ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.4, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Математические аспекты условия инвариантности MIMO-системы к возмущениям в каналах управления

Зубов Н.Е[1,2,*], Рябченко В.Н.[1,**], Лапин А.В.[1,3,***]

[1] Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана)
[2] Ракетно-космическая Корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва («РКК «Энергия» им. С.П. Королёва»)
[3] Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ГосНИИАС)

e-mail:

[*] Nik.Zubov@gmail.com
[**] Ryabchenko.VN@yandex.ru
[***] AlexeyPoeme@yandex.ru

Аннотация. Представлены конструктивные условия инвариантности линейной динамической системы со многими входами и многими выходами (MIMO-системы) к возмущениям в каналах управления. Подход к синтезу инвариантного управления заключается в поиске такой матрицы коэффициентов обратной связи линейной системы, которая удовлетворяла бы условиям инвариантности, представляющим собой систему степенных матричных уравнений определённой конструкции. Эти условия получаются на основе решения задачи регуляризации симметрического матричного уравнения. Представлены теоремы с доказательствами и иллюстративными примерами, как для математического подхода к аналитическому синтезу инвариантной системы со многими входами и многими выходами (MIMO-системы), так и для численного синтеза системы управления пространственным движением одновинтового вертолёта. В числовом примере математическая постановка задачи синтеза управления позволила организовать «нечувствительность» углов крена и тангажа к возмущениям в каналах управления, одновременно с этим обеспечивая устойчивость общего движения летательного аппарата.

Ключевые слова: инвариантное управление, вертолёт, точное размещение полюсов, возмущение в канале управления, инъекция Морса.

1. Введение

Теория инвариантности динамических систем играет существенную роль в задачах управления динамическими объектами. Её относят к разделу теории автоматического управления (ТАУ), объединяющему методы и средства достижения инвариантности (независимости) одной или части координат вектора состояния динамической системы при помощи подбора параметров (или путём изменения структуры) этой системы. На практике задачи инвариантности возникают тогда, когда необходимо компенсировать возмущающие факторы, нарушающие условия нормальной работоспособности различных устройств.

Возникновение идей инвариантности связывают с именем Г.В. Щипанова, относя это к моменту опубликования его основных работ [1], [2]. В этих работах Г.В. Щипанов стремился установить количественную связь между параметрами системы и реакцией этой системы на внешние воздействия. Такая постановка непосредственно вытекала из работ академика А.Н. Крылова. Дальнейшее развитие теории инвариантности связано с именем академика Н.Н. Лузина, разработавшего «эталонный метод синтеза инвариантных систем» [3]. Именно Н.Н. Лузин ввёл термин «инвариантность» в ТАУ. Впоследствии многие выдающиеся учёные внесли вклад в развитие теории инвариантности в рамках классической ТАУ. Среди них учёные нашей страны В.С. Кулебакин, Б.Н. Петров, А.Ю. Ишлинский, Я.З. Цыпкин, А.Г. Ивахненко, В.М. Кунцевич, А.И. Кухтенко, В.А. Бесекерский, В.Ю. Рутковский, С.Д. Земляков, Б.Т. Поляк, Э.М. Солнечный, Г.М. Уланов, П.И. Чинаев и другие. Также известны и зарубежные авторы, в частности, B.D. Anderson, G. Basile, C.D. Johnson, G. Marro, A.S. Morse (А. Морс), M. Wonham (М. Уонем). В результате в полном объёме была решена проблема инвариантности для систем с одним входом и одним выходом (SISO-систем).

Однако в отношении систем со многими входами и многими выходами (MIMO-систем) ещё имеется ряд нерешённых теоретических проблем. Так, ещё в 1981 г. Б.Н. Петров, В.Ю. Рутковский и С.Д. Земляков указывали на сложность решения задачи инвариантности для MIMO-систем и необходимость формирования новых подходов на основе достижений современной математики. Примером такого подхода является широко известная монография М. Уонема [4], где в рамках так называемого «геометрического подхода» проводятся исследования инвариантности линейных многомерных систем. Также весьма плодотворным для синтеза инвариантных MIMO-систем оказался «алгебраический подход» [5].

Задача инвариантного управления вплотную примыкает к таким широко известным задачам современной ТАУ, как «развязка по входам и выходам» (decoupling inputs and outputs), «развязка с устойчивостью» (decoupling with stability), «диагонализация динамических систем» (dynamic system diagonalization), известная в отечественной теории как «автономизация по Вознесенскому», и др. [4] – [9].

В отличие от традиционной для современной отечественной литературы постановки задачи инвариантности [9] в данной работе рассматривается инвариантность по отношению к неизмеряемым возмущениям в каналах управления. Формально такой подход вытекает из традиционной постановки при условии совпадения матриц при векторах управления и возмущений.

