ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

О сильной единственности некоторых проекций с единичной нормой

О. М. Мартынов

Военная академия воздушно-космической обороны имени маршала Советского Союза Г. К. Жукова

e-mail: olegmartynov@yandex.ru

Аннотация. В данной статье рассматриваются некоторые минимальные проекции пространства размерности $2n$ на подпространство коразмерности два. Показано, что такие проекции могут быть двух видов – с единичной нормой или нормой большей единицы. В обоих случаях найдены относительные проекционные константы. Для проекций с единичной нормой получена оценка сверху константы сильной единственности и доказано, что эта оценка является точной.

Ключевые слова: оператор проектирования, проекция, пространство, подпространство, костанта сильной единственности, относительная проекционная константа.

1. Введение

Пусть Y – замкнутое подпространство банахова пространства X.

Определение 1. Линейный ограниченный оператор $\pi : X \to Y$ называется оператором проектирования (проекцией) пространства X на Y, если $\pi y = y$ для любого $y \in Y$.

Множество всех операторов проектирования пространства X на подпространство Y будем обозначать через $\pi(X, Y)$.

Определение 2. Относительной проекционной константой подпростран--ства Y в пространстве X называется число $\lambda(Y, X) = \inf\{\|\pi\|, \pi \in \pi(X, Y)\}$.

Определение 3. Абсолютной проекционной константой порядков k, n называется число

$$\lambda(k, n) = \sup\{\lambda(Y_k, X_n) : Y_k \subset X_n\},$$

где X_n и Y_k – любые пространства размерности n и их подпространства размерности k сответственно, $k, n \in \mathbb{N}, k < n$.

Среди операторов проектирования особый интерес представляют те, нормы которых совпадают с относительной проекционной константой. Такие проекции, если они существуют, называются минимальными.

Хотя сам термин «минимальные проекции» появился позднее, фактически изучение минимальных проекций началось уже в 30-х годах прошлого века, главным образом, в связи с изучением геометрии банаховых пространств. При этом особенно подробно изучались проекции с единичной нормой, являющиеся естественным обобщением ортогональных проекций в гильбертовых пространствах. Понятие минимальной проекции, то есть имеющей наименьшую из норм всех проекций на данное подпространство, фактически принадлежит Боненбласту [3]. Очевидно, что проекция с единичной нормой всегда минимальна. В конечномерных пространствах минимальная проекция существует всегда, однако в бесконечномерном случае это не так (см., например, [1]).

При изучении минимальных проекций ставятся две проблемы: 1) вопрос о существовании таких проекций; 2) вопрос об их единственности.

Проекции минимальной нормы играют существенную роль в теории наилучшего приближения в силу следующего известного неравенства

$$\|x - \pi(x)\| \leqslant \|I - \pi\|\rho(x, Y) \leqslant (1 + \|\pi\|)\rho(x, Y),$$

где I – тождественный оператор на X, а $\rho(x, Y)$ – расстояние от элемента x до подпространства Y. Поэтому точность приближения элемента $x \in X$ с помощью $\pi(x) \in Y$ зависит фактически от нормы оператора π.

В силу сказанного выше вычисление проекционных констант (или их оценок) находит применение в вычислительной математике. В частности, для оценки сходимости проекционных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений удобно использовать абсолютные проекционные константы $\lambda(k, n)$ или их оценки [16], а константы сильной единственности нашли широкое применение в оценках ошибки алгоритма Ремеза [17].

Для конечномерного пространства X актуальной является как проблема единственности минимальной проекции, так и определения точных значений $\lambda(Y, X)$ или их оценок сверху или снизу.

Для $\lambda(k, n)$ известны следующие точные значения:$\lambda(1, n) = 1$ [16], $\lambda(n - 1, n) = \frac{2(n-1)}{n}$ [3], $\lambda(3, 5) = \frac{5+4\sqrt{2}}{7}$ [4].

Известны [5] оценки для $\lambda(k, n)$ сверху, а именно

$$\lambda(k, n) \leqslant \varphi(k, n) = \frac{k + \sqrt{k(n-1)(n-k)}}{n}.$$

Что касается оценок снизу, то они известны лишь для частных случаев и получены, в основном, с помощью относительных проекционных констант. При этом точность полученных оценок можно определить с помощью неравенств

$$\lambda(Y_{n-k}, l^n_\infty) \leqslant \lambda(n-k, n) \leqslant \varphi(n-k, n), \lambda(Y_{n-k}, l^n_1) \leqslant \lambda(n-k, n) \leqslant \varphi(n-k, n).$$

В работах [2, 6] определены относительные проекционные константы гиперплоскостей в пространствах $l_1, l^n_1, l_\infty, l^n_\infty$. В работе Локтя [8] были получены оценки снизу для $\lambda(n - 2, n)$ и $\lambda(n - 3, n)$. Для получения этих оценок были найдены относительные проекционные константы $\lambda(Y_{n-2}, l^n_1), \lambda(Y_{n-2}, l^n_\infty), \lambda(Y_{n-3}, l^n_1)$ для некоторых классов подпространств. Дальнейшее развитие этих результатов для оценок снизу констант $\lambda(n-4, n)$ и $\lambda(n - 5, n)$ можно найти в [10].

