ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Доказательство теоремы о стабилизации нестационарного линейного динамического объекта с неизвестным порядком

Уланов Б.В.
Тольяттинский государственный университет,
bv_ulanov@mail.ru

Аннотация. Представлено доказательство теоремы о стабилизации для линейного динамического объекта, описываемого одним дифференциальным уравнением неизвестного порядка, не превышающего заданного натурального числа, с параметрами, которые изменяются в любых заданных пределах. Для синтеза управления необходимо знать пределы, в которых изменяются параметры дифференциального уравнения и все производные этих параметров до порядка, на единицу меньшего, чем число, оценивающее порядок динамического объекта.
Ключевые слова: динамический объект, стабилизация, порядок дифференциального уравнения, параметры линейного дифференциального уравнения.

1 Введение

В [1] автором данной работы был анонсирован результат о возможности стабилизации линейного динамического объекта, описываемого одним дифференциальным уравнением неизвестного порядка (известно лишь, что порядок не превосходит данного натурального числа) с параметрами, изменяющимися в любых заданных ограниченных пределах. В [2] автором сформулирована теорема, на основе которой можно выбрать параметры в алгоритме управления, при которых эта задача стабилизации решается. Однако в силу требования редакции об ограниченности объема статьи, доказательство теоремы в [2] не было опубликовано. Для получения рекомендации к опубликованию [1] автором представлялись доказательства своих результатов. Доказательство теоремы представлялось в редакцию, опубликовавшую [2]. По правилам публикаций [1] и [2] допустима публикация расширенного варианта работы в других изданиях. В соответствии с этими правилами и тем, что доказательство результатов автора не были опубликованы, в данной работе автор восполняет пробел в отсутствии опубликованного доказательства своей теоремы из [2] и представляет в настоящей работе доказательство этой теоремы.

2 Постановка задачи

Пусть даны натуральное число n_0, $n_0 > 1$, и число $M \geq 0$. Рассмотрим множество динамических объектов $O(n_0, M)$, каждый из которых описывается некоторой системой уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \qquad i = 1, \dots, n-1,$$
$$\frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_i + u, \qquad y = x_1, \qquad t \geq t_0 \tag{1}$$

(система уравнений (1) эквивалентна одному дифференциальному уравнению n-го порядка), где n – неизвестный динамический порядок объекта, $n \leq n_0$, $(x_1, \dots, x_n)^T \epsilon R^n$ – состояние объекта, y – выход, $u \,\epsilon\, R$ – управление, t – время; $a_i(t), i = 1, \dots, n,$ – неизвестные параметры объекта; предполагается, что $a_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ – измеримая на $[t_0, \infty)$ функция в случае $n = n_0$ и $n_0 - 2$ раз дифференцируемая на $[t_0, \infty)$ функция, такая, что ее $(n_0 - 2)$-ая производная абсолютно непрерывна на $[t_0, \infty)$ (так что существует почти всюду на $[t_0, \infty)$ $(n_0 - 1)$-ая производная $a_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$, являющаяся измеримой на $[t_0, \infty)$ функцией) в случае $n < n_0$, причем в обоих названных случаях $vrai\,\max_{t \geq t_0} \left| a_i^{(j)}(t) \right| \leq M,\ \ i = 1, \dots, n; j = 0,1, \dots, n_0 - 1$, где $M > 0$ – известное число. Так как в рассмотрение введены измеримые функции, то все неравенства, в которых есть измеримые по t функции, понимаются выполненными почти всюду на соответствующих промежутках времени t (далее слова «почти всюду» заменяются на п.в.) и решения систем дифференциальных уравнений понимаются как векторные абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений почти всюду.

Задача состоит в синтезе такого управления $u = u(y, t)$, что для любого объекта из множества $O(n_0, M)$ нулевое решение замкнутой системы асимптотически устойчиво в целом.

3 Алгоритм управления, обозначения и условие A

В настоящей работе исследуется асимптотическая устойчивость в целом нулевого решения нестационарной замкнутой системы, получаемой при использовании алгоритма синтеза управления u вида [2]:

$$u = u(y, t) = -ky + l\zeta_1(t), \qquad (2)$$

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = \zeta_{i+1} - q_{n_0 - i} y, i = 1, \dots, n_0 - 2; \ \frac{d\zeta_{n_0 - 1}}{dt} = -\sum_{i=1}^{n_0 - 1} p_i \zeta_i - q_1 y, \quad (3)$$

где k, l, q_i и p_i $(i = 1, \dots, n_0 - 1)$ – постоянные числа, параметры алгоритма, подлежащие выбору. Замкнутая система – система линейных дифференциальных уравнений (1), (3) при u в (1) из (2). В работе доказывается, что алгоритм (2), (3) решает задачу синтеза управления $u = u(y, t)$, такого, что при управлении любым объектом из множества $O(n_0, M)$ нулевое решение системы дифференциальных уравнений, описывающей получаемую при синтезированном u замкнутую систему, будет асимптотически устойчивым в целом. Отметим, что в системах управления часто используются динамические подсистемы различных видов, вводимые на основе различных подходов $[3-13]$. Алгоритм (2), (3) с динамической подсистемой (3) определен и введен на основе предлагаемого далее способа замены координат.

