САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. Г. Бурова, Ю. К. Демьянович,
Т. О. Евдокимова

СПЛАЙН-ВСПЛЕСКИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 519.6
ББК 22.19
Б91

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, проф. *С. И. Репин* (С.-Петерб. отд. мат. ин-та им. В. А. Стеклова), д-р техн. наук, проф. *В. А. Ходаковский* (С.-Петерб. гос. ун-т Путей сообщения императора Александра I)

Бурова И. Г., Демьянович Ю. К., Евдокимова Т. О.
Б91 **Сплайн-всплески и их реализация.** — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2017. 419 с.

ISBN 978-5-288-05765-6

В данной книге основное внимание уделяется сплайн-всплесковым разложениям первого и второго порядка. Рассмотрены приемы разложения потоков в эрмитовом случае с использованием потока значений функции и ее первой производной. Теоретические результаты и проведенные на их основе численные эксперименты показывают, что предложенные алгоритмы выгодно отличаются по скорости и по объему требуемой памяти от классических алгоритмов всплесковых разложений.

Предназначена для специалистов, связанных с обработкой больших информационных потоков. Может быть полезна аспирантам и студентам, а также всем интересующимся сжатием и восстановлением потоков структурированной информации в реальном масштабе времени.

УДК 519.6
ББК 22.19

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 17-11-00099, не подлежит продаже

ISBN 978-5-288-05765-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

I. О подходах к обработке информационных потоков

Исследования в области обработки больших числовых массивов информации восходят к трем источникам, возникшим независимо друг от друга: к классической теории сплайнов, к методу конечных элементов и к теории вэйвлетов. В соответствии с этим можно выделить по крайней мере три направления развития теории обработки упомянутых массивов. Первое направление берет свое начало от работ Шонберга [110, 111]; здесь исходным моментом является решение какой-либо задачи интерполяции (задачи Лагранжа, Эрмита или Эрмита-Биркгофа) в классе функций с «кусочными» свойствами и с определенной гладкостью в узлах рассматриваемой сетки (см. [10, 40–41, 44, 47–48, 52, 54, 56–57, 69, 98–102, 104–105, 110–111]). Заметим, что если исходный массив числовой информации задан как сеточная функция на мелкой сетке, то замена этой сеточной функции на результат решения интерполяционной задачи для крупной сетки (являющейся подмножеством мелкой сетки) может рассматриваться как сжатие исходного массива числовой информации. Аппроксимационные свойства и вычислительная простота получаемых сплайнов всякий раз исследуются дополнительно. Сюда относятся современные исследования по обобщенным сплайнам (см., например, [10]), так называемым ECT-B-сплайнам; в этих работах для построения сплайнов на сеточных промежутках используются различные ECT-системы, которые при определенных условиях удается гладко «склеить» в узлах.

Второе направление опирается на аппроксимационные свойства рассматриваемых функций, где определение базисных функций связано с решением аппроксимационных соотношений, рассматриваемых как система уравнений (эти исследования появились в связи с теорией метода конечных элементов, см. [1–9, 25, 27, 33–34, 59–68, 73–75, 79, 83, 88–92]); при таком подходе интерполяционные свойства и алгоритмы минимизации вычислительной сложности (вложенность пространств и вэйвлетное представление цепочки вложенных пространств) приходится устанавливать дополнительно. Выбор порождающей $m+1$-компонентной вектор-функции $\varphi(t)$, заданной на интервале (α, β), определяет семейства конечномерных пространств на элементарных сеточных интервалах рассматриваемой (конечной или бесконечной) сетки $X = \{x_j\}$, $X \subset (\alpha, \beta)$, а выбор цепочки $\mathbf{A}$ векторов со свойством полноты приводит к пространству $(X, \mathbf{A}, \varphi)$-сплайнов. Условия гладкости эквивалентны определенным алгебраическим соотношениям между значениями $\varphi(t)$ (и ее производных) в узлах сетки и векторами цепочки $\mathbf{A}$. Требование максимальной гладкости сплайнов (при выбранной вектор-функции $\varphi(t)$ с отличным от нуля вронскианом из ее компонент) однозначно (с точностью до постоянных отличных от нуля множителей) определяет цепочку $\mathbf{A}$; при этом однозначно определяется также пространство $(X, \mathbf{A}, \varphi)$-сплайнов, которое в этом случае называется пространством B_φ-сплайнов (см. [11–24, 26, 28–32, 35–38, 70–72, 76–82, 84–87, 93–97]).

Третье направление — теория вэйвлетов — в основу кладет вычислительную простоту, отражением чего является кратно-масштабное уравнение (см. [45–46, 50–51, 55, 58, 103]); исследование последнего приводит в первую очередь ко вложенности получаемых пространств и к вэйвлетному представлению соответствующей цепочки вложенных пространств (это ведет к минимизации вычислительной сложности); остальные из перечисленных выше свойств с бóльшим или мéньшим успехом исследуются дополнительно (см., например, [46]).

II. Особенности всплесковой обработки

Теория вэйвлетов (всплесков) появилась сравнительно недавно (несколько десятилетий тому назад); к настоящему времени она завоевала прочные позиции в математике и нашла глубокие приложения в физике, астрономии, медицине, и, конечно, в инженерном деле, поскольку основной результат этой теории — эффективные алгоритмы обработки больших потоков информации. Под эффективностью в данном случае понимают экономное (с точки зрения экономии ресурсов компьютера: памяти и времени обработки) разложение потока информации на составляющие, так чтобы можно было выделить основной информационный поток, уточняющий информационный поток и информационный поток с несущественной информацией. Как правило, основной информационный поток значительно менее плотный, чем исходный поток информации; поэтому его можно передать быстро, и при этом не требуется использовать линии связи с широкой полосой пропускания и с большим количеством проводников. Уточняющий информационный поток не во всех случаях необходим, его можно передавать фрагментарно в зависимости от потребностей. Наконец, поток с несущественной информацией вообще может быть отброшен. Конечно, вопрос о том, какая информация является основной, какая уточняющей, а какая — несущественной, выходит за рамки математических исследований и должен решаться в каждом отдельном случае специалистом предметной области.

Роль теории вэйвлетов (всплесков) состоит в том, что она дает предметному специалисту достаточно широкий арсенал средств, из которых он может выбрать то средство, которое ему подходит для обработки (для разложения на составляющие) интересующего его потока информации. Такими средствами в теории вэйвлетов являются наборы вложенных (основных) пространств функций и их представлений в виде прямой (а иногда и ортогональной) суммы вэйвлетных пространств. Весьма важными являются базисы основных пространств, а также базисы вэйвлетов (всплесков); построению и изучению свойств таких базисов посвящено много работ.

Обращаясь к эффективным способам сжатия неоднородных потоков информации (имеющих сингулярности или быстро меняющиеся характеристики), следует отметить важность использования неравнометной сетки. В связи с этой проблемой отметим работы Добеши, Свелденс, И.В.Оселедс, Е. Е. Тыртышников [106–108].