С проблемой единственности тесно связана проблема сильной единственности минимальных проекций.

Определение 4. Оператор проектирования $\pi_0 : X \to Y$ называется сильно единственным, если существует число $k \in (0; 1]$ такое, что неравенство

$$\|\pi_0\| + k \cdot \|\pi - \pi_0\| \leqslant \|\pi\| \tag{1.1}$$

выполняется для любого оператора проектирования $\pi : X \to Y$.

Число k называется константой сильной единственности, а через k_0 обозначается максимальное значение k, при котором выполняется неравенство (1.1).

Очевидно, что сильно единственный оператор π_0 имеет минимальную норму и обладает свойством единственности.

В [6] Левицким было найдено максимальное значение константы сильной единственности операторов проектирования с единичной нормой на гиперплоскость в пространствах l_∞^n и l_1^n. Там же получены некоторые оценки констант сильной единственности операторов проектирования с нормой, большей единицы, опять же для случая гиперплоскости. Локтем [9] получено максимальное значение константы сильной единственности оператора проектирования с неединичной нормой на гиперплоскость в пространстве l_∞^n. В работах [12, 13] найдены максимальные значения констант сильной единственности проекций на подпространства коразмерности 2 и 3 пространства l_∞^4. Позднее результат работы [13] был обобщен для пространств размерности $n \geqslant 3$ [18], а дальнейшее продвижение было получено в [7].

Пусть Y_{2n-2} есть $(2n-2)$ - мерное подпространство пространства $X = l_\infty^{2n}$, $2n$-мерного линейного нормированного пространства элементов $x = (x_i)_1^{2n}$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2n} |x_i|.$$

Предложение 1. [2] Любой оператор проектирования $\pi : l_\infty^{2n} \to Y_{2n-2}$ имеет вид $\pi_{\alpha,\beta}$, где

$$\pi_{\alpha,\beta} x = x - \alpha f(x) - \beta g(x),$$

α, β – элементы пространства l_∞^{2n}, а $f = (f_i)_1^{2n} \neq 0$ и $g = (g_i)_1^{2n} \neq 0$ – линейные функционалы, определенные в l_∞^{2n}, причем

$$f(\alpha) = g(\beta) = 1; f(\beta) = g(\alpha) = 0. \tag{1.2}$$

Гиперплоскости пространства l_∞^{2n} имеют вид

$$f^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^{2n} \mid f(x) = \sum_{i=1}^{2n} f_i x_i = 0 \right\},$$

$$g^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^{2n} \mid g(x) = \sum_{i=1}^{2n} g_i x_i = 0 \right\},$$

а в силу линейной независимости функционалов f и g, которая следует из формул (1.2), пространство $Y_{2n-2} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ является подпространством пространства l_∞^{2n} коразмерности 2.

Предложение 2. [2] Нормы операторов π и $\pi - \pi_0$ вычисляются по формулам

$$\|\pi\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2n} T_i, \|\pi - \pi_0\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2n} B_i,$$

где

$$T_i = \sum_{j=1}^{2n} \mid \delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j \mid, B_i = \sum_{j=1}^{2n} \mid (\alpha_i - \alpha_i^{(0)}) f_j + (\beta_i - \beta_i^{(0)}) g_j \mid,$$

а оператор π_0 имеет вид $\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}$, где

$$\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}x = x - \alpha^{(0)}f(x) - \beta^{(0)}g(x).$$

Найдем проекционные константы операторов проектирования пространс--тва l^{2n}_∞ на некоторый класс подпространств коразмерности 2. Изложенные ниже результаты являются обобщением результатов, полученных в работах [11] и [14].