Далее будут фигурировать числа

$$\alpha_i^0 = lq_i + kp_i + l\sum_{j=i+1}^{n_0-1} p_j\, q_{n_0-j+i},$$

$$\alpha_{n_0}^0 = k, \qquad \alpha_{n_0+i}^0 = p_i\ (i = 1, \dots, n_0 - 1);$$

$$\alpha_i^r = \frac{\alpha_i^{r-1}}{\alpha_{2n_0-r}^{r-1}}\ (i = 1, \dots, 2n_0 - r - 1; r = 1, \dots, n_0);$$

$$\delta_{i,n} = const > 0, \delta_{0,n} = 0\ (i = 1, \dots n; n = 1, \dots, n_0);$$

$$\delta_{i,i} = \delta\ (i = 1, \dots, n_0).$$

Обозначаем $\delta_+ = \max\{\delta, \delta_{0,1}, \delta_{1,2}, \dots, \delta_{n_0-1,n_0}\}$.

Введем условие A: для чисел $\alpha_i^{n_0}$ $(i = 1, \dots, n_0 - 1)$ и δ существуют положительные числа h, h_0, такие, что для любого решения

$$\bar{x}_{n_0}(t) \quad (\bar{x}_{n_0} = (x_1, \dots, x_{n_0-1})^T \epsilon R^{n_0-1})$$

всякой системы уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \qquad i = 1, \dots, n_0 - 2,$$

$$\frac{dx_{n_0-1}}{dt} = -\sum_{i=1}^{n_0-1} \alpha_i^{n_0} x_i + \psi\left(t, \bar{x}_{n_0}\right), \;\; t \geq t_0, \tag{4}$$

где $\psi\left(t, \bar{x}_{n_0}\right)$ – непрерывная функция, такая, что

$$\left|\psi\left(t, \bar{x}_{n_0}\right)\right| \leq \delta \parallel \bar{x}_{n_0} \parallel \quad \forall\left(t, \bar{x}_{n_0}\right) \epsilon [t_0, \infty) \times R^{n_0-1}$$

(здесь и далее $\parallel \lambda \parallel = \sum_{i=1}^{i=r} |\lambda_i|$ для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)^T \epsilon R^r$),

имеет место оценка

$$\parallel \bar{x}_{n_0}(t) \parallel \leq h \parallel \bar{x}_{n_0}(t') \parallel \exp(-h_0(t - t')) \qquad \forall t, t' \colon t \geq t' \geq t_0.$$

Отметим, что при выполнении для чисел $\alpha_i^{n_0}$ $(i = 1, \dots, n_0 - 1)$ и δ условия A нулевое решение всякой системы уравнений (4) (при $\left|\psi\left(t, \bar{x}_{n_0}\right)\right| \leq \delta \parallel \bar{x}_{n_0} \parallel \forall\left(t, \bar{x}_{n_0}\right) \epsilon [t_0, \infty) \times R^{n_0-1}$) экспоненциально устойчиво в целом.

4 Теорема и ее доказательство

Итогом исследования является следующий основной результат об асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Теорема. Пусть выполняются условие A и

$$\alpha_i^0 > 0 \text{ для } i = 1, \dots, 2n_0 - 1;$$

для $n = 2, \dots, n_0$ и для $r = 1, \dots, n - 1$ выполняются неравенства

$$\alpha_{2n_0-r}^{r-1} > \alpha_{2n_0-r-1}^{r} + \delta_{r-1,n} + \delta_{r,n} + 1 +$$

$$+\frac{1}{\delta_{r,n}} \max_{1 \leq i \leq n_0+n-r-1} \{\delta_{r-1,n}(1 + \beta_i^r(n) + M\xi_r) + \left|\beta_{i-1}^r(n) - \alpha_{2n_0-r-1}^r \beta_i^r(n)\right| +$$

$$+M\left(\eta_r + \alpha_{2n_0-r-1}^r \xi_r\right) + \delta_{r,n}(\beta_i^r(n) + M\xi_r\}, \tag{5}$$

