ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

О приближённом решении одной сингулярно возмущённой краевой задачи

Е. К. Куликов, А. А. Макаров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9,
egor.k.kulikov@gmail.com, a.a.makarov@spbu.ru

Аннотация. В работе исследуется задача приближения функции, являющейся решением сингулярно возмущённой краевой задачи. Такие функции имеют большие градиенты в экспоненциальном пограничном слое, поэтому применение классических методов интерполяции приводит к существенным погрешностям. Предложена локальная схема аппроксимации минимальными сплайнами на сетке Шишкина, в которой коэффициенты при базисных функциях задаются функционалами типа де Бура-Фикса. Это ведет к более точным приближениям по сравнению с известными. Приводятся результаты численных экспериментов, показывающие достаточно точные приближения.

Ключевые слова: минимальные сплайны, B-сплайны, функционалы типа де Бура-Фикса, сетка Шишкина, функция с большими градиентами.

1 Введение

Конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией моделируются на основе решения сингулярно возмущённых краевых задач. Такие решения имеют большие градиенты в области пограничного слоя, поэтому в ситуациях, когда коэффициент диффузии оказывается меньше шага сетки, классические разностные схемы не обладают свойством сходимости. Поэтому широко развиваются методы построения специальных разностных схем для решения сингулярно возмущенных задач, среди которых наибольшее распространение получил метод, основанный на сгущении сеток в пограничном слое. Наиболее применимые подходы к сгущению были предложены Н. Бахваловым [1] и Г. Шишкиным [2].

В работе [3] показано, что применение кубических сплайнов для аппроксимации функций, имеющих большой градиент в экспоненциальном пограничном слое, на равномерной сетке приводит к существенным погрешностям, однако применение сетки Шишкина позволяет несколько повысить качество приближения. Более точная аппроксимация [4] основана на применении параболической сплайн-интерполяции по Субботину на сетке Шишкина. Однако полученные оценки погрешности оказываются неравномерны по возмущающему параметру ε, что на практике в некоторых случаях приводит к неограниченному росту погрешности при малых значениях параметра. Кроме того, предлагаемая схема не является локальной, что приводит к достаточно высокой вычислительной сложности.

Сплайны, полученные из аппроксимационных соотношений, обладающие минимальным носителем, называются минимальными. Свойства таких сплайн-функций рассматривались, например, в монографиях [5] и [6].

Целью данной работы является исследование аппроксимации функций с большими градиентами в пограничном слое минимальными сплайнами максимальной гладкости [7]. При этом используется локальная схема аппроксимации, в которой коэффициенты при базисных функциях задаются явно двойственными функционалами типа де Бура–Фикса [8], являющимися линейными комбинациями значений аппроксимируемой функции и ее производных. В работе приводятся результаты численных экспериментов, которые показывают, что использование предлагаемого подхода позволяет получать более точные приближения по сравнению с известными.

2 Основные обозначения

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ := \{j \mid j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}^1$ — множество вещественных чисел. Векторное (линейное) пространство трехмерных вектор-столбцов обозначим через $\mathbb{R}^3$, причем векторы в нем будем отождествлять с одностолбцовыми матрицами и применять к ним обычные матричные операции; в частности, для пары векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ выражение

$\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ представляет собой евклидово скалярное произведение этих векторов.

Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ (в указанном порядке) обозначается символом $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, а выражение $\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ обозначает ее определитель. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются целыми числами; например, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2)^T$. Для любого $S \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение $C^S[a,b] := \{u \mid u^{(i)} \in C[a,b]\ \forall\, i = 0, 1, \ldots, S\}$, полагая $C^0[a,b] := C[a,b]$. Будем писать $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^S[a,b]$, если компоненты вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемы S раз на отрезке $[a,b]$.

