

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 4, 2017

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

Глобальные задачи дифференциальных включений: проблемы Калмана и Вышнеградского, цепи Чуа

Леонов Г.А., Кузнецов Н.В.¹, Киселева М.А., Мокаев Р.Н.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

University of Jyväskylä, Finland

Аннотация

В данной работе описаны различные подходы к определению решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и дифференциальных включений. Для разрывных систем в классической задаче Вышнеградского применен математический аппарат разрывных функций Ляпунова. Для построения контрпримеров к гипотезе Калмана для гладких систем применен метод разрывных аппроксимаций и идеи Айзермана и Пятницкого.

Ключевые слова: теория управления, дифференциальные включения, задача Вышнеградского, система Чуа, проблема Калмана, скрытые аттракторы

Abstract

This paper describes various approaches to determine the solutions of differential equations with discontinuous right side and differential inclusions. For discontinuous systems within the classical Vyshnegradskii problem, the Lyapunov discontinuous functions are applied. To construct counterexamples to the Kalman conjecture for smooth systems, the discontinuous approximations method and the ideas of Aizerman and Pyatnitskii are applied.

¹Автор для переписки: nkuznetsov239@gmail.com

Keywords: control theory, differential inclusions, Vyshnegradskii problem, Chua system, Kalman problem, hidden attractors

Содержание

1	Введение	3
1.1	Модель Хартога	3
1.2	Модель автопилота	5
1.3	Задача Вышнеградского	13
2	Дифференциальные включения: определения решений	15
2.1	Подход Филиппова	18
2.2	Подход Айзермана-Пятницкого	19
2.3	Подход Гелига-Леонова-Якубовича	21
3	Задача Вышнеградского	24
3.1	Построение функций Ляпунова для анализа глобальной устойчивости и неустойчивости	26
3.2	Численное моделирование	30
4	Скрытые аттракторы в системе Чуа	30
5	Контрпример к гипотезе Калмана	36
6	Заключение	41

1 Введение

Зарождение теории дифференциальных включений обычно связывают с работами французского математика А. Маршо [1, 2] и польского математика С.К. Зарембы [3, 4]. Однако развитию теории дифференциальных включений способствовали не только исследования в области абстрактной математики, но и изучение конкретных механических задач (задачи пластичности, задачи с сухим трением, задачи управления с релейными элементами, задачи в области трибологии и другие задачи – см., например, [5–33]). Т.е. наряду с общими рассуждениями и попытками понять, как вводится понятие производной для дифференциальных включений существовали другие направления, связанные с конкретными потребностями прикладных задач. Вначале опишем эти конкретные исследования, а затем перейдем к общим определениям решений дифференциальных включений. Далее нами рассмотрены классические проблемы Вышнеградского и Калмана, где доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости в целом.

1.1 Модель Хартога

Так, в 1930-м году Дж.П.Д. Хартогом [34] было рассмотрено следующее уравнение:

$$m\ddot{x} + kx + F_0 \text{sign}(\dot{x}) = 0, \quad (1)$$

где m , k , F_0 – положительные параметры.

Уравнение (1) может быть сведено к следующей двумерной системе:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}x - \frac{F_0}{m}\text{sign}(y). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим вопрос о том, как понимать решение системы (2) и как определить значение $\text{sign}(y)$ при $y = 0$. Покажем, что выбор фиксированного значения для sign при $y = 0$ является некорректным, и в таком случае решение, как правило, не будет существовать.

При $y \neq 0$ правые части системы (2) непрерывны и можно воспользоваться классическим понятием решения. Т.е. при $y > 0$ система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}x - \frac{F_0}{m}, \end{aligned} \quad (3)$$

а при $y < 0$ – вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m}. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что в некоторый момент времени t_0 траектория непрерывной системы (3) или (4) попала на прямую $y = 0$, т.е. $y(t_0) = 0$. Если $kx < -F_0$, то траекторию можно продолжить естественным образом в полупространство $y > 0$ в силу системы (3), поскольку значение dy/dt , найденное из вторых уравнений систем (3) и (4), положительно. Аналогично, если $y(t_0) = 0$ и $kx > F_0$, то траекторию можно продолжить в полупространство $y < 0$. Т.е. построенные таким образом траектории прошивают луч $y = 0$, $kx < -F_0$ в сторону возрастания y , а луч $y = 0$, $kx > F_0$ в сторону убывания y .

Однако, в случае, если в момент времени $t = t_0$ траектория попала в интервал $y = 0$, $k|x| < F_0$, проведенные выше рассуждения не подходят. Действительно, из данной точки нельзя “выпустить” траекторию ни в полупространство $y > 0$ (т.к. производная dy/dt , определенная из второго уравнения системы (3), меньше нуля), ни в полупространство $y < 0$ (т.к. производная dy/dt , определенная из второго уравнения системы (4), больше нуля). Таким образом, траектории систем (3), (4) не “прошивают” интервал $y = 0$, $k|x| < F_0$, а “стыкуются” на нчм. Следовательно, такая траектория остается в интервале $y = 0$, $k|x| < F_0$ до тех пор, пока $k|x| < F_0$. Отсюда $dy/dt = 0$, а значит, если мы хотим, чтобы наше решение удовлетворяло системе (2), необходимо приравнять правую часть второго уравнения этой системы к нулю. Т.е. $\text{sign}(0) = -kx/F_0$ при $k|x| < F_0$ и значение при $y = 0$ не постоянно.

Для определенности присоединим границу $k|x| = F_0$, $y = 0$ к нашему интервалу.

Согласно приведенным выше рассуждениям, получаем, что вместо системы (2) рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}x - \frac{F_0}{m}\xi(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } y > 0 \text{ или при } y = 0, kx < -F_0, \\ -1, & \text{при } y < 0 \text{ или при } y = 0, kx > F_0, \\ -kx/F_0, & \text{при } y = 0, k|x| \leq F_0. \end{cases} \quad (6)$$

Найдем теперь положения равновесия системы (5). Приравняв к нулю правые части уравнений (5), получим соотношения $|x| \leq F_0/k$, $y = 0$. Т.е. при $y = 0$ данная система имеет отрезок покоя $[-F_0/k, F_0/k]$ целиком состоящий из положений равновесия системы.

Фазовый портрет системы (5) изображен на рис 1.

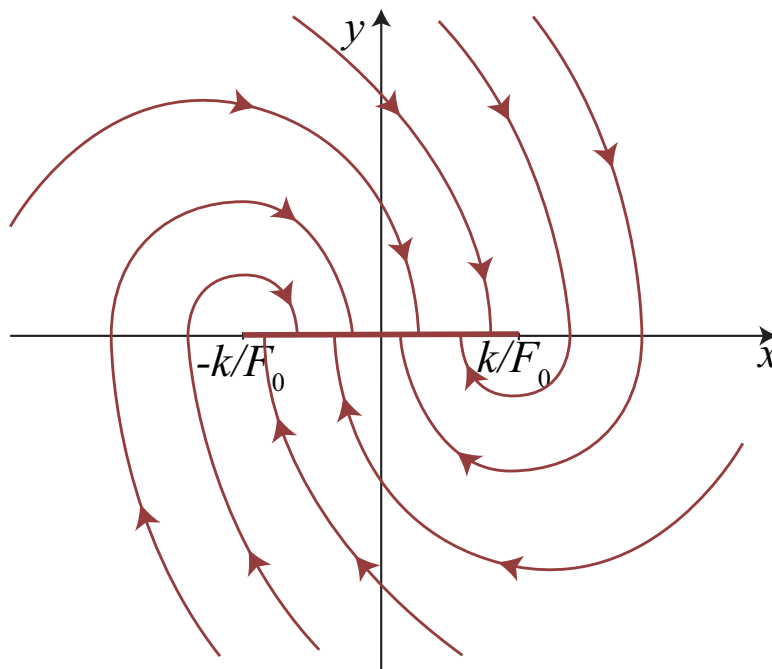


Рис. 1: Фазовый портрет системы (1): стремление траекторий к отрезку покоя $\{|x| \leq F_0/k, y = 0\}$.

Заметим, что исследование В.М. Келдышем в 1944 году двумерной модели демпфирования флаттера систем управления самолетами, которая учитывает сухое трение, также приводит к аналогичному поведению в окрестности разрыва [35].

1.2 Модель автопилота

Далее, в 40-е годы XX-го столетия были опубликованы независимые работы А.И. Лурье и В.Н. Постникова [36], Б.В. Булгакова [37] и А.А. Андропова² и Н.Н. Баутина [38, 39], в которых была рассмотрена одна и та же задача о стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора.

²А.А. Андронов — ученик Л.И. Мандельштама. В 1946 году А.А. Андронов был избран действительным членом Академии наук СССР по Отделению технических наук, он стал первым академиком по теории управления.

Уравнения движения системы имеют следующий вид [38–41]:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + M\dot{\phi} &= -N\eta, \\ \dot{\eta} &= F(\psi), \\ \psi &= \phi + \beta\dot{\psi} - \frac{1}{a}\eta,\end{aligned}\tag{7}$$

где $F(\psi) = K \operatorname{sign} \psi$ при $\psi \neq 0$.

Здесь ϕ – угол рыскания самолета, η – угол поворота руля, ψ – аргумент сервомотора, управляющего рулем, β – так называемый коэффициент искусственного демпфирования, $1/a$ – коэффициент обратной связи, M , N и K – положительные константы, характеризующие соответственно естественное демпфирование самолета и рулевое устройство. $F(\psi)$ – нелинейная характеристика сервомотора.

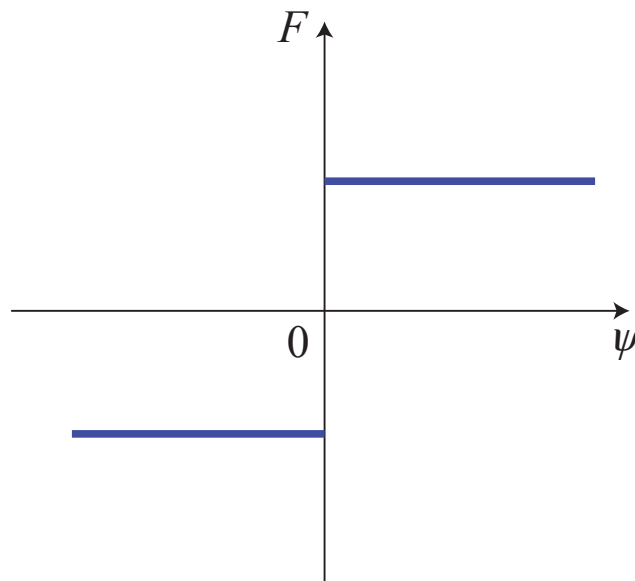


Рис. 2: Нелинейная характеристика сервомотора: случай отсутствия зоны нечувствительности

В [38, 40] была рассмотрена характеристика $F(\psi)$, изображенная на рис. 2, которая соответствует случаю отсутствия нечувствительности.

С помощью преобразования (здесь точки обозначают дифференцирова-

ние по t_{new} ; t_{old} и $\psi_{old} - t$ и ψ из (7))

$$\begin{aligned} t &\equiv t_{new} = Mt_{old}, \\ z &= \frac{M^3}{NK} \ddot{\phi}, \\ u &= \frac{M^3}{NK} (\dot{\phi} + \ddot{\phi}), \\ \psi &\equiv \psi_{old} = \frac{M^3}{NK} \psi_{old} \end{aligned} \tag{8}$$

и переобозначения

$$M\beta = A, \quad \frac{M^2}{Na} = B$$

приведем систему (7) к виду

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -z - \xi(z, u, \psi), \\ \dot{u} &= -\xi(z, u, \psi), \\ \dot{\psi} &= u + (A - 1)z - B\xi(z, u, \psi), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\xi(z, u, \psi) = \text{sign}\psi$ при $\psi \neq 0$.

С помощью рассуждений, аналогичным рассуждениям, проведенным выше для системы, рассмотренной Хартогом, можно доопределить $\xi(z, u, \psi)$ при $\psi = 0$. Выпишем это доопределение [38, 40]:

$$\xi(z, u, \psi) = \begin{cases} 1, & \begin{aligned} &\text{при } \psi > 0 \text{ или при } \psi = 0, \\ &u + (A - 1)z - B > 0 \\ &\text{или при } \psi = 0, u + (A - 1)z - B = 0, \\ &u > A + B, \end{aligned} \\ -1, & \begin{aligned} &\text{при } \psi < 0 \text{ или при } \psi = 0, \\ &u + (A - 1)z + B < 0 \\ &\text{или при } \psi = 0, u + (A - 1)z + B = 0, \\ &u < -(A + B), \end{aligned} \\ \frac{1}{B}[(A_1)z + u], & \begin{aligned} &\text{при } \psi = 0, |u + (A - 1)z| < B \\ &\text{или при } \psi = 0, u + (A - 1)z - B = 0, \\ &u > -(A + B) \\ &\text{или при } \psi = 0, u + (A - 1)z + B = 0, \\ &u < A + B. \end{aligned} \end{cases} \tag{10}$$

Система (9) имеет единственное состояние равновесия $z = 0, u = 0, \psi = 0$, которое является устойчивым узлом при $(A + B)^2 \geq 4B$ (см. рис. 3) или устойчивым фокусом при $(A + B)^2 < 4B$ (см. рис. 4).

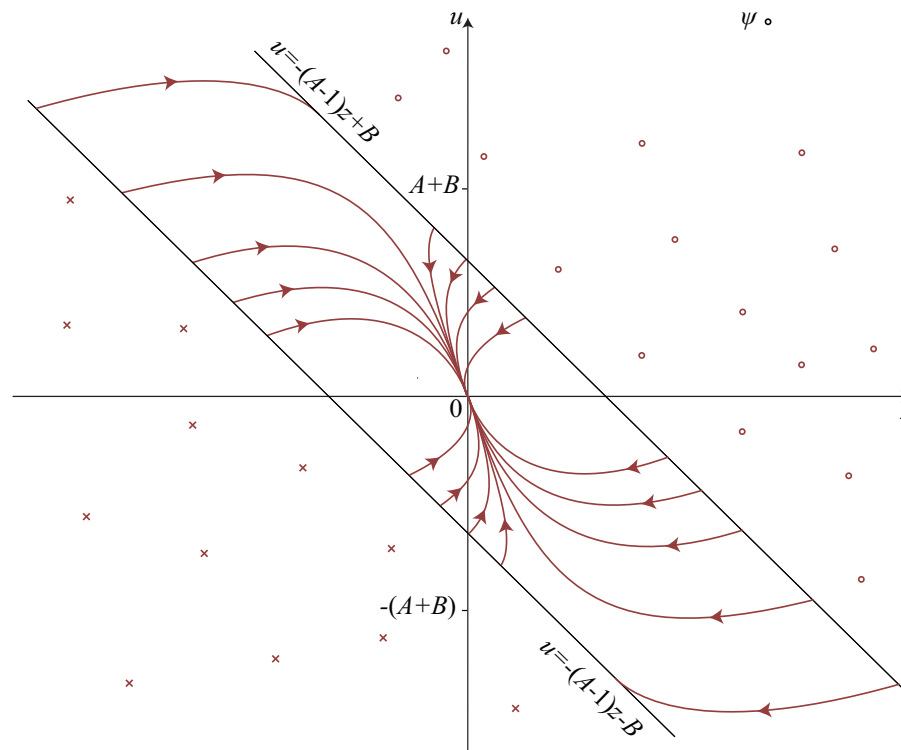


Рис. 3: Фазовый портрет системы (9) в случае, когда состояние равновесия $z = 0, u = 0, \psi = 0$ является устойчивым узлом. Здесь плоскость $\psi = 0$ совпадает с плоскостью чертежа и уходящие от зрителя траектории обозначены крестиками, а траектории, идущие на зрителя, – кружочками.

Заметим, что траектории системы, проходящие через точки плоскости $\psi = 0, u + (A - 1)z - B > 0$ “протыкают” плоскость $\psi = 0$ в направлении $\psi > 0$, а траектории, проходящие через точки плоскости $\psi = 0, u + (A - 1)z - B < 0$ – в направлении $\psi < 0$. Траектории, примыкающие к многообразию $\psi = 0, |u + (A - 1)z| < B$ с обеих сторон имеют встречное направление и стыкуются на нчм. Такое многообразие называют *многообразием скользящих режимов*. Траектория, попавшая на него, либо стремится к единственному состоянию равновесия системы, не покидая пределы многообразия, либо доходит до края этого многообразия и уходит в полупространство $\psi > 0$ или $\psi < 0$.