III. Основная идея всплескового (вэйвлетного) разложения

Для более наглядной иллюстрации идеи вэйвлет-преобразования представим себе, что рассматриваемый числовой поток кодирует некоторое изображение, выводимое на экран компьютера (или цифрового телевизора). Предположим, что экран представляет собой прямоугольную матрицу из большого числа пикселей — маленьких прямоугольников, нанесенных на прозрачную поверхность (стекло), которые светятся под воздействием попадающих на них электронов, причем для такого свечения имеется фиксированное число градаций яркости. Для простоты рассматриваем лишь одноцветные изображения (черно-белый экран). Обычно пиксели перенумерованы последовательно по строкам, которые предварительно выстроены одна за другой в прямую линию; таким образом, пиксели приобретают номера $0, 1, 2, \dots, N-1$, где $N = M \times K$, где M число строк рассматриваемой матрицы, а K — число ее столбцов. Для определенности будем считать N четным; пусть $N = 2L$, где L — натуральное число. Каждому пикселю предписывается определенная яркость, выражаемая некоторым числом; обозначим это число для j-го пикселя через c_j. Таким образом, кодировка изображения производится с помощью числового потока

$$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, \dots, c_{2L-1}. \tag{III.1}$$

Поток (III.1) может быть передан по линиям связи и при подаче на экран компьютера (телевизора) может быть превращен в исходное изображение. Если исходное изображение передается с большой точностью, то N весьма велико, и передача даже одного такого изображения представляет значительные технические трудности (на практике требуется передавать миллионы таких иображений с большой скоростью). Поэтому возникает задача уменьшения количества передаваемых чисел. Предполагая, что соседние числа в (III.1) близки, можно было бы предложить передавать, например, только числа с нечетными номерами в (III.1), т. е. числа

$$c_1, \quad c_3, \quad c_5, \quad c_7, \dots, c_{2L-1}. \tag{III.2}$$

Такое преобразование называется *прореживанием* исходного числового потока (английский термин upsampling — разрежение или разрежающая выборка). Вместо потока (III.1) передают в два раза более короткий поток (III.2); приемное устройство расширяет полученый числовой поток (III.2) дублированием принятых значений так, чтобы в результате на местах с четным и со следующим нечетным номером находились одинаковые числа. В результате на экране воспроизводится изображение, полученное с помощью числового потока вида

$$c_1, c_1, c_3, c_3, c_5, c_5, c_7, \dots, c_{2L-1}, c_{2L-1}. \tag{III.3}$$

Тем самым «восстановление» (III.3) исходного потока (III.1) производится с погрешностью, причем информация теряется необратимым образом (т. е. без передачи дополнительной информации приемное устройство, вообще говоря, не в состоянии восстановить поток (III.1)). Такой прием (английский эквивалент downsampling — сгущение) оправдан, если полученное изображение мало отличается от исходного.

Недостатки описанного подхода состоят в следующем: 1) он применим лишь к достаточно медленно менящемуся потоку, 2) отсутствует учет характеристик числового потока (в некоторых частях числовой поток может меняться очень медленно, и можно было бы выбрасывать много чисел подряд, а в других частях при быстром изменении потока любые выбрасывания чисел могут существенно испортить передаваемое изображение), 3) нет средств для уточнения передаваемого потока.

Идея вэйвлетного подхода иллюстрируется следующим образом. Из числового потока (III.1) формируется два числовых потока

$$a_j = (c_{2j} + c_{2j+1})/2, \quad b_j = (c_{2j} - c_{2j+1})/2, \quad \text{где } j = 0, 1, \dots, L-1. \tag{III.4}$$

Нетрудно видеть, что

$$c_{2j} = a_j + b_j, \quad c_{2j+1} = a_j - b_j, \quad j = 0, 1, \dots, L-1. \tag{III.5}$$

Таким образом, если поток (III.1) заменить двумя потоками (III.4), то после их передачи можно восстановить исходный поток (III.1), используя формулы (III.5).

Возникает вопрос, в чем же польза от замены потока (III.1) на два потока (III.4), если общее количество чисел в потоках (III.4) совпадает с количеством чисел в (III.1). Для ответа на этот вопрос заметим, что если соседние числа в (III.1) близки, то второй из потоков в (III.4) состоит из чисел, близких к нулю, так что может оказаться, что второй поток вообще не нужен и его можно отбросить. Однако, если некоторые фрагменты первого потока из (III.4) не дают достаточной точности, то можно использовать соответствующие фрагменты (с теми же диапазонами индексов) второго потока, и произвести расчеты по формулам (III.5); это приведет к точному восстановлению исходного потока (III.1) на соответствующих участках (подобная технология передачи используется, в частности, при передаче изображений в Интернете: сначала появляются основные контуры изображения, позволяющие оценить его содержание и прервать передачу, если в ней нет необходимости, и лишь затем происходит уточнение, и окончательное завершение передачи изображения).

Поток чисел

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{L-1} \tag{III.6}$$

называют основным, а поток чисел

$$b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \ldots, b_{L-1} \tag{III.7}$$

— вэйвлетным (всплесковым) потоком.

Полученный основной поток (III.6) можно рассматривать как сжатие исходного потока (III.1), а поток (III.7) как поправку к основному потоку, позволяющую восстановить исходный поток.

Если поток (III.6) все еще велик для передачи, то аналогичной процедурой его расщепляют на два потока: поток, являющийся основным для потока (III.6) (будем его называть нулевым приближением к исходному потоку (III.1) или просто нулевым потоком) и соответствующий вэйвлетный поток (его назовем первой поправкой к нулевому потоку или первым вэйвлетным потоком); в этом случае поток (III.7) можно назвать второй поправкой (или вторым вэйвлетным потоком).

Возможно дальнейшее продолжение процесса расщепления; на k-м шаге получим расщепление исходного потока на $k+1$ потоков: нулевой поток (основной результат сжатия) и k вэйвлетных потоков, последовательное добавление которых к нулевому потоку приводит к последовательному уточнению результата сжатия вплоть до полного восстановления исходного потока.

Излагаемая методика похожа на разложение по формуле Тейлора, где производные заменены соответствующими разностями. Такой процесс расщепления иногда применяют и к упомянутым вэйвлетным потокам; получающийся результат называют *вэйвлет-пакетом.*

IV. Потоки числовой информации, сигналы, сеточные функции

Числовой информационный поток часто появляется в результате обработки параметра какого-либо физического процесса, причем этот параметр рассматривается, как функция времени; такая обработка называется дискретизацией или оцифровкой. Простейший способ оцифровки — измерение значений упомянутого параметра в отдельные моменты времени. Эти моменты времени образуют дискретное множество чисел, обычно называемое сеткой на числовой оси (точки этого множества называются узлами сетки). Таким образом, каждому рассматриваемому моменту времени сопоставляется число — значение этого параметра. Такое сопоставление называют цифровым сигналом или сеточной функцией.

Итак, пусть упомянутый выше физический параметр представлен функцией $u(t)$, заданной на интервале (α, β) вещественной оси; дальше эту функцию называем *первоначальной.* Как сказано выше, для компьютерной обработки вводится сеточная функция $v(t)$, определяемая с помощью значений первоначальной функции (и, возможно, ее производных) в узлах некоторой сетки (эту сеточную функцию и сетку назовем *исходными*). Использование исходной сеточной функции позволяет построить приближение к первоначальной функции с помощью того или иного аппарата аппроксимации или интерполяции.

Выбор способа уменьшения числового потока находится целиком в руках предметного специалиста (т. е. специалиста в той предметной области, где приходится иметь дело с числовыми потоками): именно предметный специалист должен решить, какая информация настолько несущественна, что ею можно пренебречь. В некоторых областях знаний для такого заключения необходим переход к частотному представлению информации (в виде суммы гармоник — синусов или косинусов с соответствующими коэффициентами); такой переход, например, часто делают при обработке электронного кода видеоинформации. Для этого перехода используют преобразование Фурье или ряд Фурье (или их дискретные аналоги), а интересующие предметного специалиста частоты выделяют с помощью так называемой «оконной» функции $g(x)$; по-существу $g(x)$ — срезающая функция (т. е. функция, близкая к константе на интересующем диапазоне частот и равная нулю вне этого диапазона), так что нужные частоты выделяются умножением частотного представления на эту функцию (иногда, с дополнительным сдвигом аргумента).