2. Относительные проекционные константы

Функционалы f и g зададим следующим образом:

$$f = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n-1}, r, \underbrace{0, \cdots, 0, 0, 0}_{n}), g = (\underbrace{0, 0, 0, \cdots, 0}_{n}, r, \underbrace{1, \cdots, 1, 1}_{n-1}), \tag{2.1}$$

где $r > 0$, а $n \geqslant 3$. Тогда соотношения (1.2) примут вид

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i + r\alpha_n = 1, g(\alpha) = r\alpha_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{2n} \alpha_i = 0,$$

$$f(\beta) = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i + r\beta_n = 0, g(\beta) = r\beta_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{2n} \beta_i = 1. \tag{2.2}$$

Теорема 1. Пусть $\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}$ – минимальный оператор проектирования пространства l^{2n}_∞ на подпространство Y_{2n-2}, определяемое функционалами (2.1). Тогда

$$1)\ \lambda(Y_{2n-2}, l^{2n}_\infty) = \|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| = 1, \text{ если } r \geqslant n-1;$$

$$2)\ \lambda(Y_{2n-2}, l^{2n}_\infty) = \|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| = \frac{2(n-1)(n-2)}{r^2 - 2r + (n-1)^2}, \text{ если } 0 < r < n-1.$$

Доказательство. Найдем значения $T^{(0)}_i = \sum_{j=1}^{2n} |\delta_{ij} - \alpha^{(0)}_i f_j - \beta^{(0)}_i g_j|$ $(i = 1, \cdots, 2n)$. Имеем

$$T^{(0)}_1 = \sum_{j=1}^{2n} |\delta_{1j} - \alpha^{(0)}_1 f_j - \beta^{(0)}_1 g_j| = |1 - \alpha^{(0)}_1| + (n-2+r)|\alpha^{(0)}_1| + (n-1+r)|\beta^{(0)}_1|,$$

. . . .

$$T^{(0)}_{n-1} = \sum_{j=1}^{2n} |\delta_{(n-1)j} - \alpha^{(0)}_{n-1} f_j - \beta^{(0)}_{n-1} g_j| = |1 - \alpha^{(0)}_{n-1}| + (n-2+r)|\alpha^{(0)}_{n-1}| +$$

$$+(n-1+r)|\beta_{n-1}^{(0)}|,$$

$$T_n^{(0)} = \sum_{j=1}^{2n} |\delta_{nj} - \alpha_n^{(0)} f_j - \beta_n^{(0)} g_j| = (n-1)|\alpha_n^{(0)}| + |1 - r\alpha_n^{(0)}| + (n-1+r)|\beta_n^{(0)}|,$$

$$T_{n+1}^{(0)} = \sum_{j=1}^{2n} |\delta_{(n+1)j} - \alpha_{n+1}^{(0)} f_j - \beta_{n+1}^{(0)} g_j| = (n-1+r)|\alpha_{n+1}^{(0)}| + |1 - r\beta_{n+1}^{(0)}| + (n-1)|\beta_{n+1}^{(0)}|,$$

$$T_{n+2}^{(0)} = \sum_{j=1}^{2n} |\delta_{(n+2)j} - \alpha_{n+2}^{(0)} f_j - \beta_{n+2}^{(0)} g_j| = (n-1+r)|\alpha_{n+2}^{(0)}| + |1 - \beta_{n+2}^{(0)}| +$$

$$+(n-2+r)|\beta_{n+2}^{(0)}|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T_{2n}^{(0)} = \sum_{j=1}^{2n} |\delta_{(2n)j} - \alpha_{2n}^{(0)} f_j - \beta_{2n}^{(0)} g_j| = (n-1+r)|\alpha_{2n}^{(0)}| + |1 - \beta_{2n}^{(0)}| + (n-2+r)|\beta_{2n}^{(0)}|.$$

Рассмотрим два случая.

1) $r \geqslant n-1$. Положим $\alpha_n^{(0)} = \beta_{n+1}^{(0)} = \frac{1}{r}, \alpha_1^{(0)} = \cdots = \alpha_{n-1}^{(0)} = \alpha_{n+1}^{(0)} = \cdots = \alpha_{2n}^{(0)} = 0, \beta_1^{(0)} = \cdots = \beta_n^{(0)} = \beta_{n+2}^{(0)} = \cdots = \beta_{2n}^{(0)} = 0$. При этом условия (2.2) выполняются. Тогда $T_n^{(0)} = T_{n+1}^{(0)} = \frac{n-1}{r} \leqslant 1, T_1^{(0)} = \cdots = T_{n-1}^{(0)} = T_{n+2}^{(0)} = \cdots = T_{2n}^{(0)} = 1$.