С помощью теории точечных преобразований в [38, 40] были получены условия, при которых процесс регулирования сходится. В частности, было показано, что при

$$A + B > 1 \tag{11}$$

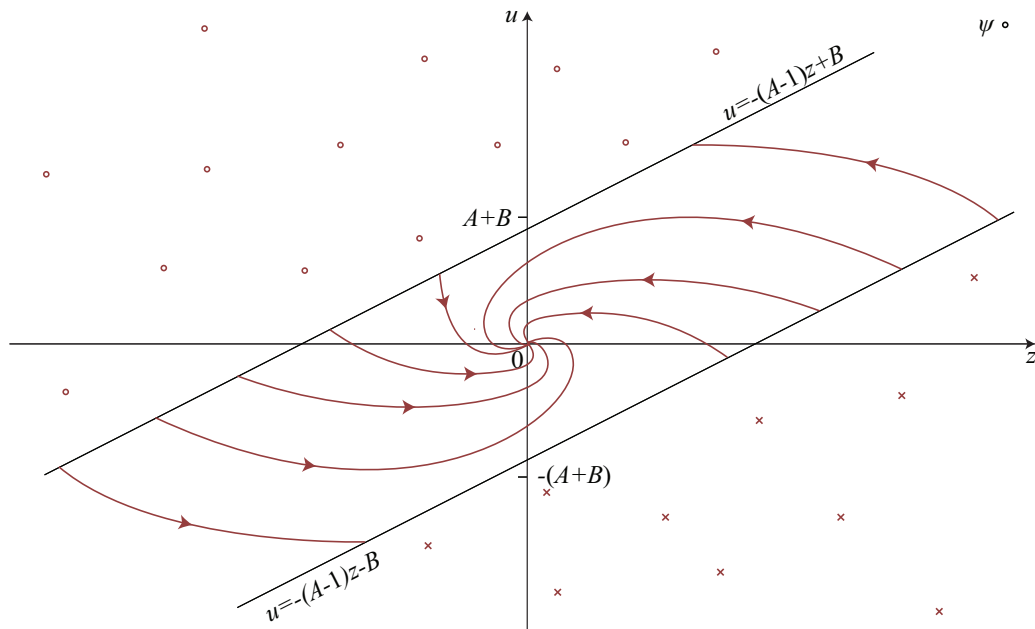


Рис. 4: Фазовый портрет системы (9) в случае, когда состояние равновесия $z = 0, u = 0, \psi = 0$ является устойчивым фокусом. Здесь плоскость $\psi = 0$ совпадает с плоскостью чертежа и уходящие от зрителя траектории обозначены крестиками, а траектории, идущие на зрителя, – кружочками.

процесс регулирования сходится при всяких начальных условиях (т.е. положение равновесия $\phi = \dot{\phi} = \eta = 0$ системы (7) устойчиво в целом).

В [39, 41] была рассмотрена характеристика, изображенная на рис. 5, которая соответствует наличию симметричной зоны нечувствительности, т.е.

$$F = \begin{cases} K, & \text{при } \psi > 0, \\ -K, & \text{при } \psi < 0, \\ 0, & \text{при } -\psi_0 < \psi < \psi_0, \\ a(\dot{\phi} + \beta\ddot{\phi}), & \text{при } \psi = -\psi_0, \psi = \psi_0. \end{cases} \quad (12)$$

Предполагая, что $A = M\beta > 0, B = \frac{M}{Na} > 0$, и вводя

$$t' = Mt, \quad z = \frac{M^3}{NK} \frac{d^2\phi}{dt'^2},$$

$$u = \frac{M^3}{NK} \left\{ \frac{d\phi}{dt'} + \frac{d^2\phi}{dt'^2} \right\},$$

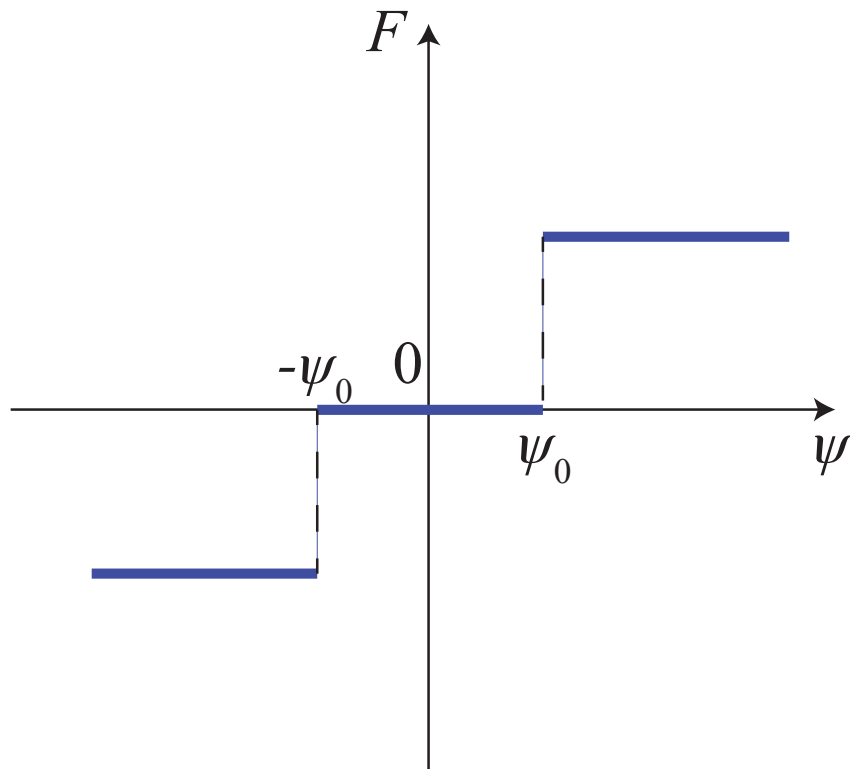


Рис. 5: Нелинейная характеристика сервомотора с зоной нечувствительности

приведем систему (7) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt'} &= -z + f(u, z, \psi), \\ \frac{du}{dt'} &= f(u, z, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt'} &= g(u, z, \psi), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} f &\equiv -1, g \equiv u + (A - 1)z - B, && \text{если } \psi > \psi_0 \\ f &\equiv 1, g \equiv u + (A - 1)z + B, && \text{если } \psi < \psi_0 \\ f &\equiv 0, g \equiv u + (A - 1)z, && \text{если } |\psi| < \psi_0 \end{aligned}$$

$$f \equiv -\frac{1}{B}u + \frac{1-A}{B}z, \quad g \equiv 0, \begin{cases} \text{если } \psi = \psi_0, & 0 < u + (A - 1)z < B, \\ \text{если } \psi = -\psi_0, & -B < u + (A - 1)z < 0. \end{cases}$$

Далее проведено исследование решений системы (13), определяемое требованием непрерывности $u(t')$, $z(t')$, $\psi(t')$ в точках разрыва $f(u, z, \psi)$ и

$g(u, z, \psi)$. В частности, рассмотрены многообразия скользящих режимов:

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \psi &= \psi_0, \quad 0 < u + (A - 1)z < B, \\ \sigma' : \quad \psi &= -\psi_0, \quad -B < u + (A - 1)z < 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Система (13) с зоной нечувствительности имеет отрезок покоя $\dot{\psi} = \eta = 0$, $-\sigma_0 \leq \psi \leq \sigma_0$. В работах [39, 41] не было проведено исследование устойчивости этого отрезка ввиду сложности вычислений при использовании метода точечных отображений. Однако, в [42] показано, что при выполнении условия (11) описанный отрезок покоя устойчив в целом. Т.е. наличие зоны нечувствительности в нелинейной характеристике сервомотора не изменяет область устойчивости (11), полученную для случая отсутствия зоны нечувствительности.

Наряду с работами [38, 39] была опубликована независимая работа [36], в которой продолжается исследование регулируемой системы, рассмотренной в [37]:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} + kv &= Q, \\ \frac{dr}{dt} &= v, \\ \frac{dQ}{dt} &= -qf_*(\mu), \end{aligned} \quad (15)$$

где через r обозначено отклонение регулируемого параметра от его значения при равновесном режиме, v – скорость изменения этого параметра, Q – координата органа управления. В последнем уравнении (уравнении сервомотора) величина μ :

$$\mu = av + br + cQ,$$

представляет собой открытие золотника, управляющего движением сервомотора. Величины m, k, q, a, b, c – постоянные коэффициенты, а $f_*(\mu)$ представляет собой нелинейную характеристику с симметричной зоной нечувствительности, аналогичную характеристике, изображенной на рис. 5.

Делая замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m}{qT^2}v - \frac{1}{qT}Q, \\ x_2 &= \frac{1}{qT}Q, \\ x_3 &= \frac{m\mu}{aqT^2}, \end{aligned}$$

приводим систему (15) к виду

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{d\tau} &= -x_1 + f(x_3), \\ \frac{x_2}{d\tau} &= -f(x_3), \\ \frac{x_3}{d\tau} &= (\alpha - 1)x_1 + \alpha x_3 - rf(x_3),\end{aligned}\tag{16}$$

где $\tau = \frac{kt}{m}$, $\alpha = \frac{bT}{a}$, $r = \frac{cm}{aT}$, $f(x_3) = f_*(\mu)$.

В работе [36] для исследования применялся второй метод Ляпунова и впервые были применены функции Ляпунова вида “квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности”. Выпишем их здесь. Для случая $\alpha > 1$, $r + 1 - \alpha > 0$ была рассмотрена функция Ляпунова вида:

$$V = \int_0^{x_3} f(x_3)dx_3 + \frac{\alpha}{2}x_2^2 + \frac{\alpha - 1}{2}x_1^2$$

Производная V в силу системы (16) выглядит следующим образом:

$$\dot{V} = -(\alpha - 1)[f(x_3) - x_1]^2 - (r + 1 - \alpha)[f(x_3)]^2.$$

В случае, когда $0 < \alpha < 1$, $r > 0$, рассматривалась функция Ляпунова вида:

$$V = \int_0^{x_3} f(x_3)dx_3 + \frac{1 - \alpha}{2}x_1^2 + \frac{\alpha}{2}x_2^2.$$

Производная V в силу системы (16) для этого случая имеет вид:

$$\dot{V} = -(1 - \alpha)x_1^2 - r[f(x_3)]^2.$$

Это позволило получить следующее условие устойчивости процесса регулирования:

$$r > 0, \quad \alpha > 0, \quad \alpha - 1 - r > 0.\tag{17}$$

Заметим, что заменой переменных $z = -x_1$, $u = x_2$, $\psi = x_3$ система (16) может быть сведена к системе (9), где $A = 2 - \alpha$, $B = r$.

Таким образом, в работах [36–39] была рассмотрена одна и та же задача о стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора. При этом эта задача, рассмотренная в [36], была первой задачей по абсолютной устойчивости [43]. Результаты, полученные А.И. Лурье, В.Н. Постниковым, А.А. Андроновым и Н.Н. Баутиным, стимулировали развитие не только теории абсолютной устойчивости, но и развитие общей теории разрывных систем [42, 44–49]. При этом А.А. Андронов

и Н.Н. Баутин были первыми, кто строго рассмотрел основные особенности разрывных систем на примере трехмерной системы: было описано многообразие скользящих режимов и то, как система себя ведет при прошивании многообразия разрыва³. В свою очередь, обобщение теорем ляпуновского типа и абсолютной устойчивости для разрывных систем (см., например, работы А.Х. Гелига и Г.А. Леонова [42, 50, 51]) и использование функции Ляпунова вида “интеграл от нелинейности плюс квадратичная форма”, впервые предложенной в работе А.И. Лурье и В.Н. Постникова, позволило рассматривать задачу в более общем виде без разбиения траекторий по кускам [42].

1.3 Задача Вышнеградского

Основная задача теории прямого регулирования была поставлена И.А. Вышнеградским в 1877-м году. Им была рассмотрена система машина–регулятор, записываемая следующим образом [52]:

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = y - \frac{1}{2} \operatorname{sign} \dot{x}, \quad \dot{y} = -x. \quad (18)$$

Первое уравнение здесь описывает движение регулятора с учетом кулоновского и вязкого трения, второе уравнение описывает динамику машины. Параметры A и B называются “параметрами Вышнеградского” (или “главными параметрами теории прямого регулирования”).

Система (18) может быть записана в виде системы третьего порядка:

$$\dot{u} = Pu + q\varphi(\sigma), \quad \sigma = r^*u, \quad \varphi(\sigma) = \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\sigma),$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -A & 1 & -B \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

В своей работе [52] И.А. Вышнеградский указал, что при отсутствии кулоновского трения (т.е. при $\varphi(\sigma) \equiv 0$) линейная система (19) асимптотически устойчива, если выполнены следующие соотношения:

$$A > 0, \quad B > 0, \quad AB > 1. \quad (20)$$

Для изучения поведения динамики нелинейной системы (19) А.А. Андронов и А.Г. Майер в работе [53] на плоскости разрыва

$$S = \{u : r^*u = 0 = 0\}, \quad (21)$$

³Отметим, что не строгое аналогичное описание поведения системы 4-го порядка с более сложной разрывной нелинейностью приведено в работе М.В. Келдыша 1944 года [35].

исходя из физических свойств кулоновского трения, проводили доопределение нелинейности

$$\hat{\varphi}(u) = \begin{cases} \varphi(r^*u) = \frac{1}{2} \operatorname{sign}(r^*u) & \text{при } u \notin S \\ \hat{\varphi}_S(u) & \text{при } u \in S \end{cases},$$

$$\hat{\varphi}_S(u) = \hat{\varphi}_S(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{при } Ax + y > \frac{1}{2} \\ -1 & \text{при } -Ax + y < \frac{1}{2} \\ -2Ax + 2y & \text{при } | -Ax + y | \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

и рассматривали систему

$$\dot{u} = Pu + q\hat{\varphi}(u). \quad (22)$$

Здесь траектории, проходящие через точки полуплоскостей $\{z = 0, -Ax + y > \frac{1}{2}\}$ и $\{z = 0, -Ax + y < -\frac{1}{2}\}$ “протыкают” плоскость $z = 0$ в сторону $z > 0$ и в сторону $z < 0$ соответственно. Область $\{z = 0, |Ax + y| \leq \frac{1}{2}\}$ является многообразием скользящих режимов. Траектории, приближающиеся с обеих сторон к этому многообразию, имеют встречное направление. Рассмотрим подробнее траектории многообразия скользящих режимов. Легко видеть, что траектории многообразия описываются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = 0. \quad (23)$$

Т.е. решениями скользящего режима являются прямые линии $x(t) = x_0$, $y(t) = -x_0t + y_0$, $z(t) = 0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Траектории системы (22) покидают многообразие $\{z = 0, |Ax + y| \leq \frac{1}{2}\}$ через полупрямую $\{-Ax + y = \frac{1}{2}, y < 0, z = 0\}$, уходя в полупространство $z > 0$, либо через полупрямую $\{-Ax + y = -\frac{1}{2}, y > 0, z = 0\}$, уходя в полупространство $z < 0$ (см. рис. 6).

