

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 4, 2021

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

Синхронизация через посредника в малой звездчатой сети спин-трансферных осцилляторов

П. В. Кушцов, В. П. Круглов

Саратовский филиал Института

радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

p.kuptsov@rambler.ru, kruglovyacheslav@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель сети спин-трансферных осцилляторов с полевой связью. Модель задаётся системой уравнений Ландау-Лифшица-Гильберта-Слончевского, между которыми введена связь через магнитные поля в виде добавки к эффективному полю. Для этой сети в общем виде записано аналитическое выражение для матрицы Якоби. Для случая, когда сеть имеет структуру малой звезды (один центральный осциллятор связан с тремя другими, которые не имеют связей друг с другом) построена карта показателей Ляпунова и показано существование областей в пространстве параметров, где реализуется режим синхронизации через посредника. В этом режиме периферийные осцилляторы синхронизированы друг с другом, но не синхронизированы с центральным осциллятором.

Ключевые слова: спин-трансферный осциллятор, матрица Якоби, показатели Ляпунова, карта показателей Ляпунова, синхронизация через посредника

1 Введение

Спин-трансферный осциллятор — это наноразмерное устройство которое может быть использовано для генерации маломощных СВЧ-сигналов [1]. Отличительная черта таких осцилляторов — возможность перестройки собственной частоты колебаний посредством изменения силы тока, текущего через осциллятор, или внешнего магнитного поля [2] что выгодно отличает их от других генерирующих устройств, для перестройки частоты которых необходимо менять их внутренние параметры, такие как ёмкости и индуктивности, что с точки зрения практической реализации более трудоёмко.

На рис. 1 показано устройство спин-трансферного осциллятора. Это трёхслойная структура в которой два слоя ферромагнетика разделены диамагнитным слоем. Ток течёт через осциллятор сверху вниз, следовательно электроны движутся в обратном направлении — снизу вверх. Нижний ферромагнитный слой сравнительно более толстый и поэтому его намагниченность остаётся неизменной. Она задаётся вектором \vec{p} . Проходя через него электроны поляризуются, т.е. их спины выстраиваются вдоль \vec{p} . Далее, пройдя диамагнитную прослойку, электроны попадают в верхний тонкий слой ферромагнетика и теряют свою поляризацию. Это приводит к возникновению вращающего момента, что в конечном счёте вызывает изменение вектора намагниченности верхнего слоя \vec{m} — он начинает осциллировать.

Динамика вектора намагниченности верхнего слоя \vec{m} описывается уравнением Ландау—Лифшица—Гильберта—Слончевского [3], которое после перенормировки времени и намагниченности, а также после компактного переобозначения параметров можно записать в следующей форме (символ « \times » обозначает векторное произведение):

$$\dot{\vec{m}} = -\vec{m} \times \vec{h}_{\text{eff}} - \alpha \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{h}_{\text{eff}}) - \beta \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{p}) + \alpha \beta \vec{m} \times \vec{p} \quad (1)$$

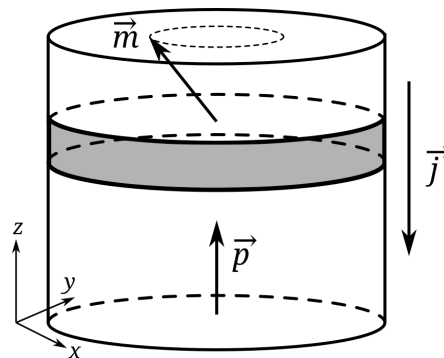


Рис. 1: Общее устройство спин-трансферного осциллятора

Здесь \vec{m} — трёхмерный вектор намагниченности, нормированный на намагниченность насыщения материала, из которого сделан верхний слой осциллятора. В ходе динамики меняется только направление этого вектора, а длина остаётся постоянной и равной единице, $\|\vec{m}\| = 1$. Вектор \vec{p} — это постоянный вектор намагниченности нижнего слоя, также нормированный на единицу, $\|\vec{p}\| = 1$. В дальнейшем мы будем всегда считать, что \vec{p} направлен вертикально вверх, т. е. $\vec{p} = (0, 0, 1)$. Параметр β пропорционален плотности тока j и кроме того он также зависит от свойств материала осциллятора. Наконец α — параметр отвечающий за величину затухания. Вектор \vec{h}_{heff} в этом уравнение — эффективное магнитное поле, которое складывается из внешнего поля, приложенного к осциллятору, и полей, обусловленных свойствами материала осциллятора:

$$\vec{h}_{\text{heff}} = K_u(\vec{m}, \vec{u})\vec{u} - \mathcal{N}\vec{m} + \vec{h}_{\text{ext}} \quad (2)$$

Здесь слагаемое $K_u(\vec{m}, \vec{u})\vec{u}$ задаёт поле анизотропии, K_u — константа анизотропии, вектор \vec{u} — ось лёгкого намагничивания. Этот вектор единичный и мы будем всегда считать что он направлен по оси y : $\vec{u} = (0, 1, 0)$. Второе слагаемое $\mathcal{N}\vec{m}$ отвечает за поле размагничивания, а \mathcal{N} — размагничивающий тензор, который в нашем случае представляет собой диагональную матрицу сумма элементов диагонали которой равна единице. Последнее слагаемое \vec{h}_{ext} — это внешнее поле.

Спин-трансферные осцилляторы изучают достаточно широко причём большой интерес вызывают системы связанных осцилляторов, так как это даёт возможность получить сложные колебательные режимы. Обычно рассматривается связь между осцилляторами, заданная через общий ток — цепочка осцилляторов включается последовательно в электрическую цепь, а так как их сопротивление зависит от направлений векторов намагниченности \vec{m} то возникает обратная связь — общий ток влияет на характер поведения, а осцилляции \vec{m} в свою очередь влияют на общий ток [4, 5]. Такой способ фактически представляет собой вариант глобальной связи, когда каждый осциллятор связан со всеми остальными.