2. Условия инвариантности

Условие инвариантности выхода -мерной динамической MIMO-системы, заданной в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{aligned} &\sigma\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{u} + \mathbf{w}), \\ &\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \\ &\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ – соответственно вектора состояния, управления, возмущений и выхода, σ – оператор дифференцирования по времени ($\sigma\mathbf{x}(t) \triangleq \dot{\mathbf{x}}(t)$) или сдвига на один такт ($\sigma\mathbf{x}(t) \triangleq \mathbf{x}(t+1)$), $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, относительно входного возмущения $\mathbf{w}$ в соответствии с теорией, изложенной в работе [9], имеет вид системы степенных матричных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{CB} = \mathbf{0}_{m\times r}, \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BF})\mathbf{B} = \mathbf{0}_{m\times r}, \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BF})^2\mathbf{B} = \mathbf{0}_{m\times r}, \\ \qquad\vdots \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BF})^n\mathbf{B} = \mathbf{0}_{m\times r}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ и $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – заданные матрицы собственной динамики, входов и выходов соответственно, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ – искомая матрица обратных связей (матрица регулятора), $\mathbb{R}^{a\times b}$ – множество действительных матриц размерности $a \times b$, $\mathbf{0}_{a\times b}$ – нулевая матрица размерности $a \times b$.

Для обеспечения условий (2) требуется найти такую матрицу $\mathbf{F}$, чтобы выполнялись все равенства из системы уравнений (2), функционально зависящие от этой матрицы.

В работе предлагается решение данной задачи на основе регуляризации матричного уравнения. Под регуляризацией здесь понимается обеспечение заданного множества сингулярных значений (чисел) у симметричной квадратной матрицы в линейном матричном уравнении.

3. Регуляризация симметричного матричного уравнения

Рассмотрим задачу обеспечения заданного множества сингулярных значений у симметричной квадратной матрицы в линейном матричном уравнении. В этом случае имеет место следующая постановка задачи регуляризации [10].

Задано линейное симметричное матричное уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \tag{3}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad \det(\mathbf{B}^T\mathbf{B}) \neq 0, \quad r < n. \tag{4}$$

Требуется обеспечить корректируемой (переобуславливаемой) матрице $\hat{\mathbf{A}}$ подмножество сингулярных значений $\mathrm{sv}(\sigma_0\mathbf{I}_r) = \mathrm{eig}(\sigma_0\mathbf{I}_r)$, где $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ – заданная скалярная величина. Здесь и далее $\mathbf{I}$ – единичная матрица соответствующего порядка (в нижнем индексе), sv – сингулярные значения матрицы (matrix singular values), eig – собственные значения матрицы (matrix eigenvalues).

Теорема 1. *Пусть задано уравнение (3) с условиями (4). Тогда матрица*

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{F}, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{L} = (\sigma_0 \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{B}^{+T}, \tag{6}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^{+}(\sigma_0 \mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{I}_n - \mathbf{B}^{+T}\mathbf{B}^{T}), \tag{7}$$

имеет следующее множество сингулярных значений:

$$\mathrm{sv}\widehat{\mathbf{A}} = \mathrm{sv}(\mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp L+}) \cup \mathrm{sv}(\sigma_0 \mathbf{I}_r). \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{B}^{+}$ *– псевдообратная матрица Мура-Пенроуза, т.е. такая матрица, что*

$$\mathbf{B}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{I}_r, \quad \mathbf{B}\mathbf{B}^{+} = (\mathbf{B}\mathbf{B}^{+})^{T},$$

а $\mathbf{B}^{\perp L}$ *– левый аннулятор максимального ранга, т.е. такая матрица, что*

$$\mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{B} = \mathbf{0}_{(n-r)\times n}, \quad \mathrm{rank}\mathbf{B}^{\perp L} = n - r.$$

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Отметим, что «регуляризация» здесь понимается в смысле обеспечения у обращаемой симметрической матрицы заданного подмножества сингулярных значений в виде r чисел σ_0.

4. Инвариантность MIMO-системы

Соотнося выражения (5), (6) и (7) с представлением системы (1), можно интерпретировать матрицу (6) как матрицу инъекции Морса (линейной свертки вектора состояния) [11], а матрицу (7) – как указанную ранее матрицу обратных связей (матрицу регулятора). Таким образом, вместо системы (1) в общем случае можно рассматривать MIMO-систему вида

$$\begin{aligned} \sigma\mathbf{x} &= (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{B}^{T} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{9}$$

Для этой системы справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть задана MIMO-система (9), где* $\mathbf{A}$ *– симметрическая матрица,* $\mathbf{CB} = \mathbf{0}_{m\times r}$, *а матрицы* $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{F}$ *рассчитываются соответственно из соотношений (6) и (7). Тогда для матрицы (5) имеет место равенство (8) и выполняются следующие условия:*

$$\mathbf{C}\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \mathbf{C}\widehat{\mathbf{A}}^{2}\mathbf{B} = \cdots = \mathbf{C}\widehat{\mathbf{A}}^{n}\mathbf{B} = \mathbf{0}_{m\times r}. \tag{10}$$

В общем случае, когда матрица $\mathbf{A}$ в записи (9) является произвольной (не обязательно симметричной и обратимой), справедлива более общая теорема.