Из доопределения $\hat{\varphi}(u)$ следует, что положениями равновесия системы (22) являются точки $x = 0$, $y = y_0$, $z = 0$, где $y_0 \in [-1/2, 1/2]$. Т.е. положения равновесия системы (22) принадлежат многообразию скользящих режимов

$$D = \{u : r^*u = 0, -r^*Pu/r^*q \in [\varphi(0-), \varphi(0+)]\}$$

и заполняют “отрезок покоя”:

$$\Lambda = \{u = P^{-1}qs, s \in [\varphi(0-), \varphi(0+)]\} = \{x = z = 0, y \in [\varphi(0-), \varphi(0+)]\},$$

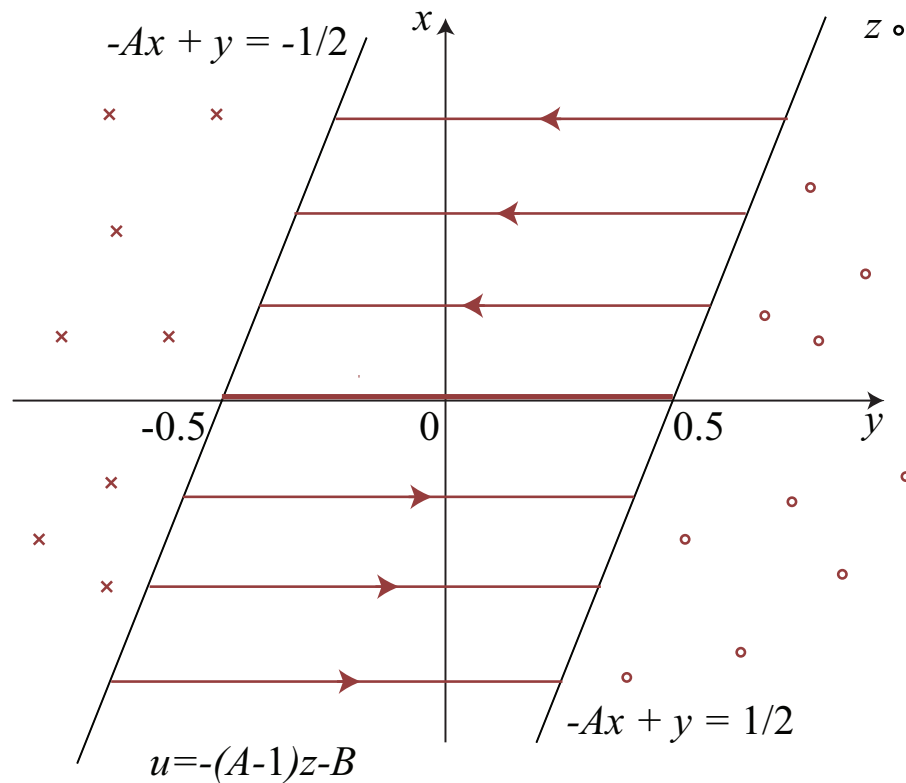


Рис. 6: Фазовый портрет системы (22). Здесь плоскость $z = 0$ совпадает с плоскостью чертежа и уходящие от зрителя траектории обозначены крестиками, а траектории, идущие на зрителя, – кружочками.

который отмечен на рис. 6 жирной линией.

Одним из результатов, полученных в работе [53], стало следующее условие абсолютной устойчивости системы:

$$AB > 1. \tag{24}$$

Процесс регулирования в этом случае сходится при всяких начальных условиях, а кривая с уравнением $AB = 1$ носит название гиперболы Вышнеградского (см. рис. 7).

2 Дифференциальные включения: определения решений

Рассмотрим следующую систему

$$\dot{u} = f(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n, \tag{25}$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кусочно-непрерывная функция с множеством точек разрыва меры нуль.

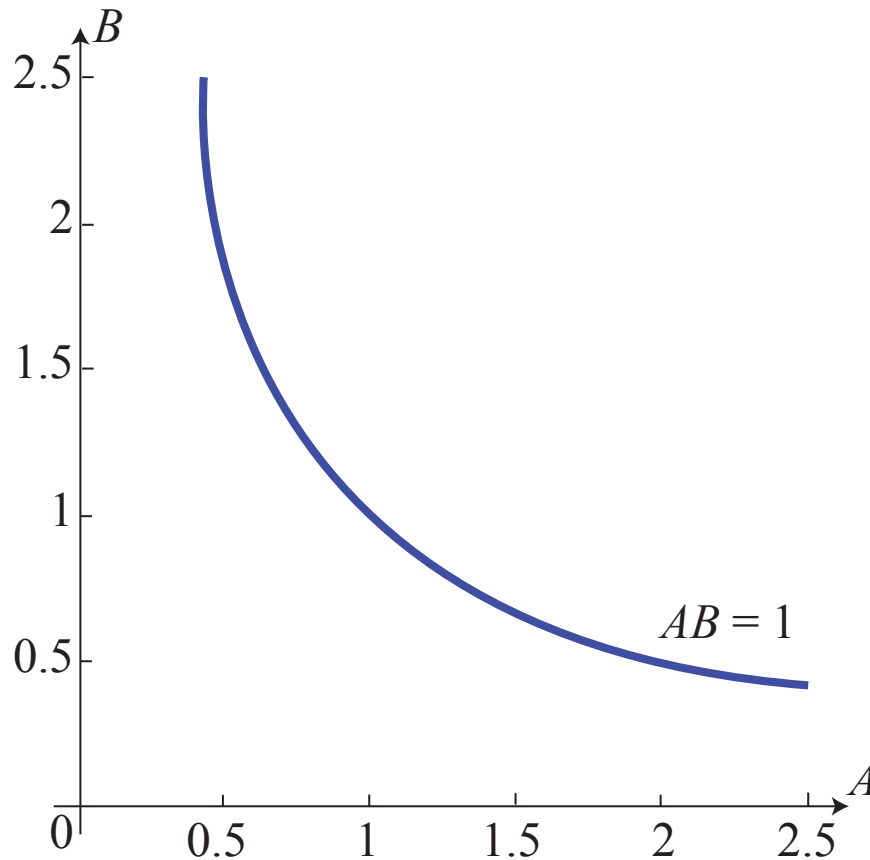


Рис. 7: Область параметров абсолютно устойчивых систем, описываемых уравнениями (19)

Большинство определений решений могут быть введены следующим образом: для каждой точки (t, u) области G определяется множество $F(t, u)$ (доопределение разрывной правой части) в пространстве размерности n . Если f непрерывна в (t, u) то множество $F(t, u)$ состоит из одной точки и совпадает с f в этой точке. Если (t, u) – это точка разрыва функции f , то $F(t, u)$ определяется тем или иным образом в зависимости от определения, т.е. вместо (25) мы рассматриваем дифференциальное включение

$$\dot{u} \in F(t, u), \tag{26}$$

где $F(t, u)$ является многозначной функцией.

Математики обычно ставят задачу определения многозначной функции F по заданной функции f , тогда как в механике многозначная функция F часто задана.

Определение 1 Решением системы (25) или соответствующего диффе-

рещионального включения (26) называется абсолютно непрерывная⁴ вектор-функция $u(t)$, определенная на интервале I , для которой производная существует почти всюду на I и

$$\dot{u}(t) \in F(t, u(t)). \quad (27)$$

Как было отмечено во введении, начало исследований теории дифференциальных включений обычно связывают с работами французского математика А. Маршо и польского математика С.К. Зарембы, опубликованными в 1934-1936 [1–4]. Они исследовали уравнения вида

$$Du \subset F(t, u), \quad (28)$$

где $t \in \mathcal{D}_t \subset \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^n$ и $F(t, u)$ – многозначная вектор-функция, которая каждой точке (t, u) некоторой области $\mathcal{D} = \mathcal{D}_t \times \mathcal{D}_u$ сопоставляет множество $F(t, u)$ точек из \mathbb{R}^n . Для оператора D Маршо и Зарембой были введены понятия контингенции и паратингенции.

Определение 2 *Контингенцией вектор-функции $u(t)$ в точке t_0 называется множество $\text{Cont } u(t_0)$ всех предельных точек последовательностей $\frac{u(t_i) - u(t_0)}{t_i - t_0}$, $t_i \rightarrow t_0$, $i = 1, 2, \dots$*

Определение 3 *Паратингенцией вектор-функции $u(t)$ в точке t_0 называется множество $\text{Parat } u(t_0)$ всех предельных точек последовательностей $\frac{u(t_i) - u(t_j)}{t_i - t_j}$, $t_i \rightarrow t_0$, $t_j \rightarrow t_0$, $i = 1, 2, \dots$*

Т. Важевский продолжил исследования Маршо и Зарембы и доказал [55], что если $u(t)$ является решением дифференциального включения (28) в смысле Маршо (т.е. это решение уравнения в контингенциях), то вектор-функция $u(t)$ является абсолютно непрерывной.

⁴Пусть $I \subset \mathcal{D}_t \subset \mathbb{R}$ – интервал времени. Функция $u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется абсолютно непрерывной на I если для любого положительного ε найдется положительное δ т.ч. для любой конечной последовательности парных непересекающихся подынтервалов (t_{1k}, t_{2k}) из I где $t_{1k}, t_{2k} \in I$, удовлетворяющих

$$\sum_k (t_{2k} - t_{1k}) < \delta,$$

выполняется

$$\sum_k \|u(t_{2k}) - u(t_{1k})\| < \varepsilon.$$

Хорошо известно, что абсолютно непрерывная вектор-функция $u(t)$, определенная на интервале I , является дифференцируемой почти всюду на I . Здесь и далее будем подразумевать, что выражение “почти всюду на I ” означает “для всех $t \in I$, для которых существует $\dot{u}(t)$ ” (см. [54, р. 60]).

Введение свойства абсолютной непрерывности для решения $u(t)$ сыграло ключевую роль в развитии теории дифференциальных включений и уравнений с разрывной правой частью, т.к. это позволило избежать использования искусственных конструкций в Определении 2 и Определении 3 и рассматривать обычную производную почти всюду. Ниже мы рассмотрим три из возможных подходов к доопределению разрывных систем и определению их решений (различные другие подходы обсуждаются, например, в [47, 54, 56–59]).

2.1 Подход Филиппова

В 1960-м году А.Ф. Филипповым были опубликованы работы [44, 60], где он рассмотрел в качестве решений дифференциального уравнения с разрывной правой частью абсолютно непрерывные функции. Подход Филиппова является одним из самых распространенных среди других определений решений систем с разрывной правой частью. Следуя работе [44], рассмотрим систему (25).

Определение 4 Вектор-функция $u(t)$, определенная на промежутке I , называется решением системы (25) если она абсолютно непрерывна и для почти всех $t \in I$ вектор $\dot{u}(t)$ принадлежит минимальному замкнутому выпуклому множеству, которое содержит все $f(t, u')$ когда u' пробегает почти всю δ -окрестность точки $u(t)$ в \mathbb{R}^n (для фиксированного t), т.е.

$$\dot{u}(t) \in \prod_{\delta > 0} \prod_{\mu N = 0} \text{conv } f(t, B(u(t), \delta) - N). \quad (29)$$

Здесь правая часть (29) называется доопределением по Филиппову.

Рассмотрим случай, когда система (25) автономна и вектор-функция $f(u)$ разрывна на некоторой гладкой поверхности S в \mathbb{R}^n и непрерывна в окрестности этой поверхности. Пусть существуют правосторонний и левосторонний пределы $f_+(u)$ и $f_-(u)$ вектор-функции $f(u)$, когда точка u приближается к поверхности S с одной или другой стороны. Предположим, что оба вектора $f_+(u)$ и $f_-(u)$ направлены к разрывной поверхности S . Тогда появляется *скользящий режим*. Согласно Определению 4 (см. формулу (29)), векторное поле скользящего режима на разрывной поверхности может быть доопределено следующим образом. Построим плоскость, касательную к поверхности S в точке u и отрезок l , который соединяет концы векторов $f_+(u)$ и $f_-(u)$. Тогда может быть построен вектор с началом в точке u и концом в точке пересече-

ния отрезка и касательной плоскости: $f_0 = f_0(u)$. Согласно Определению 4, вектор $f_0(u)$ определяет векторное поле в точке u .

Полученное решение системы (25) удовлетворяет Определению 4, но существует большое количество важных прикладных задач, для которых Определение 4 неприменимо. В качестве примера такой задачи рассмотрим задачу синтеза управлений s_1 и s_2 , которые ограничены, $|s_1| \leq 1$, $|s_2| \leq 1$, и которые оптимально быстро отображают каждую точку $(u_1(0), u_2(0))$ системы

$$\dot{u}_1 = u_2 s_1, \quad \dot{u}_2 = s_2 \quad (30)$$

в начало координат. Хорошо известно [61], что синтез такого управления возможен на всей плоскости (u_1, u_2) . Например, для первого квадранта плоскости оптимальным управлением будет следующее управление

$$s_1 = \begin{cases} 1, & \text{при } u_1 < 0.5u_2^2, \\ -1, & \text{при } u_1 \geq 0.5u_2^2, \end{cases} \quad s_2 = \begin{cases} -1, & \text{при } u_1 \leq 0.5u_2^2, \\ 1, & \text{при } u_1 > 0.5u_2^2. \end{cases} \quad (31)$$

В частности, оптимальной является траектория $u_1 = 0.5u_2^2$ и для этой траектории система (30) принимает вид $\dot{u}_1 = -u_2$, $\dot{u}_2 = -1$. Возьмем точку $u = (u_1, u_2)$ на этой траектории и будем приближаться к этой траектории со стороны $u_1 < 0.5u_2^2$. Предельное значение правой части системы (30) имеет вид $f_+(u) = (u_2, -1)$. Если мы приближаемся к траектории со стороны $u_1 > 0.5u_2^2$, то предел $f_-(u) = (-u_2, 1)$. Т.к. $f_+(u) = -f_-(u)$, то в этом частном случае отрезок l пересекает точку u , т.е. $f_0(u) = 0$ и согласно Определению 4 решение в режиме скольжения является состоянием равновесия. В то же самое время $(-u_2, -1)$ является вектором скорости оптимальной траектории. Таким образом, оптимальная траектория не является решением в смысле Определения 4, предложенного Филипповым.

2.2 Подход Айзермана-Пятницкого

Рассмотрим подход определения решений разрывных систем, через приближения решениями непрерывных систем, который развивался в работах [27, 45, 46] и других.

М.А. Айзерман и Е.С. Пятницкий [45] предложили другое определение решения уравнений с разрывной правой частью, которое позволяет использовать обычную производную. Рассмотрим предложенный ими подход для частного случая, когда $f(t, u)$ является разрывной на поверхности Σ . Рассмотрим последовательность непрерывных вектор-функций $f_\varepsilon(t, u)$, которая

совпадает с $f(t, u)$ вне ε -окрестности поверхности Σ , и стремится к $f(t, u)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в каждой точке, не принадлежащей Σ . Пусть $u_\varepsilon(t)$ – решение системы

$$\dot{u} = f_\varepsilon(t, u). \quad (32)$$

Определение 5 Решением системы (25) в смысле Айзермана и Пятницкого называется предел любой равномерно сходящейся подпоследовательности решений $u_{\varepsilon_k}(t)$:

$$u_{\varepsilon_k}(t) \rightrightarrows u(t).$$

Вообще говоря, может существовать более одного такого предела. Заметим, что и это доопределение, введенное в [45], не всегда применимо к прикладным задачам.

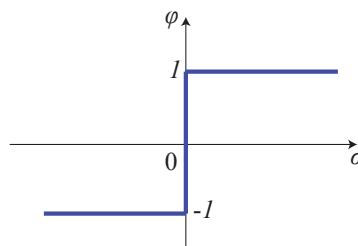


Рис. 8: Модель сухого трения: трение покоя не принимает большие значения по модулю, чем трение скольжения

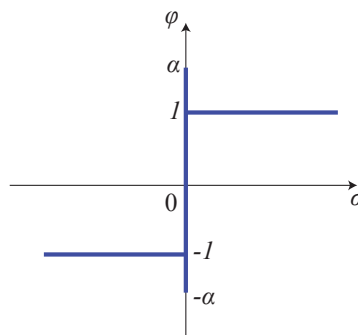


Рис. 9: Модель сухого трения: трение покоя может принимать большие значения по модулю, чем трение скольжения

Например, рассмотрим систему

$$\dot{u} \in Au + b\phi(\sigma), \quad \sigma = c^*u, \quad (33)$$

где $\phi(\sigma)$ – характеристика сухого трения, показанная на рис. 8 или рис. 9, т.е.

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} \text{sign } \sigma, & \text{при } \sigma \neq 0, \\ [-1, 1], & \text{при } \sigma = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \phi(\sigma) = \begin{cases} \text{sign } \sigma, & \text{при } \sigma \neq 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \text{при } \sigma = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Т.к. определения, предложенные Филипповым и Айзерманом и Пятницким учитывают лишь те значения нелинейности, для которых $\sigma \neq 0$, то решения системы (33) с характеристиками сухого трения, представленными на рис. 8 и на рис. 9 совпадают. Этот результат не отражает физику данного явления.

Для того, чтобы учесть динамику на поверхности разрыва, необходимо рассмотреть более адекватный подход, когда вместо системы с разрывной правой частью (25) изучается система с многозначной правой частью, т.е. рассматривается дифференциальное включение (26).

2.3 Подход Гелига-Леонова-Якубовича

Как было продемонстрировано выше, для некоторых физических задач определение по Филиппову может давать неверные результаты, т.е. необходимо рассмотреть более общий класс многозначных функций $F(t, u)$. Одно из таких обобщений было рассмотрено А.Х. Гелигом, Г.А. Леоновым и В.А. Якубовичем в [42].