В настоящей работе мы рассматриваем взаимодействие осцилляторов через магнитные поля друг друга, предложенное в работе [6]. Такой способ связи допускает создание сложных конфигураций осцилляторов с локальными связями и позволяет наблюдать богатое разнообразие динамических режимов.

Типичными для систем связанных осцилляторов являются эффекты синхронизации того или иного типа [7]. Синхронизация играет большую роль в

различных областях науки и техники и настолько часто становится предметом исследований, что сделать компактный обзор публикаций по синхронизации имеющих отношение к тематике настоящей работы не представляется возможным. Упомянем просто несколько значимых работ. В статьях [4, 5] изучаются эффекты синхронизации в массивах спин-трансферных осцилляторов связанных общим током. В работе [8] рассматривается задача оценки диапазона быстрого захвата для классической системы фазовой синхронизации с кусочно-линейной характеристикой фазового детектора и фильтрами первого порядка. В статье [9] решается задача управления синхронизацией двух связанных систем Хиндмарш-Роуз.

Изучаемый в настоящей работы вид синхронизации называется синхронизацией через посредника (в англоязычной литературе — *remote synchronization*). Этот эффект был впервые обнаружен в работе [10]. Рассматривалась сеть осцилляторов Ван дер Поля со звездчатой структурой: имеется центральный осциллятор, который связан со всеми остальными. Все другие осцилляторы — лучи звезды — связаны только с центральным и не имеют друг с другом прямых связей. Осцилляторы неидентичны — их собственные частоты отличаются. В такой сети при определённых параметрах возможна синхронизация осцилляторов-лучей и при этом центральный узел, который выступает в качестве посредника, не синхронизирован с ними. Позже в работе [11] было показано, что такая синхронизация возможно даже когда вместо одного осциллятора-луча имеется линейная цепочка осцилляторов — звезда с длинными лучами. В такой звезде можно наблюдать синхронизацию дальних концов лучей и при этом все остальные осцилляторы остаются не синхронизированными. Дальнейшие исследования показали, что синхронизацией через посредника можно удалённо управлять — варьируя параметры одного из лучей-осцилляторов можно включать или выключать синхронизацию остальных лучей. Сам управляющий осциллятор при этом не синхронизируется с другим осцилляторами [12].

Цель настоящей работы — обнаружить эффект синхронизации через посредника в малой звездчатой сети из спин-трансферных осцилляторов. Принимая во внимание перечисленные выше интересные особенности этого эффекта, можно рассчитывать на разработку в дальнейшем перспективных наноразмерных устройств со сложной управляемой динамикой.

Интересующий нас режим с точки зрения формальной классификации нелинейных колебаний представляет собой двухчастотную квазипериодичность — на одной из частот колеблются синхронизировавшиеся периферий-

ные осцилляторы, а на другой — центральный осциллятор. Известны аналитические подходы к обнаружению заданных динамических режимов. Например, в статье [13] приведён обзор метода «перехода в пространство производных», который может быть применён для выявления наличия у системы периодического решения. Однако для связанных между собой достаточно сложноустроенных систем, к которым относится спин-трансферный осциллятор, представляется невозможным аналитически строго доказать существования квазипериодического режима с заданными характеристиками и обнаружить этот режим в пространстве параметров. По этой причине основным инструментом в работе будет численный метод построения карт ляпуновских показателей. Показатели Ляпунова характеризуют скорость экспоненциального растяжения или сжатия малых объёмов фазового пространства при движении системы по аттрактору. Динамические режимы разного типа имеют разные характерные наборы показателей. Для поиска интересующего нас поведения мы зададим в пространстве параметров прямоугольную область, покроем её равномерной сеткой и будем вычислять спектр показателей в каждой точке сетки. Анализируя полученные значения можно будет сделать вывод о наличии искомого режима.

2 Сеть спин-трансферных осцилляторов с полевой связью

Идея введения полевой связи, предложенная в работе [6], основана на том, что в линейном приближении намагниченность пропорциональна магнитному полю: $\vec{M} = \chi \vec{H}$, где χ — магнитная восприимчивость. Отсюда следует, что связь можно ввести как добавку к эффективному полю. Таким образом систему N связанных спин-трансферных осцилляторов с полевой связью можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{m}}_n = & -\vec{m}_n \times (\vec{h}_{\text{heff}})_n - \alpha_n \cdot \vec{m}_n \times \left(\vec{m}_n \times (\vec{h}_{\text{heff}})_n \right) - \\ & - \beta_n \cdot \vec{m}_n \times (\vec{m}_n \times \vec{p}) + \alpha_n \cdot \beta_n \cdot \vec{m}_n \times \vec{p}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$(\vec{h}_{\text{heff}})_n = K_u(\vec{m}_n, \vec{u})\vec{u} - \mathcal{N}_n \vec{m}_n + \vec{h}_{\text{ext}} + \epsilon \sum_{i=1, i \neq n}^N \kappa_{ni} \vec{m}_i / k_n. \quad (4)$$

Здесь $n = 1, 2, \dots, N$, ϵ — параметр, отвечающий за величину связи, и мы предполагаем, что осцилляторы неидентичны по параметрам α_n , β_n и \mathcal{N}_n .

Далее будем полагать, что внешнее поле равно нулю, $\vec{h}_{\text{ext}} = 0$. Конфигурацию связей задаёт матрица $\kappa_{ni} \in \{0, 1\}$; k_n — строчные суммы этой матрицы.

Отметим, что единицы на диагонали матрицы связи не имеют смысла, т. е. должно быть $\kappa_{nn} = 0$. Причина в том, что $(\vec{h}_{\text{heff}})_n$ в уравнении (3) всегда умножается векторно на \vec{m}_n . При этом возникает член $\sum_{i=1}^N \kappa_{ni} \vec{m}_n \times \vec{m}_i / k_n$ в котором слагаемое при $i = n$, соответствующее диагональному элементу κ_{nn} , тождественно равно нулю.