3 Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущённую краевую задачу

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = g(x),$$

$$u(0) = u_0,\ u(1) = u_1,$$

где $\varepsilon \in (0,1], \varepsilon \in \mathbb{R}^1$ и функции $a(x), b(x), g(x)$ достаточно гладкие, причём $a(x) \geqslant a = const > 0$, $b(x) \geqslant 0$, $x \in [0,1]$. При малых значениях параметра ε решение данной задачи имеет большие градиенты у границы $x = 0$. В соответствии с [2] и [9], решение задачи может быть представлено в виде суммы регулярной и сингулярной составляющих

$$u(x) = q(x) + \Phi(x),\ x \in (0,1], \tag{1}$$

где

$$|q^{(j)}(x)| \leqslant C,\ |\Phi^{(j)}(x)| \leqslant C\varepsilon^{-j}e^{-\frac{ax}{\varepsilon}},\ 0 \leqslant j \leqslant 3,$$

$C = const > 0$ — постоянная, не зависящая от параметра и числа узлов рассматриваемой сетки.

Согласно [2], зададим кусочно-равномерную сетку

$$\Xi := \{\xi_j\}_{j=0}^N \tag{2}$$

с шагом $h_j := \xi_{j+1} - \xi_j$, определяемым следующими формулами:

$$h_j = \frac{2\sigma}{N},\ j = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1,$$

$$h_j = \frac{2(1-\sigma)}{N},\ j = \frac{N}{2}, \ldots, N-1,$$

где $\sigma := \min\{\frac{1}{2}, 3\varepsilon a^{-1}\ln N\}$.

Далее исследуем точность приближения функции (1) квадратичными минимальными сплайнами на сетке (2).

4 О квадратичных минимальных сплайнах

На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{3}$$

В случае необходимости будем считать, что рассматриваемая сетка продолжена за отрезок $[a,b]$ с некоторым фиксированным шагом.

Введем обозначение $J_{i,k} := \{i, i+1, \ldots, k\}, i, k \in \mathbb{Z}, i < k$. Упорядоченное множество $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j\}_{j\in J_{-2,n-1}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$ будем называть *цепочкой векторов.* Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной* цепочкой векторов, если $\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in J_{0,n-1}$. Обозначим характеристику мелкости сетки через $h_X := \sup\limits_{j\in J_{-2,n-1}} (x_{j+1} - x_j)$.

Введем обозначения для объединения элементарных сеточных интервалов $M := \cup_{j\in J_{0,n-1}}(x_j, x_{j+1})$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Пусть $S_j := [x_j, x_{j+3}], j \in J_{-2,n-1}$.

Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ с элементами из пространства $\mathbf{C}^2[a,b]$ и ненулевым вронскианом $W(t)$:

$$W(t) := \det(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\varphi}'(t), \boldsymbol{\varphi}''(t)) \neq 0 \quad \forall\, t \in [a,b]. \tag{4}$$

Пусть $\mathbf{A}$ — полная цепочка векторов. Предположим, что функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M), j \in J_{-2,n-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_{j'=k-2}^{k} \mathbf{a}_{j'}\, \omega_{j'}(t) \equiv\ & \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}), \forall\, k \in J_{0,n-1}, \\ \omega_j(t) \equiv\ & 0 \qquad\quad \forall\, t \in M \backslash S_j, \forall\, j \in J_{-2,n-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для всякого фиксированного $t \in (x_k, x_{k+1}), \forall\, k \in J_{0,n-1}$ соотношения (5) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду полноты цепочки векторов $\mathbf{A}$, система (5) имеет единственное решение. По формулам Крамера находим

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_{k-2,k}, j'\neq j} \;\; \| \;\; {}'^j \, \boldsymbol{\varphi}(t)\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k\Big)} \qquad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}), \;\; \forall\, j \in J_{k-2,k},$$

где символьная запись $\|\ {}'^j$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathbf{a}_j$ на столбец $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов). Отсюда также следует, что $\operatorname{supp}\omega_j \subset S_j$.