Теорема 3. *Пусть задана MIMO-система (9), где* $\mathbf{A}$ *– произвольная матрица,* $\mathbf{CB} = \mathbf{0}_{m\times r}$, *а матрицы* $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{F}$ *рассчитываются соответственно из соотношений*

$$\mathbf{L} = \mathbf{B}^{+T}\mathbf{\Sigma}_0 - \mathbf{A}\mathbf{B}^{+T}, \tag{11}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Sigma}_0\mathbf{B}^{+} - \mathbf{B}^{+}(\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{B}^{T}). \tag{12}$$

Тогда выполняются условия (10) *и, кроме того,*

$$\operatorname{eig} \mathbf{\Sigma}_0 \subset \operatorname{eig} \widehat{\mathbf{A}}. \tag{13}$$

Условие (13) можно назвать спектральным условием, поскольку оно определяет спектральные свойства замкнутой системы. На фигурирующую в соотношениях (11) и (12) матрицу $\mathbf{\Sigma}_0$ могут накладываться различные условия в зависимости от дополнительных требований. Например, это может быть требование устойчивости, устойчивости с заданным запасом и др. Как видно из соотношений (8) и (13), спектральные свойства матрицы $\mathbf{\Sigma}_0$ «наследуются» замкнутой системой [10], [12].

5. Методический пример

Рассмотрим MIMO-систему, у которой матрица $\mathbf{A}$ (размера 4×4) задана в общем виде, причём выполняется первое условие из системы (2):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{CB} = \mathbf{0}_{m\times r}. \tag{14}$$

Пусть для упрощения получаемых выражений последние две матрицы в формулах (14) соответственно имеют вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Видно, что в данном случае заданы значения

$$n = 4, \quad r = m = 2.$$

В общем случае для матриц (14) и (15) справедливы неравенства

$$\mathbf{CAB} \neq \mathbf{0}_{m\times r}, \quad \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \neq \mathbf{0}_{m\times r}, \quad \mathbf{CA}^3\mathbf{B} \neq \mathbf{0}_{m\times r}, \quad \mathbf{CA}^4\mathbf{B} \neq \mathbf{0}_{m\times r}.$$

Полагая, что матрица $\mathbf{\Sigma}_0$ в выражениях (11), (12) и (13) имеет вид

$$\mathbf{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

и выполняя вычисления по формулам (11) и (12) соответственно, получим

$$\mathbf{L} = -\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} - \sigma_1 & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} - \sigma_2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\mathbf{F} = -\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

С учётом полученных значений (17) и (18) рассчитаем матрицу (5)

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

для которой выполняются условия инвариантности (2). Более того, для матриц(16), (19) и

$$\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \sigma_1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

выполняется спектральное условие, точнее,

$$\operatorname{eig}(\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{F}) = \operatorname{eig}(\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{B}^T) = \operatorname{eig}(\mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp L+}) \cup \operatorname{eig}\boldsymbol{\Sigma}_0.$$

Как видно, «параллельно» с решением задачи инвариантности MIMO-системы (14), (15) происходит диагонализация системы, при этом замкнутая система «наследует» свойства матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_0$, что и определено спектральным условием (13).

Усложним задачу. Пусть теперь

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}, \quad \Delta = b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41} \neq 0.$$

В этом случае

$$\mathbf{L} = \Delta^{-1}\begin{pmatrix} a_{14}b_{32} - a_{13}b_{42} & a_{13}b_{41} - a_{14}b_{31} \\ a_{24}b_{32} - a_{23}b_{42} & a_{23}b_{41} - a_{24}b_{31} \\ a_{34}b_{32} - a_{33}b_{42} + \sigma_1 b_{42} & a_{33}b_{41} - a_{34}b_{31} - \sigma_2 b_{41} \\ a_{44}b_{32} - a_{43}b_{42} - \sigma_1 b_{32} & a_{43}b_{41} - a_{44}b_{31} + \sigma_2 b_{31} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \Delta^{-1}\begin{pmatrix} a_{41}b_{32} - a_{31}b_{42} & a_{31}b_{41} - a_{41}b_{31} \\ a_{42}b_{32} - a_{32}b_{42} & a_{32}b_{41} - a_{42}b_{31} \\ -b_{32}(\sigma_1 - \sigma_2)(b_{31}b_{32} + b_{41}b_{42})\Delta^{-1} & b_{31}(\sigma_1 - \sigma_2)(b_{31}b_{32} + b_{41}b_{42})\Delta^{-1} \\ -b_{42}(\sigma_1 - \sigma_2)(b_{31}b_{32} + b_{41}b_{42})\Delta^{-1} & b_{41}(\sigma_1 - \sigma_2)(b_{31}b_{32} + b_{41}b_{42})\Delta^{-1} \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_1 b_{31}b_{42} - \sigma_2 b_{32}b_{41})\Delta^{-1} & -b_{31}b_{32}(\sigma_1 - \sigma_2)\Delta^{-1} \\ 0 & 0 & b_{41}b_{42}(\sigma_1 - \sigma_2)\Delta^{-1} & (\sigma_2 b_{31}b_{42} - \sigma_1 b_{32}b_{41})\Delta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь также выполняются условия инвариантности, спектральное условиеи диагонализация. Это и требовалось показать.