Отметим, что магнитное поле каждого осциллятора будет заполнять всё окружающее пространство. Поэтому при практической реализации системы (3) для придания магнитным полям нужной конфигурации необходимо поместить всю систем осцилляторов в сверхпроводящую среду с полостями, соответствующим выбранной конфигурации связей.

3 Матрица Якоби сети спин-трансферных осцилляторов

Для вычисления показателей Ляпунова требуется сначала построить линеаризацию вблизи траектории изучаемой системы. Получаемое в результате уравнение называется уравнением в вариациях — вариациям в данном случае подвергаются динамические переменные системы. Если исходную систему представить в виде уравнения $d\mu/dt = f(\mu)$, то уравнение в вариациях запишется как

$$d\tilde{\mu}/dt = J(\mu)\tilde{\mu}, \quad (5)$$

где μ — вектор динамических переменных, $\tilde{\mu}$ — вектор их возмущений, а $J(\mu) = \partial f / \partial \mu$ — матрица Якоби исходного уравнения, которая зависит от μ .

Для системы (3) вектор μ построен из векторов \vec{m}_i , $i = 1, 2, \dots, N$ и имеет размерность $3N$. Чтобы получить уравнение в вариациях требуется вычислить производные каждого из $3N$ уравнений системы по каждой компоненте каждого из векторов \vec{m}_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Это вычисление очень трудоёмко. Обсудим как этого избежать и получить компактное уравнение в вариациях используя векторное дифференцирование. Мы продифференцируем n -ое уравнение по i -й переменной \vec{m}_i и получим матрицу Якоби как блочную матрицу $N \times N$ с размером блока 3×3 .

Сначала найдём диагональные элементы матрицы, вычислив производную n -ого уравнение системы (3) по n -й переменной \vec{m}_n . Перепишем уравне-

ние (3), вынеся \vec{m}_n за скобки:

$$\dot{m} = m \times [(p_{\alpha\beta} - h) + m \times (-\alpha h - p_\beta)] \quad (6)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $m \equiv \vec{m}_n$, $h \equiv (\vec{h}_{\text{heff}})_n$, $\alpha \equiv \alpha_n$, $p_\beta \equiv \beta_n \vec{p}$, $p_{\alpha\beta} \equiv \alpha_n \beta_n \vec{p}$. Перепишем уравнение ещё раз:

$$\dot{m} = m \times a, \quad (7)$$

где

$$a = b + m \times c, \quad b = p_{\alpha\beta} - h, \quad c = -\alpha h - p_\beta. \quad (8)$$

Перед тем как вычислять производную правой части уравнения (7) по вектору m , запишем некоторые формулы векторного дифференцирования, которые нам потребуются.

Пусть u — вектор, который зависит от m . (Отметим что когда мы говорим о векторах, то подразумеваем вектора-столбцы). Производная этого вектора по скаляру m_x есть тоже вектор: $\partial u / \partial m_x = (\partial u_x / \partial m_x, \partial u_y / \partial m_x, \partial u_z / \partial m_x)^T$. Поэтому производная вектора u по вектору m — это матрица следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial m} = \begin{pmatrix} \partial u_x / \partial m_x & \partial u_x / \partial m_y & \partial u_x / \partial m_z \\ \partial u_y / \partial m_x & \partial u_y / \partial m_y & \partial u_y / \partial m_z \\ \partial u_z / \partial m_x & \partial u_z / \partial m_y & \partial u_z / \partial m_z \end{pmatrix}, \quad (9)$$

т. е. это матрица Якоби.

Вычислим теперь производную по m от векторного произведения векторов u и v , считая что оба зависят от m . Предварительно заметим, что векторное произведение можно представить как умножение матрицы на вектор: $u \times v = C(u) \cdot v$, где $C(u)$ — матрица построенная из компонент вектора u следующим образом:

$$C(u) = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Продифференцируем $u \times v$ по m_x :

$$\frac{\partial(u \times v)}{\partial m_x} = \frac{\partial u}{\partial m_x} \times v + u \times \frac{\partial v}{\partial m_x} = \quad (11)$$

Эту формулу можно получить, расписав векторное произведение в координатной форме. Далее, с учётом матричной формы векторного произведения

имеем

$$= C(u) \frac{\partial v}{\partial m_x} - C(v) \frac{\partial u}{\partial m_x} \quad (12)$$

Это первый столбец искомой производной. Для остальных столбцов, которые получаются дифференцированием по m_y и m_z , формулы будут аналогичными. Поэтому окончательно получим:

$$\frac{\partial(u \times v)}{\partial m} = C(u) \frac{\partial v}{\partial m} - C(v) \frac{\partial u}{\partial m} \quad (13)$$

Теперь вернёмся к формуле (7) и вычислим производную её правой части по m . С учётом того, что $\partial m / \partial m$ есть единичная матрица, имеем:

$$\frac{\partial(m \times a)}{\partial m} = C(m) \frac{\partial a}{\partial m} - C(a) \quad (14)$$

$$\frac{\partial a}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}(b + m \times c) = \frac{\partial b}{\partial m} + C(m) \frac{\partial c}{\partial m} - C(c) \quad (15)$$

$$\frac{\partial b}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}(p_{\alpha\beta} - h) = -\frac{\partial h}{\partial m} \quad (16)$$

$$\frac{\partial c}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}(-\alpha h - p_\beta) = -\alpha \frac{\partial h}{\partial m} \quad (17)$$

Собрав все полученные выражения в одну формулу и приведя подобные получим:

$$\frac{\partial(m \times a)}{\partial m} = -(C(m) + \alpha C(m)^2) \frac{\partial h}{\partial m} - C(m)C(c) - C(a) \quad (18)$$