Далее для построения теории также необходимо предположить, что многозначная функция $F(t, u)$ является полунепрерывной.

Определение 6 *Функция $F(t, u)$ называется полунепрерывной (полунепрерывной сверху, β -непрерывной) в точке (t_0, u_0) если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t, u)$, такое что множество $F(t, u)$ содержится в ε -окрестности множества $F(t_0, u_0)$, когда точка (t, u) пробегает δ -окрестность точки (t_0, u_0) .*

Определение 7 *Вектор-функция $u(t)$, определенная на промежутке (t_1, t_2) , называется решением (26) если многозначная функция $F(t, u)$ полунепрерывна и $\forall(t, u) \in \mathcal{D}$ множество $F(t, u)$ является выпуклым, замкнутым и ограниченным.*

В отличие от доопределения по Филиппову здесь от множества $F(t, u)$ не требуется минимальность.

Справедлива следующая локальная теорема о существовании решений дифференциального включения [42].

Теорема 1 *Предположим, что многозначная функция $F(t, u)$ является полунепрерывной для всех точек (t_1, u_1) из области*

$$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D} : \quad |t_1 - t_0| \leq \alpha, \quad |u_1 - a| \leq \rho,$$

и множество $F(t_1, u_1)$ ограничено, выпукло и замкнуто. В дополнение, предположим

$$\sup |y| = c \quad \text{for} \quad y \in F(t_1, u_1), \quad (t_1, u_1) \in \mathcal{D}_1.$$

Тогда для $|t - t_0| \leq \tau = \min(\alpha, \rho/c)$ существует по крайней мере одно решение $u(t)$ с начальными данными $u(t_0) = a$, которое удовлетворяет (26) в смысле Определения 1.

Приведем здесь также теорему о продолжимости решения, остающегося в ограниченной области [42].

Теорема 2 Если $\forall t \in [0, T)$ решение системы (26) находится в некоторой компактной области \mathcal{G} из \mathbb{R}^n , тогда $x(t)$ определено на $[0, T]$ и $x(t) \in \mathcal{G}$.

Таким образом, решение системы (26) продолжимо до тех пор, пока оно конечно.

Рассмотрим случай автономности уравнения (26), который является весьма важным для приложений:

$$\frac{du}{dt} \in F(u). \tag{35}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3 Пусть u системы (35) ω -предельное множество Ω траектории $u(t, b)$ ограничено. Тогда через каждую ω -предельную точку $a \in \Omega$ проходит хотя бы одна траектория $u(t, a)$, определенная при $t \in (-\infty, +\infty)$ и целиком состоящая из ω -предельных точек, т.е. $u(t, a) \subset \Omega$ при $t \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство теорем 1, 2, 3 приведено в [42].

Для дифференциального включения (26) также справедливы другие различные теоремы качественной теории (см., например, [42, 54, 62]).

Рассмотрим теперь (27) с $F(t, u(t)) = Pu(t) + q\phi(r^*u(t))$, т.е.

$$\dot{u}(t) \in Pu(t) + q\phi(r^*u(t), t) \tag{36}$$

для почти всех t (здесь мы предполагаем, что $F(t, u(t))$ удовлетворяет условиям Определения 7, т.е. $F(t, u(t))$ удовлетворяет условиям 1, поэтому здесь и далее мы предполагаем, что решение существует для почти всех $t \in I$). Здесь P , q и r – постоянные матрицы и $\phi(r^*u(t), t)$ – многозначная функция.

Если матрица q^*q является неособой, то

$$(q^*q)^{-1}q^* [\dot{u}(t) - Pu(t)] \in \phi(r^*u(t), t) \quad (37)$$

для почти всех t .

Левая часть (37) называется селектором:

$$\xi(t) = (q^*q)^{-1}q^* [\dot{u}(t) - Pu(t)] \quad (38)$$

и является однозначной функцией, которая “конкретизирует” многозначную функцию $\phi(r^*u(t), t)$ для решения $u(t)$. Т.е. задача (36) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{u}(t) = Pu(t) + q\xi(t) \quad \text{для почти всех } t, \quad (39)$$

$$\xi(t) \in \phi(r^*u(t), t). \quad (40)$$

Для любого решения $u(t)$ существует соответствующее доопределение $\xi(t)$. Как показано выше, если матрица q^*q является неособой, то $\xi(t)$ определяется соотношением (38) для почти всех t и $\xi(t)$ является измеримой.

Существует ли измеримый селектор $\xi(t)$ в случае, когда $\det q^*q = 0$? Следующая теорема о существовании измеримого селектора, доказанная Б.М. Макаровым специально для [42], играет важную роль в изучении дифференциальных включений, т.к. она позволяет заменить дифференциальное включение на дифференциальное уравнение в достаточно общем случае, сохранив структуру правой части.

Пусть $F(t, u, \xi)$ – это вектор-функция, определенная для $t \in I$, $u \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ со значениями в \mathbb{R}^n . Предположим, что $\sigma(t, u)$ является непрерывной вектор-функцией, определенной на $I \times \mathbb{R}^n$ со значениями из \mathbb{R}^l и пусть $\phi(t, \sigma)$ – это многозначная функция, определенная на $I \times \mathbb{R}^l$, со значениями, являющимися подмножествами \mathbb{R}^n . Справедлива следующая теорема [42].

Теорема 4 (Теорема Макарова, [42]) Пусть функция F является непрерывной и ϕ является полунепрерывной и еџ значения являются компактными подмножествами из \mathbb{R}^n . Пусть $u_0(t)$ – абсолютно непрерывная вектор-функция на $I \subset \mathcal{D}_t$, удовлетворяющая следующему условию:

$$\dot{u}_0(t) \in \{F[t, u_0(t), \xi] | \xi \in \mathcal{A}(t)\} \text{ для почти всех } t \in I,$$

где

$$\mathcal{A}(t) = \phi[t, \sigma(t, u_0(t))].$$

Тогда существует такая измеримая по Лебегу вектор функция ξ_0 в I , что выполняются следующие соотношения

$$\dot{u}_0(t) = F[t, u_0(t), \xi_0(t)], \quad \xi_0(t) \in \mathcal{A}(t) \text{ для почти всех } t \in I.$$

3 Задача Вышнеградского

Применение метода точечных отображений для качественного исследования кусочно-линейно разрывных систем часто оказывается очень трудоемким. Ниже мы покажем, как качественное исследование задачи Вышнеградского может быть проведено при помощи развития классических идей Ляпунова для разрывных систем.

Используя приведенную выше теорию дифференциальных включений, переход от системы (19) к системе (22) в работе [53] можно обосновать следующим образом. Исходя из физического смысла разрывной нелинейности, проведем *процедуру регуляризации* разрывной правой части системы (19), следуя подходу Филиппова (см. Определение 4) и заменяя вектор функцию $f(u) = Pu + q\varphi(r^*u)$ на полунепрерывную многозначную вектор функцию $F(u)$, значения которой вне точек разрыва совпадают с $f(u)$, а в точках разрыва значения являются минимальным выпуклым замкнутым ограниченным множеством, содержащим всевозможные предельные точки $f(u)$ при стремлении u к S . Здесь $F(u)$ можно представить в виде

$$F(u) = Pu + q\Phi(u), \quad \Phi(u) = \begin{cases} \varphi(r^*u), & r^*u \neq 0 \\ [\varphi(0-), \varphi(0+)], & r^*u = 0 \end{cases} \quad (41)$$

и перейти от системы (19) к дифференциальному включению

$$\dot{u} \in F(u) = Pu + q\Phi(u). \quad (42)$$

Для любых начальных данных u_0 дифференциальное включение (42) имеет решение (см. Теорема 1) $u(t) = u(t, u_0)$, $u(t_0, u_0) = u_0$ (вообще говоря не единственное) на некотором интервале времени $I = [t_0, t_1)$ (пока решение остается ограниченным) такое, что $u(t)$ является абсолютно непрерывной функцией и имеет производную $\dot{u}(t)$ для почти всех $t \in I = [t_0, t_1)$, для которой

$$\dot{u}(t) \in Pu(t) + q\Phi(u(t)). \quad (43)$$

Вне плоскости разрыва S поведение решения $u(t)$ определяется непрерывным векторным полем системы (19) единственным образом. Для начальных данных на плоскости разрыва $u_0 \in S$ (или при попадании решения на плоскость разрыва в момент времени t_0) поведение решения вообще говоря может быть не единственным, а динамику векторного поля решения можно уточнить, исходя из динамики векторного поля в окрестности точки разрыва и требования абсолютной непрерывности решения. Решение с начальными данными

на плоскости разрыва остается на плоскости разрыва на некотором (максимальном) отрезке времени или бесконечном интервале: $u(t) \in S$, $t \in [t_0, t_1]$. Здесь случай $t_0 = t_1$ соответствует протыканию плоскости разрыва, а случай $t_0 < t_1$ соответствует режиму скольжения.

Для решения $u(t)$ по Теореме 4 существует такая доопределенная нелинейность $\hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}(t)$, что для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ (где существует производная $\dot{u}(t)$), выполнено равенство

$$\dot{u}(t) = Pu(t) + q\hat{\varphi}(t), \quad \hat{\varphi}(t) \in \Phi(u(t)). \quad (44)$$

Если $u_0 \in S$, то пока выполнено равенство $0 \equiv r^*\dot{u}(t) = r^*Pu(t) + r^*q\hat{\varphi}(t)$, решение скользит по плоскости разрыва $r^*u = x = 0$. Здесь для скольжения необходимо $\hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}_S(u(t)) = -r^*Pu(t)/r^*q = y(t) \in \Phi(u(t))|_{r^*u(t)=0} = [\varphi(0-), \varphi(0+)]$ и, таким образом, скольжение возможно в полосе D . Так как матрица P является неособой, то на полосе скольжения есть *отрезок покоя*

$$\Lambda = \{u = P^{-1}qs, \quad s \in [\varphi(0-), \varphi(0+)]\}.$$

В случае протыкания (то есть, когда траектория прошивает плоскость разрыва) плоскости разрыва при $t = t_0$ доопределение векторного поля не существенно, и для определенности можно определить $\Phi(u(t_0))$ по непрерывности

$$\hat{\varphi}_S(u) = \begin{cases} \varphi(0-), & r^*u = 0, & -r^*Pu/r^*q/\rho < \varphi(0-), \\ \varphi(0+), & r^*u = 0, & -r^*Pu/r^*q > \varphi(0+). \end{cases} \quad (45)$$

Заметим, что векторное поле в окрестности полосы скольжения D не позволяет траектории скольжения соскочить с полосы не дойдя до границы полосы ∂D . Из построения (29) следует, что для начальных данных из ∂D вектор скорости определяется однозначно и решение не может скользить по ∂D .

Таким образом, для всех начальных данных в системе имеет место единственность вперед (при увеличении времени) и построение (29) позволяет перейти от дифференциального включения (42) к системе (22) с разрывной правой частью, но описывающую ее динамику как вне, так и на плоскости разрыва.

3.1 Построение функций Ляпунова для анализа глобальной устойчивости и неустойчивости

Для наглядности проведения нелинейного анализа, следуя [63], сделаем линейные замены координат и времени и перейдем к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - ax - \varphi(x), \dot{y} = z - x, \dot{z} = -ax, \\ a &= \frac{1}{A\sqrt{A}}, \varphi(x) = a(BA - 1)x + \frac{1}{2\sqrt{A}} \operatorname{sign}(x), \end{aligned}$$

которую запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Pu + q\varphi(\sigma), \quad \sigma = r^*u, \quad \varphi(\sigma) = \varphi(x) = a(BA - 1)x + \frac{1}{2\sqrt{A}} \operatorname{sign}(x), \\ u &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Такой вид системы позволяет проводить различные обобщения. Здесь передаточная функция системы имеет вид

$$W(s) = r^*(P - sI)^{-1}q = \frac{s^2}{s^3 + as^2 + s + a} = \frac{s^2}{(s^2 + 1)(s + a)}.$$

Соответствующие плоскость разрыва, полоса удержания и отрезок покоя примут вид

$$\begin{aligned} S &= \{u : r^*u = x = 0\}, \\ D &= \{u : r^*u = x = 0, -r^*Pu/r^*q = y \in [\varphi(0-), \varphi(0+)]\}, \\ \Lambda &= \{u : u = -P^{-1}qs, s \in [\varphi(0-), \varphi(0+)]\} = \\ &= \{x = z = 0, -P^{-1}q = y \in [\varphi(0-), \varphi(0+)]\}. \end{aligned} \tag{46}$$

Доопределенная нелинейность имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(u) &= \begin{cases} \varphi(r^*u) & \text{при } u \notin S \\ \hat{\varphi}_S(u) & \text{при } u \in S \end{cases}, \\ \hat{\varphi}_S(u) &= \hat{\varphi}_S(x, y, z) = \\ &= \begin{cases} \varphi(0+) & \text{при } y = -r^*Pu/r^*q > \varphi(0+) \\ \varphi(0-) & \text{при } y = -r^*Pu/r^*q < \varphi(0-) \\ -r^*Pu/r^*q = y - ax & \text{при } y = -r^*Pu/r^*q \in [\varphi(0-), \varphi(0+)] \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть

$$h = P^*r = \begin{pmatrix} -A \\ 1 \\ -B \end{pmatrix}, \quad \rho = r^*q = -1.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(u) = V(x, y, z) = \frac{1}{2}(z-x)^2 + \frac{1}{2}(y - \hat{\varphi}(x, y, z))^2 + ax\hat{\varphi}(x, y, z) - a \int_0^x \varphi(s)ds \geq 0,$$

которая является разрывной⁵. Вне плоскости разрыва S функция $V(x, y, z)$ является гладкой и имеет вид

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(z-x)^2 + \frac{1}{2}(y - \varphi(x))^2 + ax\varphi(x) - a \int_0^x \varphi(s)ds \geq 0,$$

для ее производной вдоль траекторий системы (41) имеем

$$\dot{V}(x(t), y(t), z(t)) = -\varphi'(x(t))(y(t) - ax(t) - \varphi(x(t)))^2 \leq 0, \quad x(t) \neq 0. \quad (47)$$

Заметим, что из вида системы следует отсутствие такого интервала времени $t \in (t_1, t_2)$, для которого бы $x(t) \equiv \text{const}$. Следовательно, здесь $V(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) < V(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$.

На траекториях с начальными данными $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ на полосе скольжения D функция $V(x, y, z)$ имеет вид

$$V(0, y(t), z(t)) = \frac{1}{2}z(t)^2 + \frac{1}{2}(y(t) - \hat{\varphi}_S(u(t)))^2 \equiv z_0^2, \quad (48)$$

при этом если траектория покидает полосу после времени t , то имеет место непрерывность

$$V(0, y(t), z(t)) \equiv z_0^2 = \lim_{t^+ \rightarrow t} V(x(t^+), y(t^+), z(t^+)).$$

Протыкание плоскости разрыва $x = 0$ происходит при

$$x = 0, \quad y \notin [\varphi(0-), \varphi(0+)]$$

и в момент времени пересечения t для векторного поля имеем

$$\begin{cases} \dot{x}(t) > 0, & y(t) > \varphi(0+) \geq 0, \\ \dot{x}(t) < 0, & y(t) < \varphi(0-) \leq 0, \\ \dot{y}(t) = z(t), \\ \dot{z}(t) = 0. \end{cases}$$

⁵Другие примеры использования разрывных функций Ляпунова обсуждаются в [20, 64]

При этом для $t^- > t > t^+$ имеем

$$\begin{aligned} y(t) &> \varphi(0+) \geq 0 \\ \frac{1}{2}(y(t) - \varphi(0-))^2 &\geq \frac{1}{2}z(t)^2 + \frac{1}{2}(y(t) - \varphi(0+))^2 = \lim_{t^+ \rightarrow t} V(t^+), \\ y(t) &< \varphi(0-) \leq 0, \\ \lim_{t^- \rightarrow t} V(t^-) &= \frac{1}{2}z(t)^2 + \frac{1}{2}(y(t) - \varphi(0+))^2 \geq \frac{1}{2}z(t)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(y(t) - \varphi(0-))^2 = \lim_{t^+ \rightarrow t} V(t^+). \end{aligned}$$

Из сказанного выше следует, что функция $V(u)$ обладает следующими свойствами.