где $\beta_0^r(n) = 0$, $\beta_i^r(n) = \alpha_i^r$ при $1 \le i \le n$, $\beta_i^r(n) = \alpha_i^r + \alpha_{n_0-n+i}^r$ при $n + 1 \le\le i \le n_0$, $\beta_i^r(n) = \alpha_{n_0-n+i}^r$ при $n_0 + 1 \le i \le n_0 + n - r - 1$ и

$$\xi_r = 2^{n_0-1+r} + \sum_{j=1}^{n_0-1-r} 2^{j-1}\,\alpha_{n_0+j}^r, \qquad \eta_r = \sum_{j=1}^{n_0-1-r} 2^j\,\alpha_{n_0+j}^r;$$

а также выполняется неравенство

$$\alpha_{n_0}^{n_0-1} > M + 1 + \alpha_{n_0-1}^{n_0} + 2\delta_+ +$$
$$+\frac{1}{\delta}\max_{1\le i\le n_0-1}\left\{(2\delta_+ + 1)\left(1 + \alpha_i^{n_0}\right) + \left|\alpha_{i-1}^{n_0} - \alpha_{n_0-1}^{n_0}\alpha_i^{n_0}\right| + M(2^{n_0} - 1)\right\}, \tag{6}$$

где $\alpha_0^{n_0} = 0$ и δ – число из условия A.

Тогда, если уравнения (1) описывают объект из множества $O(n_0, M)$, то нулевое решение системы уравнений (1), (3) при u в (1) из (2) асимптотически устойчиво в целом.

Замечание. Условия теоремы всегда выполнимы за счет выбора параметров алгоритма (2), (3). При этом параметры алгоритма следует выбирать в такой последовательности: выбираем $\alpha_i^{n_0} > 0$ $(i = 1, \dots, n_0 - 1)$ и $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие A (это всегда можно сделать); на основе (6) выбираем $\alpha_{n_0}^{n_0-1} > 0$, находим $\alpha_i^{n_0-1} = \alpha_i^{n_0} \cdot \alpha_{n_0}^{n_0-1}$
$\left(i = 1, \dots, n_0 — 1\right)$, на основе (5) выбираем $\alpha_{n_0+1}^{n_0-2}$, находим $\alpha_i^{n_0-2} = \alpha_i^{n_0-1} \cdot$
$\cdot\, \alpha_{n_0+1}^{n_0-2} (i = 1, \dots, n_0)$ и т.д., пока не найдем α_i^0 $(i = 1, \dots, 2n_0 - 1)$. Очевидно, что по значениям α_i^0 $(i = 1, \dots, 2n_0 - 1)$ можно определить все параметры алгоритма (2), (3). Если из множества $O(n_0, M)$ рассматриваются объекты только со стационарными параметрами $(a_i(t) \equiv a_i = const, i = 1, \dots, n)$, то для стабилизации каждого такого объекта управлением (2), (3) выбор параметров в

(2), (3) можно осуществить также с использованием условий Рауса – Гурвица [14]; при этом условия Рауса – Гурвица, обеспечивающие асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения $(n+n_0-1)$–го порядка, эквивалентного получаемой далее системе уравнений (9) со стационарными в этом случае параметрами, следует выполнить выбором параметров в (2), (3) для всех $a_i (i=1,\dots,n), |a_i| \leq M$, и всех $n, 1 \leq n \leq n_0$.

Доказательство теоремы

Возьмем $\forall n, 1 \leq n \leq n_0$. Рассмотрим объект порядка n из множества $O(n_0, M)$, описываемый уравнениями (1). Для исследования алгоритма (2), (3) предлагается перейти от координат $(x_1,\dots,x_n,\zeta_1,\dots,\zeta_{n_0-1})$ к новым координатам $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+n_0-1})$ так, чтобы вдоль решений выполнялись п.в. соотношения

$$x_{n+j} = d^j x_n/dt^j, j = 1,2,\dots,n_0-1.$$

В силу (1) – (3) находим: для $j = 1,\dots,n_0 — 1$ будет

$$x_{n+j} = d^j x_n/dt^j = -d^{j-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,x_i)/dt^{j-1} - kx_j - l\sum_{i=1}^{j-1} q_{n_0-j+i}\,x_i + l\zeta_j,$$

откуда

$$l\zeta_j = x_{n+j} + d^{j-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,x_i)/dt^{j-1} + kx_j + l\sum_{i=1}^{j-1} q_{n_0-j+i}\,x_i; \qquad (7)$$

$$dx_{n+n_0-1}/dt = d^{n_0}x_n/dt^{n_0} = -d^{n_0-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,x_i)/dt^{n_0-1} -$$

$$-kx_{n_0} - l\sum_{i=1}^{n_0-1} q_i\, x_i - l\sum_{j=1}^{n_0-1} p_j\, \zeta_j. \qquad (8)$$

