто. Поэтому, в силу (9) для T_0 имеем:

$$[\Phi(T_0) - \Phi(T_0-h)C]\varphi(0) +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \Phi(T_0-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds \in W_2(\gamma(\cdot), T_0)) \tag{10}$$

Далее, в силу (10) существует такой интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z}[\gamma(s)M - \Phi(T_0-s)F(Y,v,s)], s \in [0,T_0],$$

что имеет место равенство

$$[\Phi(T_0) - \Phi(T_0-h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(T_0-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds =$$

$$= \int_0^{T_0} \omega\left(s\right) ds \tag{11}$$

Пусть выбрано произвольное управление убегания $v\left(\cdot\right) \in U\left(\left[0, T_0\right], Z\right)$. Тогда имеем включение

$\omega\left(s\right) \in \gamma\left(s\right) M - \mathit{\Phi}\left(T_0 - s\right) F\left(Y, v(s), s\right), \quad s \in \left[0, T_0\right]$ и замкнутое множество

$$\Pi\left(s\right) = \left(\omega\left(s\right) + \mathit{\Phi}\left(T_0 - s\right) F\left(Y, v\left(s\right), s\right)\right) \cap \gamma\left(s\right) M$$

не пусто. Из измеримости отображения $s \to \Pi(s)$ в силу лемм 1 и 2 существует измеримый селектор $p\left(s\right) \in \Pi\left(s\right)$, управления преследования $u(\cdot) \in U\left(\left[0, T_0\right], Y\right)$ и измеримое отображение $m\left(\cdot\right) : \left[0, T_0\right] \to M$ такие,что $p\left(s\right) = \omega\left(s\right) + \mathit{\Phi}\left(T_0 - s\right) F\left(u\left(s\right), v\left(s\right), s\right) = \gamma\left(s\right) m(s)$ для почти всех $s \in \left[0, T_0\right]$. Следовательно,

$$\omega\left(s\right) = \gamma\left(s\right) m(s) - \mathit{\Phi}\left(T_0 - s\right) F\left(u\left(s\right), v\left(s\right), s\right) \tag{12}$$

Поэтому, учитывая (11), (12), выпуклость терминального множества и равенство

$$\int_0^{T_0} \gamma\left(s\right) M ds = \left(\int_0^{T_0} \gamma(s) ds\right) M,$$

где данное равенство имеет место для выпуклого множества M (например [18] стр. 271), для решения $x\left(\cdot\right)$ задачи (1), (3), соответствующего управлениям $u\left(\cdot\right), v\left(\cdot\right)$ на $\left[0, T_0\right]$ имеем:

$$x\left(T_0\right) = \left[\mathit{\Phi}\left(T_0\right) - \mathit{\Phi}\left(T_0 - h\right) C\right] \varphi\left(0\right) + \int_{-h}^{0} \mathit{\Phi}\left(T_0 - s - h\right) \left[B \varphi\left(s\right) + C \dot{\varphi}\left(s\right)\right] ds +$$

$$+ \int_0^{T_0} \mathit{\Phi}\left(T_0 - s\right) F\left(u\left(s\right), v\left(s\right), s\right) ds =$$

$$= \int_0^{T_0} \omega\left(s\right) ds + \int_0^{T_0} \mathit{\Phi}\left(T_0 - s\right) F\left(u\left(s\right), v(s), s\right) ds =$$

$$= \int_0^{T_0} \left(\gamma\left(s\right) m\left(s\right) - \mathit{\Phi}\left(T_0 - s\right) F\left(u\left(s\right), v(s), s\right)\right) ds +$$

$$+ \int_0^{T_0} \mathit{\Phi}\left(T_0 - s\right) F\left(u\left(s\right), v(s), s\right) ds = \int_0^{T_0} \gamma\left(s\right) m\left(s\right) ds \in \int_0^{T_0} \gamma\left(s\right) M ds =$$

$$= \left(\int_0^{T_0} \gamma(s)\, ds\right) M = M, \quad \text{т.е.} \quad x(T_0) \in M.$$

Далее, рассуждая как в теореме 1, приходим к тому, что из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования с гарантированным временем преследования T_0. При этом, для любого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ соответствующее измеримое управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле (12). □

Замечание 2. *Из доказанных теорем следует, что для разрешимости задачи преследования необходимо некоторое превосходство преследователя над убегающим игроком. Включение* (5) *и не пустота множества*

$$\bigcap_{v \in Z} \Phi(t-s) F(Y, v, s), \quad t \in [0, T], \quad s \in [0, t]$$

(соответственно включение (9) и не пустота множества

$$\bigcap_{v \in Z} (\gamma(s) M - \Phi(t-s) F(Y, v, s)), \quad t \in [0, T], \quad s \in [0, t] \quad)$$

в теореме 1 (соответственно в теореме 2) обеспечивают превосходства преследователя.