Вычислим $\partial h / \partial m$ (вспомним, что через m мы обозначили \vec{m}_n):

$$\frac{\partial h}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left(K_u(\vec{m}_n, \vec{u})\vec{u} - \mathcal{N}_n \vec{m}_n + \vec{h}_{\text{ext}} + \epsilon \sum_{i=1, i \neq n}^N \kappa_{ni} \vec{m}_i / k_n \right). \quad (19)$$

Сначала разберёмся с производной $\partial[(m, u)u] / \partial m$ (в данном случае вектор u — это константа). Это будет матрица, первый столбец которой мы получим, вычислив производную по m_x :

$$\frac{\partial[(m, u)u]}{\partial m_x} = u_x u \quad (20)$$

Другие столбцы получаются аналогично. Собирая это вместе, получим:

$$\frac{\partial[(m, u)u]}{\partial m} = u \cdot u^T \quad (21)$$

Такое произведение вектора столбца на вектор строку называется внешним произведением (outer product) и его результат — матрица, элементы которой образованы всевозможными попарными произведениями элементов векторов сомножителей. Также необходимо вычислить производную $\partial \mathcal{N}m / \partial m$, где \mathcal{N} — постоянная матрица. Сначала вычислим производную по m_x . Нетрудно проверить что в результате получится вектор, равный первому столбцу \mathcal{N} . Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \mathcal{N}m}{\partial m} = \mathcal{N} \quad (22)$$

Дифференцируя сумму $\sum_{i=1, i \neq n}^N \chi_{ni} \vec{m}_i / k_n$ по \vec{m}_n мы получим χ_{nn} / k_n . Выше мы обсуждали, что вклад от диагональных элементов матрицы связи обнуляется, поэтому для упрощения вида выражения можно опустить этот член. Внешнее поле \vec{h}_{ext} не зависит от m поэтому его производная обращается в ноль. Поэтому в итоге получим:

$$\frac{\partial h}{\partial m} = K_u u \cdot u^T - \mathcal{N}_n \quad (23)$$

Подставим это в (18). Вспомним, что мы дифференцировали n -ое уравнение по n -переменной. Поэтому получаемая в результате формула даст нам диагональные элементы искомой матрицы Якоби системы (3).

$$j_{nn} = - (C(m_n) + \alpha_n C(m_n)^2) (K_u u \cdot u^T - \mathcal{N}_n) - C(m_n)C(c_n) - C(a_n) \quad (24)$$

Мы строим матрицу Якоби в блочной форме, и j_{nn} — это матрицы размера 3×3 . В этой формуле мы восстановили подразумеваемый индекс n . Величины a_n и c_n задаются формулами (8) (а в этих формулах индекс n опущен для упрощения записи).

Недиагональные элементы матрицы Якоби вычисляются аналогично: нужно продифференцировать правую часть уравнения (7) по \vec{m}_i считая, что $i \neq n$. В этом выражении от \vec{m}_i зависит только h , поэтому нам достаточно вычислить производную h по \vec{m}_i и оставить в формуле (18) члены, пропорциональные этой производной. Остальные обратятся в нуль при дифференцировании. В выражении для h , см. (4), \vec{m}_i входит только в сумму, и искомая производная равна $(\epsilon \chi_{ni} / k_n) E$, где E — единичная матрица. Таким образом, недиагональные члены матрицы Якоби равны:

$$j_{ni} = - (C(m_n) + \alpha_n C(m_n)^2) (\epsilon \chi_{ni} / k_n). \quad (25)$$

4 Вычисление показателей Ляпунова

Показатели Ляпунова — это средние показатели экспоненциального роста малых (инфинитезимальных) возмущений инвариантных траекторий динамической системы. Имеется спектр (набор) показателей, в котором они упорядочены по убыванию. Количество показателей совпадает с размерностью фазового пространства системы. Строгое обоснование существования этих характеристических величин для широкого класса динамических систем, а также метод их вычисления основаны на мультипликативной эргодической теореме В. И. Оселедца [14]. На практике часто не удаётся развить математически аккуратный анализ с привлечением ляпуновских показателей, так как строгий аналитический метод их получения на сегодня не разработан. Тем не менее существует хорошо обоснованная и исследованная численная процедура [15] что позволяет строить численный ляпуновский анализ динамики настолько заслуживающий доверия, насколько его вообще заслуживают исследования, основанные на численном счёте. В качестве примера такого исследования можно указать работу [16].

Обычно наибольший интерес представляют только несколько старших, т. е. наибольших показателей. Поэтому перед началом вычисления нужно задать количество старших показателей, которые требуется получить. Обозначим это количество через K . Вычисление производится следующим образом. Выбирается произвольная точка в поглощающей области аттрактора системы и инициализируются случайным образом K векторов возмущений $\tilde{\mu}_k$, $k = 1, 2, \dots, K$. Затем совместно решается основное уравнение, в нашем случае это уравнение (3), и K уравнений в вариациях вида (5), которые отвечают за эволюцию векторов возмущений $\tilde{\mu}_k$. Уравнение в вариациях линейное, поэтому чтобы избежать переполнения, обнуления, а также выстраивания всех векторов $\tilde{\mu}_k$ вдоль одного направления периодически, с некоторым интервалом, необходимо выполнять их ортогонализацию и перенормировку. Пусть M — матрица, имеющая K столбцов, в качестве которых выступают вектора $\tilde{\mu}_k$ полученные к некоторому моменту времени. Выполним так называемое QR-разложение этой матрицы — представим её в виде произведения ортогональной матрицы Q и верхней треугольной матрицы R [17]:

$$QR = M \quad (26)$$

Один из способов вычисления такого разложения называется методом Грама—Шмидта. Диагональные элементы $r_{kk} > 0$ матрицы R содержат информацию о нормах векторов возмущений, собранных в матрицу M . Столбцы

матрицы Q имеют единичную норму и взаимно перпендикулярны. Их нужно использовать в качестве новых векторов возмущений и решать уравнения в течение следующего интервала времени. Затем повторяется процедура ортогонализации и нормировки. Сначала в течение достаточно длительного времени счёт производится «вхолостую» чтобы система вышла на аттрактор. Затем начинается собственно вычисление показателей, которое сводится к суммированию логарифмов r_{kk} . Накопив достаточно большое количество значений получают показатели Ляпунова как средние по траектории:

$$\lambda_k = \frac{1}{t} \sum \log r_{kk} \quad (27)$$

где t — время счёта, в течение которого выполнялось суммирование.