6. Числовой пример

Рассмотрим задачу синтеза системы управления одновинтового вертолёта, позволяющую обеспечить необходимые характеристики устойчивости вертолёта и «нечувствительность» углов крена и тангажа к возмущениям в соответствующих каналах управления. Формализуем постановку задачи. Для этого представим пространственное движение лёгкого одновинтового вертолёта непрерывной $(\sigma\mathbf{x}(t) \triangleq \mathbf{x}(t))$ моделью в пространстве состояний [9].

В данном случае вектор состояния имеет вид

$$\mathbf{x} = (v_x \quad v_y \quad v_z \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \quad \gamma \quad \vartheta)^T, \tag{21}$$

где v_x, v_y, v_z – приращения линейных скоростей движения центра масс (ЦМ) вертолёта; ω_x, ω_y, ω_z – приращения угловых скоростей вращения вертолёта вокруг его ЦМ; ϑ, γ – приращение углов тангажа и крена соответственно.

Управляемое движение вертолёта осуществляется изменением компонент вектора управления

$$\mathbf{u} = (u_z \quad u_x \quad u_{\text{ош}} \quad u_{\text{рв}})^T, \tag{22}$$

где u_z, u_x – углы отклонения конуса несущего винта в продольном и поперечном направлениях; $u_{\text{ош}}$ – общий шаг несущего винта; $u_{\text{рв}}$ – шаг рулевого винта.

Матрицы математической модели вертолёта имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{v_x}^{v_x} & a_{v_x}^{v_y} & a_{v_x}^{v_z} & a_{v_x}^{\omega_x} & a_{v_x}^{\omega_y} & a_{v_x}^{\omega_z} & a_{v_x}^{\gamma} & a_{v_x}^{\vartheta} \\ a_{v_y}^{v_x} & a_{v_y}^{v_y} & a_{v_y}^{v_z} & a_{v_y}^{\omega_x} & 0 & a_{v_y}^{\omega_z} & a_{v_y}^{\gamma} & a_{v_y}^{\vartheta} \\ a_{v_z}^{v_x} & a_{v_z}^{v_y} & a_{v_z}^{v_z} & a_{v_z}^{\omega_x} & a_{v_z}^{\omega_y} & a_{v_z}^{\omega_z} & a_{v_z}^{\gamma} & a_{v_z}^{\vartheta} \\ a_{\omega_x}^{v_x} & a_{\omega_x}^{v_y} & a_{\omega_x}^{v_z} & a_{\omega_x}^{\omega_x} & a_{\omega_x}^{\omega_y} & a_{\omega_x}^{\omega_z} & 0 & 0 \\ a_{\omega_y}^{v_x} & a_{\omega_y}^{v_y} & a_{\omega_y}^{v_z} & a_{\omega_y}^{\omega_x} & a_{\omega_y}^{\omega_y} & a_{\omega_y}^{\omega_z} & 0 & 0 \\ a_{\omega_z}^{v_x} & a_{\omega_z}^{v_y} & a_{\omega_z}^{v_z} & a_{\omega_z}^{\omega_x} & a_{\omega_z}^{\omega_y} & a_{\omega_z}^{\omega_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{\gamma}^{\omega_y} & a_{\gamma}^{\omega_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{\vartheta}^{\omega_y} & a_{\vartheta}^{\omega_z} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{v_x}^{u_x} & b_{v_x}^{u_y} & b_{v_x}^{u_{\text{ош}}} & 0 \\ b_{v_y}^{u_x} & b_{v_y}^{u_y} & b_{v_y}^{u_{\text{ош}}} & 0 \\ b_{v_z}^{u_x} & b_{v_z}^{u_y} & b_{v_z}^{u_{\text{ош}}} & b_{v_z}^{u_{\text{рв}}} \\ b_{\omega_x}^{u_x} & b_{\omega_x}^{u_y} & b_{\omega_x}^{u_{\text{ош}}} & b_{\omega_x}^{u_{\text{рв}}} \\ b_{\omega_y}^{u_x} & b_{\omega_y}^{u_y} & b_{\omega_y}^{u_{\text{ош}}} & b_{\omega_y}^{u_{\text{рв}}} \\ b_{\omega_z}^{u_x} & b_{\omega_z}^{u_y} & b_{\omega_z}^{u_{\text{ош}}} & b_{\omega_z}^{u_{\text{рв}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где a_*^*, b_*^* (с соответствующими индексами) – коэффициенты (передаточные отношения) модели.