Следовательно,

$$\lambda(Y_{2n-2}, l_\infty^{2n}) = \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2n} T_i^{(0)} = 1.$$

2) $0 < r < n-1$. Воспользуемся тем, что

$$|\alpha_i^{(0)}| \geqslant 0 (i = n+1, \cdots, 2n), |\beta_i^{(0)}| \geqslant 0 (i = 1, \cdots, n).$$

Тогда

$$\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_1^{(0)} \geqslant |1 - \alpha_1^{(0)}| + (n-2+r)|\alpha_1^{(0)}| \geqslant 1 - |\alpha_1^{(0)}| + (n-2+r)|\alpha_1^{(0)}| =$$

$$= 1 + (n-3+r)|\alpha_1^{(0)}|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_{n-1}^{(0)} \geqslant |1 - \alpha_{n-1}^{(0)}| + (n-2+r)|\alpha_{n-1}^{(0)}| \geqslant 1 - |\alpha_{n-1}^{(0)}| + (n-2+r)|\alpha_{n-1}^{(0)}| =$$

$$= 1 + (n-3+r)|\alpha_{n-1}^{(0)}|,$$

$$\|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| \geqslant T^{(0)}_n \geqslant (n-1)|\alpha^{(0)}_n| + |1 - r\alpha^{(0)}_n| \geqslant (n-1)|\alpha^{(0)}_n| + 1 - r|\alpha^{(0)}_n| =$$

$$= 1 + (n-1-r)|\alpha^{(0)}_n|,$$

$$\|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| \geqslant T^{(0)}_{n+1} \geqslant (n-1)|\beta^{(0)}_{n+1}| + |1 - r\beta^{(0)}_{n+1}| \geqslant (n-1)|\beta^{(0)}_{n+1}| + 1 - r|\beta^{(0)}_{n+1}| =$$

$$= 1 + (n-1-r)|\beta^{(0)}_{n+1}|,$$

$$\|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| \geqslant T^{(0)}_{n+2} \geqslant |1 - \beta^{(0)}_{n+2}| + (n-2+r)|\beta^{(0)}_{n+2}| \geqslant 1 - |\beta^{(0)}_{n+2}| + (n-2+r)|\beta^{(0)}_{n+2}| =$$

$$= 1 + (n-3+r)|\beta^{(0)}_{n+2}|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| \geqslant T^{(0)}_{2n} \geqslant |1 - \beta^{(0)}_{2n}| + (n-2+r)|\beta^{(0)}_{2n}| \geqslant 1 - |\beta^{(0)}_{2n}| + (n-2+r)|\beta^{(0)}_{2n}| =$$

$$= 1 + (n-3+r)|\beta^{(0)}_{2n}|.$$

Умножим неравенства для $T^{(0)}_n$ и $T^{(0)}_{n+1}$ на $\frac{r(n-3+r)}{n-1-r} > 0$, затем сложим их почленно, учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^{(0)}_i = 1 - r\alpha^{(0)}_n, \sum_{i=n+2}^{2n} \beta^{(0)}_i = 1 - r\beta^{(0)}_{n+1} :$$

Получим

$$\left(2n - 2 + \frac{2r(n-3+r)}{n-1-r}\right) \|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| \geqslant 2n-2+\frac{2r(n-3+r)}{n-1-r}+(n-3+r)\sum_{i=1}^{n-1}|\alpha^{(0)}_i|+$$

$$+r(n-3+r)\left(|\alpha^{(0)}_n| + |\beta^{(0)}_{n+1}|\right)+(n-3+r)\sum_{i=n+2}^{2n}|\beta^{(0)}_i| \geqslant 2n-2+\frac{2r(n-3+r)}{n-1-r}+$$

$$+(n-3+r)\left|\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^{(0)}_i\right| + r(n-3+r)\left(|\alpha^{(0)}_n| + |\beta^{(0)}_{n+1}|\right) + (n-3+r)\left|\sum_{i=n+2}^{2n}\beta^{(0)}_i\right| =$$

$$= 2n-2+\frac{2r(n-3+r)}{n-1-r}+(n-3+r)|1-r\alpha^{(0)}_n|+r(n-3+r)\left(|\alpha^{(0)}_n| + |\beta^{(0)}_{n+1}|\right)+$$

$$+(n-3+r)|1-r\beta^{(0)}_{n+1}| \geqslant 2n-2+\frac{2r(n-3+r)}{n-1-r}+(n-3+r)\left(1-r|\alpha^{(0)}_n|\right)+$$

$$+r(n-3+r)\left(|\alpha^{(0)}_n| + |\beta^{(0)}_{n+1}|\right) + (n-3+r)\left(1-r|\beta^{(0)}_{n+1}|\right) =$$

$$= 2n-2+\frac{2r(n-3+r)}{n-1-r}+2(n-3+r).$$

Следовательно,

$$\lambda(Y_{2n-2}, l_\infty^{2n}) = \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant \frac{2(n-1)(n-2)}{r^2-2r+(n-1)^2}.$$