5 Карта ляпуновских показателей. Выявление режима синхронизации через посредника

Вычислив для исследуемой системы показатели Ляпунова, можно сделать заключение о характере её поведения. Для потоковых систем, каковыми являются динамические системы задаваемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, в частности система (3), режимы классифицируются следующим образом. Если один или более старших показателей больше нуля, то это говорит о хаотической динамике (при условии, что траектория при этом остаётся в ограниченной области фазового пространства). В случае если самый большой показатель равен нулю, а все остальные отрицательные, тогда систем движется по предельному циклу. Наличие двух нулевых старших показателей говорит о двухчастотном торе — система демонстрирует режим квазипериодичности с двумя независимыми частотами которые не образуют друг с другом рационального отношения. В случае когда три старших показателя равны нулю тор трёхчастотный, т. е. имеются три независимых частоты и так далее. Наконец если все показатели отрицательные то система находится в устойчивой неподвижной точке. Кроме того, если движение системы на аттракторе таково, что некоторые величины не меняются, то каждой такой величине будет соответствовать ещё один нулевой показатель Ляпунова. В частности, так как у изучаемой системы (3) сохраняются нормы \vec{m}_i , то в спектре независимо от режима всегда присутствуют N нулевых показателей, где N — количество осцилляторов.

Рассмотрим сеть из $N = 4$ осцилляторов структура связей которой имеет форму звезды, см. рис. 2. Наша цель — продемонстрировать в этой системе

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2,3,4} &= 0.008, 0.010, 0.011, 0.012 \\ \beta_{2,3,4} &= -0.0010, -0.0011, -0.0012 \\ K_u &= 0.08 \\ \vec{u} &= (0, 1, 0) \\ \vec{p} &= (0, 0, 1) \\ \mathcal{N}_{1,2} &= (0.0318, 0.1269, 0.8413), (0.0320, 0.1269, 0.8411) \\ \mathcal{N}_{3,4} &= (0.0319, 0.1270, 0.8411), (0.0317, 0.1271, 0.8412) \\ \vec{h}_{\text{eff}} &= (0, 0, 0) \\ \vec{m}_{1,2}(t=0) &= (0.1, -0.1, -0.9), (-0.2, 0.2, -0.8) \\ \vec{m}_{3,4}(t=0) &= (0.3, -0.3, -0.7), (-0.4, 0.4, -0.6) \end{aligned}$$

Таблица 1: Значения параметров системы (3) для которых построена карта показателей Ляпунова на рис. 3. Начальные значения динамических переменных $\vec{m}_{1,2,3,4}$ дополнительно нормируются на единицу.

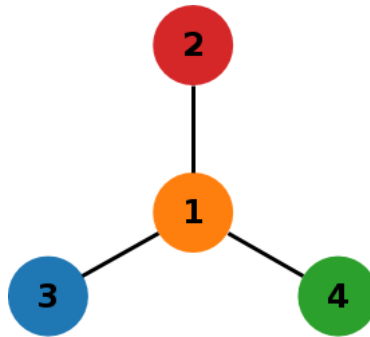


Рис. 2: Схема соединения четырёх осцилляторов в виде звездчатой сети.

режим синхронизации через посредника, когда осцилляторы 2, 3 и 4 синхронизируются, не имея прямых связи друг с друга. Осциллятор-посредник 1 обеспечивая обмен информацией между синхронизируемыми осцилляторами, не синхронизируется с ними. Искомый режим представляет собой квазипериодичность с двумя независимыми частотами — одна отвечает колебаниям синхронизированных осцилляторов-лучей 2, 3 и 4, вторая — колебаниям центрального осциллятора 1. Таким образом, режим двух-частотной квазипериодичности — это необходимое условие синхронизации через посредника.

На рис. 3 построена карта показателей Ляпунова на плоскости (ϵ, β_1) . Значения других параметров приведены в табл. 1. Цвета на рисунке кодируют режимы: красный соответствует хаосу (Ch), голубой — неподвижной точке (FP), оранжевый — это предельный цикл (Cyc), светло-зелёный — двухчастотная квазипериодичность (2T), наконец тёмно-зелёным отмечены небольшие области с квазипериодичностью более высокого порядка (nT).