В одном из режимов полёта модель гипотетического вертолёта характеризуется следующими числовыми матрицами коэффициентов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.0598 & -0.0233 & -0.0002 & 0.1702 & 0.3421 & 6.2716 & -0.0483 & -9.7604 \\ -0.0268 & -0.8899 & -0.0269 & -0.3830 & 0 & -69.2829 & 0.6119 & -0.7709 \\ -0.0025 & 0.0107 & 0.1944 & -6.2099 & 68.9783 & 0.1245 & 9.7604 & 0.0483 \\ 0.0157 & 0.1106 & -0.1224 & -6.2574 & -0.1909 & -2.7761 & 0 & 0 \\ -0.0238 & 0.0145 & -0.0545 & 0.1054 & -0.8687 & 0.5274 & 0 & 0 \\ 0.0265 & -0.0405 & -0.0060 & 0.6389 & -0.0004 & -2.2364 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.0788 & -0.0049 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0626 & 0.9980 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -17.4746 & 2.0594 & -1.3047 & 0 \\ -73.4395 & 22.9505 & 119.7015 & 0 \\ -0.2261 & -16.0004 & -1.3185 & -5.9483 \\ -0.2863 & -135.3251 & -13.7479 & -2.3208 \\ -18.0300 & 3.5072 & 10.3189 & -13.1535 \\ 28.1780 & -0.9659 & 22.7255 & -0.1517 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

В соответствии с задачей синтеза нас интересует изменение углов крена и тангажа. Используя матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

выделим углы крена и тангажа из вектора состояния (21).

Сформулируем задачу следующим образом. Для MIMO-системы (21) – (24) с матрицами коэффициентов (25), (26) необходимо синтезировать закон управления $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$, обеспечивающий инвариантность к возмущениям в каналах крена и тангажа. Кроме того, вследствие неудовлетворительных характеристик устойчивости, помимо инвариантности требуется обеспечить замкнутой системе заданное расположение собственных значений (полюсов) матрицы состояния $\mathbf{A}_c$, совпадающее с множеством

$$\operatorname{eig} \mathbf{A}_c = \{-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4, \quad -5, \quad -6, \quad -7, \quad -8\}. \tag{28}$$

В соответствии с видом матриц (26) и (27) необходимое [4], [9] условие инвариантности $\mathbf{CB} = \mathbf{0}_{m\times r}$ в данном случае выполняется. Псевдообратная матрица для матрицы (26) имеет вид

$$\mathbf{B}^+ = \begin{pmatrix} -0.0087 & -0.0038 & 0.0020 & -0.0012 & -0.0009 & 0.0195 & 0 & 0 \\ 0.0004 & -0.0008 & -0.0003 & -0.0074 & 0.0015 & -0.0010 & 0 & 0 \\ -0.0049 & 0.0061 & 0.0009 & 0.0007 & -0.0007 & 0.0124 & 0 & 0 \\ 0.0066 & 0.0084 & -0.0291 & 0.0034 & -0.0633 & -0.0147 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Назначим диагональную матрицу

$$\mathbf{\Sigma}_0 = \operatorname{diag}(-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4). \tag{29}$$

Здесь и далее заданные полюса могут принимать любые значения, исходя из тех или иных тактико-технических требований.

В соответствии с выражениями (11) и (12) вычислим соответственно матрицу инъекции Морса и матрицу обратной связи

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}-0.1137 & 0.0061 & -0.0630 & 0.0874\\ 1.3514 & -0.0697 & 0.8470 & -1.0447\\ 0.0524 & -0.1468 & 0.0482 & 4.5015\\ 0.0486 & -0.0340 & 0.0363 & -0.0498\\ -0.0101 & -0.0004 & -0.0053 & 0.2041\\ 0.0250 & 0.0045 & -0.0096 & 0.0237\\ 0.0014 & 0.0073 & -0.0006 & 0.0015\\ -0.0194 & 0.0009 & -0.0123 & 0.0186\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}-0.0599 & 0.0705 & 0.0695 & -0.0104 & -0.0064 & -0.0210 & -0.0177 & -0.0881\\ -0.0294 & -0.0018 & 0.0041 & 0.0005 & 0.0010 & -0.0132 & 0.0037 & 0.0031\\ 0.1834 & 0.0259 & -0.0171 & -0.0009 & 0.0182 & 0.0626 & -0.0130 & -0.0435\\ 0.1393 & -0.1149 & -0.7320 & 0.0575 & 0.2939 & 0.1911 & 0.2787 & 0.0727\end{pmatrix}.$$