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством квадратичных минимальных координатных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов*, которое мы будем обозначать через $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$. Тождества (5) называются *аппроксимационными соотношениями*. Вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей.*

Для вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1[a, b]$ положим

$$\boldsymbol{\varphi}_j := \boldsymbol{\varphi}(x_j), \quad \boldsymbol{\varphi}'_j := \boldsymbol{\varphi}'(x_j), \quad j \in J_{-2,n+2},$$

и рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^3$, задаваемые тождеством

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}'_j, \boldsymbol{\varphi}''_j, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Определим цепочку векторов $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j^N\}_{j\in J_{-2,n-1}}$ формулой

$$\mathbf{a}_j^N := \boldsymbol{\varphi}_{j+1} - \frac{\mathbf{d}_{j+2}^T\, \boldsymbol{\varphi}_{j+1}}{\mathbf{d}_{j+2}^T\, \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}} \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}. \tag{6}$$

Известно [7], что если выполнено условие

$$|W(t)| \geqslant c = const > 0 \;\; \forall\, t \in [a, b],$$

то при достаточно малом h_X цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j^N\}, j \in J_{0,n-1}$, является полной, и функции $\omega_j \in C^1[a, b]$ для каждого $j \in J_{-2,n-1}$. Более того, если $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1$, то справедливо свойство *разбиения единицы*:

$$\sum_{j=-2}^{n-1} \omega_j(t) \equiv 1 \quad \forall\, t \in [a, b].$$

В этом случае функции $\omega_j(t)$ называются *нормализованными квадратичными минимальными координатными* $B_{\boldsymbol{\varphi}}$*-сплайнами.* При этом справедлива следующая теорема [10]:

Теорема 1. *Функция $\omega_j \in C^1[a,b]$ и ее производная представимы формулами ($i = 0, 1$):*

$$\omega_j^{(i)}(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \tag{7}$$

$$\omega_j^{(i)}(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} - \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} \frac{\mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N}, \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{8}$$

$$\omega_j^{(i)}(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+3}^T \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \tag{9}$$

Замечание 1. *Для $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, t, t^2)^T$ функции $\omega_j(t)$ совпадают с известными квадратичными полиномиальными B-сплайнами (третьего порядка) $\omega_j^B(t)$ (см. [11]):*

$$\omega_j^B(t) = \begin{cases} \dfrac{(t - x_j)^2}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j)}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{1}{x_{j+1} - x_j} \left[\dfrac{(t - x_j)^2}{x_{j+2} - x_j} - \dfrac{(t - x_{j+1})^2 (x_{j+3} - x_j)}{(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+1})} \right], & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \dfrac{(t - x_{j+3})^2}{(x_{j+3} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+2})}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases}$$

5 О локальной схеме аппроксимации

Рассмотрим некоторое линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{U}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{U}$. Значение функционала f на элементе $u \in \mathfrak{U}$ обозначим через $\langle f, u \rangle$. Для функционала $f \in (C^S)^*$ будем писать $\operatorname{supp} f \subset [c, d]$, если значение $\langle f, u \rangle$ определяется значениями функции $u \in C^S$ на интервале (c, d).

Будем говорить, что система функционалов $\{\nu_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ *биортогональна* системе функций $\{w_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, если $\langle \nu_i, w_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall\, i, j \in \mathbb{Z}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Функционалы ν_i называются *двойственными функционалами* к функциям w_j.

Теорема 2. *(см. [13]) Система линейных функционалов*

$$\lambda_k^{\langle r \rangle} : \operatorname{supp} \lambda_k^{\langle r \rangle} \subset [x_{k+r}, x_{k+r+1}], k \in J_{-2,n-1}, r \in \{0, 1, 2\},$$

биортогональна системе минимальных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов $\{\omega_{j'}\}_{j'\in J_{-2,n-1}}$ для любого $r \in \{0,1,2\}$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\langle \lambda_k^{\langle r\rangle}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \mathbf{a}_k \quad \forall\, k \in J_{-2,n-1}. \tag{10}$$

Рассмотрим интерполяционную задачу

$$\langle \lambda_j^{\langle r\rangle}, u\rangle = v_j \quad \forall\, j \in J_{-2,n-1}, \quad u \in \mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}), \tag{11}$$

где $\{v_j\}_{j\in J_{-2,n-1}}$ — заданная последовательность чисел.