Линейное пространство приближений (будем называть его аналогично предыдущему — исходным пространством) затем представляют в виде прямой суммы пространств, одно из которых называют основным, а второе — вэйвлетным. Часто основное пространство связывают с сеткой, получающейся выбрасыванием некоторой совокупности узлов из исходной сетки, а подпространство вэйвлетов определяют операцией проектирования исходного пространства на основное. Таким образом, порождается разложение упомянутого приближения на основную и вэйвлетную составляющие. Центральными здесь оказываются два момента: вложенность основного пространства в исходное и задание операции проектирования исходного пространства на основное. Представления элементов этого разложения в базисах рассматриваемых пространств порождают соответствующие соотношения между коэффициентами этих представлений. Соотношения, позволяющие перейти от коэффициентов базиса исходного пространства к коэффициентам базисов основного и вэйвлетного пространств, называются *формулами декомпозиции*, а соотношения, дающие обратный переход, — *формулами реконструкции.*

Каждое из упомянутых выше подпространств иногда также разлагают в прямую сумму некоторых подпространств и, возможно, продолжают этот процесс дальше; разложения подобного рода как было отмечено ранее называются вэйвлет-пакетами.

Важнейшими вопросами, которые волнуют исследователей, являются вычислительная сложность (объем используемых ресурсов вычислительной системы: памяти, каналов передачи результатов, времени счета), свойства гладкости и устойчивости решения интересующих задач, аппроксимационные и интерполяционные свойства, а также ряд других свойств (компактность носителя базисных функций, скорость их убывания на бесконечности — в случае некомпактного носителя и т.д.)

В случае, когда $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$, а сетка — равномерная, удается применить мощный аппарат гармонического анализа (в пространстве функций $L^2(\mathbb{R}^1)$ и в пространстве последовательностей l^2); этому случаю посвящено большое количество исследований (см., например, [46, 55] и имеющуюся там библиографию). Для цифровых потоков с резко меняющимися характеристиками (со сменой плавного поведения на скачкообразное и наоборот) весьма важно использовать неравномерную сетку, приспосабливаемую к обрабатываемому потоку. В случае неравномерной сетки и для случая, когда (α, β) не совпадает с вещественной осью, работ немного (см. [58, 103]); непосредственное применение гармонического анализа в этих случаях затруднительно.

V. Некоторые дополнения и описание структуры книги

Новый подход к построению теории всплесков (вэйвлетов), развиваемый с 2000 года, сначала нашел свое отражение в небольшой монографии Ю. К. Демьяновича [12]. Дальнейшие результаты в этом направлении содержатся в монографии [38].

Данная монография в основном содержит результаты авторов, начиная с 2013 года и, в определенном смысле, является продолжением предыдущих монографий. Сразу же отметим, что тем не менее изложение не опирается на предыдущие результаты; более того, многие из разделов содержат удобное для читателей повторение обозначений и необходимых для понимания сведений, так что могут читаться самостоятельно.

Дадим краткое описание разделов.

Первый раздел посвящен представлению остатка аппроксимации B_φ-сплайнами первого порядка. Найдены константы в оценках погрешности аппроксимации как самих функций, так и их производных. Упомянутые оценки точны на компонентах порождающей вектор-функции $\varphi(t)$.

Во втором разделе рассматриваются условия вложенности минимальных B_φ-сплайнов второго порядка

В третьем разделе установлены двусторонние границы биортогональной аппроксимации дважды непрерывно дифференцируемых функций B_φ-сплайнами второго порядка. Получено интегральное представление остатка биортогональной аппроксимации квадратичными сплайнами. На основе этих результатов найдены оценки погрешности в некоторых задачах аппроксимации и интерполяции лагранжева типа. Упомянутые оценки достигаются в полиномиальном случае.

Четвертый раздел содержит другие подходы к аппроксимации, в частности, рассмотрена биортогональная аппроксимация, и представлены некоторые способы построения биортогональных систем функционалов.

В пятом разделе установлены необходимые и достаточные условия существования и гладкости пространств (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов, и доказано, что во множестве таких пространств порядка m существует единственное (при фиксированной сетке) пространство класса C^{m-1} (оно оказывается пространством B_φ-сплайнов). Кроме того, доказана вложенность пространств B_φ-сплайнов порядка m, построенных на вложенных сетках, и найдены калибровочные соотношения для их координатных функций.

В шестом разделе получены достаточные условия положительности непрерывно дифференцируемых минимальных координатных сплайнов второго порядка в общем случае (т. е. при достаточно произвольной генерирующей вектор-функции). Основными условиями являются неравенство нулю вронскиана генерирующей вектор-функции и достаточная мелкость локально квазиравномерной сетки. Полученные здесь условия использованы для построения положительных экспоненциальных непрерывно дифференцируемых координатных сплайнов. Установлена положительность гиперболических и дробно-рациональных минимальных координатных сплайнов без каких-либо ограничений на сетку.

В седьмом разделе получены оценки остатка аппроксимации (вообще говоря, неполиномиальными) сплайнами эрмитова типа первой высоты; полученные оценки точны на компонентах генерирующей функции, а константы имеют простое явное представление.

В восьмом разделе рассмотрена структура сплайн-вэйвлетного разложения в случае однократного локального укрупнения неравномерной сетки (с удалением группы «нечетных» узлов), получены соответствующие алгоритмы декомпозиции/реконструкции и даны оценки величины вэйвлетного потока в случае, когда исходный поток представляет собой последовательность значений дважды непрерывно дифференцируемой функции.

В девятом разделе устанавлены условия, при которых изменение порядка элементарных операций не меняет операторов декомпозиции для сплайн-всплесковых представлений второго порядка на отрезке. Здесь вводится понятие k-локализованных систем функционалов и выделяется множество операторов, в котором имеется лишь один левый обратный к оператору вложения.

Десятый раздел посвящен сплайн-всплесковая декомпозиция на отрезке

В одиннадцатом разделе даны простые способы построения цепочки вложенных пространств (вообще говоря, негладких неполиномиальных) сплайнов первого порядка при локальном укрупнении неравномерной сетки, представлены их вэйвлетные (всплесковые) разложения и установлена коммутативность операторов декомпозиции при изменении порядка удаления узлов сетки.

В двенадцатом разделе вводится понятие гнездового укрупнения и изучается структура операторов сплайн-вэйвлетного разложения в случае одного гнезда.

В тринадцатом разделе рассматривается случай двухгнездового сплайн-вэйвлетного разложения и исследуется эффект интерференции в вэйвлетном потоке

Четырнадцатый раздел посвящен исследованию одного варианта многогнездовой структуры, а именно, так называемой, гребенчатой структуры. В пятнадцатом разделе исследуется ортогональный базис всплесковых потоков: оказывается, что этот базис весьма прост для гребенчатой структуры сплайн-всплескового разложения. Здесь же вычисляется время реализации этого разложения на параллельной вычислительной системе (ПВС) с учетом влияния коммуникационной среды.