При вычислении производных по t, фигурирующих в правых частях равенств (7) и (8), имеем в виду, что для $0 \le r \le n_0 - 1$ имеем $d^r x_i/dt^r = x_{i+r}$, $i = 1, \dots, n$. Подставляя выражения для $l \cdot \zeta_j$ из (7) в правую часть равенства (8), получаем, что замкнутая система в новых координатах описывается уравнениями

$$dx_i/dt = x_{i+1}, \qquad i = 1, \dots, n + n_0 - 2,$$

$$(9)$$

$$dx_{n+n_0-1}/dt = -d^{n_0-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_i\Big)/dt^{n_0-1} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n_0-1} \alpha_{n_0+j}^0 \cdot d^{j-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_i\Big)/dt^{j-1} - \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i^{n_0}\, x_i -$$

$$-\sum_{i=n+1}^{n_0} \alpha_i^0\, x_i - \sum_{i=n+1}^{n+n_0-1} \alpha_{n_0-n+i}^{n_0}\, x_i.$$

Очевидно, что значения α_i^0 $(i = 1, \dots, 2n_0 - 1)$ можно сделать любыми наперед заданными при соответствующем выборе параметров алгоритма (2). (3) и поэтому возможна вариация коэффициентов при каждой координате x_{i+1} $(i = 1, \dots, n + n_0 - 1)$ в правой части последнего уравнения из (9); такая возможность – как цель – и предопределила выбор алгоритма в виде (2), (3).

Далее обозначаем:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+n_0-1})^T, \qquad x^i = (x_1, \dots, x_{n+n_0-i})^T \ \ (i = 1, \dots, n+1),$$

$$s_r = x_{n+n_0-r} + \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i^r\, x_i + \sum_{i=n+1}^{n+n_0-1-r} \alpha_{n_0-n+i}^r\, x_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_0-1-r} \alpha_{n_0+j}^r\, d^{j-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_i)/dt^{j-1} + d^{n_0-1-r}(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_i)/dt^{n_0-1-r}$$

$$(r = 1, \dots, n-1),$$

$$s_n = x_{n_0} + \sum_{i=1}^{n_0-1} \alpha_i^{n_0}\, x_i, \qquad s_0 \equiv 0.$$

При таких обозначениях в силу уравнений (9) п.в. имеют место соотношения (при $1 \le i \le n-1$)

$$\frac{dx_j}{dt} = x_{j+1}, \qquad j = 1, \dots, n+n_0-i-1,$$

(10)

$$dx_{n+n_0-i}/dt = -d^{n_0-i}(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_i)/dt^{n_0-i} - \alpha_{2n_0-i}^{i-1} s_i + s_{i-1},$$

а также соотношения

$$\frac{dx_j}{dt} = x_{j+1}, \qquad j = 1, \dots, n_0-1,$$

(11)

$$dx_{n_0}/dt = -d^{n_0-n}(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_i)d/t^{n_0-n} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n_0-n}\alpha_{n_0+j}^{n-1}\,d^{j-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\,x_i)/dt^{j-1}-\sum_{i=n+1}^{n_0}\alpha_{n_0-n+i}^{n-1}\,x_i-$$

$$-\alpha_{n_0}^{n-1}s_n+s_{n-1}$$

и соотношения

$$\frac{dx_j}{dt}=x_{j+1},\qquad j=1,\dots,n-1,$$
$$\frac{dx_{n_0-1}}{dt}=-\sum_{i=1}^{n_0-1}\alpha_i^{n_0}\,x_i+s_n. \tag{12}$$

Далее будет рассматриваться система вида (при $1\le i\le n-1$)

$$\frac{dx_j}{dt}=x_{j+1},\qquad j=1,\dots,n+n_0-i-1,$$
$$dx_{n+n_0-i}/dt=-d^{n_0-i}(\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\,x_i)/dt^{n_0-i}-\alpha_{2n_0-i}^{i-1}s_i+\psi_{i-1}(t,x^i), \tag{13}$$

а также система вида

$$\frac{dx_j}{dt}=x_{j+1},\qquad j=1,\dots,n_0-1, \tag{14}$$

$$dx_{n_0}/dt = -d^{n_0-n}(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_i)/dt^{n_0-n} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n_0-n} \alpha^{n-1}_{n_0+j}\, d^{j-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_i)/dt^{j-1} - \sum_{i=n+1}^{n_0} \alpha^{n-1}_{n_0-n+i}\, x_i -$$

$$-\alpha^{n-1}_{n_0} s_n + \psi_{n-1}(t, x^n),$$

в которых $\psi_{r-1}(t, x^r)$ $(r = 1, \ldots, n)$ – некоторая непрерывная функция, такая, что

$$|\psi_{r-1}(t, x^r)| \leq \delta_{r-1,n} \|x^r\| \text{ для } \forall\ (t, x^r) \in [t_0, \infty) \times R^{n+n_0-r}.$$