Замечание 3. *Если X – гильбертово пространство, $M = M_0 + M_1$, где $M_1 \subset M_0^{\perp}, M_0^{\perp}$ – ортогональное дополнение к M_0 в X, $\pi : X \to M_0^{\perp}$ – оператор ортогонального проектирования из X на $M_0{}^{\perp}$, то теорема 1 (теорема 2) верна, когда выполняется следующее включение*

$$\pi\left[\Phi(T) - \Phi(T-h) C\right] \varphi(0) +$$
$$+ \int_{-h}^{0} \pi \Phi(T-s-h) \left[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)\right] ds \in \pi W_1(T)$$

(соответственно следующее включение

$$\pi\left[\Phi(T) - \Phi(T-h) C\right] \varphi(0) +$$
$$+ \int_{-h}^{0} \pi \Phi(T-s-h) \left[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)\right] ds \in \pi W_2(\gamma(\cdot), T)).$$

Замечание 4. *Если множество M выпукло и $\omega \in W_1(T)$ то существуют такие*

$$m \in M \ \text{ и } \psi(s) \in \bigcap_{v \in Z} \Phi(T-s) F(Y, v, s),$$

что

$$\omega = m - \int_0^T \psi(s)\, ds = \int_0^T \left[\frac{1}{T} m - \psi(s)\right] ds \in$$

$$\in \int_0^T \left[\gamma(\cdot) M - \bigcap_{v \in Z} \varPhi(T-s) F(Y, v, s)\right] ds \subset W_2(\gamma(\cdot), T),$$

$$\text{т.е. } W_1(T) \subset W_2(\gamma(\cdot), T).$$

3 Пример

В гильбертовом пространстве E исследуем игру, которая описывается системой дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) = y(t-1) + v \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(t-1) = -u \end{cases}, \qquad t \geq 0 \tag{13}$$

с начальным положением $\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s)) = (x_o, y_o)$, $-1 \leq s \leq 0$,
где $x \in E,\ y \in E$,
$v = v(t)-$ измеримое управление убегания, такое что $\|v(t)\| \leq \beta$,
$u = u(t)-$ измеримое управление преследования, такое что $\|u(t)\| \leq \alpha$, а терминальное множество M имеет вид: $M = \left\{ \binom{x}{y} : \|x\| \leq l,\ \ l > 0 \right\}$.

Если

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то рассматриваемая игра в пространстве $X = E \times E$ принимает вид

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(t-1) = Bz(t-1) - u + v,\quad t \geq 0,\quad z_0 = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix},\quad -1 \leq s \leq 0,$$

Пусть

$$R(T) = -\frac{\alpha}{3} T^3 + \frac{1+4n}{4} \alpha T^2 - \frac{2\beta + \alpha n^2 + \alpha n}{2} T + l,$$

$n \leq T \leq n+1, S_R-$ шар радиуса R с центром в точке $z = 0$, а $K^*\_N = \{c : c + N \subset K\}-$ геометрическая разность. Тогда справедливы следующие результаты:

1. Если $Ty_0 \in S_{R(T)}$, то из точки z_0 возможно преследование за время
$$T_o = min\{T \geq 0 \ : \ \|Ty_0\| \leq R(T), \ \ n \leq T \leq n+1\}.$$

2. Если $\alpha = \beta = 1, \ \ l = 20, \ \ n = 1$, то из точек $z_0, \|y_0\| = 1, \|x_0\| > 20$ возможно преследование за время $T_0 = 1$.

Действительно,
$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и в силу (2) имеем:
$$\dot{\Phi}(t) - \dot{\Phi}(t-1) = B\Phi(t-1).$$

Следовательно, когда:

1. $n = 0, 0 \leq t \leq 1$, то $\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(t-1) + B\Phi(t-1) = 0, \Phi(t) - \Phi(0) = 0$, $\Phi(t) = I$;

2. $n = 1, 1 \leq t \leq 2$, то $\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(t-1) + B\Phi(t-1) = B$, $\Phi(t) = \Phi(1) + B(t-1) = I + B(t-1)$;

3. $n = 2, 2 \leq t \leq 3$, то $\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(t-1) + B\Phi(t-1) = (I + B(t-2))' + B(I + B(t-2)) = B + B + B^2(t-2) = 2B$, $\Phi(t) = \Phi(2) + 2B(t-2) = I + B + 2B(t-2) = I + \frac{2 \cdot 1}{2} \cdot B + 2B(t-2)$.