Покажем, что эта оценка снизу точная. Для этого найдем $\alpha_i^{(0)}, \beta_i^{(0)} (i = 1, ..., 2n)$ такие, что

$$T_i^{(0)} = \frac{2(n-1)(n-2)}{r^2-2r+(n-1)^2}\ (i = 1, ..., 2n).$$

Положим

$$\alpha_1^{(0)} = \dots = \alpha_{n-1}^{(0)} = \beta_{n+2}^{(0)} = \dots = \beta_{2n}^{(0)} = \frac{n-1-r}{r^2-2r+(n-1)^2},$$

$$\alpha_n^{(0)} = \beta_{n+1}^{(0)} = \frac{n-3+r}{r^2-2r+(n-1)^2}, \alpha_{n+1}^{(0)} = \dots = \alpha_{2n}^{(0)} = \beta_1^{(0)} = \dots = \beta_n^{(0)} = 0,$$

при этом условия (2.2) выполняются.

Тогда

$$T_1^{(0)} = \dots = T_{n-1}^{(0)} = T_{n+2}^{(0)} = \dots = T_{2n}^{(0)} = |1-\alpha_1^{(0)}| + (n-2+r)|\alpha_1^{(0)}| =$$

$$= \left|1 - \frac{n-1-r}{r^2-2r+(n-1)^2}\right| + \frac{(n-1-r)(n-2+r)}{r^2-2r+(n-1)^2} =$$

$$= \frac{r^2-r+(n-1)(n-2)}{r^2-2r+(n-1)^2} + \frac{(n-1-r)(n-2+r)}{r^2-2r+(n-1)^2} =$$

$$= \frac{2(n-1)(n-2)}{r^2-2r+(n-1)^2},$$

$$T_n^{(0)} = T_{n+1}^{(0)} = (n-1)|\alpha_n^{(0)}| + |1-r\alpha_n^{(0)}| = \frac{(n-1)(n-3+r)}{r^2-2r+(n-1)^2} +$$

$$+ \left|1 - \frac{r(n-3+r)}{r^2-2r+(n-1)^2}\right| = \frac{(n-1)(n-3+r)}{r^2-2r+(n-1)^2} + \frac{(n-1)(n-1-r)}{r^2-2r+(n-1)^2} =$$

$$= \frac{2(n-1)(n-2)}{r^2-2r+(n-1)^2}.$$

Таким образом,

$$\lambda(Y_{2n-2}, l_\infty^{2n}) = \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| = \frac{2(n-1)(n-2)}{r^2-2r+(n-1)^2},$$

Очевидно, что $\frac{2(n-1)(n-2)}{r^2-2r+(n-1)^2} > 1$, так как это неравенство равносильно условию $3-n<r<n-1$.

Теорема 1 доказана.

3. Константы сильной единственности

Лемма. Значение константы сильной единствености k из неравенства (1.1) для оператора проектирования $\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}$, который определяется функционалами (2.1), удовлетворяет условию

$$k \leqslant \frac{n-3+r}{n-1+r},$$

если $r \geqslant n-1$.

Доказательство. Для получения оценки константы k сверху рассмот- -рим оператор $\overline{\pi}x = x - \overline{\alpha}f(x) - \overline{\beta}g(x)$. Значения $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ определим следующим образом: $0 < \overline{\alpha}_1 = \dots = \overline{\alpha}_{n-1} = \overline{\beta}_{n+2} = \dots = \overline{\beta}_{2n} \leqslant 1, \overline{\alpha}_n = \overline{\beta}_{n+1} > 0, \overline{\alpha}_{n+1} = \dots = \overline{\alpha}_{2n} = \overline{\beta}_1 = \dots = \overline{\beta}_n = 0$.