Далее понадобится рассмотрение неравенства

$$\alpha^{n-1}_{n_0} > M + \gamma^{n-1}_{n_0} + \alpha^{n_0}_{n_0-1} + \delta + \delta_{n-1,n} +$$

$$+\frac{1}{\delta} \max_{1 \leq i \leq n_0-1} \{(\delta + \delta_{n-1,n})\left(1 + \alpha^{n_0}_{i}\right) + \left|\gamma^{n-1}_{n_0} \alpha^{n_0}_{i} - \gamma^{n-1}_{i}\right| +$$

$$+\left|\alpha^{n_0}_{i-1} - \alpha^{n_0}_{n_0-1} \alpha^{n_0}_{i}\right| + M(2^{n_0-n} + \sum_{j=1}^{n_0-n} 2^{j-1} \alpha^{n-1}_{n_0+j})\}, \qquad (15)$$

где $\gamma^{n-1}_{n_0} = \alpha^{n-1}_{2n_0-n}$ при $n \leq n_0 - 1$ и $\gamma^{n-1}_{n_0} = 0$ при $n = n_0$; $\gamma^{n-1}_{i} = \alpha^{n-1}_{n_0-n+i}$ при $n \leq n_0 - 2$, $i = n+1, \ldots, n_0 - 1$ и $\gamma^{n-1}_{i} = 0$ в остальных случаях.

В неравенстве (15) степени 2 (так же, как и степени 2 в неравенствах (5), (6)) появились в результате суммирования биномиальных коэффициентов при использовании формулы Лейбница для вычисления производной произведения двух функций. Отметим, что неравенство (15) при любом

$n \le n_0$ является следствием неравенств (5), (6). Действительно, из определения α_i^r следует, что (далее для удобства вводим $\alpha_{2n_0}^0$=1)

$\alpha_{n_0+j}^{n-1} = \alpha_{n_0+j}^0 / \alpha_{2n_0-n+1}^0$ $(j = 0,1, \dots, n_0 - n)$. $\alpha_{n_0}^0 / \alpha_{n_0+1}^0 = \alpha_{n_0}^{n_0-1}$. С учетом этих соотношений умножим обе части неравенства (15) на $\alpha_{2n_0-n+1}^0 / \alpha_{n_0+1}^0$

(> 0), получив равносильное неравенство. Заметим, что слагаемые в правой части неравенства (15), не содержащие множителей $\alpha_{n_0+j}^{n-1}$ $(j = 1, \dots, n_0 - n)$, при этом умножатся на число $\alpha_{2n_0-n+1}^0 / \alpha_{n_0+1}^0 \le 1$ (для $\forall\, n, 1 \le n \le n_0$) и заметим, что $\alpha_{n_0+j}^{n-1} \cdot (\alpha_{2n_0-n+1}^0 / \alpha_{n_0+1}^0) = \alpha_{n_0+j}^0 / \alpha_{n_0+1}^0 \le 1$

(при $1 \le j \le n_0 - n; 1 \le n \le n_0$), ибо $\alpha_{n_0}^0 > \alpha_{n_0+1}^0 > \ldots > \alpha_{2n_0-1}^0$, так как в силу соотношений (5), (6) $\alpha_{2n_0-r}^{r-1} > 1$ (ведь в правых частях (5), (6) все слагаемые положительны и среди слагаемых есть 1), но в силу определения $\alpha_{2n_0-r}^{r-1} = \alpha_{2n_0-r}^0 / \alpha_{2n_0-r+1}^0$ $(r = 1, \dots, n_0)$. Нетрудно видеть, что полученное неравенство, равносильное неравенству (15), является следствием неравенства (6). Для доказательства теорема будет применена следующая лемма.

Лемма. В условиях теоремы для всякого решения $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+n_0-1}(t))^T$ системы (9) либо $\| \bar{x}(t \| \to 0$ при $t \to \infty$, либо существует множество моментов времени $\{t_i\}_{i=0}^n$: $t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n$ (здесь t_0 то же, что и в (1)), таких, что для $i = 1, \dots, n+1$ выполняются неравенства

$$|s_{i-1}(t)| \le \delta_{i-1,n} \left\| x^i(t) \right\| \quad \forall t \ge t_{i-1} \tag{16}$$

и при этом $x^i(t)$ при $\forall t \ge t_{i-1}$– решение системы вида (13), если $i < n$, вида (14), если $i = n$, и вида (4), если $i = n + 1$.