В шестнадцатом разделе предложен алгоритм построения аппроксимации непрерывной функции с помощью сплайн-всплескового (вэйвлетного) разложения, ассоциированного с адаптивной неравномерной сеткой. Установлены условия, в которых этот алгоритм эффективнее сплайн-всплескового алгоритма на равномерной сетке при той же аппроксимации. Исследована устойчивость предложенного алгоритма в определенном классе вычислительных погрешностей.

В отличие от предыдущего раздела в семнадцатом разделе внимание сосредоточено на адаптивной сплайн-всплесковой обработка дискретного потока и получены оценки объемов используемых данных в основном потоке при различных характеристиках нерегулярности исходного потока.

Восемнадцатый раздел посвящен реализации сплайн-всплескового разложения исходного потока без привлечения каких-либо пространств функций с континуальной областью определения. В результате получены простые формулы декомпозиции и реконструкции, причем базисом пространства всплесков является простейшая совокупность ортов эвклидова пространства. Здесь дана оценка времени реализации всплесковой декомпозиции с учетом свойств коммуникационной среды вычислительной системы.

Последний, девятнадцатый раздел посвящен потокам, связанных естественным образом с двумерной областью. Здесь рассматривается сплайн-всплесковое укрупнение аппроксимаций курантова типа.

1. АППРОКСИМАЦИЯ $\mathbf{B}_\varphi$-СПЛАЙНАМИ

В данном разделе вводятся непрерывные (вообще говоря, неполиномиальные) координатные B_φ-сплайны первого порядка, рассматривается натянутое на них линейное пространство и строится некоторое продолжение системы линейных функционалов, биортогональной к упомянутым сплайнам. Рассматривается аппроксимация линейной комбинацией этих сплайнов для функций классов гладкости C^1 и C^2; в каждом из этих случаев даются интегральные представления остатка и вытекающие из этого представления оценки аппроксимации как самих функций, так и их производных (см. также [85]). Полученные оценки точны на компонентах порождающей вектор-функции $\varphi(t)$.

1.1. Пространства B_φ-сплайнов

Упорядоченное множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m+1}$ будем называть *цепочкой* векторов.

Бесконечная система векторов $\{\mathbf{b}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ пространства $\mathbb{R}^2$ называется *полной цепочкой* векторов, если $\det(\mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j) \neq 0$ при $j \in \mathbb{Z}$ (см. [27]).

На интервале (α, β) вещественной оси рассмотрим сетку

$$X: \quad \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \quad \lim_{j\to-\infty} x_j = \alpha, \quad \lim_{j\to+\infty} x_j = \beta.$$

Пусть $\varphi(t)$ — двухкомпонентная вектор-функция с компонентами $\varphi_i(t)$, $i = 0, 1$, класса $C^2[\alpha, \beta]$.

Предположим, что вронскиан функций $\varphi_i(t)$, $i = 0, 1$, отделен от нуля на отрезке $[\alpha, \beta]$, т. е. выполнено условие

(A)

$$|\det(\varphi, \varphi')(t)| \geq c > 0 \qquad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Рассмотрим систему двумерных векторов $\mathbf{a}^*_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_{j+1})$ и положим

$A_k \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x_k), \varphi(x_{k+1}))$, $h \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}}(x_{j+1} - x_j)$. Заметим, что

$$\det A_k = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) \\ \varphi_0(x_{k+1}) & \varphi_1(x_{k+1}) \end{vmatrix} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) \\ \varphi'_0(\xi) & \varphi'_1(\xi) \end{vmatrix} d\xi.$$

Ввиду равномерной непрерывности фигурирующих здесь функций на отрезке $[\alpha, \beta]$ при условии (A) можно выбрать $h_0 > 0$ так, что при $0 < h \le h_0$ будет выполнено неравенство $|\det A_k| \ge \frac{c}{2}(x_{k+1} - x_k)$, а значит система векторов $\mathbf{a}_j^*$ образует полную цепочку, и

$$\det A_k^{-1} \le 2c^{-1}(x_{k+1} - x_k)^{-1} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Пусть $S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2})$, $G \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha, \beta)\backslash X$.

Определим функции $\omega_j^*(t)$ на множестве G аппроксимационными соотношениями

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j^* \omega_j^*(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in G, \qquad \operatorname{supp} \omega_j^* \subset \overline{S_j} \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что

$$\mathbf{a}_{k-1}^* \omega_{k-1}^* + \mathbf{a}_k^* \omega_k^* \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

откуда

$$\omega_{k-1}^*(t) \equiv \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_k^*)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}^*, \mathbf{a}_k^*)}, \qquad \omega_k^*(t) \equiv \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}^*, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{k-1}^*, \mathbf{a}_k^*)}.$$

Таким образом, имеем

$$\omega_j^*(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}^*, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}^*, \mathbf{a}_j^*)} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}) \\ \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}^*)}{\det(\mathbf{a}_j^*, \mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}) \\ 0 \quad \text{при } t \in G\backslash S_j. \end{cases}$$

Ввиду предположения (A) система функций $\{\omega_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — линейно независимая система. Легко видеть, что функции ω_j^* могут быть продолжены на интервал (α, β) непрерывным образом.

Рассмотрим пространство $\mathbb{S}_{\varphi,X}^* \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}(\{\omega_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}})$; здесь $\mathcal{L}(\ldots)$ означает линейную оболочку множества функций, указанных в круглых скобках, а Cl_p — замыкание этого множества в топологии поточечной сходимости.

Функции ω_j^* называются *координатными* B_φ-сплайнами, пространство $\mathbb{S}_{\varphi,X}^*$ — *пространством B_φ-сплайнов*, а вектор-функция $\varphi(t)$ — вектор-функцией, *порождающей* это пространство на сетке X.

1.2. Биортогональная система функционалов

В пространстве $C(\alpha,\beta)$ рассмотрим систему функционалов $\{g_i^*\}_{i\in\mathbb{Z}}$, определяемых на функциях $u\in C(\alpha,\beta)$ формулой $\langle g_i^*,u\rangle = u(x_{i+1})$. Легко проверить, что эта система является продолжением системы функционалов, биортогональной системе функций $\{\omega_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Соотношение (1.3) перепишем в виде

$$A_k\omega_{(k)}(t)=\varphi(t) \qquad \forall t\in(x_k,x_{k+1}) \quad \forall k\in\mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

где $\omega_{(k)}(t) \overset{\text{def}}{=} (\omega_{k-1}^*(t),\omega_k^*(t))^T$, $t\in(x_k,x_{k+1})$.

Пусть $g_{(k)} \overset{\text{def}}{=} (g_{k-1}^*,g_k^*)^T$. Ввиду упомянутой выше биортогональности имеем

$$g_{(k)}\omega_{(k)}^T = I, \tag{2.2}$$

где I — единичная матрица второго порядка. Полагая

$$f_{(k)} \overset{\text{def}}{=} (A_k^T)^{-1}g_{(k)} \tag{2.3}$$

и обозначая f_0^*, f_1^* компоненты вектора $f_{(k)}$, из (2.1)–(2.2) видим, что система функционалов $\{f_0^*,f_1^*\}$ биортогональна системе функций $\{\varphi_0(t),\varphi_1(t)\}$: $\langle f_i^*,\varphi_j\rangle=\delta_{i,j} \quad \forall i,j\in\{0,1\}$.