Интересующий нас режим отмечен светло-зелёным цветом. Вообще го-

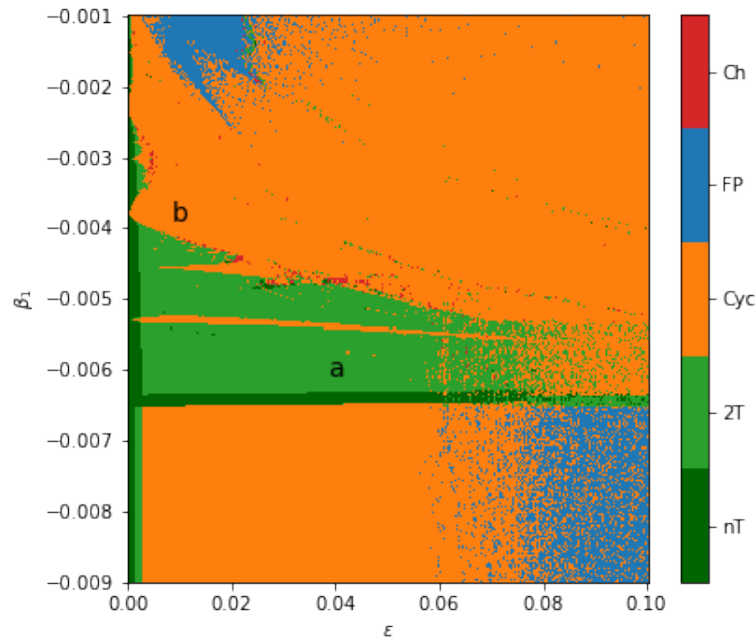


Рис. 3: Карта показателей Ляпунова. Значения параметров приведены в табл. 1

$$\lambda_{1-4} = 0, 0, 0, 0$$

$$\lambda_{5-8} = 0, 0, -0.000736, -0.00419$$

$$\lambda_{9-12} = -0.00420, -0.00434, -0.00434, -0.00853$$

Таблица 2: Показатели Ляпунова системы (3) при $\epsilon = 0.04$, $\beta_1 = -0.006$ (см. также табл. 1). Значения, принятые за нулевые в расчётах имели значения порядка $|\lambda| < 10^{-5}$.

воря двухчастотная квазипериодичность не является достаточным условием для наблюдения синхронизации через посредника. Потенциально возможны и другие конфигурации синхронизации узлов сети. Поэтому мы должны выполнить дополнительную проверку режимов, наблюдаемых в светло-зелёных областях.

Выберем точку $\epsilon = 0.04$, $\beta_1 = -0.006$, см. точку «а» на рис. 3. Значения показателей Ляпунова, полученные в этой точке, приведены в табл. 2. Отметим, что в численном счёте невозможно получить строго нулевые значения показателей. Однако численные значения, соответствующие нулевым показателям имеют отчётливо меньшие по модулю значения чем все прочие. Всего имеются шесть нулевых показателей. Четыре из них появляются в силу сохранения норм векторов динамических переменных отдельных осцилляторов. Ещё два говорят о наличии в системе двух независимых частот.

На рис. 4 представлено решение системы (3) в точке «а» в трёхмерных координатах. Показана траектории первого и второго осцилляторов. Траекто-

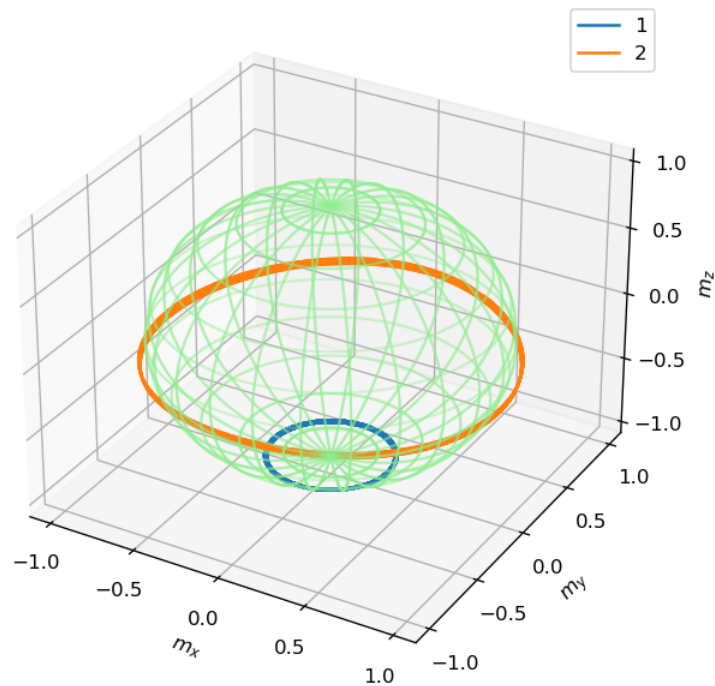


Рис. 4: Динамика на сфере: показаны траектории осцилляторов 1 и 2. Параметры соответствуют точке «а» на рис. 3.

рии третьего и четвертого осцилляторов совпадают с траекторией второго. На рис. 5 приведены соответствующие зависимости от времени x компонент переменных. Из этих рисунков видно, что осцилляторы 2, 3 и 4 синхронизированы, а частота колебаний осциллятора 1 существенно выше при существенно меньшей амплитуде.

Чтобы подтвердить отсутствие синхронизации между первым и тремя другими осцилляторами проанализируем отношение соответствующих фазовых переменных. Из рис. 4 видно, что колебания происходят в горизонтальной плоскости. Поэтому в качестве фазовой переменной удобно взять сферическую координату $\phi = \arctg(m_y/m_x)$. Построим зависимость фазы первого осциллятора ϕ_1 от фазы второго ϕ_2 . Если осцилляторы не синхронизированы, то отношение фаз не будет выражаться рациональным числом, а следовательно зависимость $\phi_1(\phi_2)$ будет равномерно заполнять всю плоскость рисунка. Это иллюстрирует рис. 6. Диаграммы (а), (b) и (с) отличаются длиной построенной траектории. Хорошо видно, что с увеличением времени наблюдения плоскость рисунка постепенно заполняется точками — это подтверждает, что синхронизация отсутствует.