Доказательство леммы

Рассмотрим решение $\bar{x}(t)$ системы (9). Пусть $r: 1 \le r \le n$. Предположим, что существует последовательность моментов времени $\{t_i\}_{i=0}^{r-1}$: $t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_{r-1}$, такая, что для $i = 1, \dots, r$ выполняется неравенство (16) и $x^i(t)$ при $\forall t \geq t_{i-1}$ – решение системы вида (13), если $i < n$, вида (14), если $i = r = n$ (отметим, что при $r = 1$ такое предположение корректно, так как в случае $n = 1$ имеем, что $s_0 \equiv 0$ и $\bar{x}(t)$ при $t \geq t_0$ – решение системы (14) при $\psi_{n-1} \equiv 0$, а в случае $n > 1$ имеем, что $s_0 \equiv 0$ и $\bar{x}(t)$ при $t \geq t_0$ – решение системы (13) при $i = 1$ и $\psi_0 \equiv 0$). Докажем, что тогда справедливо утверждение: либо $\| \bar{x}(t \| \to 0$ при $t \to \infty$, либо существует момент времени t_r, такой, что $t_r \geq t_{r-1}$, выполняется неравенство (16) для $i = r + 1$ и $x^{r+1}(t)$ при $t \geq t_r$ – решение системы вида (13) с $i = r + 1$, если $r < n - 1$, системы вида (14), если $r = n - 1$, и системы вида (4), если $r = n$.

Рассмотрим $x^r(t)$ при $t \geq t_{r-1}$ как решение системы вида (13) или вида (14). Допустим, что

$$|s_r(t)| > \delta_{r,n} \|x^{r+1}(t)\| \quad \forall t \geq t_{r-1}. \tag{17}$$

Пусть $s_r(t) > 0$ $\forall t \geq t_{r-1}$ (случай $s_r(t) < 0$ $\forall t \geq t_{r-1}$ рассматривается аналогично). Найдем в силу системы (13) с $r = n$ (при $r < n$) или системы (14) (при $r = n$) производную $ds_r(t)/dt$. Найденное значение $ds_r(t)/dt$ можно выразить через $s_r(t)$ и компоненты векторной функции $x^{r+1}(t)$ (для этого надо в выражении $ds_r(t)/dt$ выразить $x_{n+n_0-r}(t)$ через $s_r(t)$ и компоненты векторной функции $x^{r+1}(t)$). С учетом того, что $\|x^{r+1}(t)\| < s_r(t)/\, \delta_{r,n}$ $\forall t \geq t_{r-1}$, в силу (5) (при $r < n$) или в силу (15) (при $r = n$) получаем, что $ds_r(t)/dt \leq -\Delta_r s_r(t)$ при почти всех $t \geq t_{r-1}$, где

$\Delta_r = const > 0$ (отметим, что таким образом показывается выполнимость в данной ситуации неравенства $|s_r(t)| \leq |s_r(t_{r-1})|$ для $\forall t \geq t_{r-1}$, используемого далее при оценке $\| \bar{x}(t \|$ на $[t_0, \infty)$), откуда получаем, что $s_r(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, в силу выполнения (17) при $t \geq t_{r-1}$ будет $\|x^{r+1}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Но тогда получаем (в силу определения s_r), что $x_{n+n_0-r}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. А далее с использованием неравенств (16)

$(i = 1, \dots, r)$ и определений s_{i-1} получаем, что $\| \bar{x}(t \| \to 0$ при $t \to \infty$. Теперь допустим, что существует момент времени t_r, такой, что $t_r \geq t_{r-1}$ и