Поэтому, по индукции можно утверждать, что фундаментальное решение имеет вид:
$$\Phi(t) = I + \frac{n(n-1)}{2}B + n \cdot B(t-n), \ \ n \leq t \leq n+1.$$

Далее,
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + n(t-n) \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & n(t-\frac{n+1}{2}) \\ 0 & I \end{pmatrix},$$
$$\Phi\,(t)\,z_o = \Phi\,(t) \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} I & n(t-\frac{n+1}{2}) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o + n(t-\frac{n+1}{2})y_o \\ y_o \end{pmatrix},$$
$$\pi\Phi\,(t)\,z_o = x_o + n(t - \frac{n+1}{2})y_o, \qquad \pi M = \{x : \|x\| \leq l, \ \ l > 0\} = S_l.$$

Оператор $\Phi(t-s)$ имеет вид:

$$\varPhi(t-s)=\begin{pmatrix} I & (n-s)(t-\frac{n+s+1}{2}) \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\varPhi\,(t-s)\,z_o=\begin{pmatrix} x_o+(n-s)(t-\frac{n+s+1}{2})y_o \\ y_o \end{pmatrix},$$

$$\pi\varPhi\,(t-s)\,z_o=x_o+(n-s)(t-\frac{n+s+1}{2})y_o,$$

$$\varPhi\,(t-s)\,Y=\left\{\begin{pmatrix} I & (n-s)(t-\frac{n+s+1}{2}) \\ 0 & I \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}:\|u\|\le\alpha\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} (n-s)(t-\frac{n+s+1}{2})u \\ u \end{pmatrix}:\|u\|\le\alpha\right\},$$

$$\varPhi\,(t-s)\,Z=\left\{\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}:\|v\|\le\beta\right\},$$

$$\pi\varPhi\,(t-s)\,Y=\left\{u:\|u\|\le(n-s)(t-\frac{n+s+1}{2})\alpha\right\}=S_{(n-s)(t-\frac{n+s+1}{2})\alpha},$$

$$\pi\varPhi\,(t-s)\,Z=S_\beta.$$

Тогда, учитывая замечание 3, равенства $S_\alpha \overset{*}{-} S_\beta=S_{\alpha-\beta}$ и

$$\int_0^t[S_{\alpha(s)}-S_{\beta(s)}]ds=S_{\int_0^t[\alpha(s)+\beta(s)]ds}$$

(например [1], с.312–313) для интеграла стоящего в правой части (9) имеем:

$$\int_0^T\bigcap_v(\gamma(s)\pi M-\pi\ \varPhi(T-S)(Y-v))ds=$$

$$=\int_0^T\Big[S_{l\gamma(s)}-\Big(S_{(n-s)(T-\frac{n+s+1}{2})\alpha}\overset{*}{-}S_\beta\Big)\Big]ds$$

$$=\int_0^T\Big(S_{l\gamma(s)}-S_{(n-s)(T-\frac{n+s+1}{2})\alpha-\beta}\Big)ds=$$

$$=S_{\int_0^T\left(l\gamma(s)+(n-s)\left(T-\frac{n+s+1}{2}\right)\alpha-\beta\right)ds}=S_{R(T)}-\text{шар радиуса }R\,(T)\,.$$

В силу того, что отображение $t \to S_{R(t)}, t \in [0,T]$, замкнуто, то оно и секвенциально замкнуто.

С другой стороны,

$$\pi\left[\Phi\left(T\right)-\Phi\left(T-1\right)\right]z_0+\int_{-1}^{0}\pi\Phi\left(T-s-1\right)\left[Bz_0+C\dot{z}_0\right]ds=$$

$$=x_0+n(T-\frac{n+1}{2})y_0-(x_0+(n-1)(T-\frac{n+2}{2})y_0)+$$

$$+\int_{-1}^{0}\pi\Phi(T-s-1)\begin{pmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_o\\ y_o\end{pmatrix}ds=y_0(nT-\frac{n(n+1)}{2}-(n-1)T+$$

$$+\frac{(n+2)(n-1)}{2})+\int_{-1}^{0}y_0ds=y_0(T-1)+y_0=y_0T.$$

Поэтому, в силу теоремы 2 и замечании 3, из точки z_0 возможно преследование за время

$$T_o=min\{T\geq 0\ :\ \|Ty_0\|\leq R(T),\ \ n\leq T\leq n+1\},$$

если шар $S_{R(T)}$ не пуст. В силу того, что $R(0)=l>0$, то существует отрезок времени $[0,T_1]$, где $R(T)>0$, т.е. шар $S_{R(T)}$ будет непустым.

В частности, когда $\alpha=\beta=1,\ \ l=20,\ \ n=1$ из начальных точек $z_0,\ \ ||y_0||=1,\ \ \|x_0\|>l$ возможно преследование за время

$$T_o=min\{T\ :\ \|Ty_0\|\leq -\frac{T^3}{3}+\frac{5}{4}T^2-2T+20,\ \ 1\leq T\leq 2\}=$$

$$=min\{T\ :-\frac{T^3}{3}+\frac{5}{4}T^2-3T+20\geq 0,\ \ 1\leq T\leq 2\}=1,$$

ибо

$$f(T)=-\frac{T^3}{3}+\frac{5}{4}T^2-3T+20$$

убывающая функция и $f(T)>0$ при $0\leq T<\tau\in(4,5)$, где $f(\tau)=0$.