Теорема 3. *Для каждого фиксированного $r \in \{0,1,2\}$ в пространстве $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$ существует единственное решение интерполяционной задачи (11), которое задаётся формулой*

$$\widetilde{u}_r(t) = \sum_{j\in J_{-2,n-1}} v_j\, \omega_j(t).$$

Доказательство. Данное утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2. □

Имея функцию $u \in C^3[a,b]$, рассмотрим сплайн

$$\widetilde{u}_r(t) = \sum_{j\in J_{-2,n-1}} \langle \lambda_j^{\langle r\rangle}, u\rangle\, \omega_j(t), \quad t \in (x_k, x_{k+1}). \tag{12}$$

Функционалы $\lambda_j^{\langle r\rangle}$ в таком случае называются *аппроксимационными* функционалами.

Принимая во внимание расположение носителя функции ω_j для $t \in (x_k, x_{k+1})$, видим, что сумма (12) содержит только три ненулевых слагаемых, поэтому аппроксимация (12) имеет вид

$$\widetilde{u}_r(t) = \sum_{j=k-2}^{k} \langle \lambda_j^{\langle r\rangle}, u\rangle\, \omega_j(t). \tag{13}$$

6 О реализациях аппроксимационных функционалов

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, \rho(t), \sigma(t))^T$, где $\rho, \sigma \in C^1[a,b]$.

Рассмотрим линейные функционалы $\{\lambda_j^{\langle r\rangle}\}_{j\in J_{-2,n-1}}$. Значение функционала $\lambda_j^{\langle 0\rangle}$ на функции $u\in C^2[a,b]$ определим формулой

$$\langle\lambda_j^{\langle 0\rangle},u\rangle := u(x_j)+\Big((\rho_{j+1}\sigma'_{j+1}-\rho'_{j+1}\sigma_{j+1})(\rho''_j\sigma'_{j+2}-\rho'_{j+2}\sigma''_j)+$$

$$(\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}-\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1})(\rho''_j\sigma_j-\rho_j\sigma''_j)+(\rho_{j+2}\sigma'_{j+2}-\rho'_{j+2}\sigma_{j+2})(\rho'_{j+1}\sigma''_j-\rho''_j\sigma'_{j+1})\Big)\times$$

$$\frac{u'(x_j)}{(\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}-\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1})(\rho'_j\sigma''_j-\rho''_j\sigma'_j)}+\Big((\rho_{j+1}\sigma'_{j+1}-\rho'_{j+1}\sigma_{j+1})(\rho'_{j+2}\sigma'_j-\rho'_j\sigma'_{j+2})+$$

$$(\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}-\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1})(\rho_j\sigma'_j-\rho'_j\sigma_j)+(\rho_{j+2}\sigma'_{j+2}-\rho'_{j+2}\sigma_{j+2})(\rho'_j\sigma'_{j+1}-\rho'_{j+1}\sigma'_j)\Big)\times$$

$$\frac{u''(x_j)}{(\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}-\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1})(\rho'_j\sigma''_j-\rho''_j\sigma'_j)}.$$

Значение функционалов $\lambda_j^{\langle 1\rangle}$ и $\lambda_j^{\langle 2\rangle}$ на функции $u\in C^1[a,b]$ определим формулами:

$$\langle\lambda_j^{\langle 1\rangle},u\rangle := u(x_{j+1})+\frac{(\sigma_{j+2}-\sigma_{j+1})\rho'_{j+2}-(\rho_{j+2}-\rho_{j+1})\sigma'_{j+2}}{\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1}-\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}}\,u'(x_{j+1}),$$

$$\langle\lambda_j^{\langle 2\rangle},u\rangle := u(x_{j+2})+\frac{(\sigma_{j+2}-\sigma_{j+1})\rho'_{j+1}-(\rho_{j+2}-\rho_{j+1})\sigma'_{j+1}}{\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1}-\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}}\,u'(x_{j+2}).$$