I). Для любого движения $u(t, a)$ функция $V(u(t, a))$ является невозрастающей функцией t .

II). Из $V(u(t, u_0)) = \text{const}$ при $t \geq 0$ следует, что $u(t, u_0) \in D$ при $t \geq 0$.

III). При $u \in \Lambda$ выполнено $V(u) = 0$ и при $u \notin \Lambda$ выполнено $V(u) > 0$.

Следуя [51], возьмем произвольное движение $u(t, u_0)$ и пусть u_0^ω — произвольная ω -предельная точка $u(t, a)$. Предположим, что $u_0^\omega \notin D$. Тогда, используя непрерывность функции $V(u)$ вне D и свойство (I), получим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(u(t, u_0)) = V(u_0^\omega). \quad (49)$$

Через u_0^ω проходит траектория $u(t, u_0^\omega)$, состоящая из ω -предельных точек траектории $u(t, u_0)$. Для каждой ω -предельной точки u_0^ω существует подпоследовательность $t_k \rightarrow +\infty$, для которой $u(t_k, u_0) \rightarrow u_0^\omega$. Следовательно, из (49) получим равенство $V(u(t, u_0^\omega)) \equiv V(u_0^\omega)$. Отсюда и из (II) следует, что $u_0^\omega \in D$. Таким образом, все ω -предельные точки системы расположены в D и, следовательно, являются ω -предельными точками системы. Но множество ω -предельных точек системы, находящихся в D , совпадает с отрезком покоя Λ . Следовательно, при всех u_0

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \min_{v \in \Lambda} \|u(t, u_0) - v\| = 0. \quad (50)$$

Докажем теперь устойчивость Λ в малом. Для доказательства этого факта нельзя воспользоваться известными рассуждениями А. М. Ляпунова ввиду разрывности функции $V(u)$. Однако мы покажем, что существует последовательность δ -окрестностей Λ_δ стационарного множества Λ , стягивающихся к Λ при $\delta \rightarrow 0$, и последовательность времен τ_δ ($\lim_{\delta \rightarrow 0} \tau_\delta = 0$) такие, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V[u(\tau_\delta, u_0)] = 0, \quad \forall u_0 \in \Lambda_\delta. \quad (51)$$

Из этого утверждения и следует устойчивость в малом. Действительно, фиксируем произвольную окрестность Λ_ε . По ε выберем число $\delta > 0$, так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} |u(t, u_0) \in \Lambda_{\varepsilon/2} \quad \forall t \in [0, \tau_\delta], \quad u \in \Lambda_\delta, \\ \sup_{u_0 \in \Lambda_\delta} V[u(\tau_\delta, u_0)] < \inf_{u \in \Gamma_\varepsilon} V(u), \end{aligned} \quad (52)$$

где Γ_ε – граница окрестности Λ_ε . Из свойства III) функции $V(u)$ и соотношения (51) следует, что такое δ всегда существует. Из свойства I) функции $V(u)$ и соотношений (52) вытекает, что $u(t, u_0) \in \Lambda_\varepsilon$ при всех $t \geq 0$, а это и значит, что отрезок покоя Λ устойчив в малом.

Докажем теперь соотношение (51). При $u_0^\omega \in \Lambda$ и таком, что $h^*u_0^\omega = -\rho\varphi(+0)$, функция $V(u_0^\omega)$ непрерывна относительно множества $L^+ = \{u \mid r^*u_0^\omega \geq 0\}$ и поэтому выполнена оценка

$$V[u(0, u_0)] \leq r_\alpha,$$

где $u_0 \in U_\alpha(u_0^\omega) \cap L^+$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r_\alpha = 0$. Через $U_\alpha(u_0^\omega)$ обозначена α -окрестность точки u_0^ω . Из рассмотрения качественной картины фазового пространства системы легко видеть, что при достаточно малом α все траектории с начальными данными из множества $U_\alpha(u_0^\omega) \cap \{x : r^* < 0\}$ попадут за время τ_α в полупространство L^+ . Таким образом,

$$V[u(\tau_\alpha, u_0)] \leq r_\alpha, \quad (53)$$

где $u_0 \in U_\alpha(u_0^\omega)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r_\alpha = 0$.

Аналогичным образом оценка (53) доказывается для случая $u_0^\omega \in \Lambda$ и $h^*u_0^\omega = -\rho\varphi(-0)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $u_0^\omega \in \Lambda \cap \overset{\circ}{D}$, где $\overset{\circ}{D}$ – внутренность множества D . Легко видеть, что при достаточно малом α_a все траектории с начальными данными из $U_{\alpha_a}(u_0^\omega)$ попадут за время τ_{α_a} на пластинку скользящих режимов D . Но в силу непрерывности функции $V(u)$ относительно D выполнено

$$V[u(\tau_{\alpha_a}, u_0)] \leq r_{\alpha_a},$$

где

$$u_0 \in U_{\alpha_a}(u_0^\omega), \quad \lim_{\alpha_a \rightarrow 0} \tau_{\alpha_a} = 0, \quad \lim_{\alpha_a \rightarrow 0} r_{\alpha_a} = 0.$$

Множества $U_{\alpha_a}(u_0^\omega)$ и $U_\alpha(u_0^\omega)$ образуют покрытие некоторой замкнутой окрестности $\overline{\Lambda_\delta}$ отрезка покоя Λ . Выбрав по лемме Гейне Ч Бореля конеч-

ное подпокрытие, определим τ_δ как максимум всех $\tau_{\alpha_a}, \tau_\alpha$ из подпокрытия. Аналогично конструируем r_δ . Итак, соотношение (51) доказано.

Пусть $A > 0, B > 0, AB < 1$. Тогда дискриминант кубического уравнения $\Delta = -4B^3 + 1 - 4A^3 + 18 - 27 = -4(B^3 + C^3 + 2) < 0$ и, следовательно, уравнение имеет один вещественный корень и два комплексно сопряженных: $-\gamma, \alpha \pm i\omega$. При этом произведение корней равно -1 и, следовательно, вещественный корень отрицательный (т.е. $\gamma > 0$), а комплексно сопряженные имеют отрицательную вещественную часть (т.е. $\alpha > 0$) из-за нарушения условия устойчивости $AB > 1$. Тогда систему (19) можно неособым преобразованием привести к виду

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \omega & 0 \\ \alpha & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x, y, z) = x^2 + y^2$. Для производной вдоль решений системы получим

$$\dot{V}(x(t), y(t), z(t)) = 2\alpha(x^2(t) + y^2(t)) + q_1x\varphi(\sigma(t)) + q_2y\varphi(\sigma(t)) \geq \varepsilon V - c$$

где c, ε некоторые положительные константы. Отсюда для достаточно больших $x^2 + y^2 > R$ имеем $V(x(t), y(t), z(t)) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и, следовательно, отсутствие глобальной устойчивости.

Таким образом доказана следующее утверждение.

Теорема. Пусть $A > 0, B > 0$. Если $AB > 1$, то система (19) является глобально устойчивой (все решения системы стремятся к отрезку покоя и он устойчив по Ляпунову). Если $AB < 1$, то система (19) не является глобально устойчивой.

3.2 Численное моделирование

Наличие в системе единственности вперед (при увеличении времени) позволяет эффективно проводить численный анализ системы. Приведем примеры моделирования разрывной системы (19) в пакете MATLAB.

4 Скрытые аттракторы в системе Чуа

Приведем пример численного моделирования разрывных систем, основанный на доопределении по Айзерману и Пятницкому, и сравним этот метод с мо-

делированием с помощью доопределения по Филиппову.

Рассмотрим следующую разрывную систему – модифицированную систему Чуа с разрывной характеристикой [65–67]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha(m_1 + 1)x + \alpha y - \alpha(m_0 - m_1)\text{sign}(x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned} \tag{55}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1$ – параметры системы.

В статье [68] было показано, что для параметров $\alpha = 8.4, \beta = 12, \gamma = -0.005, m_0 = -1.2, m_1 = -0.05$ классическая система Чуа (система (55), где в первом уравнении вместо $\text{sign}(x)$ используется $\text{sat}(x) = \frac{1}{2}(|x + 1| - |x - 1|)$) имеет так называемый скрытый⁶

периодический аттрактор и два симметричных скрытых хаотических аттрактора [69–74] – см. рис. 11 и рис. 10. В рассмотренной системе также имеются нулевое состояние равновесия типа седло-фокус с одномерным неустойчивым многообразием и два симметричных устойчивых состояния равновесия S_{\pm} типа фокус-узел:

$$S_{\pm} = \pm \left(\frac{m_1 - m_0}{m_1 + \frac{\beta}{\beta + \gamma}}, \frac{\gamma(m_1 - m_0)}{(\gamma + \beta)m_1 + \beta}, -\frac{\beta(m_1 - m_0)}{(\gamma + \beta)m_1 + \beta} \right). \tag{56}$$

Перейдем теперь обратно к рассмотрению модифицированной системы Чуа (55). Выпишем доопределение ξ для $\text{sign}x$, повторяя рассуждения, ана-

⁶Для визуализации аттрактора достаточно выбрать начальную точку и численно наблюдать за переходным процессом притяжения траектории из выбранной точки к аттрактору с возрастанием времени. Поэтому с вычислительной точки зрения естественно предложить следующую классификацию аттракторов [69–74]: Аттрактор называется самовозбуждающимся (self-excited attractor), если для одного из состояний равновесия любая его окрестность пересекается с областью притяжения аттрактора, в противном случае аттрактор называется скрытым (hidden attractor). Скрытыми являются аттракторы в системах без состояния равновесия (см., например, электромеханические системы с эффектом Зоммерфельда [75, 76]), системы с единственным устойчивым состоянием равновесия (см., например, контрпримеры [72, 77] к гипотезам Айзермана и Калмана [78, 79]). Одной из первых задач, связанных с анализом скрытых периодических аттракторов, является вторая часть 16-ой проблемы Гильберта [80] о числе и взаимном расположении предельных циклов в двумерных полиномиальных системах, где вложенные циклы образуют скрытые колебания [72, 81, 82]. В общем случае для многомерных систем аналогом этой проблемы [83] является *определение числа и взаимного расположения аттракторов и репеллеров* (например, в зависимости от степени полиномов правой части системы).

Классификация аттракторов как скрытых и самовозбуждающихся была введена в связи с обнаружением первого скрытого аттрактора в цепи Чуа [65, 69–71, 84, 85] и затем привлекла внимание многих ученых (см., например, [86–116]). Скрытые аттракторы были обнаружены в различных физических, механических и электронных моделях [117–123].

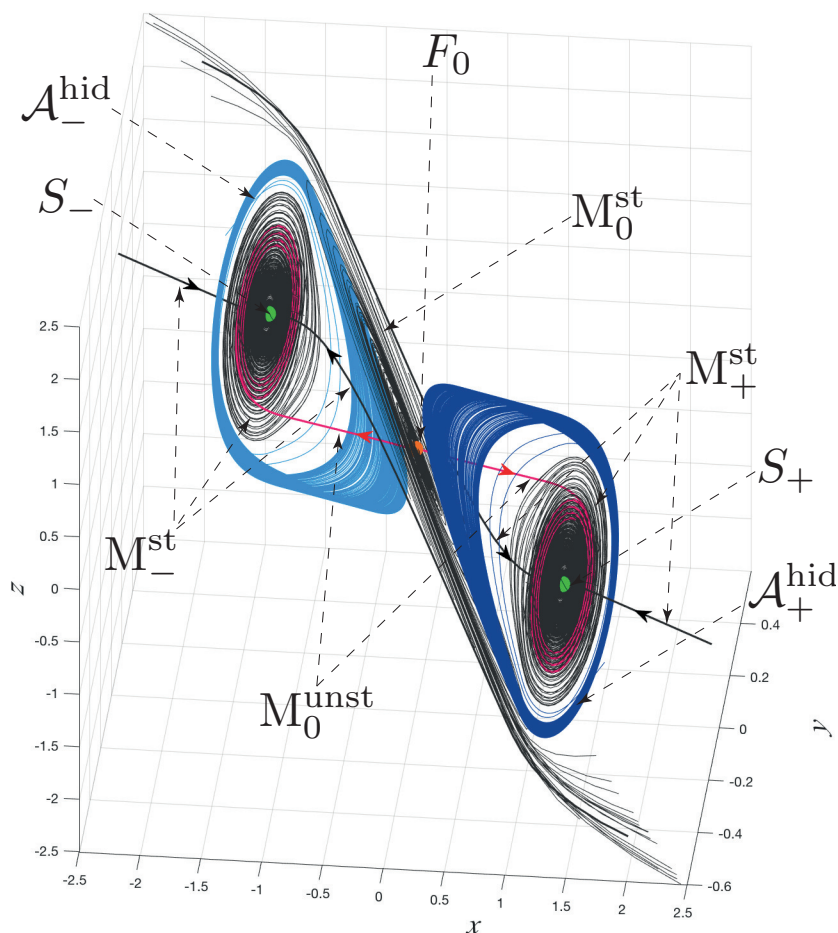


Рис. 10: Два симметричных скрытых хаотических аттрактора $\mathcal{A}_+^{\text{hid}}$ и $\mathcal{A}_-^{\text{hid}}$ в классической системе Чуа: траектории из неустойчивого многообразия M_0^{unst} седловых точек F_0 притягиваются к локально устойчивым состояниям равновесия S_{\pm} ; траектории из устойчивых многообразий M_0^{st} , M_+^{st} и M_-^{st} притягиваются к F_0 или к S_{\pm}

логичные рассуждениям для систем, которые были рассмотрены выше:

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \text{ или при } x = 0, y > m_1 - m_0, \\ -1, & \text{при } x < 0 \text{ или при } x = 0, y < m_0 - m_1, \\ \frac{y}{m_0 - m_1}, & \text{при } \psi = 0, |y| < m_1 - m_0. \end{cases} \quad (57)$$

Аналогично классической системе Чуа в системе (55) имеются два симметричных устойчивых состояния равновесия S_{\pm} типа фокус-узел. Также система (55) имеет нулевое состояние равновесия, которое находится на неустойчивом многообразии скользящих режимов $x = 0, |y| \leq m_1 - m_0$ (см. рис. 12) и является локально устойчивым фокусом (см. рис. 13).

Для системы (55) удалось найти скрытый периодический аттрактор. Для моделирования с использованием доопределения по Филиппову мы использовали специальный численный метод, описанный в [124]. Для моделиро-

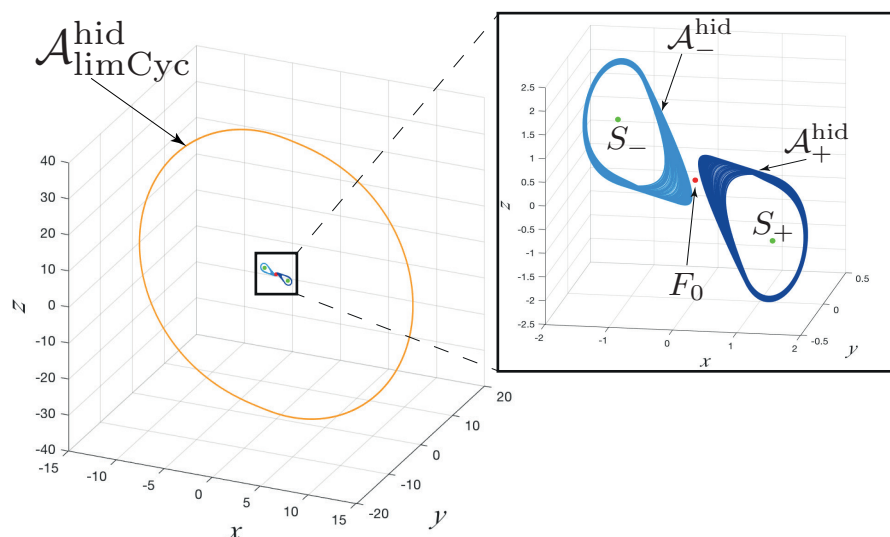


Рис. 11: Сосуществование скрытого периодического аттрактора (устойчивый предельный цикл A_{limCyc}^{hid}) и двух симметричных скрытых хаотических аттракторов (A_+^{hid} и A_-^{hid})

вания с помощью доопределения Айзермана и Пятницкого необходимо заменить $\text{sign}(x)$ на $\text{sat}_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{\varepsilon} + 1 \right| - \left| \frac{x}{\varepsilon} - 1 \right| \right)$, где $\varepsilon > 0$. Уменьшение параметра ε позволяет получить решение по Айзерману и Пятницкому ($\text{sat}_\varepsilon(x_1) \Rightarrow \text{sign}(x_1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, см рис. 14).