Поскольку

$$A_k^{-1}=(\det A_k)^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_1(x_{k+1}) & -\varphi_0(x_{k+1})\\ -\varphi_1(x_k) & \varphi_0(x_k)\end{pmatrix},$$

то из (2.3) имеем

$$\langle f_{(k)},u\rangle = (A_k^T)^{-1}\langle g_{(k)},u\rangle =$$

$$=(\det A_k)^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_1(x_{k+1}) & -\varphi_1(x_k)\\ -\varphi_0(x_{k+1}) & \varphi_0(x_k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(x_k)\\ u(x_{k+1})\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\langle f_{(k)},u\rangle = (\det A_k)^{-1}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}u(x_k) & \varphi_1(x_k)\\ u(x_{k+1}) & \varphi_1(x_{k+1})\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}\varphi_0(x_k) & u(x_k)\\ \varphi_0(x_{k+1}) & u(x_{k+1})\end{vmatrix}\end{pmatrix};$$

поэтому

$$\langle f_0^*, u\rangle = \frac{\begin{vmatrix} u(x_k) & \varphi_1(x_k) \\ u(x_{k+1}) & \varphi_1(x_{k+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) \\ \varphi_0(x_{k+1}) & \varphi_1(x_{k+1}) \end{vmatrix}}, \quad \langle f_1^*, u\rangle = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & u(x_k) \\ \varphi_0(x_{k+1}) & u(x_{k+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) \\ \varphi_0(x_{k+1}) & \varphi_1(x_{k+1}) \end{vmatrix}}. \tag{2.4}$$

1.3. Об оценке погрешности

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$\langle g_{k-1}^*, u\rangle\omega_{k-1}(t) + \langle g_k^*, u\rangle\omega_k(t) = \langle f_0^*, u\rangle\varphi_0(t) + \langle f_1^*, u\rangle\varphi_1(t)$$
$$\forall t \in (x_k, x_{k+1}) \quad \forall u \in C\langle\alpha, \beta\rangle. \tag{3.1}$$

Доказательство. Запишем очевидную цепочку соотношений:

$$(\langle g_{k-1}^*, u\rangle, \langle g_k^*, u\rangle)\begin{pmatrix} \omega_{k-1}^*(t) \\ \omega_k^*(t) \end{pmatrix} = \langle g_{(k)}, u\rangle^T\omega_{(k)}(t) =$$
$$= \langle g_{(k)}, u\rangle^T A_k^{-1}\varphi(t) = \Big((A_k^{-1})^T\langle g_{(k)}, u\rangle\Big)^T\varphi(t) =$$
$$= \Big(\langle (A_k^{-1})^T g_{(k)}, u\rangle\Big)^T\varphi(t) = \Big(\langle f_{(k)}, u\rangle\Big)^T\varphi(t).$$

Утверждение (3.1) установлено. ■

Аппроксимацию вида

$$\widetilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}}\langle g_i^*, u\rangle\omega_i^*(t) \tag{3.2}$$

будем называть *биортогональной B_φ-сплайновой аппроксимацией.*

Согласно лемме 1 при $t \in (x_k, x_{k+1})$ имеем

$$\widetilde{u}(t) = \langle f_0^*, u\rangle\varphi_0(t) + \langle f_1^*, u\rangle\varphi_1(t). \tag{3.3}$$

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = (\det A_k)^{-1}\begin{vmatrix} \varphi_0(t) & \varphi_1(t) & u(t) \\ \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & u(x_k) \\ \varphi_0(x_{k+1}) & \varphi_1(x_{k+1}) & u(x_{k+1}) \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Учитывая представления (2.4), для функции $u \in C^2(\alpha,\beta)$ при $t \in (x_k, x_{k+1})$ из (3.3) имеем (3.4). ∎

Лемма 3. *Если $u, v, w \in C^1[a,b]$, то для $x, y, z \in [a,b]$ справедливо соотношение*

$$\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u(y) & v(y) & w(y) \\ u(z) & v(z) & w(z) \end{vmatrix} = \int_x^y d\xi \int_x^z \begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u'(\xi) & v'(\xi) & w'(\xi) \\ u'(\eta) & v'(\eta) & w'(\eta) \end{vmatrix} d\eta. \tag{3.5}$$

Доказательство. Вычтем первую строку из второй строки, а также первую строку — из третьей. К каждой разности применим формулу Ньютона—Лейбница и используем свойства аддитивности определителя; в результате получим формулу (3.5). ∎

Лемма 4. *Если $u, v, w \in C^2[a,b]$, то для $x, y, z \in [a,b]$ верна формула*

$$\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u(y) & v(y) & w(y) \\ u(z) & v(z) & w(z) \end{vmatrix} = \int_x^y d\xi \int_x^z d\eta \int_\xi^\eta \begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u'(\xi) & v'(\xi) & w'(\xi) \\ u''(\zeta) & v''(\zeta) & w''(\zeta) \end{vmatrix} d\zeta. \tag{3.6}$$

Доказательство. Применим формулу Ньютона-Лейбница к двум последним строкам определителя, находящегося под знаком интеграла в формуле (3.5), и используем свойства аддитивности определителя. Результатом окажется формула (3.6). ∎

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (A) и $h \in (0, h_0]$. Предположим, что $\varphi_0, \varphi_1, u \in C^2(\alpha,\beta)$. Тогда для $t \in [x_k, x_{k+1}]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ остаток сплайновой аппроксимации* (3.2) *функции u может быть представлен в виде*

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = (\det A_k)^{-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi \int_{x_k}^t d\eta \int_\xi^\eta \begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & u(x_k) \\ \varphi'_0(\xi) & \varphi'_1(\xi) & u'(\xi) \\ \varphi''_0(\zeta) & \varphi''_1(\zeta) & u''(\zeta) \end{vmatrix} d\zeta. \tag{3.7}$$

Доказательство. Применяя лемму 4 в правой части формулы (3.4) придем к соотношению (3.7).

Теорема доказана. ∎

Следующие утверждения представляются весьма важными; поэтому сформулируем их в виде теорем, хотя благодаря теореме 1 их доказательства оказываются простыми.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для $t \in [x_k, x_{k+1}]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ справедливо представление*

$$u'(t) - \widetilde{u}'(t) = (\det A_k)^{-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi \int_\xi^t \begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & u(x_k) \\ \varphi'_0(\xi) & \varphi'_1(\xi) & u'(\xi) \\ \varphi''_0(\zeta) & \varphi''_1(\zeta) & u''(\zeta) \end{vmatrix} d\zeta. \tag{3.8}$$

Доказательство. Дифференцируя тождество (3.7) по t, получаем соотношение (3.8). ■

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 для $t \in [x_k, x_{k+1}]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ справедливо представление*

$$u''(t) - \widetilde{u}''(t) = (\det A_k)^{-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & u(x_k) \\ \varphi'_0(\xi) & \varphi'_1(\xi) & u'(\xi) \\ \varphi''_0(t) & \varphi''_1(t) & u''(t) \end{vmatrix} d\xi. \qquad (3.9)$$

Доказательство. Для того, чтобы получить представление (3.9), достаточно продифференцировать тождество (3.8) по переменной t. ■

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (A) *и* $h \in (0, h_0]$. *Предположим, что* $\varphi_0, \varphi_1, u \in C^1(\alpha, \beta)$. *Тогда для* $t \in [x_k, x_{k+1}]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ *справедливо представление*

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = (\det A_k)^{-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi \int_{x_k}^{t} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & u(x_k) \\ \varphi'_0(\xi) & \varphi'_1(\xi) & u'(\xi) \\ \varphi'_0(\eta) & \varphi'_1(\eta) & u'(\eta) \end{vmatrix} d\eta. \qquad (3.10)$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1 вплоть до того момента, когда происходит переход ко вторым производным; остальные рассуждения опускаем. ■

Дифференцирование тождества (3.10) по переменной t приводит к следующей теореме.