В результате матрица замкнутой MIMO-системы $\mathbf{A}_c=\mathbf{A}+\mathbf{L}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}\mathbf{F}$ принимает вид

$$\mathbf{A}_c=\begin{pmatrix}2.7691 & -0.3470 & -1.6930 & 0.2188 & 0.7054 & 1.8730 & 0.2854 & -8.1579\\ 0.7926 & -2.4698 & -1.1718 & 0.1065 & 0.5457 & -2.9984 & 0.4403 & 0.5571\\ -1.8711 & 0.7844 & -20.4008 & 2.1878 & 7.0175 & 1.1520 & 8.0650 & -0.3556\\ 0.1966 & 0.2301 & 2.0231 & -2.2286 & -1.2268 & -0.0596 & -0.9585 & 0.0423\\ 1.1960 & 0.6132 & 6.9601 & -0.8197 & -6.9862 & -1.4431 & -3.4684 & 0.1936\\ 2.1006 & -0.3199 & 1.4657 & -0.2202 & -0.6592 & -0.9433 & -0.8398 & -3.4857\\ -0.0077 & -0.0066 & -0.1254 & 0.0149 & 0.0539 & 0.0116 & 0 & 0\\ 0.3571 & -0.0312 & -0.1044 & 0.0124 & 0.0431 & 0.1669 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Проверка условий инвариантности (10) показывает, что они выполняются. При этом собственные значения матрицы $\mathbf{A}_c$ равны

$$\mathrm{eig}\mathbf{A}_c=\{-1,\quad -2,\quad -3,\quad -4,\quad -0.0509,\quad -23.9232,\quad 1.8572\pm 0.3372i\}$$

и, как видно, удовлетворяют включению (13), но не соответствуют требованию устойчивости (имеется неустойчивая мода колебаний, определяемая комплексно сопряжённой парой $1.8572\pm 0.3372i$). Для разрешения данной проблемы скорректируем вторую матрицу инъекции Морса. Воспользуемся декомпозиционным методом модального синтеза, который ранее многократно применялся авторами для решения различных задач [13] – [17].

В данном случае MIMO-система будет иметь два уровня декомпозиции: нулевой и первый, для которых собственные значения по уровням декомпозиции также зададим в виде диагональных матриц вида

$$\mathbf{\Sigma}_1=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix},\quad \mathbf{\Sigma}_2=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}.$$

Для первого уровня декомпозиции необходимые матрицы для расчёта наблюдателя определяются по следующим выражениям [15]:

$$\mathbf{A}_{c1}=\mathbf{C}^{\perp R+}\mathbf{A}_c\mathbf{C}^{\perp R},\quad \mathbf{C}_1=\mathbf{C}\mathbf{A}_c\mathbf{C}^{\perp R}, \tag{30}$$

где $\mathrm{C}^{\perp\mathrm{R}}$ – правый аннулятор максимального ранга для матрицы (27). Числовые значения указанных в формулах (30) матриц имеют вид

$$C_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{c1} = \begin{pmatrix} -20.4008 & 2.1878 & 7.0175 & 1.1520 & 1.8711 & 0.7844 \\ 2.0231 & -2.2286 & -1.2268 & -0.0596 & -0.1966 & -0.2301 \\ 6.9601 & -0.8197 & -6.9862 & -1.4431 & -1.1960 & -0.6132 \\ 1.4657 & -0.2202 & -0.6592 & -0.9433 & -2.1006 & 0.3199 \\ 1.6930 & -0.2188 & -0.7054 & -1.8730 & 2.7691 & -0.3470 \\ 1.1718 & -0.1065 & -0.5457 & 2.9984 & 0.7926 & -2.4698 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -0.1254 & 0.0149 & 0.0539 & 0.0116 & 0.0077 & 0.0066 \\ -0.1044 & 0.0124 & 0.0431 & 0.1669 & -0.3571 & 0.0312 \end{pmatrix}.$$

Скорректированная матрица инъекции Морса находится из соотношений [15], [16]

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{C}^{-}\mathbf{\Sigma}_1 - \mathbf{A}_c\mathbf{C}^{-}, \tag{31}$$

$$\mathbf{C}^{-} = \mathbf{C}^{+} - \mathbf{C}^{\perp R}(\mathbf{C}_1^{+}\mathbf{\Sigma}_2 - \mathbf{A}_{c1}\mathbf{C}_1^{+}) \tag{32}$$