На рис. 15 скрытый аттрактор, промоделированный с использованием доопределений по Филиппову изображен цветом “dark”, а скрытый аттрактор, полученный с использованием доопределения по Айзерману и Пятницкому, изображен цветом “light”. Легко видеть, что при уменьшении ε скрытые аттракторы практически совпадают. Также в данном случае доопределение по Филиппову совпадает с доопределением по Гелигу-Ленову-Якубовичу. Эти результаты согласуются с утверждением теоремы, доказанной в [67, 125]. Заметим, что в отличие от задачи Вышнеградского, ввиду наличия неустойчивого многообразия скользящих режимов системы (55), нарушается единственность вперед. Поэтому при моделировании на разрыве возникает необходимость в использовании численного метода, основанного на доопределении Айзермана и Пятницкого.

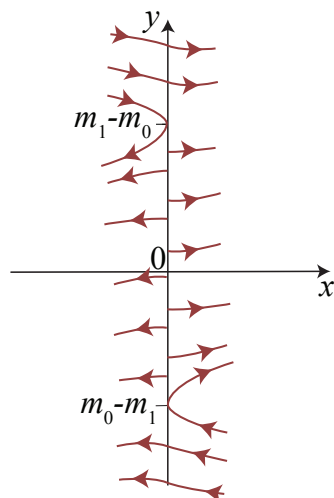


Рис. 12: Поведение траекторий системы (55) вблизи $x = 0$ при фиксированном $z = z_0$, $z_0 \in \mathbb{R}$; неустойчивое многообразие скользящих режимов: $x = 0$, $|y| \leq m_1 - m_0$.

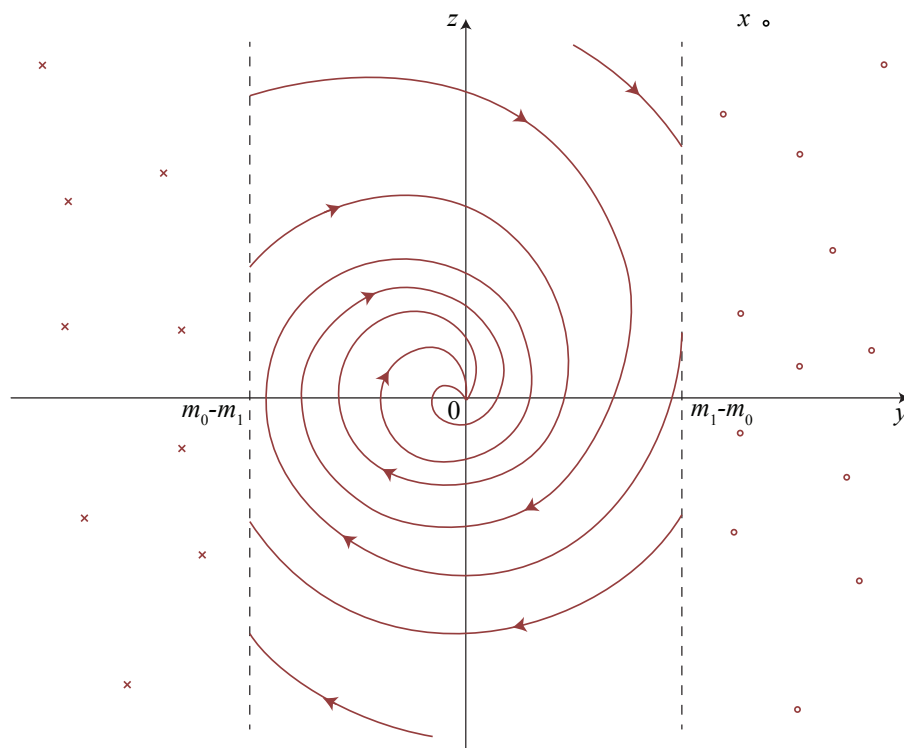


Рис. 13: Фазовый портрет системы (55): плоскость $x = 0$ совпадает с плоскостью чертежа и уходящие от зрителя траектории обозначены крестиками, а траектории, идущие на зрителя, – кружочками.

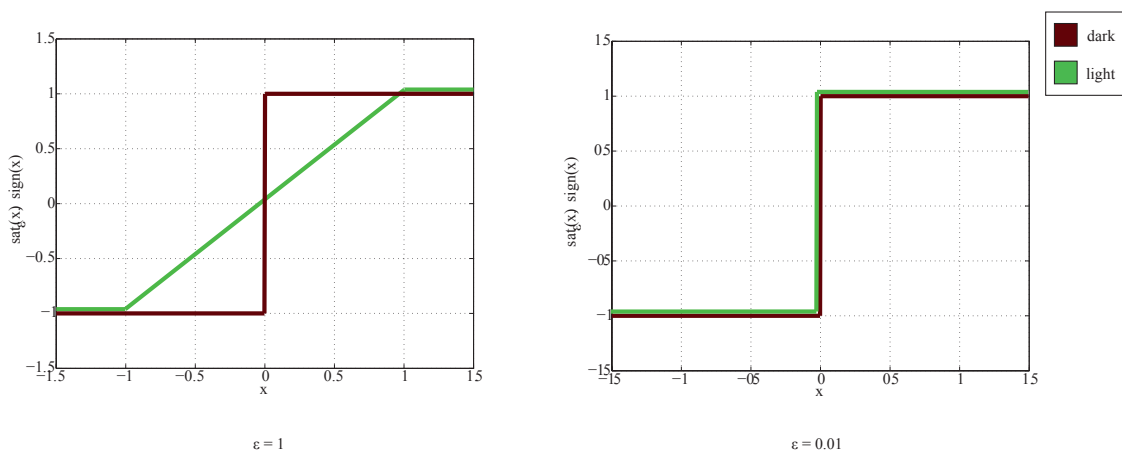


Рис. 14: Графики $\text{sat}_\epsilon(x)$ и $\text{sign}(x)$

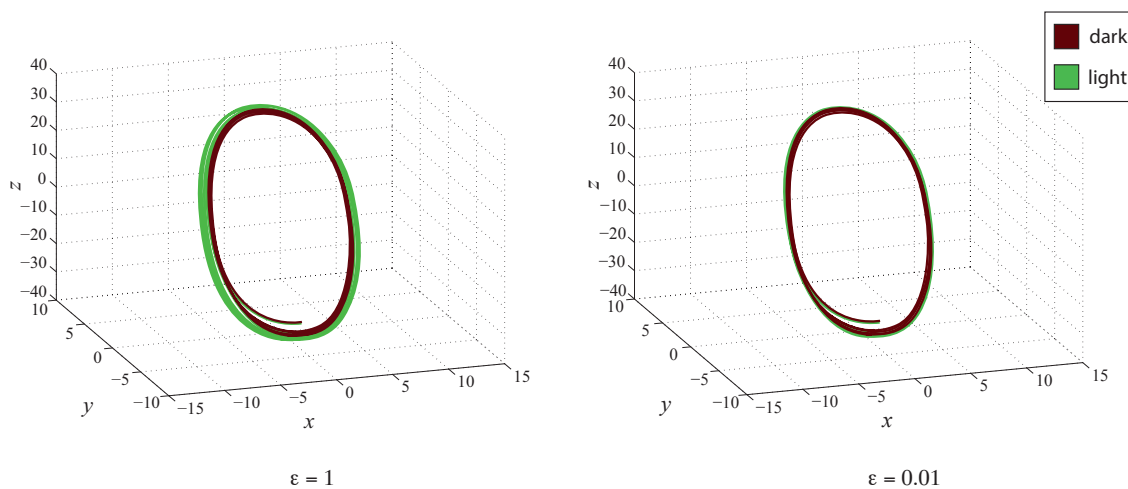


Рис. 15: Скрытый аттрактор в системе Чуа: сравнение доопределений по Филиппову и по Айзерману и Пятницкому

5 Контрпример к гипотезе Калмана

Проблема Калмана [79] – одна из актуальных и трудных проблем в теории управления. Она привлекает к себе внимание простотой и ясностью формулировки, которую мы приводим ниже.

Пусть дана система

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \sigma = c^*x, \quad (58)$$

где A – постоянная $n \times n$ - матрица, b и c – постоянные n -мерные столбцы, все величины вещественные, $*$ - знак транспонирования, φ – гладкая скалярная функция, $\varphi(0) = 0$, удовлетворяющая условию

$$k_1 \leq \varphi'(\sigma) \leq k_2, \quad \sigma \in (-\infty, +\infty), \quad (59)$$

где k_1 – некоторое число, либо $-\infty$, k_2 – некоторое число, либо $+\infty$.

В 1957 г. Р. Е. Калман сформулировал следующую гипотезу [79]: *если глобально асимптотически устойчива линейная система $\dot{x} = Ax + kbc^*x$, $k \in [k_1, k_2]$, то система (58) также глобально асимптотически устойчива.* Напомним, что система глобально асимптотически устойчива, если ее нулевое решение устойчиво по Ляпунову и $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| = 0$ для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Известно, что эта гипотеза справедлива для случая $n = 1, 2, 3$ [72, 126]. Первые попытки построить контрпримеры к этой гипотезе были сделаны в работе Фиттса [127], где для случая $n = 4$ проведено компьютерное моделирование системы (58) с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{p^2}{((p + \beta)^2 + 0.9^2)((p + \beta)^2 + 1.1^2)} \quad (60)$$

и кубической нелинейностью $\varphi(\sigma) = K\sigma^3$. Так, в результате моделирования, Фиттсом были обнаружены периодические решения системы (58) при значениях параметров $K = 10$ и $\beta \in (0.01, 0.75)$. Однако позднее, Н. Е. Барабанов показал [126], что для части параметров рассмотренных Фиттсом, $\beta \in (0.572, 0.75)$, результаты экспериментов неверны. В дальнейшем обсуждения гипотезы Калмана и сомнения в контрпримерах [127] и [126] высказывались в [128–130].

Численное моделирование контрпримера Фиттса, т.е. системы (58) с передаточной функцией (60) и кубической нелинейностью $\varphi(\sigma) = 10\sigma^3$ является трудной задачей. Так при $\beta = 0.01$ было показано [72], что обнаруженное периодическое решение имеет очень малую область притяжения.

На примере Фиттса рассмотрим подход к построению контрпримеров к гипотезе Калмана, основанный на идеях разрывных систем. Рассмотрим систему (58) при $n = 4$, заданную передаточной функцией (60) с нелинейностью типа $\varphi(\sigma) = \psi_0(\sigma) = \text{sign } \sigma$ как предельный случай системы (58) с нелинейностью типа "насыщение"

$$\varphi(\sigma) = \psi_m(\sigma) \equiv \begin{cases} -1, & \sigma \leq -m, \\ \frac{1}{m} \sigma, & -m \leq \sigma \leq m, \\ 1, & \sigma \geq m, \end{cases} \quad (61)$$

где $0 < m \leq N$, N – достаточно малое положительное число. Если локальный аттрактор системы с $\varphi(\sigma) = \psi_0(\sigma)$ расположен не на многообразии скользящих режимов, то близкий к нему аттрактор имеет система (58) с $\varphi(\sigma) = \psi_m(\sigma)$ вида (61) при $0 < m \leq N$ и достаточно малых N . При этом, траектории систем с нелинейностями $\psi_0(\sigma)$ и $\psi_m(\sigma)$ могут быть вычислены аналитически с помощью метода точечных отображений Андронова [131] как решения линейных систем.

Далее, воспользовавшись методом продолжения по параметру [72, 77, 132, 133] и рассмотрев систему из примера Фиттса с нелинейностью $\varphi(\sigma) = \chi_\varepsilon(\sigma) \equiv \psi_N(\sigma) + \varepsilon(\tanh(\sigma/N) - \psi_N(\sigma))$ и меняя параметр ε от 0 до 1, можно перейти от системы с кусочно-дифференцируемой нелинейностью $\varphi(\sigma) = \psi_N(\sigma)$ к системе с гладкой нелинейностью $\varphi(\sigma) = \tanh(\sigma/N)$.

Восстанавливая систему по передаточной функции (60), получим [134]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_3, & \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + \varphi(\sigma), \end{aligned} \quad (62)$$

где $a_0 = (1.1^2 + \beta^2)(0.9^2 + \beta^2)$, $a_1 = 2\beta(1.1^2 + 0.9^2 + 2\beta^2)$, $a_2 = 1.1^2 + 0.9^2 + 6\beta^2$, $a_3 = 4\beta$, $\sigma = -x_3$. Система (62) представима в матричном виде (58) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\beta = 0.1$ и $\varphi(\sigma) = \psi_0(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$ система обладает локальным аттрактором (рис. 16). Этот аттрактор сохраняется при замене в (62) нелинейности $\varphi(\sigma) = \psi_0(\sigma)$ на нелинейность $\varphi(\sigma) = \psi_m(\sigma)$ вида (61) при $0 < m \leq N$, $N = 0.01$ (для $m = 0.005$ см. рис. 17; для $m = N = 0.01$ см. рис. 18).

Используя нелинейность $\varphi(\sigma) = \chi_\varepsilon(\sigma) \equiv \psi_N(\sigma) + \varepsilon (\tanh(\sigma/N) - \psi_N(\sigma))$ при ε возрастающем от 0 до 1 с шагом 0.1 можно организовать переход от кусочно-дифференцируемой нелинейности (61), соответствующей $\varphi(\sigma) = \chi_0(\sigma) = \psi_N(\sigma)$ к гладкой нелинейности $\varphi(\sigma) = \chi_1(\sigma) = \tanh(\sigma/N)$. При этом переходе локальный аттрактор, полученный на предыдущих шагах, сохраняется (рис. 19–20).

Таким образом, в системе (58), с $\varphi(\sigma) = \tanh(\sigma/N)$ при достаточно малых N имеет место скрытый аттрактор и для $k_1 < 0$ и $k_2 = +\infty$ гипотеза Калмана неверна.

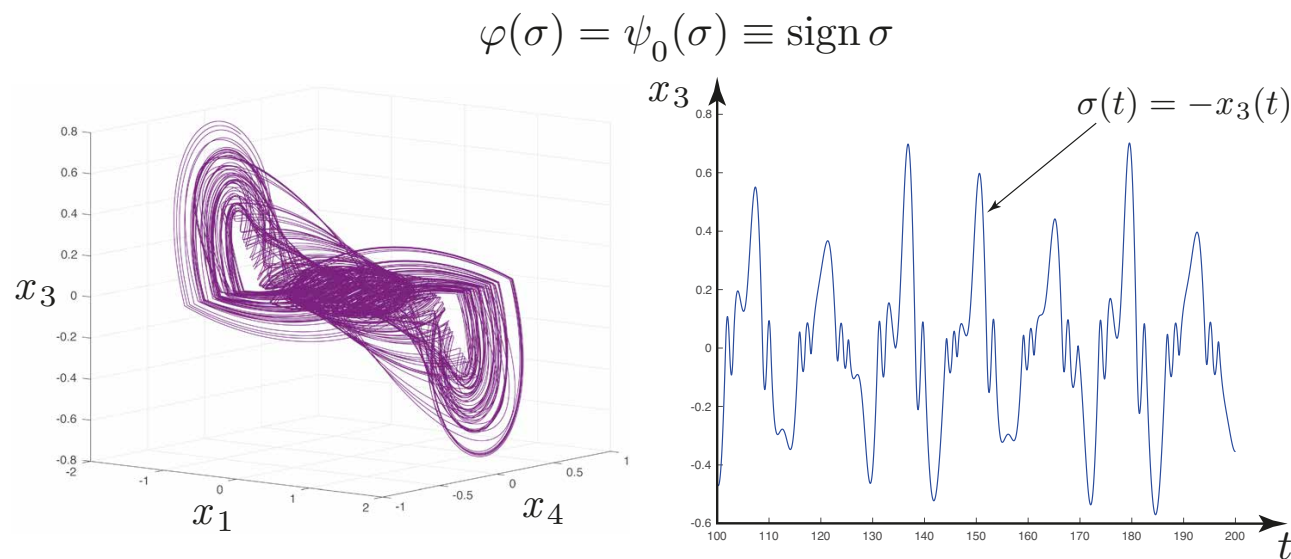


Рис. 16: Странный аттрактор системы (62) при $\beta = 0.1$ и $\varphi(\sigma) = \psi_0(\sigma) = \text{sign } \sigma$.