Теорема 5. *В условиях теоремы 4 для $t \in [x_k, x_{k+1}]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ справедливо представление*

$$u'(t) - \widetilde{u}'(t) = (\det A_k)^{-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi \begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & u(x_k) \\ \varphi'_0(\xi) & \varphi'_1(\xi) & u'(\xi) \\ \varphi'_0(t) & \varphi'_1(t) & u'(t) \end{vmatrix} d\xi. \qquad (3.11)$$

Из теорем 1–5 с учетом соотношения (1.1) легко получаются следующие утверждения.

Теорема 6. *При выполнении соотношения* (1.1) *и условий теоремы 1 верно неравенство*

$$\left\| u^{(i)} - \widetilde{u}^{(i)} \right\|_{C[x_k, x_{k+1}]} \le 2c^{-1}(x_{k+1} - x_k)^{2-i} \times$$

$$\times \sup_{\xi, \zeta \in [x_k, x_{k+1}]} \operatorname{abs} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & u(x_k) \\ \varphi'_0(\xi) & \varphi'_1(\xi) & u'(\xi) \\ \varphi''_0(\zeta) & \varphi''_1(\zeta) & u''(\zeta) \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \qquad (3.12)$$

где символ abs *означает абсолютную величину следующего за этим символом определителя.*

Доказательство соотношения (3.12) очевидным образом вытекают из формул (3.7)–(3.9). ■

Теорема 7. *При условии* (1.1) *и при предположениях теоремы 4 справедливо неравенство*

$$\left\|u^{(i)} - \widetilde{u}^{(i)}\right\|_{C[x_k,x_{k+1}]} \le 2c^{-1}(x_{k+1}-x_k)^{1-i}\times$$

$$\times \sup_{\xi,\zeta\in[x_k,x_{k+1}]} \operatorname{abs}\begin{vmatrix} \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & u(x_k) \\ \varphi_0'(\xi) & \varphi_1'(\xi) & u'(\xi) \\ \varphi_0'(\zeta) & \varphi_1'(\zeta) & u'(\zeta) \end{vmatrix}, \quad i=0,1. \tag{3.13}$$

Доказательство. Формулы (3.13) следуют из (3.10)–(3.11). ■

Замечания. 1. При $x_{k+1}-x_k \to 0$ подынтегральное выражение в формулах (3.7)–(3.9) стремится к обыкновенному дифференциальному оператору, для которого функции $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ образуют фундаментальную систему.

2. Константы в теоремах 6 и 7 могут быть уменьшены при более тщательном вычислении соответствующих интегралов; читатель легко проделает соответствующие выкладки.

2. УСЛОВИЯ ВЛОЖЕННОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Вложенность аппроксимирующих пространств важна для построения приближенных методов конечных элементов и проекционных методов решения здач математической физики, а также для методов обработки информационных числовых потоков. В данном разделе рассматривается вложенность (неполиномиальных) пространств B_φ-сплайнов второго порядка (на вложенных сетках). Заметим, что вложенность пространств полиномиальных сплайнов давно известна (см. [40]); она является частным случае рассматриваемой здесь ситуации: следует лишь взять $\varphi(t) = (1, t, t^2)$.

2.1. Предварительные сведения

Бесконечная система векторов $\{\mathbf{b}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ называется полной цепочкой векторов, если $\det(\mathbf{b}_{j-2}, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j) \neq 0$ при $j \in \mathbb{Z}$ (см. [27]).

На интервале (α, β), также как и в разделе 1, рассмотрим бесконечную сетку X и обозначим

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2}) \cup (x_{j+2}, x_{j+3}),\ j \in \mathbb{Z}, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (x_i, x_{i+1}).$$

Пусть $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — полная цепочка трехмерных векторов.

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$, непрерывную на интервале (α, β). Предположим, что ее компоненты линейно независимы на любом интервале $(a', b') \subset G$.

Зададим функции $\omega_j(t)$, $t \in G$, $j \in \mathbb{Z}$, с помощью аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j\, \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in G, \quad \omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G \backslash S_j,\ j \in \mathbb{Z}. \qquad (1.1)$$

Из соотношений (1.1), рассматриваемых как уравнения относительно $\omega_j(t)$ при каждом фиксированном $t \in G$, находим

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j)} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1},\varphi(t),\mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \frac{\det(\varphi(t),\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_{j+2})}{\det(\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_{j+2})} & \text{при } t \in (x_{j+2}, x_{j+3}), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x_j, x_{j+3}], \end{cases} \tag{1.2}$$

Дальше рассматривается пространство $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ — линейная оболочка функций, указанных в фигурных скобках, а Cl_p — замыкание в топологии поточечной сходимости. Заметим, что ввиду предположений относительно вектор-функции $\varphi(t)$ функции $\omega_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, линейно независимы на множестве G и, следовательно, являются базисом пространства $\mathbb{S}$. Ясно, что пространство $\mathbb{S}$ определяется сеткой X, цепочкой векторов A и вектор-функцией $\varphi(t)$.

2.2. Пространство минимальных сплайнов на укрупненной сетке

Удалим из сетки X узел x_{k+1} и рассмотрим сетку

$$\widetilde{X} : \ldots < \widetilde{x}_{-2} < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < \ldots, \tag{2.1}$$

где $\widetilde{x}_j = x_j$ при $j \le k$ и $\widetilde{x}_j = x_{j+1}$ при $j \ge k+1$. Обозначим

$$\widetilde{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}) \cup (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}) \cup (\widetilde{x}_{j+2}, \widetilde{x}_{j+3}),\ j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}).$$

Пусть $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{\mathbf{a}}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ «— полная цепочка трехмерных векторов такая, что

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_j \quad \text{при } j \le k-1, \qquad \widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_{j+1} \quad \text{при } j \ge k. \tag{2.2}$$

Зададим функции $\widetilde{\omega}_j(t)$, $t \in \widetilde{G}$, $j \in \mathbb{Z}$, с помощью аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_j\, \widetilde{\omega}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widetilde{G}, \quad \widetilde{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_j,\ j \in \mathbb{Z};$$

аналогично формулам (1.2) имеем:

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-2},\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1},\varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-2},\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1},\widetilde{\mathbf{a}}_j)} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}), \\ \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1},\varphi(t),\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1},\widetilde{\mathbf{a}}_j,\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}), \\ \frac{\det(\varphi(t),\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1},\widetilde{\mathbf{a}}_{j+2})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_j,\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1},\widetilde{\mathbf{a}}_{j+2})} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_{j+2}, \widetilde{x}_{j+3}), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+3}], \end{cases} \tag{2.3}$$

Введем пространство $\widetilde{\mathbb{S}} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\,\mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Поскольку функция ω_j зависит от векторов $\mathbf{a}_{j-2}$, $\mathbf{a}_{j-1}$, $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_{j+1}$, $\mathbf{a}_{j+2}$, а функция $\widetilde{\omega}_j$ зависит от векторов $\widetilde{\mathbf{a}}_{j-2}$, $\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}$, $\widetilde{\mathbf{a}}_j$, $\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1}$, $\widetilde{\mathbf{a}}_{j+2}$, то из (2.1)–(2.2) получаем