Тогда

$$1 - r\overline{\alpha}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{\alpha}_i > 0, 1 - r\overline{\beta}_{n+1} = \sum_{i=n+2}^{2n} \overline{\beta}_i > 0.$$

Вычислим нормы операторов $\overline{\pi}$ и $\overline{\pi} - \pi^{(0)}$. Имеем

$$\|\overline{\pi}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 2n} \overline{T}_i = \max_i \sum_{j=1}^{2n} |\delta_{ij} - \overline{\alpha}_i f_j - \overline{\beta}_i g_j|.$$

Найдем значения $\overline{T}_i$.

$$\overline{T}_n = \overline{T}_{n+1} = (n-1)\overline{\alpha}_n + 1 - r\overline{\alpha}_n + = 1 + (n-1-r)\overline{\alpha}_n \leqslant 1,$$

$$\overline{T}_1 = \dots = \overline{T}_{n-1} = \overline{T}_{n+2} = \dots = \overline{T}_{2n} = 1 - \overline{\alpha}_1 + (n-2+r)\overline{\alpha}_1 =$$
$$= 1 + (n-3+r)\overline{\alpha}_1 > 1.$$

Таким образом,

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 2n} \overline{T}_i = 1 + (n-3+r)\overline{\alpha}_1.$$

Далее

$$\|\overline{\pi} - \pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 2n} \overline{B}_i = \max_i \sum_{j=1}^{2n} |(\overline{\alpha}_i - \alpha_i^{(0)})f_j - (\overline{\beta}_i - \beta_i^{(0)})g_j| =$$

$$= \max\left\{\sum_{j=1}^{2n}|\overline{\alpha}_1 f_j|;\cdots;\sum_{j=1}^{2n}|\overline{\alpha}_{n-1} f_j|;\sum_{j=1}^{2n}\left|\left(\overline{\alpha}_n-\frac{1}{r}\right)f_j\right|;\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{2n}\left|\left(\overline{\beta}_{n+1}-\frac{1}{r}\right)g_j\right|;\sum_{j=1}^{2n}|\overline{\beta}_{n+2} g_j|;\cdots;\sum_{j=1}^{2n}|\overline{\beta}_{2n} g_j|\right\}=$$

$$= \max\left\{(n-1+r)|\overline{\alpha}_1|;\cdots;(n-1+r)|\overline{\alpha}_{n-1}|;(n-1+r)\left|\overline{\alpha}_n-\frac{1}{r}\right|;\right.$$

$$\left.(n-1+r)\left|\overline{\beta}_{n+1}-\frac{1}{r}\right|;(n-1+r)|\overline{\beta}_{n+2}|;\cdots;(n-1+r)|\overline{\beta}_{2n}|\right\}=$$

$$=(n-1+r)\cdot\max\left\{|\overline{\alpha}_1|;\left|\overline{\alpha}_n-\frac{1}{r}\right|\right\}=(n-1+r)\cdot\max\left\{|\overline{\alpha}_1|;\left|\frac{1-r\overline{\alpha}_n}{r}\right|\right\}=$$

$$=(n-1+r)\cdot\max\left\{|\overline{\alpha}_1|;\frac{n-1}{r}|\overline{\alpha}_1|\right\}=(n-1+r)\cdot\overline{\alpha}_1,$$

так как $|1-r\overline{\alpha}_1|=(n-1)|\overline{\alpha}_1|$ и $\frac{n-1}{r}\leqslant 1$.

Найдем для k оценку сверху. Неравенство (1.1) примет вид $1+k\cdot(n-1+r)\overline{\alpha}_1\leqslant 1+(n-3+r)\overline{\alpha}_1$, откуда получим, что $k\leqslant\frac{n-3+r}{n-1+r}$. Очевидно, что $k\in(0,1)$.

Лемма доказана.

Теорема 2. Оператор проектирования $\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}$ пространства l^{2n}_∞ на подпространство Y_{2n-2}, определяемое функционалами (2.1), является сильно единственным и максимальное значение константы сильной единственности k_0 равно $\frac{n-3+r}{n-1+r}$, если $r\geqslant n-1$.

Доказательство. Имеем

$$T_1=|1-\alpha_1|+(n-2+r)|\alpha_1|+(n-1+r)|\beta_1|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T_{n-1}=|1-\alpha_{n-1}|+(n-2+r)|\alpha_{n-1}|+(n-1+r)|\beta_{n-1}|,$$

$$T_n=(n-1)|\alpha_n|+|1-r\alpha_n|+(n-1+r)|\beta_n|,$$

$$T_{n+1}=(n-1+r)|\alpha_{n+1}|+|1-r\beta_{n+1}|+(n-1)|\beta_{n+1}|,$$

$$T_{n+2}=(n-1+r)|\alpha_{n+2}|+|1-\beta_{n+2}|+(n-2+r)|\beta_{n+2}|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T_{2n}=(n-1+r)|\alpha_{2n}|+(n-2+r)|\beta_{2n}|+|1-\beta_{2n}|.$$