где помимо приведенных ранее матриц из формул (30) фигурирует псевдообратная матрица

$$\mathbf{C}_1^{+} = \begin{pmatrix} -6.5367 & -0.0381 \\ 0.7768 & 0.0045 \\ 2.8210 & 0.0049 \\ -0.1769 & 1.0017 \\ 2.2143 & -2.3056 \\ 0.2165 & 0.1654 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с формулами (31) и (32) получим

$$\hat{\mathbf{L}} = 10^3 \begin{pmatrix} 0.3307 & -0.2551 \\ 0.0974 & 0.0176 \\ 2.1152 & -0.0083 \\ -0.2514 & 0.0010 \\ -0.9109 & 0.0048 \\ -0.1096 & -0.1094 \\ 0.0122 & -0.0003 \\ 0.0203 & -0.0179 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Окончательно, матрица замкнутой MIMO-системы, вычисленная по формуле

$$\widehat{\mathbf{A}}_c = \mathbf{A}_c + \hat{\mathbf{L}}\mathbf{C},$$

после подстановки выражения (33) принимает вид

$$\widehat{\mathbf{A}}_c = 10^3 \begin{pmatrix} 0.0028 & -0.0003 & -0.0017 & 0.0002 & 0.0007 & 0.0019 & 0.3310 & -0.2633 \\ 0.0008 & -0.0025 & -0.0012 & 0.0001 & 0.0005 & -0.0030 & 0.0978 & 0.0181 \\ -0.0019 & -0.0008 & -0.0204 & 0.0022 & 0.0070 & 0.0012 & 2.1233 & -0.0086 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0020 & -0.0022 & -0.0012 & -0.0001 & -0.2523 & 0.0010 \\ 0.0012 & 0.0006 & 0.0070 & -0.0008 & -0.0070 & -0.0014 & -0.9144 & 0.0050 \\ 0.0021 & -0.0003 & 0.0015 & -0.0002 & -0.0007 & -0.0009 & -0.1104 & -0.1128 \\ 0 & 0 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0122 & -0.0003 \\ 0.0004 & 0 & -0.0001 & 0 & 0 & 0.0002 & 0.0203 & -0.0179 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы полностью совпадают с элементами множества (28). Проверка условий инвариантности (10) для случая $\mathbf{A} = \widehat{\mathbf{A}}_c$ также подтверждает получение требуемого результата.

7. Заключение

В работе представлены новые условия инвариантности линейной MIMO-системы к возмущениям в каналах управления, полученные на основе решения задачи регуляризации симметрического матричного уравнения. Условия носят конструктивный характер, поскольку позволяют осуществлять синтез инвариантной системы в явном виде. Приведены соответствующие теоремы и иллюстративные примеры аналитического и численного синтеза инвариантных MIMO-систем. В качестве числового примера рассмотрена задача синтеза инвариантного управления одновинтового вертолёта, пространственное движение которого описывается системой уравнений 8 порядка.

Приложение

Доказательство теоремы 1

Доказательство основано на преобразовании подобия $\mathbf{T}^{-1}\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{T}$ матрицы (5) с матрицей преобразования

$$\mathbf{T} = (\mathbf{B}^{\perp L+} \quad \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp L} \\ \mathbf{B}^{+} \end{pmatrix}^{-1},$$

для которой справедливы тождества [16]

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp L} \\ \mathbf{B}^{+} \end{pmatrix} (\mathbf{B}^{\perp L+} \quad \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{B}^{\perp L+} & \mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{+}\mathbf{B}^{\perp L+} & \mathbf{B}^{+}\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \mathbf{I}_r \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{B}^{\perp L+} \quad \mathbf{B}) \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp L} \\ \mathbf{B}^{+} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{\perp L+}\mathbf{B}^{\perp L} + \mathbf{B}\mathbf{B}^{+} = \mathbf{I}_n.$$

Поскольку правая часть равенства (5) является суммой матриц, то их преобразование подобия можно рассматривать по отдельности (с использованием тождеств, записанных выше):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp L} \\ \mathbf{B}^{+} \end{pmatrix} \mathbf{A} (\mathbf{B}^{\perp L+} \quad \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp L+} & \mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{A}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{+}\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp L+} & \mathbf{B}^{+}\mathbf{A}\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp L} \\ \mathbf{B}^{+} \end{pmatrix} (\sigma_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{B}^{+T}\mathbf{B}^{T} (\mathbf{B}^{\perp L+} \quad \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} & \mathbf{B}^{\perp L}(\sigma_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \mathbf{B}^{+}(\sigma_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{B} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} & -\mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{AB} \\ \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \sigma_0\mathbf{I}_n - \mathbf{B}^{+}\mathbf{AB} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp L} \\ \mathbf{B}^{+} \end{pmatrix} \mathbf{BB}^{+}(\sigma_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{I}_n - \mathbf{B}^{+T}\mathbf{B}^{T})(\mathbf{B}^{\perp L+} \quad \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ \mathbf{B}^{+}(\sigma_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{B}^{\perp L+} & \mathbf{0}_{r\times r} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ -\mathbf{B}^{+}\mathbf{AB}^{\perp L+} & \mathbf{0}_{r\times r} \end{pmatrix}.$$

В результате суммирования получаем блочно-диагональную структуру

$$\mathbf{T}^{-1}\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{AB}^{\perp L+} & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \sigma_0\mathbf{I}_n \end{pmatrix},$$

для которой имеет место тождество для множеств собственных значений

$$\mathrm{eig}\widehat{\mathbf{A}} = \mathrm{eig}\big(\mathbf{T}^{-1}\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{T}\big) = \mathrm{eig}(\mathbf{B}^{\perp L}\mathbf{AB}^{\perp L+}) \cup \mathrm{eig}(\sigma_0\mathbf{I}_n).$$

Поскольку у симметрической матрицы множество собственных значений совпадает с множеством сингулярных чисел, из данного соотношения следует равенство (8).