Теорема 4. *При каждом фиксированном $r\in\{0,1,2\}$ система линейных функционалов $\{\lambda_j^{\langle r\rangle}\}_{j\in J_{-2,n-1}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_{j'}\}_{j'\in J_{-2,n-1}}$, т. е.*

$$\langle\lambda_j^{\langle r\rangle},\omega_{j'}\rangle=\delta_{j,j'}\quad\forall j,j'\in J_{-2,n-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Справедливость данного утверждения была установлена в работе [8] применением к указанным функционалам и системе минимальных квадратичных сплайнов критерия биортогональности из теоремы 2. □

Замечание 2. *Функционалы $\lambda_j^{\langle r\rangle}$ на полиномиальной генерирующей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(t)=(1,t,t^2)^T$ совпадают с двойственными функционалами де Бура-Фикса [10]. В случае неполиномиальной генерирующей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ мы можем говорить о двойственных функционалах типа де Бура-Фикса [8].*

7 Результаты численных экспериментов

Рассмотрим функцию (см., например, [3])

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}},\ x \in [0,1],$$

для которой справедлива декомпозиция на регулярную и сингулярную составляющие. Построим аппроксимацию этой функции, применяя предложенную выше схему (13), используя сплайн (7)–(9) с полиномиальной генерирующей вектор-функцией $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t, t^2)^T$ и функционал $\lambda_j^{\langle 2\rangle}$. Затем сравним полученное приближение с наиболее точным из ранее предложенных.

Вычисления выполнялись на отрезке $[0,1]$ с построенной на нём сеткой Шишкина (2), содержащей $N = 2^4, 2^5, \ldots, 2^8$ узлов. При этом значение параметра ε изменялось в диапазоне от 1 до 10^{-6}. Ошибка аппроксимации вычислялась как максимальное значение отклонения приближения функции от её фактического значения, вычисленного на кусочно-равномерной сетке, в десять раз более мелкой, чем исходная сетка. Результаты проведенного численного эксперимента приведены в таблице 1.

Отметим преимущества предложенного решения. Во-первых, при уменьшении значения параметра ε ошибка аппроксимации стабилизируется, тогда как в [4] она возрастает, причём при небольшом количестве узлов сетки отклонение становится существенным. В случаях, когда $\varepsilon \leqslant 10^{-3}$, ошибка обоих алгоритмов почти всегда имеет одинаковый порядок. Во-вторых, предложенная схема аппроксимации является локальной, что значительно снижает объём вычислений, которые необходимо провести для вычисления коэффициентов при базисных функциях для построения приближения.

Минимальные сплайны позволяют повышать качество аппроксимации путём изменения генерирующей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Так, например, в случае $\varepsilon = 1$ и $N = 2^4$, ошибку предлагаемого приближения можно снизить с 4.16×10^{-5} до 1.80×10^{-5}, используя неполиномиальную вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \sin t, \cos t)^T$. Подробно вопрос влияния генерирующей вектор-функции на качество аппроксимации рассматривался в работах [12] и [13].

Предложенная схема построения приближения допускает использование любой реализации функционала из биортогональной системы, поэтому от его выбора также зависит качество аппроксимации. В данном численном эксперименте использование функционала $\lambda_j^{\langle 2\rangle}$ неизменно оказывалось наиболее удачным.

Таблица 1: Ошибка аппроксимации в зависимости от значения параметра ε и количества узлов сетки N