$|s_r(t_r)| \le \delta_{r,n} \|x^{r+1}(t_r)\|$. Докажем, что тогда неравенство (16) для $i = r+1$ выполняется при $t \ge t_r$. Предположим противное. Тогда существует промежуток времени (t', t''), такой, что $t'' > t' \ge t_r$, $|s_r(t')| \le \delta_{r,n} \|x^{r+1}(t')\|$ и (17) выполняется при $t \epsilon (t', t'')$. Тогда, в силу выполнения (17) при $t \epsilon (t', t'')$, будет $|s_r(t)| > 0$ при $\forall t \epsilon (t', t'')$. Пусть $s_r(t) > 0$ при $\forall t \epsilon (t', t'')$ (случай $s_r(t) < 0$ при $\forall t \epsilon (t', t'')$ рассматривается аналогично). Обозначим $\tilde{s}_r(t) = s_r(t) - \delta_{r,n} \|x^{r+1}(t)\|$; $\tilde{s}_r(t)$ – абсолютно непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция. Согласно сделанному предположению $\tilde{s}_r(t') \le 0$ и $\tilde{s}_r(t) > 0$ при $\forall t \epsilon (t', t'')$. В силу системы (13) с $i = r$ (при $r < n$) или системы (14) (при $r = n$) и того, что $\|x^{r+1}(t)\| < s_r(t)/\delta_{r,n}$ при всех $t \epsilon (t', t'')$, а также в силу (5) (при $r < n$) или (15) (при $r = n$) получаем, что $d\tilde{s}_r(t)/dt \le -\Delta_r' s_r(t) \le 0$ (для этого в значении для $d\tilde{s}_r(t)/dt$ следует $x_{n+n_0-r}(t)$ выразить через $s_r(t)$ и компоненты векторной функции $x^{r+1}(t)$) при почти всех $t \epsilon (t', t'')$, где $\Delta_r' = const > 0$. Поэтому $\tilde{s}_r(t) \le \tilde{s}_r(t') \le 0$ при $\forall t \epsilon (t', t'')$ – противоречие с тем, что $\tilde{s}_r(t) > 0$ при $\forall t \epsilon (t', t'')$. Значит, (16) для $i = r+1$ имеет место при $t \ge t_r$ и желаемое доказано. Но тогда в силу соотношений (10) с $i = r$ (при $r < n-1$), (11) (при $r = n-1$), (12) (при $r = n$) очевидно, что $x^{r+1}(t)$ при $t \ge t_r$ – решение системы вида (13) с $i = r+1$, если $r+1 < n$, или системы вида (14), если $r = n-1$, или системы вида (4), если $r = n$. Проведенные рассуждения доказывают справедливость сделанного выше утверждения и вместе с ним – лемму.

Лемма доказана.

Далее для продолжения доказательства теоремы, заметим, что если для решения $\bar{x}(t)$ системы (9) существует множество моментов времени $\{t_i\}_{i=0}^{n}$, фигурирующее в формулировке леммы, то $x^{n+1}(t)$ при $t \ge t_n$ – решение системы вида (4) и поэтому в силу условия A будет $\|x^{n+1}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, но тогда в силу неравенств (16) ($i = 1, \dots, n+1$) и в силу определений s_{i-1} получаем, что и $\| \bar{x}(t) \| \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, с учетом леммы для всякого решения $\bar{x}(t)$ будет $\| \bar{x}(t) \| \to 0$ при $t \to \infty$. Кроме того, с учетом свойств решений системы (9), раскрытых в ходе доказательства леммы, несложно показать, что для всякого решения $\| \bar{x}(t) \| \leq C \| \bar{x}(t_0) \|$, где C – число, не зависящее от решения. (Укажем методику получения последнего неравенства (далее $\{C_i\}$ – числа, не зависящие от решения):

если $|s_1(t)| > \delta_{1,n}\|x^2(t)\|$ $\forall t \epsilon [t_0, t_1)$ (здесь $t_1 \leq \infty$), то при $t \epsilon [t_0, t_1)$, как показано при доказательстве леммы, $|s_1(t)| \leq |s_1(t_0)|$, поэтому $\|x^2(t)\| < |s_1(t_0)|/\,\delta_{1,n} \leq C_1 \| \bar{x}(t_0) \|$ и

$\left|x_{n+n_0-1}(t)\right| \leq C_2(|s_1(t)| + \|x^2(t)\|) \leq C_3 \| \bar{x}(t_0) \|$, откуда

$\| \bar{x}(t) \| \leq C_4 \| \bar{x}(t_0) \|$; если $|s_2(t)| > \delta_{2,n}\|x^3(t)\|$ и $|s_1(t)| < \delta_{1,n}\|x^1(t)\|$ $\forall t \epsilon [t_1, t_2)$ ($t_2 \leq \infty$), то при $t \epsilon [t_1, t_2)$: $|s_{12}(t)| \leq |s_2(t_1)|$ и

$\|x^3(t)\| < |s_2(t_1)|/\,\delta_{2,n} \leq C_5 \| \bar{x}(t_1) \| \leq C_5 C_4 \| \bar{x}(t_0) \|$,

$\left|x_{n+n_0-2}(t)\right| \leq C_6(|s_2(t)| + \|x^3(t)\|) \leq C_7 \| \bar{x}(t_0) \|$, откуда