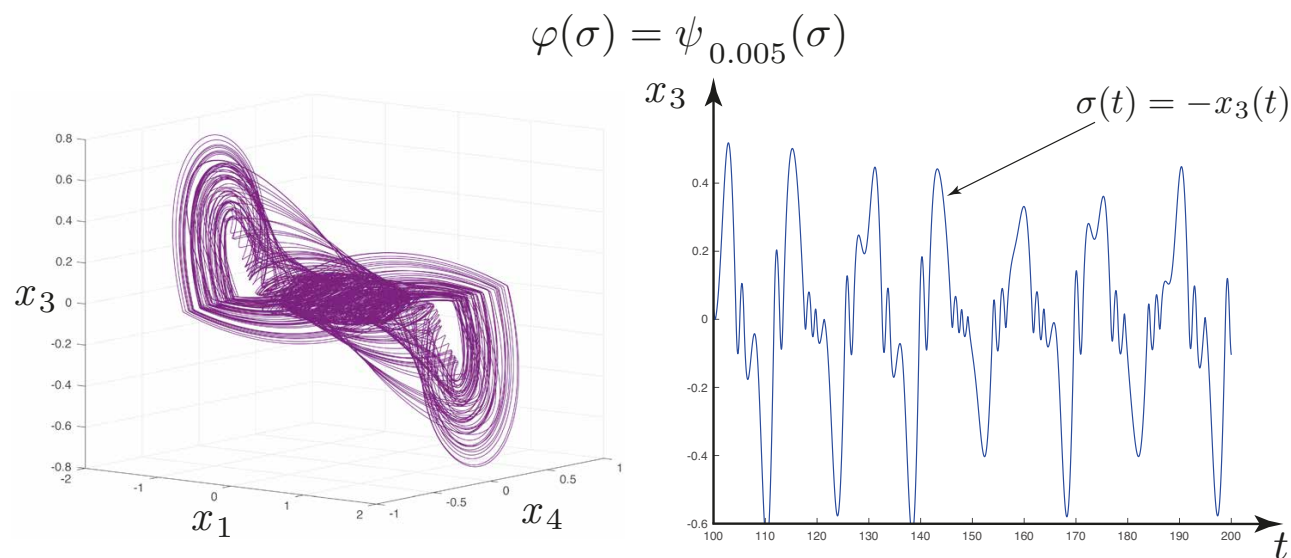


Рис. 17: Странный аттрактор системы (62) при $\beta = 0.1$ и $\varphi(\sigma) = \psi_m(\sigma)$, $m = 0.005$.

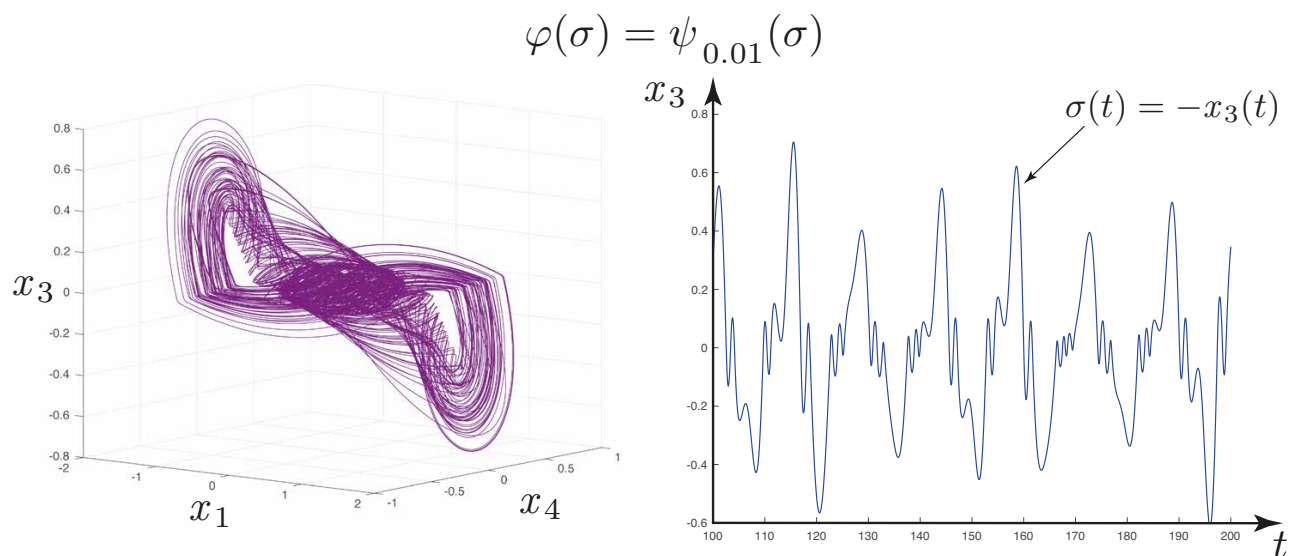


Рис. 18: Странный аттрактор системы (62) при $\beta = 0.1$ и $\varphi(\sigma) = \psi_m(\sigma)$, $m = N = 0.01$.

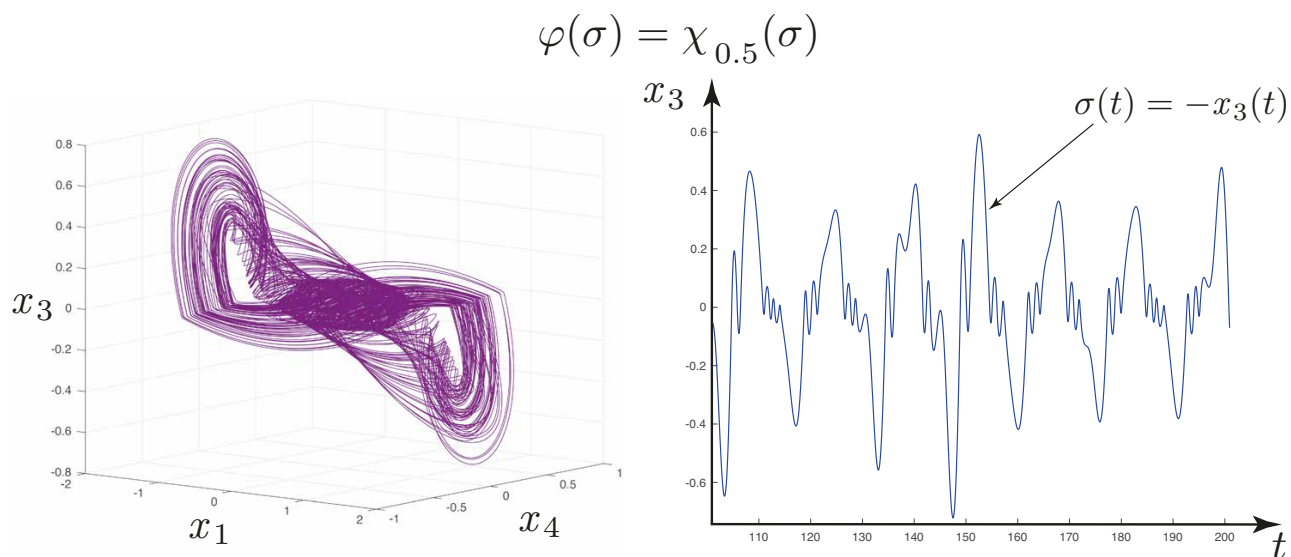


Рис. 19: Странный аттрактор системы (62) при $\beta = 0.1$ и $\varphi(\sigma) = \chi_\varepsilon(\sigma) \equiv \psi_N(\sigma) + \varepsilon(\tanh(\sigma/N) - \psi_N(\sigma))$, $N = 0.01$, $\varepsilon = 0.5$.

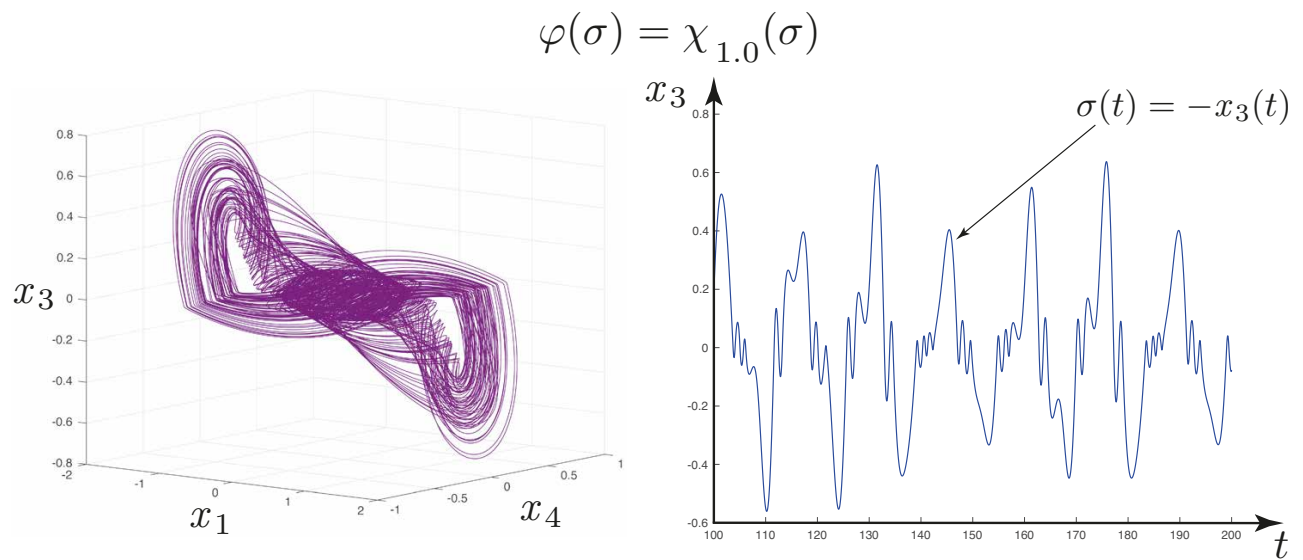


Рис. 20: Странный аттрактор системы (62) при $\beta = 0.1$ и $\varphi(\sigma) = \chi_\varepsilon(\sigma) \equiv \psi_N(\sigma) + \varepsilon(\tanh(\sigma/N) - \psi_N(\sigma))$, $N = 0.01$, $\varepsilon = 1$.

6 Заключение

В настоящей статье описаны различные подходы к определению решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и дифференциальных включений. Теория таких систем начала активно развиваться, когда в середине XX-го века стало ясно, что решение – это абсолютно непрерывная вектор-функция, а скользящие режимы – это типичные эффекты для разрывных систем.

Для глобального анализа разрывных систем эффективным математическим аппаратом является метод функций Ляпунова. Нами показано, как можно применять разрывные функции Ляпунова для разрывных систем в классической задаче Вышнеградского. Выяснилось, что для построения контрпримеров к проблеме Калмана для гладких систем оказывается эффективным метод разрывных аппроксимаций и идеи Айзермана и Пятницкого.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-21-00041).

Список литературы

- [1] A. Marchaud, Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre, Bulletin de la Société mathématique de France 62 (1934) 1–38.
- [2] A. Marchaud, Sur les champs continus de demi-cones convexes et leurs integrales, Compositio Mathematica 3 (1936) 89–127.
- [3] S. C. Zaremba, Sur une extension de la notion d'équation différentielle, CR Acad. Sci. Paris 199 (10) (1934) 545–548.
- [4] S. C. Zaremba, Sur les équations au paratingent, Bull. Sci. Math 60 (2) (1936) 139–160.
- [5] A. A. Agrachev, Y. L. Sachkov, Control Theory from the Geometric Viewpoint, vol. 87 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Control Theory and Optimization, II, Berlin: Springer, 2004.
- [6] S. Bennett, A history of control engineering, 1930-1955, no. 47, IET, 1993.

- [7] B. Brogliato, *Nonsmooth mechanics: Models, Dynamics and Control*, Springer, 1999.
- [8] F. Pfeiffer, C. Glocker, *Multibody dynamics with unilateral contacts*, John Wiley & Sons, 1996.
- [9] V. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag, 1992.
- [10] С. В. Емельянов, *Системы автоматического управления с переменной структурой*, Наука, 1967.
- [11] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, A. Poznyak, New methodologies for adaptive sliding mode control, *International journal of control* 83 (9) (2010) 1907–1919.
- [12] A. S. Poznyak, W. Yu, E. N. Sanchez, J. P. Perez, Nonlinear adaptive trajectory tracking using dynamic neural networks, *IEEE Transactions on Neural Networks* 10 (6) (1999) 1402–1411.
- [13] C. Edwards, S. Spurgeon, *Sliding mode control: theory and applications*, CRC Press, 1998.
- [14] R. C. Arkin, *Behavior-based robotics*, MIT press, 1998.
- [15] P. E. Kloeden, P. Marín-Rubio, Negatively invariant sets and entire trajectories of set-valued dynamical systems, *Set-Valued and Variational Analysis* 19 (1) (2011) 43–57.
- [16] I. G. Goryacheva, *Contact Mechanics in Tribology, Series: Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 61*, Kluwer Academic, Boston, MA, 1998.
- [17] I. G. Goryacheva, P. T. Rajeev, T. N. Farris, Wear in partial slip contact, *Journal of Tribology* 123 (4) (2001) 848–856.
- [18] В. И. Колесников, *Теплофизические процессы в металлополимерных трибосистемах*, Наука, 2003.
- [19] Л. М. Качанов, *Основы теории пластичности*, Наука, 1969.
- [20] A. Polyakov, L. Fridman, Stability notions and lyapunov functions for sliding mode control systems, *Journal of the Franklin Institute* 351 (4) (2014) 1831–1865.
- [21] Y. V. Orlov, *Discontinuous systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*, Springer Science & Business Media, 2008.

- [22] И. М. Керштейн, В. Д. Ключников, Е. В. Ломакин, С. А. Шестериков, Основы экспериментальной механики разрушения, Изд-во МГУ, 1989.
- [23] I. Boiko, Discontinuous control systems: frequency-domain analysis and design, Springer Science & Business Media, 2008.
- [24] M. Dolgopolik, A. Fradkov, Nonsmooth and discontinuous speed-gradient algorithms, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 25 (2017) 99–113.
- [25] I. Flugge-Lotz, Discontinuous Automatic Control of Missiles, Stanford University. Division of Engineering Mechanics, 1950.
- [26] I. Flugge-Lotz, Discontinuous Automatic Control, Princeton University Press, 1953.
- [27] Д. В. Аносов, Об устойчивости положений равновесия релейных систем, *Автоматика и телемеханика* 20 (2) (1959) 135–149.
- [28] Ю. И. Неймарк, О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования, *Автоматика и телемеханика* 18 (1957) 27–33.
- [29] В. И. Венец, Дифференциальные включения в выпуклых задачах, *Автоматика и телемеханика* (9) (1979) 5–14.
- [30] В. В. Солодовников, Основы автоматического регулирования. Теория, Машгиз, 1954.
- [31] В. А. Бесекерский, Е. П. Попов, Теория систем автоматического регулирования, ФМЛ, 1972.
- [32] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, N.J, 2002.
- [33] Y. Z. Tsytkin, *Relay Control Systems*, Univ Press, Cambridge, 1984.
- [34] J. D. Hartog, Forced vibrations with combined viscous and coulomb damping, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 9 (59) (1930) 801–817.
- [35] М. В. Келдыш, О демпферах с нелинейной характеристикой, *Тр. ЦАГИ* 557 (1944) 26–37.
- [36] А. И. Лурье, В. Н. Постников, К теории устойчивости регулируемых систем, *Прикладная математика и механика* 8 (3) (1944) 246–248.