Найдем B_i $(i = 1, \cdots, 2n)$. Для $i = 1, \cdots, n-1, n+2, \cdots, 2n$ будем иметь

$$B_i = \sum_{j=1}^{2n} |(\alpha_i - 0)f_j + (\beta_i - 0)g_j| = (n - 1 + r)(|\alpha_i| + |\beta_i|).$$

Далее

$$B_n = \sum_{j=1}^{2n} \left| \left(\alpha_n - \frac{1}{r}\right) f_j + (\beta_n - 0)g_j \right| = (n - 1 + r) \left(\left|\alpha_n - \frac{1}{r}\right| + |\beta_n| \right),$$

$$B_{n+1} = \sum_{j=1}^{2n} \left| (\alpha_{n+1} - 0)f_j + \left(\beta_{n+1} - \frac{1}{r}\right) g_j \right| =$$

$$= (n - 1 + r) \left(|\alpha_{n+1}| + \left|\beta_{n+1} - \frac{1}{r}\right| \right).$$

Покажем, что $k_0 = \frac{n-3+r}{n-1+r}$ $(r \geqslant n-1)$ – максимально возможное значение константы сильной единственности. Для этого надо доказать, что неравенство

$$\|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| + k_0 \cdot \max_{1\leqslant i\leqslant 2n} B_i \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant 2n} T_i \tag{3.1}$$

выполняется при любых значениях α_i, β_i.

Сравним значения B_i. Докажем, что $\max\{B_i : i = 1, \cdots, n-1\} \geqslant B_n$. Для этого докажем сначала неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} B_i \geqslant (n - 1)B_n. \tag{3.2}$$

Имеем

$$(n - 1 + r) \sum_{i=1}^{n-1} (|\alpha_i| + |\beta_i|) \geqslant (n - 1)(n - 1 + r) \left(\left|\alpha_n - \frac{1}{r}\right| + |\beta_n| \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (|\alpha_i| + |\beta_i|) \geqslant (n - 1) \left(\left|\alpha_n - \frac{1}{r}\right| + |\beta_n| \right).$$

Достаточно доказать два неравенства

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\beta_i| \geqslant (n - 1)|\beta_n| \text{ и } \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i| \geqslant (n - 1) \left|\alpha_n - \frac{1}{r}\right|.$$

Так как $\beta_n = -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i$, то первое неравенство равносильно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n-1}|\beta_i| \geqslant \frac{n-1}{r}\left|\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\right|,$$

которое выполняется в силу того, что

$$\sum_{i=1}^{n-1}|\beta_i| \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\right| \text{ и } \frac{n-1}{r} \leqslant 1.$$

Докажем второе неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n-1}|\alpha_i| \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right| = |1-r\alpha_n| = r\left|\frac{1}{r}-\alpha_n\right| \geqslant (n-1)\left|\alpha_n-\frac{1}{r}\right|.$$

Таким образом, неравенство (3.2) доказано.

Если $B_i < B_n$ $(i = 1,\cdots,n-1)$, то неравенство (3.2) не выполняется. Значит, существует номер i, $(i = 1,\cdots,n-1)$ такой, что $B_i \geqslant B_n$. Тогда

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} B_i = \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} B_i.$$

Аналогично доказывается,что

$$\max_{n+1\leqslant i\leqslant 2n} B_i = \max_{n+2\leqslant i\leqslant 2n} B_i.$$

Таким образом,

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 2n} B_i = \max_{1\leqslant i\leqslant 2n, i\neq n,n+1} B_i.$$

Неравенство (3.1) перепишется в виде

$$1+\frac{n-3+r}{n-1+r}\cdot \max_{1\leqslant i\leqslant 2n, i\neq n,n+1} B_i \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant 2n} T_i.$$

Пусть

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 2n} B_i = \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} B_i.$$

Достаточно доказать неравенство $(i = 1,\cdots,n-1)$

$$1+\frac{n-3+r}{n-1+r}\cdot(n-1+r)(|\alpha_i|+|\beta_i|) \leqslant |1-\alpha_i|+(n-2+r)|\alpha_i|+(n-1+r)|\beta_i|,$$

т.е.

$$1+(n-3+r)(|\alpha_i|+|\beta_i|) \leqslant |1-\alpha_i|+(n-2+r)|\alpha_i|+(n-1+r)|\beta_i|.$$

Так как $|1-\alpha_i|+(n-2+r)|\alpha_i| \geqslant 1-|\alpha_i|+(n-2+r)|\alpha_i| = 1+(n-3+r)|\alpha_i|$, то остается доказать неравенство $(n-3+r)|\beta_i| \leqslant (n-1+r)|\beta_i|$, которое очевидно.