Доказательство закончено.

Доказательства теорем 2 и 3 также строятся на преобразовании подобия соответствующих матриц и поэтому не приводится.

Литература

[1] Щипанов, Г.В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // АиТ. 1939. № 1. С. 49–66.

[2] Щипанов, Г.В. Гироскопические приборы слепого полёта. М.: Оборонгиз, 1938.

[3] Лезина,З.М., Лезин В.И. Щипанов Г.В. и теория инвариантности (труды и документы). М.: Физматлит, 2004.

[4] Уонем, М. Линейные многомерные системы управления: геометрический подход. М.: Наука, 1980.

[5] Chen, H. General Decoupling Theory of Multivariable Process Control Systems. Springer-Verlag, 1983.

[6] Dion, J., Commault, C. Feedback Decoupling of Structured Systems // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1993. Vol. 38, no. 7. P. 1132–1135. DOI: 10.1109/9.231471.

[7] Van der Woude, J., Murota, K. Disturbance Decoupling with Pole Placement for Structured Systems: a Graph-Theoretic Approach // SIAM J. on Matr. Anal. and Appl. 1995. Vol. 16, no. 3. P. 922–942. DOI: 10.1137/S0895479893251344.

[8] Wang, Q. Decoupling Control. Springer-Verlag, 2003.

[9] Мисриханов, М.Ш. Инвариантное управление многомерными системами: алгебраический подход. М.: Наука, 2007.

[10] Zubov, N., Mikrin, E., Misrikhanov, M., Ryabchenko, V. Invariance Conditions for MIMO-Systems Based on Regularization // Doklady Mathematics. 2015. Vol. 92, no. 3. P. 664 – 666. DOI: 10.1134/S106456241506006X.

[11] Morse, A. Structural Invariants of Linear Multivariable Systems // SIAM J. Control Optim. 1973. Vol. 11, no. 3. P. 446 – 465. DOI: 10.1137/0311037.

[12] Bukov, V., Goryunov, S., Ryabchenko, V. Matrix Linear Systems: a Comparative Review of the Approaches to their Analysis and Synthesis // Autom. Remote Control. 2000. Vol. 61, no. 11, part 1. P. 1759 – 1795.

[13] Misrikhanov, M., Ryabchenko, V. Pole Placement for Controlling a Large Scale Power System // Autom. Remote Control. 2011. Vol. 72, no. 10. P. 2123 – 2146. DOI: 10.1134/S0005117911100110.

[14] Зубов, Н.Е., Микрин, Е.А., Олейник, А.С., Рябченко, В.Н., Ефанов, Д.Е. Оценка угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика местной вертикали // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Серия Приборостроение. 2014. № 5. С. 3 – 15.

[15] Zubov, N., Mikrin, E., Ryabchenko, V., Proletarskii, A. Analytical Synthesis of Control Laws for Lateral Motion of Aircraft // Russian Aeronautics. 2015. Vol. 58, no. 3. P. 263 – 270. DOI: 10.3103/S1068799815030034.

[16] Зубов, Н.Е., Микрин, Е.А., Рябченко, В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.

[17] Гаджиев, М.Г., Мисриханов, М.Ш., Рябченко, В.Н., Шаров, Ю.В. Матричные методы анализа и управления переходными процессами в электроэнергетических системах. М.: Издательский Дом МЭИ, 2019.

Mathematical aspects of condition of MIMO-system invariance to disturbances in control channels

N.E. Zubov (Bauman MSTU, S.P. Korolev RSC "Energia"),
V.N. Ryabchenko (Bauman MSTU)
A.V. Lapin (Bauman MSTU, GosNIIAS)

Abstract. This paper presents constructive conditions of invariance of linear dynamic system with multi inputs and multi outputs (MIMO-system) to disturbances in control channels. The approach to invariant control synthesis consists in searching such matrix of feedback coefficients of linear system that fulfills invariance conditions represented by a system of polynomial matrix equations of a certain structure. We obtain these conditions basing on the solution of symmetric matrix equation regularization task. Theorems with proofs and illustrative examples are demonstrated for mathematic approach to analytic synthesis of invariant system with multi inputs and multi outputs (MIMO-system) as well as for numeric synthesis of a single-rotor helicopter spatial motion control system. In the numeric example, the mathematic statement of control task has allowed to organize "insensitivity" of roll and pitch angles to disturbances in control channels, providing at the same time stability of general motion of the flying vehicle.

Key words: invariant control, single-rotor helicopter, exact pole placement, disturbance in control channel, Morse injection.