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \omega_j(t) \quad \text{при } j \le k-3, \quad \widetilde{\omega}_j(t) = \omega_{j+1}(t) \quad \text{при } j \le k+2, \tag{2.4}$$

Из очевидного равенства

$$\sum_j \widetilde{\mathbf{a}}_j \widetilde{\omega}_j = \sum_{j\,'} \mathbf{a}_{j\,'} \omega_{j\,'}$$

после сокращения одинаковых (см. формулы (2.2) и (2.4)) слагаемых находим

$$\sum_{j=k-2}^{k+1} \widetilde{\mathbf{a}}_j \widetilde{\omega}_j = \sum_{j\,'=k-2}^{k+2} \mathbf{a}_{j\,'} \omega_{j\,'}. \tag{2.5}$$

Нас интересуют условия представления первых трех слагаемых левой части через правую часть. Заметим, что вне промежутка $(\widetilde{x}_{k-2}, \widetilde{x}_{k+2})$ упомянутые слагаемые равны нулю; поэтому рассмотрим (2.5) лишь на этом промежутке. Очевидно, что четвертое слагаемое добавляется лишь на интервале $(\widetilde{x}_{k+1}, \widetilde{x}_{k+2})$; последний совпадает с интервалом (x_{k+2}, x_{k+3}). Используя соотношения (2.2), при $t \in (\widetilde{x}_{k+1}, \widetilde{x}_{k+2})$ имеем

$$\widetilde{\omega}_{k+1}(t) = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_k, \varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_k, \widetilde{\mathbf{a}}_{k+1})} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2})}.$$

Заметим также, что согласно формулам (2.2)–(2.3) верно равенство $\widetilde{\mathbf{a}}_{k+1} = \mathbf{a}_{k+2}$. Используя представление (1.2) при $j = k+2$, равенство (2.5) перепишем в виде

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}\widetilde{\omega}_{k-2} + \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}\widetilde{\omega}_{k-1} + \widetilde{\mathbf{a}}_k\widetilde{\omega}_k + \mathbf{a}_{k+2}\frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2})} =$$

$$= \mathbf{a}_{k-2}\omega_{k-2} + \mathbf{a}_{k-1}\omega_{k-1} + \mathbf{a}_k\omega_k + \mathbf{a}_{k+1}\omega_{k+1} + \mathbf{a}_{k+2}\frac{\det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2})}. \tag{2.6}$$

Предположим, что выполнено условие:

(A) справедливо равенство

$$\frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2})} = \frac{\det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2})}.$$

При выполнении условия (A) соотношение (2.6) на интервале $t \in (\widetilde{x}_{k+1}, \widetilde{x}_{k+2})$ принимает вид

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}\widetilde{\omega}_{k-2} + \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}\widetilde{\omega}_{k-1} + \widetilde{\mathbf{a}}_k\widetilde{\omega}_k = \mathbf{a}_{k-2}\omega_{k-2} + \mathbf{a}_{k-1}\omega_{k-1} + \mathbf{a}_k\omega_k + \mathbf{a}_{k+1}\omega_{k+1}; \quad (2.7)$$

из-за полноты цепочки $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ из (2.7) следует, что функции $\widetilde{\omega}_{k-2}$, $\widetilde{\omega}_{k-1}$, $\widetilde{\omega}_k$ являются линейными комбинациями функций ω_{k-2}, ω_{k-1}, ω_k, ω_{k+1}.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *При выполнении условия (A) справедливо включение $\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S}$.*

Замечание. Будем считать, что векторы $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}, j\neq k}$ фиксированы. В таком случае условие (A) можно рассматривать как некоторое условие, наложенное на вектор $\mathbf{a}_k$. Интересно установить, в какой степени это условие ограничивает выбор вектора $\mathbf{a}_k$.

3. БИОРТОГОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ

В данном разделе установлены двусторонние границы биортогональной аппроксимации дважды непрерывно дифференцируемых функций B_φ-сплайнами второго порядка. Получено интегральное представление остатка биортогональной аппроксимации квадратичными сплайнами. Найдены оценки погрешности в некоторых задачах аппроксимации и интерполяции лагранжева типа. Эти оценки достигаются в полиномиальном случае и являются асимптотически оптимальными по порядку N-поперечника стандартных компактов.

3.1. Предварительные сведения

Аппроксимация подпространствами сплайнов, асимптотически точная по порядку N-поперечника стандартных компактов, может быть достигнута различными способами. Среди этих способов особенно интересны те, которые с одной стороны, требуют небольшого числа арифметических действий для построения приближения к заданной функции (т. е. являются «простыми»), а с другой стороны, обладают свойствами точности на подпространстве сплайнов; эти свойства важны для сплайн-вэйвлетных разложений, ибо при этом соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции характеризуются небольшим числом арифметических действий (см. [78]). Такие аппроксимации определяются способом подолжения системы функционалов, биортогональной к системе координатных сплайнов, на объемлющее пространство, и потому называются биортогональными аппроксимациями (см. [92]).

Подпространства минимальных сплайнов характеризуются генерирующей $m+1$-компонентной вектор-функцией $\varphi(t)$, вронскиан компонент которой отличен от нуля. При фиксированной сетке существует единственное подпространство максимальной гладкости — пространство B_φ-сплайнов. На вложенных сетках подпространства B_φ-сплайнов вложены друг в друга.

3.2. Вспомогательные результаты

На конечном интервале (α, β) вещественной оси вновь рассмотрим сетку X (см. раздел 1.1).

Введем трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, компоненты которой будем обозначать $[\varphi]_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, так что $\varphi(t) = ([\varphi]_0(t), [\varphi]_1(t), [\varphi]_2(t))^T$ (символ T означает транспонирование). Предположим, что $[\varphi]_i \in C^2[\alpha, \beta]$, $i = 0, 1, 2$. Представляя $\varphi(t)$ в виде вектор-столбца, будем предполагать, что вронскиан $\det(\varphi, \varphi', \varphi'')(t)$ не обращается в ноль на отрезке $[\alpha, \beta]$. Не нарушая общности, достаточно считать упомянутый вронскиан положительным. В этом случае выполнено условие

(A) *Существуют числа $c > 0$ и $H > 0$ такие, что для любых чисел $x, y \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условию $|x - y| \le H$, справедливо неравенство*

$$\det(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(y)) \ge c.$$

Функция $\det(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(y))$ непрерывна в замкнутой области $\{(x, y) \mid \alpha \le x \le \beta, \ \alpha \le y \le \beta\}$, и потому она равномерно непрерывна в этой области; теперь из предположения о положительности рассматриваемой функции при $x = y$ немедленно следует выполнение условия (A).