Аналогично доказывается случай

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 2n} B_i = \max_{n+2\leqslant i\leqslant 2n} B_i.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Случай $n = 2$ рассмотрен в работе [11]. В этом случае $\lambda(Y_2, l_\infty^4) = 1$ при любых $r > 0$, а максимальное значение константы сильной единственности равно $k_0 = \frac{1-r}{1+r}$, если $0 < r < 1$ и $k_0 = \frac{r-1}{1+r}$, если $r > 1$. Если же $n \geqslant 3$, то вопрос о сильной единственности минимальной проекции с неединичной нормой, найденной в теореме 1 при $0 < r < n-1$, остается нерешенным.

Замечание 2. Случай, когда функционалы f и g имеют вид

$$f = (\underbrace{1, r, \cdots, r}_{n}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n}), g = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n}, \underbrace{r, \cdots, r, 1}_{n})$$

рассмотрен в работе [15].

Список литературы

[1] Baronti M. A note on norm-one projections onto subspaces of finite codimension of l_∞ // Arch. Math. 54, 1990, P. 384–388.

[2] Bl$\ddot{a}$tter J., Cheney E.W., Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces // Ann. math. pura et appl., 101 (1974),P. 215–227.

[3] Bohnenblust H.F. Convex regions and projections in Minkowski spaces // Ann. of math., 1938, P. 301–308.

[4] Chalmers B. L., Lewicki G. Three-dimensional subspace of with maximal projection constants // J. Funct. Anal. 257, 2009, P. 553–592.

[5] K$\ddot{o}$nig H.P., Lewis D.R., Lin P.-K. Finite dimensional projections. // Stud. math. (PRL), 1983, 75, № 3, P. 341–358.

[6] Lewicki G. Best Approximation in Spaces of Bounder Linear Operators. Diss. Math. V. XXXCCC. Warszawa, 1994.

[7] Lewicki G., Micek A. Equality of two strong unique projection constants // J. Approx. Theory, 162, №12, 2010, P. 2278–2289.

[8] Lokot' V.V. On a class of minimal projections in finite dimensional spaces // Optimization, 1994, vol. 29, p. 311–317.

[9] Локоть В.В. Константы сильной единственности минимальных проекций на гиперплоскости в пространстве $l_\infty^n (n \geqslant 3)$ // Математические заметки, т. 72, № 5, 2002. с. 723–728.

[10] Локоть В.В., Мартынов О.М. Проекционные константы. – Мурманск: МГГУ, 2013. – 302 С.

[11] Локоть В.В., Мартынов О.М. О некоторых константах сильной единственности // Дифференциальные уравнения и процессы управления, № 1, 2018. – С. 35–53; http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.1/article.1.2.html.

[12] Martinov O.M. Constants of strong unicity of minimal projections onto some two-dimensional subspaces of l_∞^4 // J. Approx. Theory. 118, (2002). P. 175–187.

[13] Мартынов О.М. Некоторые свойства операторов проектирования в банаховых пространствах. Диссертация к.ф.-м.н., РГПУ им. А.И. Герцена, СПб, 2002.

[14] Мартынов О.М. О некоторых проекционных константах в пространствах $l_\infty^{(6)}$ и $l_\infty^{(8)}$ // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. LXXII Герценовские чтения – 2019. – СПб: РГПУ им. А.И. Герцена, 2019. – С. 111–115.

[15] Мартынов О.М. Проекционные константы некоторого класса подпространств коразмерности два в пространстве l_∞^{2n} // Функциональный анализ и его приложения, т.53, № 3, 2019. – С. 33–44.

[16] Одинец В.П., Якубсон М.Я. Проекторы и базисы в нормированных пространствах, Едиториал УРСС, М., 2004.

[17] Odyniec W., Prophet M. The strong unicity constant and its applications // vol. 79, Banach Center Publications, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2007, 167–172.

[18] Odyniec W., Prophet M.P. A lower bound of the strongly unique minimal projection constant of $l_\infty^n, (n \geqslant 3)$ // J. Approx. Theory, №145 (2007). P. 111–121.

On the strong uniqueness of some projections with unit norm

Oleg Martynov
Zhukov Air and Space Defense Academy
olegmartynov@yandex.ru

Abstract. In this paper we consider some minimal projections of a space of dimension $2n$ onto a subspace of codimension two. It is shown that there are two types of such projections — that have the norm equal one and the projections having the norm greater than one. In both cases relative projection constants are found. For projections with unit norm an upper estimation of the strong uniqueness constant is obtained, and it is proved that this estimation is accurate.

Keywords: projection, constants of strong uniqueness, the relative projection constant, space, subspace.