$\|x^2(t)\| \leq C_8 \| \bar{x}(t_0) \|$, но тогда $|s_1(t)| \leq \delta_{1,n}\|x^2(t)\| \leq C_9 \| \bar{x}(t_0) \|$ и, как следствие, $\left|x_{n+n_0-1}(t)\right| \leq C_{10} \cdot\| \bar{x}(t_0) \|$, откуда в итоге $\| \bar{x}(t) \| \leq C_{11} \| \bar{x}(t_0) \|$ и т.д.; при этом, если существует множество моментов времени $\{t_i\}_{i=0}^{n}$, фигурирующее в формулировке леммы, то следует учесть, что $x^{n+1}(t)$ при $t \geq t_n$ – решение системы вида (4) и в силу условия A будет $\|x^{n+1}(t)\| \leq h\|x^{n+1}(t_n)\|$ $\forall\, t \geq t_n$, а тогда с учетом неравенств (16) $(i = 1, \dots, n+1)$ и определений s_{i-1} получаем, что $\| \bar{x}(t) \| \leq C_{12}\|x^{n+1}(t_n)\| \leq C_{12} \| \bar{x}(t_n) \|$ $\forall t \geq t_n$, но по методике описанной выше будет получено $\| \bar{x}(t_n) \| \leq C_{13} \| \bar{x}(t_0) \|$, поэтому $\| \bar{x}(t) \| \leq C_{12}C_{13} \| \bar{x}(t_0) \|$ $\forall t \geq t_n$). На основе полученных результатов заключаем, что нулевое решение системы (1), (3) при u из (2) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Отметим, что можно показать, что в условиях теоремы нулевое решение системы (9) экспоненциально устойчиво; для этого надо использовать неравенства $(ds_r(t)/dt)s_r(t) = d({s_r}^2(t)/2)dt \leq -\Delta_r {s_r}^2(t), r = 1, \dots, n,$ получаемые при доказательстве леммы в соответствующих ситуациях (при доказательстве леммы рассмотрен случай, когда $s_r(t) > 0$, и получено неравенство вида $\tilde{s}_r(t)/dt \leq -\Delta'_r s_r(t)$), и модифицировать очевидным образом рассуждения, проведенные при получении оценки для $\| \bar{x}(t) \|$ на $[t_0, \infty)$.

5 Заключение

Доказана теорема о возможности стабилизации линейного нестационарного динамического объекта, описываемого одним дифференциальным уравнением с неизвестным порядком и с нестационарными параметрами, изменяющимися вместе с их производными до порядка, меньшего на единицу, чем заданное натуральное число, оценивающее сверху неизвестный порядок динамического объекта, в любых известных ограниченных пределах.

Список литературы

[1] Уланов, Б.В. Управление динамическими объектами при неполной информации об их параметрах, состоянии, размерности // Доклады АН СССР. 1989. Т. 308. № 4. С. 803–806.

[2] Уланов, Б.В. Об управлении нестационарными динамическими объектами с неизвестной размерностью // Известия вузов. Математика. 1990. № 6. С. 83–85.

[3] Калман, Р., Фалб, П., Арбиб, М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 398 с.

[4] Фурасов, В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 247 с.

[5] Фомин, В.Н., Фрадков, А.Л., Якубович, В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.

[6] Kalman, R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Trans. ASME. 1960. Vol. 82, Ser. D. P. 35–45.

[7] Kalman, R.E., Bucy, R. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Trans. ASME. 1961. Vol. 83, Ser. D. P. 95–108.

[8] Красовский, Н.Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // Прикл. мат. и мех. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 641–663.

[9] Luenberger, D.G. Observing the State of Linear System // IEEE Trans. Mil. Electron. 1964. Vol. Mil-8, №1. P. 74–80.

[10] Luenberger, D.G. An Introduction to Observers // IEEE Trans. on Automatic Control. 1971. Vol. AC-16, №6. P. 596–602.

[11] Brash, F.M., Pearson, J.B. Pole Placement Using Dynamic Compensator // IEEE Trans. on Automatic Control. 1970. Vol. AC-15, №1. P. 34–43.

[12] Брайсон, А., Хо, Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Наука, 1972. 544 с.

[13] Уонэм, М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 375 с.

[14] Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

Proof of the stabilization theorem for a linear dynamic system of unknown order with variable parameter

Ulanov B.V.
Togliatti State University
bv_ulanov@mail.ru

Abstract. The proof of the stabilization theorem for a linear dynamic system described by one differential equation of unknown order which does not exceed a given natural number, and with parameters that vary within any given limits is presented. For the synthesis of the control, it is necessary to know the limits within which the parameters of the differential equation and all derivatives of these parameters (up to the order less by one than a given natural number) are changed.
Keywords: dynamic system, stabilization, order of a differential equation, parameters of a linear differential equation.