Таким образом мы продемонстрировали, что в что в точке «а» система (3) демонстрирует режим синхронизации через посредника. Аналогично

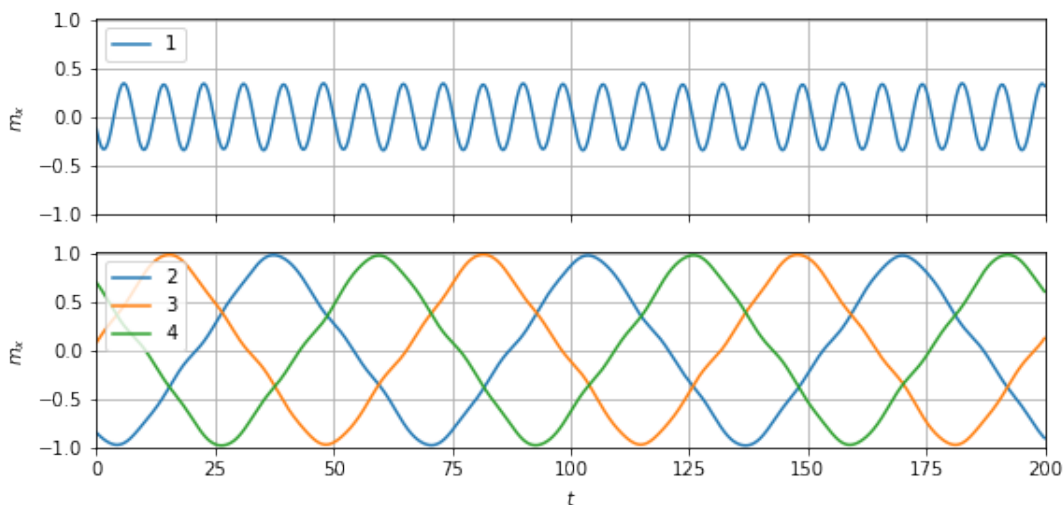


Рис. 5: Временные зависимости x -компонент векторов динамических переменных осцилляторов для параметров, взятых в точке «а» на рис. 3

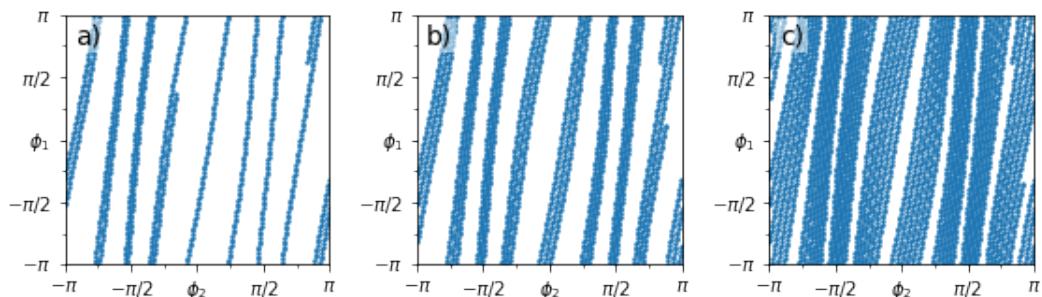


Рис. 6: Зависимость друг от друга фазовых переменных первого и второго осцилляторов. Диаграммы отличаются длиной построенной траектории: а) $t_{\max} = 100$, б) $t_{\max} = 200$, в) $t_{\max} = 400$. Видно, что ростом времени наблюдения, траектория заполняет всю плоскость рисунка.

можно проверить другие точки в светло-зелёных областях — мы не приводим результаты так как там наблюдается аналогичное поведение.

Для сравнения рассмотрим точку «b» на рис. 3, в которой $\epsilon = 0.01$, $\beta_1 = -0.0038$ и которая находится в оранжевой области карты режимов. Следовательно имеется только пять нулевых показателей Ляпунова и это значит, что все осцилляторы синхронизированы. На рис. 7 показаны зависимости от времени x -компонент переменных. Этот рисунок очень похож на рис. 5, построенный для точки «а»: мы снова видим, что второй третий и четвёртый осцилляторы синхронизированы. Однако теперь и первый осциллятор также синхронизирован с ними. Это хорошо видно из рис. 8: зависимость фаз первого и второго осцилляторов теперь представляет собой систему линий которые

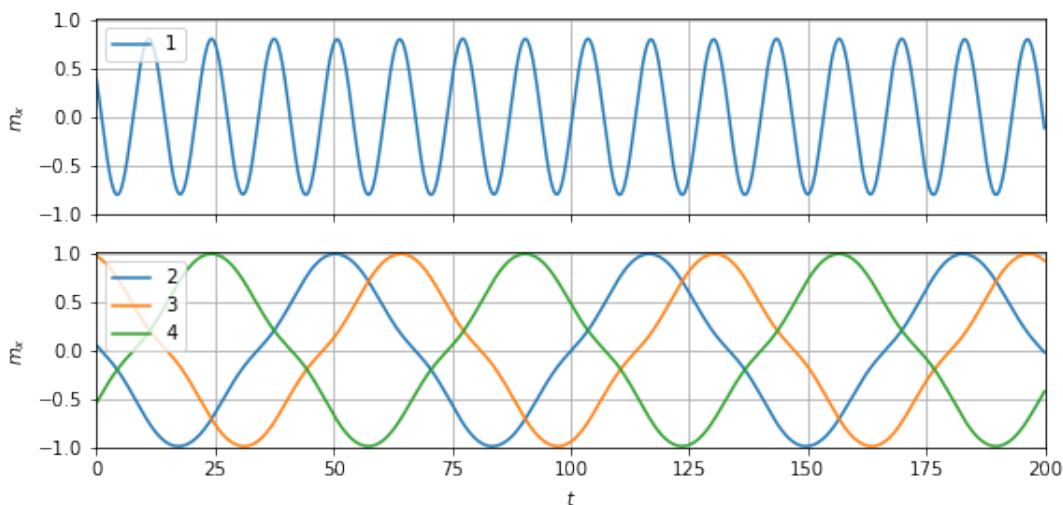


Рис. 7: Временные зависимости переменных в точке «b».