ε	N				
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	9.38×10^{-6} 4.16×10^{-5}	1.18×10^{-6} 5.27×10^{-6}	1.47×10^{-7} 6.63×10^{-7}	1.84×10^{-8} 8.04×10^{-8}	2.31×10^{-9} 1.05×10^{-8}
10^{-1}	1.44×10^{-3} 4.69×10^{-3}	2.50×10^{-4} 9.35×10^{-4}	3.64×10^{-5} 1.48×10^{-4}	4.90×10^{-6} 2.09×10^{-5}	6.35×10^{-7} 2.80×10^{-6}
10^{-2}	4.37×10^{-3} 6.11×10^{-3}	1.58×10^{-3} 2.07×10^{-3}	4.49×10^{-4} 5.83×10^{-4}	1.04×10^{-4} 1.36×10^{-4}	2.15×10^{-5} 2.82×10^{-5}
10^{-3}	7.05×10^{-3} 6.11×10^{-3}	1.58×10^{-3} 2.07×10^{-3}	4.49×10^{-4} 5.83×10^{-4}	1.04×10^{-4} 1.36×10^{-4}	2.15×10^{-5} 2.82×10^{-5}
10^{-4}	7.32×10^{-2} 6.11×10^{-3}	4.08×10^{-3} 2.07×10^{-3}	4.49×10^{-4} 5.83×10^{-4}	1.04×10^{-4} 1.36×10^{-4}	2.15×10^{-5} 2.82×10^{-5}
10^{-5}	7.35×10^{-1} 6.11×10^{-3}	4.11×10^{-2} 2.07×10^{-3}	2.36×10^{-3} 5.83×10^{-4}	1.39×10^{-4} 1.36×10^{-4}	2.15×10^{-5} 2.82×10^{-5}
10^{-6}	7.35 6.11×10^{-3}	4.11×10^{-1} 2.07×10^{-3}	2.37×10^{-2} 5.83×10^{-4}	1.40×10^{-3} 1.36×10^{-4}	8.46×10^{-5} 2.82×10^{-5}

8 Благодарности

Данное исследование выполнено при поддержке гранта МД-2242.2019.9 Президента Российской Федерации.

Список литературы

[1] *Н. С. Бахвалов*, К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физ., (1969), Т. 9, Вып. 4, 841–890.

[2] *Г. И. Шишкин*, Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений // Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

[3] *И. А. Блатов, А. И. Задорин, Е. В. Китаева*, Аппроксимация функции и её производных на основе кубической сплайн-интерполяции при

наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2019, Т. 59, Вып. 3, 367–379.

[4] *И. А. Блатов, А. И. Задорин, Е. В. Китаева*, Об интерполяции параболическим сплайном функций с большими градиентами в пограничном слое // Сиб. матем. журнал, 2017, Т. 58, Вып. 4, 745–760.

[5] *Ю. К. Демьянович*, Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994, 356 с.

[6] *И. Г. Бурова, Ю. К. Демьянович*, Минимальные сплайны и их приложения. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010, 364 с.

[7] *А. А. Макаров*, О построении сплайнов максимальной гладкости // Проблемы матем. анализа, 2011, Вып. 60, С. 25–38.

[8] *E. K. Kulikov, A. A. Makarov*, On de Boor–Fix Type Functionals for Minimal Splines // Applied and Numerical Harmonic Analysis, 2019, 211–225.

[9] *T. Linss*, The necessity of Shishkin decompositions // Applied Math. Letters, 14 (2001), 891–896.

[10] *А. А. Макаров*, О двойственных функционалах к минимальным сплайнам // Зап. научн. сем. ПОМИ, 453 (2016), 198–218.

[11] *O. M. Kosogorov, A. A. Makarov*, On Some Piecewise Quadratic Spline Functions // Lecture Notes in Computer Science, vol. 10187 (2017), 448–455.

[12] *Ю. К. Демьянович, А. А. Макаров*, Необходимые и достаточные условия неотрицательности координатных тригонометрических сплайнов второго порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, 2017, Т. 4 (62), Вып. 1, С. 9–16.

[13] *Е. К. Куликов, А. А. Макаров*, Об аппроксимации гиперболическими сплайнами // Зап. научн. сем. ПОМИ, 472 (2018), 179–194.

On approximate solution of one singular perturbation boundary value problem

E. K. Kulikov, A. A. Makarov

Saint-Petersburg State University,
egor.k.kulikov@gmail.com, a.a.makarov@spbu.ru

Abstract. The paper considers the problem of approximation of a function that is a solution of singular perturbation boundary value problem. Such functions have huge boundary layer components, so the applying classical algorithms to them leads to essential errors. We introduce an approach that is a local approximation scheme based on minimal splines on the Shishkin grid, where coefficients of basis functions are calculated as the values of de Boor-Fix type functionals. We also present the results of numerical experiments showing that our approach allows obtaining the approximation of high quality.

Keywords: minimal splines, B-splines, de Boor-Fix type functionals, Shishkin grids, boundary layer components.