4 Заключение

В настоящей работе найдены множества начальных положений, из которых возможно завершение преследования, когда динамика игры описывается функционально – дифференциальным уравнением нейтрального типа в банаховом пространстве. Полученные результаты (теоремы 1 и 2) обобщают:

1. конечномерные результаты работы ([8], с. 2001), где динамика игры задается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением;

2. результаты работы ([19], с.80), где динамика игры задается дифференциальным уравнением запаздывающего типа;

3. результаты работы ([20], с. 111) где динамика игры задается дифференциальным уравнением нейтрального типа.

Результаты данной работы могут быть использованы в математической теории управляемых процессов, протекающие в условиях конфликта или неопределенности и при решении игровых задач динамика которых описывается функционально–дифференциальными уравнениями в подходящих банаховых пространствах.

Список литературы

[1] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154). №3. С. 307–331.

[2] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.:Наука, 1974. 456 с.

[3] Лукоянов Н.Ю., Пласкин А.Р. К теории позиционных дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Т.25. №3. С. 118–128.

[4] Lukoyanov N.Yu., Gomoyunov M.I., Plaksin A.R. Hamilton-Jacobi functional equations and differential games for neutral-type systems. // Dokl. Math. 2017. vol.96. №3. P. 654–657.

[5] Барановская Л.В. Метод разрешающих функций для одного класса задач преследования. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий: Математика и кибернетика - прикладные аспекты. 2015. 2/4 (74). С. 4–8.

[6] Kyrychenko N.F., Baranovskaya L.V., Chyckrij Al.A. On the class of linear differential-difference games of pursuit // Dopov. Akad. Nauk Ukr. 1997. №6. P. 24–26.

[7] Хейл Дж. Теория функционально дифференциальных уравнений. М.:Мир, 1984. 421 с.

[8] Сатимов Н. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9. №11. С. 2000–2009.

[9] Rockafellar T. R. Convex Integral Functionals and Duality // Contribution to nonlinear functional analysis. Academic Press, Inc., New York and London. 1971. P. 215-236.

[10] Parthasarathy T. Selection Theorems and their Applications // Lecture Notes in Mathematics. 1972. №263. P. 1-101.

[11] Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions // Multifunctions-lecture Notes Math. 1977. №580. P. 1-278.

[12] Datko R. On the integration of set-valued mappings in a Banach space // Fundamenta Mathematicae. 1973. Vol.78. Issue 3. P. 205-208.

[13] Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. М.:Наука, 1980. 384 с.

[14] Datko R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations in a Banach Space // Journal of differential equations. 1977. №25. P. 258-274.

[15] Friedman A. Differential Games of Pursuit in Banach Space. // Journal of Mathematical analysis and applications. 1969. vol.25. P. 93–113.

[16] Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Доклады АН СССР. 1975. т.223. №6. С. 1314 – 1317.

[17] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.:ИИЛ, 1962. 832 с.

[18] Мухсинов Е.М. О задаче преследования в банаховом пространстве // Доклады АН Тадж. ССР. 1983. Т.26. №5. С. 270–274.

[19] Мухсинов Е.М., Муродова М.Н. Задача преследования для дифференциальной игры с запаздывающим аргументом в бесконечномерном пространстве // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2018. №3. С. 79 – 86.

[20] Мухсинов Е.М. Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры нейтрального типа // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2021. №1(31). С. 108 – 117.

On the pursuit problem for a quasilinear differential game of neutral type

Mukhsinov E.M.

Tajikistan State University of Law, Business, and Politics
yodgor.mukhsinov@gmail.com

Abstract In the field of the theory of differential games, when the game takes place in a finite-dimensional space, the fundamental work was carried out by academicians L. S. Pontryagin and N. N. Krasovskiy. In the works of N. N. Krasovskiy and his co-workers, positional differential games are investigated. In the approach of L. S. Pontryagin and his co-workers, the differential game is considered separately from the point of view of the pursuer and from the point of view of the evader, which inevitably links the differential game with two different problems. In this paper, we consider the pursuit problem in the sense of L. S. Pontryagin for a quasilinear differential game of neutral type in a Banach space. Two theorems on sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem are proved. For one example, a linear differential game described by a differential equation of neutral type is investigated. Sufficient conditions that ensure the solvability of the pursuit problem are found.

Keywords: differential game of neutral type, Banach space, pursuit problem, pursuit time.