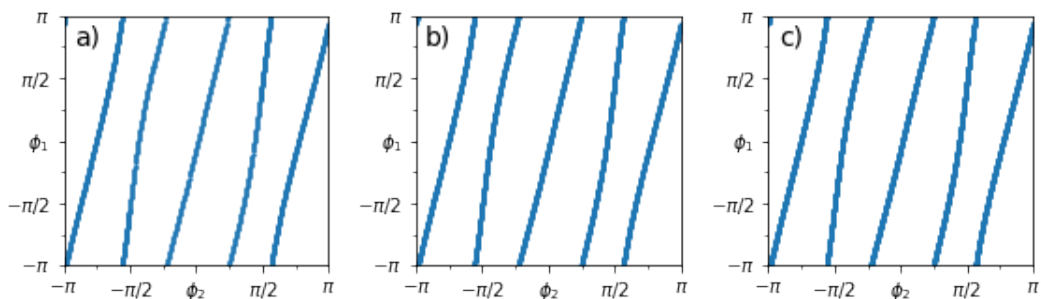


Рис. 8: Зависимость фаз $\phi_1(\phi_2)$ в точке «b», построенная для разной длины траектории.

с учётом 2π периодически нужно считать одной линией. Поэтому при увеличении времени наблюдения вид этой линии не меняется, ср. с рис. 6. Наклон этой линии существенно отличается от единицы — фазы образуют некоторое рациональное соотношение существенно отличное от единицы.

6 Заключение

Мы исследовали систему спин-трансферных осцилляторов связанных через магнитное поле. Конфигурация связей имеет вид звезды, когда каждый осциллятор взаимодействует только с центральным и не имеет связей с другими осцилляторами. Для изучаемой системы в явном виде была записана матрица Якоби и с её использованием построена карта ляпуновских показателей. Это позволило выявить в пространстве параметров область существования режима синхронизации через посредника. В этом режиме периферийные ос-

осцилляторы синхронизируются хотя и не имеют прямых связей друг с другом. Связь осуществляется через посредника — центральный осциллятор который при этом не синхронизирован с остальными осцилляторами.

Рассмотренная система может быть использована как маломощный источник СВЧ излучения с возможностью реализации сложных колебательных режимов. В силу того, что взаимодействие осуществляется только посредством магнитного поля при отсутствии электрического контакта, такую систему можно применять для реализации трансформаторной связи между узлами наноразмерных СВЧ устройств. В силу перечисленных особенностей рассмотренная система представляется перспективной с точки зрения дальнейшего изучения и применения в качестве компонент электронных приборов.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

Литература

- [1] Prokopenko O., Bankowski E., Meitzler T. и др. Spin-Torque Nano-Oscillator as a Microwave Signal Source // IEEE Magnetics Letters. 2011. Т. 2. С. 3000104.
- [2] Zeng Z., Finocchio G., Zhang B. и др. Ultralow-current-density and bias-field-free spin-transfer nano-oscillator // Scientific Reports. 2013. Т. 3. № 1. С. 1426.
- [3] Slonczewski J. Current-driven excitation of magnetic multilayers // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1996. Т. 159. № 1. С. L1–L7.
- [4] Zaks M., Pikovsky A. Chimeras and complex cluster states in arrays of spin-torque oscillators // Scientific Reports. 2017. Т. 7. № 1. С. 4648.
- [5] Zaks M. A., Pikovsky A. Synchrony breakdown and noise-induced oscillation death in ensembles of serially connected spin-torque oscillators // The European Physical Journal B. 2019. Т. 92. № 7. С. 160.
- [6] Туркин Я. В., Купцов П. В. Динамика двух спин-трансферных осцилляторов с полевой связью // Известия высш. уч. зав. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22. № 6. С. 69–78.

- [7] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. С. 433.
- [8] Кузнецов Н. В., Благоев М. В., Александров К. Д. и др. О диапазоне быстрого захвата для систем фазовой синхронизации с кусочно-линейной характеристикой фазового детектора // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. Т. 3. С. 74–89.
- [9] Разноглазова Ю. В., Плотников С. А. Бифуркации и управление синхронизацией в двух связанных двумерных системах Хиндмарш-Роуз // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. Т. 4. С. 127–140.
- [10] Bergner A., Frasca M., Sciuto G. и др. Remote synchronization in star networks // Phys. Rev. E. 2012. Т. 85. С. 026208.
- [11] Kuptsov P. V., Kuptsova A. V. Radial and circular synchronization clusters in extended starlike network of van der Pol oscillators // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Т. 50. С. 115–127.
- [12] Kuptsov P. V., Kuptsova A. V. Indirect synchronization control in a starlike network of phase oscillators // Proc. of SPIE. 2018. Т. 10717. С. 107172G–1.
- [13] Буркин И. М. Метод "перехода в пространство производных". 40 лет эволюции // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. Т. 3. С. 51–93.
- [14] Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды Моск. матем. об-ва. 1968. Т. 19. С. 197–231.
- [15] Pikovsky A., Politi A. Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics. Cambridge University Press, 2016. С. 295.
- [16] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N. и др. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // Nonlinear Dynamics. 2018. Т. 92. № 2. С. 267–285.
- [17] Golub G. H., van Loan C. F. Matrix computations. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996. С. 694.

Remote synchronization in a small star-like network of spin-torque oscillators

P. V. Kuptsov, V. P. Kruglov

Kotelnikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS,
Saratov Branch

p.kuptsov@rambler.ru, kruglovyacheslav@gmail.com

Abstract. We consider a mathematical model of field coupled spin-torque oscillators network. The model is described by a set of the Landau–Lifshitz–Gilbert–Slonczewski magnetization equations, which are coupled via an additional term to the effective field. For this model a generic form of the Jacobi matrix is explicitly derived. The network of four oscillators coupled as a star is considered: the central oscillator is coupled with three others and they do not have direct couplings with each other. For this network the Lyapunov’s exponent chart is computed and the area in the parameter space is found where the network demonstrates remote synchronization. In this regime the peripheral oscillators are synchronized with each other but not synchronized with the central one.

Keywords: spin-torque oscillator, Jacobian matrix, Lyapunov exponents, Lyapunov exponents chart, remote synchronization

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation, project 21-12-00121, <https://rscf.ru/en/project/21-12-00121/>