- [37] Б. В. Булгаков, Автоколебания регулируемых систем, Прикладная математика и механика 7 (2) (1943) 97–108.
- [38] А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей, ДАН СССР 43 (5) (1944) 197–201.
- [39] А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора и зоной нечувствительности, Докл. АН СССР 46 (4) (1945) 158–161.
- [40] А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Теория стабилизации нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора, Изв. АН СССР. Сер. техн. наук. I часть (3) (1955) 3–32.
- [41] А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Теория стабилизации нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора, Изв. АН СССР. Сер. техн. наук. II часть (6) (1955) 54–71.
- [42] А. Х. Гелиг, Г. А. Леонов, В. А. Якубович, Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, Наука, 1978, (English transl: Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities, 2004, World Scientific).
- [43] М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд-во Академии наук СССР, 1963.
- [44] А. Ф. Филиппов, Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Математический сборник 51 (1) (1960) 99–128.
- [45] М. А. Айзерман, Е. С. Пятницкий, Основы теории разрывных систем, Автоматика и телемеханика 4 (1974) 33–37.
- [46] J. P. Aubin, A. Cellina, Differential Inclusions: Set-valued Maps and Viability Theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1984.
- [47] F. H. Clarke, Y. S. Ledyayev, R. J. Stern, P. R. Wolenski, Nonsmooth analysis and control theory, Springer-Verlag, 1998.
- [48] R. I. Leine, H. Nijmeijer, Differential Inclusion, Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems, Springer Berlin Heidelberg, 2004.

- [49] G. V. Smirnov, Introduction to the theory of differential inclusions, Vol. 41, American Mathematical Soc., 2002.
- [50] А. Х. Гелиг, Исследование устойчивости нелинейных разрывных систем автоматического регулирования с неединственным равновесным состоянием, Автомат. и телемех. 25 (1964) 153–160.
- [51] G. A. Leonov, Concerning stability of nonlinear controlled systems with non-single equilibrium state, Automation and Remote Control 32 (10) (1971) 1547–1552.
- [52] И. А. Вышнеградский, О регуляторах прямого действия, Изв. Санкт-Петербургского технологического института (1877) 21–62.
- [53] А. Андронов, А. Майер, Задача вышнеградского в теории прямого регулирования. i, Автоматика и телемеханика 8 (5) (1947) 314–334.
- [54] A. F. Filippov, Differential equations with discontinuous right-hand side, Springer, 1988.
- [55] T. Wazewski, Sur une condition équivalente à l'équation au contingent, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys 9 (1961) 865–867.
- [56] J. Cortes, Discontinuous dynamical systems, IEEE control Systems 28 (3) (2008) 36–73.
- [57] N. N. Krasovskij, Stability of motion: applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay, Stanford University Press, 1963.
- [58] N. N. Krasovskij, A. I. Subbotin, S. Kotz, Game-theoretical control problems, Springer-Verlag New York, Inc., 1987.
- [59] H. Hermes, Discontinuous vector fields and feedback control, Academic Press, 1967.
- [60] A. F. Filippov, On certain questions in the theory of optimal control, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control 1 (1) (1962) 76–84.
- [61] В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, Наука, 1969.
- [62] A. Tolstonogov, Differential Inclusions in a Banach Space, Springer, 2000.

- [63] В. А. Плисс, Некоторые проблемы теории устойчивости движения, Изд-во ЛГУ, 1958.
- [64] A. Polyakov, Discontinuous Lyapunov functions for nonasymptotic stability analysis, *IFAC Proceedings Volumes* 47 (3) (2014) 5455–5460.
- [65] N. Kuznetsov, O. Kuznetsova, G. Leonov, V. Vagaitsev, Analytical-numerical localization of hidden attractor in electrical Chua's circuit, *Lecture Notes in Electrical Engineering* 174 (4) (2013) 149–158.
- [66] N. V. Kuznetsov, O. A. Kuznetsova, G. A. Leonov, V. I. Vagaytsev, Hidden attractor in Chua's circuits, *ICINCO 2011 - Proceedings of the 8th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics* 1 (2011) 279–283.
- [67] G. A. Leonov, M. A. Kiseleva, N. V. Kuznetsov, O. A. Kuznetsova, Discontinuous differential equations: comparison of solution definitions and localization of hidden Chua attractors, *IFAC-PapersOnLine* 48 (11) (2015) 408–413.
- [68] N. V. Kuznetsov, O. A. Kuznetsova, G. A. Leonov, T. N. Mokaev, N. V. Stankevich, Localization of hidden chua attractors by the describing function method, *arXiv preprint arXiv:1705.02311*.
- [69] N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, V. I. Vagaitsev, Analytical-numerical method for attractor localization of generalized Chua's system, *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)* 4 (1) (2010) 29–33.
- [70] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, V. I. Vagaitsev, Localization of hidden Chua's attractors, *Physics Letters A* 375 (23) (2011) 2230–2233.
- [71] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, V. I. Vagaitsev, Hidden attractor in smooth Chua systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 241 (18) (2012) 1482–1486.
- [72] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 23 (1), art. no. 1330002.
- [73] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, T. N. Mokaev, Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion, *Eur. Phys. J. Special Topics* 224 (8) (2015) 1421–1458.

- [74] N. V. Kuznetsov, Hidden attractors in fundamental problems and engineering models. A short survey, *Lecture Notes in Electrical Engineering* 371 (2016) 13–25, (Plenary lecture at International Conference on Advanced Engineering Theory and Applications 2015).
- [75] A. Sommerfeld, Beitrage zum dynamischen ausbau der festigkeitslehre, *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure* 46 (1902) 391–394.
- [76] M. A. Kiseleva, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, Hidden attractors in electromechanical systems with and without equilibria, *IFAC-PapersOnLine* 49 (14) (2016) 51–55.
- [77] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, Algorithms for searching for hidden oscillations in the Aizerman and Kalman problems, *Doklady Mathematics* 84 (1) (2011) 475–481.
- [78] M. A. Aizerman, On a problem concerning the stability in the large of dynamical systems, *Uspekhi Mat. Nauk* (in Russian) 4 (1949) 187–188.
- [79] R. E. Kalman, Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems, *Transactions of ASME* 79 (3) (1957) 553–566.
- [80] D. Hilbert, *Mathematical problems.*, *Bull. Amer. Math. Soc.* (8) (1901-1902) 437–479.
- [81] N. N. Bautin, On the number of limit cycles generated on varying the coefficients from a focus or centre type equilibrium state, *Doklady Akademii Nauk SSSR* (in Russian) 24 (7) (1939) 668–671.
- [82] N. V. Kuznetsov, O. A. Kuznetsova, G. A. Leonov, Visualization of four normal size limit cycles in two-dimensional polynomial quadratic system, *Differential equations and dynamical systems* 21 (1-2) (2013) 29–34.
- [83] G. Leonov, N. Kuznetsov, On differences and similarities in the analysis of Lorenz, Chen, and Lu systems, *Applied Mathematics and Computation* 256 (2015) 334–343.
- [84] G. Leonov, N. Kuznetsov, Localization of hidden oscillations in dynamical systems (plenary lecture), in: *4th International Scientific Conference on Physics and Control*, 2009.
URL <http://www.math.spbu.ru/user/leonov/publications/2009-PhysCon-Leonov-plenary-hidden-oscillations.pdf#page=21>

- [85] M. Kiseleva, E. Kudryashova, N. Kuznetsov, O. Kuznetsova, G. Leonov, M. Yuldashev, R. Yuldashev, Hidden and self-excited attractors in Chua circuit: synchronization and SPICE simulation, *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems* doi:10.1080/17445760.2017.1334776.
- [86] P. Sharma, M. Shrimali, A. Prasad, N. Kuznetsov, G. Leonov, Controlling dynamics of hidden attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 25 (04), art. num. 1550061.
- [87] P. Sharma, M. Shrimali, A. Prasad, N. Kuznetsov, G. Leonov, Control of multistability in hidden attractors, *Eur. Phys. J. Special Topics* 224 (8) (2015) 1485–1491.
- [88] X. Zhang, G. Chen, Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 27 (7), art. num. 071101.
- [89] Q. Li, H. Zeng, X.-S. Yang, On hidden twin attractors and bifurcation in the Chua's circuit, *Nonlinear Dynamics* 77 (1-2) (2014) 255–266.
- [90] I. M. Burkin, N. N. Khien, Analytical-numerical methods of finding hidden oscillations in multidimensional dynamical systems, *Differential Equations* 50 (13) (2014) 1695–1717.
- [91] C. Li, J. C. Sprott, Coexisting hidden attractors in a 4-D simplified Lorenz system, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 24 (03), art. num. 1450034.
- [92] G. Chen, Chaotic systems with any number of equilibria and their hidden attractors, in: 4th IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems (plenary lecture), 2015, http://www.ee.cityu.edu.hk/~gchen/pdf/CHEN_IFAC2015.pdf.
- [93] P. Saha, D. Saha, A. Ray, A. Chowdhury, Memristive non-linear system and hidden attractor, *European Physical Journal: Special Topics* 224 (8) (2015) 1563–1574.
- [94] Y. Feng, W. Pan, Hidden attractors without equilibrium and adaptive reduced-order function projective synchronization from hyperchaotic Rikitake system, *Pramana* 88 (4) (2017) 62.

- [95] Z. Zhusubaliyev, E. Mosekilde, A. Churilov, A. Medvedev, Multistability and hidden attractors in an impulsive Goodwin oscillator with time delay, *European Physical Journal: Special Topics* 224 (8) (2015) 1519–1539.
- [96] M.-F. Danca, Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system, *Nonlinear Dynamics* 86 (2) (2016) 1263–1270.
- [97] A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, E. Mosekilde, N. V. Stankevich, Co-existing hidden attractors in a radio-physical oscillator system, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48 (2015) 125101.
- [98] M. Chen, M. Li, Q. Yu, B. Bao, Q. Xu, J. Wang, Dynamics of self-excited attractors and hidden attractors in generalized memristor-based Chua’s circuit, *Nonlinear Dynamics* 81 (2015) 215–226.
- [99] V.-T. Pham, F. Rahma, M. Frasca, L. Fortuna, Dynamics and synchronization of a novel hyperchaotic system without equilibrium, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 24 (06), art. num. 1450087.
- [100] O. S. Ojoniyi, A. N. Njah, A 5D hyperchaotic Sprott B system with coexisting hidden attractors, *Chaos, Solitons & Fractals* 87 (2016) 172 – 181.
- [101] R. Rocha, R. O. Medrano-T, Finding hidden oscillations in the operation of nonlinear electronic circuits, *Electronics Letters* 52 (12) (2016) 1010–1011.
- [102] M. Borah, B. K. Roy, Hidden attractor dynamics of a novel non-equilibrium fractional-order chaotic system and its synchronisation control, in: 2017 Indian Control Conference (ICC), 2017, pp. 450–455.
- [103] Z. Wei, V.-T. Pham, T. Kapitaniak, Z. Wang, Bifurcation analysis and circuit realization for multiple-delayed Wang–Chen system with hidden chaotic attractors, *Nonlinear Dynamics* 85 (3) (2016) 1635–1650.
- [104] V.-T. Pham, C. Volos, S. Jafari, S. Vaidyanathan, T. Kapitaniak, X. Wang, A chaotic system with different families of hidden attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 26 (08) (2016) 1650139.
- [105] S. Jafari, V.-T. Pham, S. Golpayegani, M. Moghtadaei, S. Kingni, The relationship between chaotic maps and some chaotic systems with hidden attractors, *Int. J. Bifurcat. Chaos* 26 (13), art. num. 1650211.

- [106] D. Dudkowski, S. Jafari, T. Kapitaniak, N. Kuznetsov, G. Leonov, A. Prasad, Hidden attractors in dynamical systems, *Physics Reports* 637 (2016) 1–50.
- [107] J. Singh, B. Roy, Multistability and hidden chaotic attractors in a new simple 4-D chaotic system with chaotic 2-torus behaviour, *International Journal of Dynamics and Control* doi: 10.1007/s40435-017-0332-8.
- [108] G. Zhang, F. Wu, C. Wang, J. Ma, Synchronization behaviors of coupled systems composed of hidden attractors, *International Journal of Modern Physics B* 31, art. num. 1750180.
- [109] M. Messias, A. Reinol, On the formation of hidden chaotic attractors and nested invariant tori in the Sprott A system, *Nonlinear Dynamics* 88 (2) (2017) 807–821.
- [110] P. Brzeski, J. Wojewoda, T. Kapitaniak, J. Kurths, P. Perlikowski, Sample-based approach can outperform the classical dynamical analysis - experimental confirmation of the basin stability method, *Scientific Reports* 7, art. num. 6121.
- [111] Z. Wei, I. Moroz, J. Sprott, A. Akgul, W. Zhang, Hidden hyperchaos and electronic circuit application in a 5D self-exciting homopolar disc dynamo, *Chaos* 27 (3), art. num. 033101.
- [112] U. Chaudhuri, A. Prasad, Complicated basins and the phenomenon of amplitude death in coupled hidden attractors, *Physics Letters A* 378 (9) (2014) 713–718.
- [113] H. Jiang, Y. Liu, Z. Wei, L. Zhang, Hidden chaotic attractors in a class of two-dimensional maps, *Nonlinear Dynamics* 85 (4) (2016) 2719–2727.
- [114] C. Volos, V.-T. Pham, E. Zambrano-Serrano, J. M. Munoz-Pacheco, S. Vaidyanathan, E. Tlelo-Cuautle, *Advances in Memristors, Memristive Devices and Systems*, Springer, 2017, Ch. Analysis of a 4-D hyperchaotic fractional-order memristive system with hidden attractors, pp. 207–235.
- [115] R. Rocha, R.-O. Medrano-T, Stability analysis and mapping of multiple dynamics of Chua’s circuit in full-four parameter space, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 25 (2015) 1530037.
- [116] B. Bao, P. Jiang, H. Wu, F. Hu, Complex transient dynamics in periodically forced memristive Chua’s circuit, *Nonlinear Dynamics* 79 (2015) 2333–2343.

- [117] B. R. Andrievsky, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, S. M. Seledzhi, Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators, *IFAC Proceedings Volumes* 46 (19) (2013) 37–41.
- [118] B. R. Andrievsky, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, A. Pogromsky, Hidden oscillations in aircraft flight control system with input saturation, *IFAC Proceedings Volumes* 46 (12) (2013) 75–79.
- [119] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, M. A. Kiseleva, E. P. Solovyeva, A. M. Zaretskiy, Hidden oscillations in mathematical model of drilling system actuated by induction motor with a wound rotor, *Nonlinear Dynamics* 77 (1-2) (2014) 277–288.
- [120] M.-F. Danca, N. Kuznetsov, G. Chen, Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system, *Nonlinear Dynamics* 88 (2017) 791–805.
- [121] N. Kuznetsov, G. Leonov, M. Yuldashev, R. Yuldashev, Hidden attractors in dynamical models of phase-locked loop circuits: limitations of simulation in MATLAB and SPICE, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 51 (2017) 39–49.
- [122] G. Chen, N. Kuznetsov, G. Leonov, T. Mokaev, Hidden attractors on one path: Glukhovsky-Dolzansky, Lorenz, and Rabinovich systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 27 (8), art. num. 1750115.
- [123] M.-F. Danca, N. Kuznetsov, Hidden chaotic sets in a Hopfield neural system, *Chaos, Solitons & Fractals* 103 (2017) 144–150.
- [124] P. T. Piiroinen, Y. A. Kuznetsov, An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 34 (3) (2008) 13.
- [125] M. A. Kiseleva, N. V. Kuznetsov, Coincidence of Gelig-Leonov-Yakubovich, Filippov, and Aizerman-Pyatnitskii definitions, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* 48 (2) (2015) 66–71.
- [126] N. E. Barabanov, On the Kalman problem, *Sib. Math. J.* 29 (3) (1988) 333–341.
- [127] R. E. Fitts, Two counterexamples to Aizerman’s conjecture, *Trans. IEEE AC-11* (3) (1966) 553–556.

- [128] J. Bernat, J. Llibre, Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in dimension larger than 3, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* 2 (3) (1996) 337–379.
- [129] G. Meisters, A biography of the Markus-Yamabe conjecture, <http://www.math.unl.edu/~gmeisters1/papers/HK1996.pdf>.
- [130] A. A. Glutsyuk, Meetings of the Moscow mathematical society (1997), *Russian mathematical surveys* 53 (2) (1998) 413–417.
- [131] A. A. Andronov, E. A. Vitt, S. E. Khaikin, *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [132] G. A. Leonov, V. O. Bragin, N. V. Kuznetsov, Algorithm for constructing counterexamples to the Kalman problem, *Doklady Mathematics* 82 (1) (2010) 540–542.
- [133] V. O. Bragin, V. I. Vagaitsev, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua’s circuits, *Journal of Computer and Systems Sciences International* 50 (4) (2011) 511–543.
- [134] G. A. Leonov, *Mathematical problems of control theory. An introduction*, World Scientific, Singapore, 2001.