При $s \in \mathbb{Z}$ введем сокращенные обозначения

$$\varphi_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_s), \quad \varphi'_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_s), \quad \varphi''_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(x_s).$$

и определим вектор-столбец $\mathbf{a}^*_j$, $j \in \mathbb{Z}$, с помощью символического определителя

$$\mathbf{a}^*_j \stackrel{\text{def}}{=} = -\det \begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Рассмотрим сеточный параметр h_X,

$$h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j \in \mathbb{Z}} (x_{j+1} - x_j),$$

и будем считать $h_X < H$. Из условия (A) при достаточно малом h_X следует, что цепочка векторов $\{\mathbf{a}^*_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, определенная формулами (2.1), — полная (см. [38]), т. е. выполнены соотношения

$$\det(\mathbf{a}^*_{j-2}, \mathbf{a}^*_{j-1}, \mathbf{a}^*_j) \ne 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Пусть трехкомпонентные вектор-столбцы $\mathbf{b}_s$ определены тождествами

$$\mathbf{b}_s^T \mathbf{x} \equiv \det(\varphi_s, \varphi_s', \mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{b}_s^T \mathbf{a}_j^* = -\det \begin{pmatrix} \det(\varphi_s, \varphi_s', \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_s, \varphi_s', \varphi_{j+1}') \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi_{j+2}', \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi_{j+2}', \varphi_{j+1}') \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Цепочка векторов $\{\mathbf{b}_s^T\}$ локально ортогональна (см. [38]) цепочке векторов $\{\mathbf{a}_j^*\}$, а именно из (2.2) получаем

$$\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j-2}^* = \mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j-1}^* = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Ввиду полноты цепочки $\{\mathbf{a}_j^*\}$ справедливы соотношения

$$\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^* \neq 0, \qquad \mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j-3}^* \neq 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Сплайны $\omega_j^*(t)$ определяются из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_j^* \omega_j^*(t) \equiv \varphi(t) \tag{2.5}$$

$$\forall t \in (x_k, x_{k+1}) \; \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{supp} \omega_j^* = [x_j, x_{j+3}] \; \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что при $t \in (x_k, x_{k+1})$ соотношение (2.5) можно переписать в виде

$$\mathbf{a}_{k-2}^* \, \omega_{k-2}^*(t) + \mathbf{a}_{k-1}^* \, \omega_{k-1}^*(t) + \mathbf{a}_k^* \, \omega_k^*(t) \equiv \varphi(t). \tag{2.7}$$

Теорема 1. *Сплайны* ω_{k-2}^*, ω_{k-1}^*, ω_k^*, *на интервале* (x_k, x_{k+1}) *могут быть представлены равенствами*

$$\omega_{k-2}^*(t) = \frac{\mathbf{b}_{k+1}^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k-2}^*}, \tag{2.8}$$

$$\omega_{k-1}^*(t) = \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^*} - \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^*} \frac{\mathbf{b}_k^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_k^T \mathbf{a}_k^*}, \tag{2.9}$$

$$\omega_k^*(t) = \frac{\mathbf{b}_k^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_k^T \mathbf{a}_k^*}, \tag{2.10}$$

причем их правые части зависят разве лишь от векторов

$$\varphi_{k-1}, \; \varphi_{k-1}', \; \varphi_k, \; \varphi_k', \; \varphi_{k+1}, \; \varphi_{k+1}', \; \varphi_{k+2}, \; \varphi_{k+2}', \varphi(t), \; t \in (x_k, x_{k+1}). \tag{2.11}$$

Доказательство. Умножая (2.7) на $\mathbf{b}_k^T$ слева и используя соотношения (2.3)–(2.4) при $j = k$, получаем формулу (2.10). Умножая (2.7) слева на $\mathbf{b}_{k-1}^T$ и применяя упомянутые соотношения при $j = k-1$, а также только что установленную формулу (2.10), находим формулу (2.9). Для доказательства формулы (2.8) достаточно умножить соотношение (2.7) на $\mathbf{b}_{k+1}^T$ слева и снова воспользоваться соотношениями (2.3)–(2.4) при $j = k+1$. Зависимость правых частей формул (2.8)–(2.10) разве лишь от векторов (2.11) очевидна. Теорема доказана. ■

Теорема 2. *Справедливы формулы*

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{b}_j^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_j^*} \qquad \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{2.12}$$

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{b}_j^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_j^*} - \frac{\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_{j+1}^*}{\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_j^*}\frac{\mathbf{b}_{j+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_{j+1}^T\mathbf{a}_{j+1}^*} \qquad \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{2.13}$$

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{b}_{j+3}^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_{j+3}^T\mathbf{a}_j^*} \qquad \text{при } t \in (x_{j+2}, x_{j+3}), \tag{2.14}$$

$$\operatorname{supp}\omega_j^* = [x_j, x_{j+3}]. \tag{2.15}$$

Правые части формул (2.12)–(2.14) определяются вектор»=функцией $\varphi(t)$ при $t \in [x_j, x_{j+3}]$.

Доказательство формул (2.12)–(2.15) легко вытекает из равенств (2.8)–(2.10) и (2.6). ■

Используя условие (A) и определение сплайнов $\omega_j^*(t)$ из соотношений (2.6)–(2.7), видим, что система $\{\omega_j^*(t)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — линейно независимая система.

Пространство, натянутое на координатные B_φ-сплайны ω_j^*, будем обозначать $\mathbb{S}^*(X,\varphi)$,

$$\mathbb{S}^*(X,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_j c_j\omega_j^* \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Используя теорему 2 нетрудно установить (см. [40]), что сплайны ω_j^* непрерывно дифференцируемы, и потому $\mathbb{S}^*(X,\varphi) \subset C^1[\alpha,\beta]$.

Пусть $\{f_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ — система линейных функционалов над пространством $C^1[\alpha,\beta]$, биортогональная к системе сплайнов $\{\omega_j^*(t)\}_{j\in\mathbb{Z}}$:

$$\langle f_s, \omega_j^*\rangle = \delta_{s,j} \qquad \forall s,j \in \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Из аппроксимационных соотношений (2.5)–(2.6) следует, что для выполнения свойства (2.16) достаточно выполнение соотношений

$$\mathbf{a}_s^* = \langle f_s, \varphi\rangle, \qquad \operatorname{supp} f_s \in [x_s, x_{s+1}] \qquad \forall s \in \mathbb{Z}; \tag{2.17}$$

здесь через $\langle f_s, \varphi\rangle$ обозначен вектор с числовыми компонентами, полученный из вектора $\varphi(t)$ покомпонентным применением функционала f_s.

В пространстве $C^1(\alpha, \beta)$ рассмотрим систему линейных функционалов $\{g_s^*\}_{s\in\mathbb{Z}}$, задаваемых формулами

$$\langle g_s^*, u\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} -\det \begin{pmatrix} u_{s+1} & u'_{s+1} \\ \det(\varphi_{s+2}, \varphi'_{s+2}, \varphi_{s+1}) & \det(\varphi_{s+2}, \varphi'_{s+2}, \varphi'_{s+1}) \end{pmatrix}; \tag{2.18}$$

здесь $u \in C^1(\alpha, \beta)$, $u_{s+1} \overset{\mathrm{def}}{=} u(x_{s+1})$, $u'_{s+1} \overset{\mathrm{def}}{=} u'(x_{s+1})$.

Используя формулы (2.1) и (2.18), видим, что при $f_s \overset{\mathrm{def}}{=} g_s^*$ справедливы соотношения (2.17), и потому система линейных функционалов $\{g_s^*\}_{s\in\mathbb{Z}}$ биортогональна системе сплайнов $\{\omega_j^*(t)\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Определение 1. *Биортогональной сплайновой аппроксимацией будем называть выражение*

$$\widetilde{u}^*(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle g_j^*, u\rangle \omega_j^*(t), \qquad t \in (\alpha, \beta). \tag{2.19}$$

Из аппроксимационных соотношений следует, что биортогональная аппроксимация (2.19) точна на компонентах вектор-функции $\varphi(t) = ([\varphi]_0(t), [\varphi]_1(t), [\varphi]_2(t))^T$, т. е. при $u(t) \equiv [\varphi]_i(t)$ имеем $\widetilde{u}^*(t) \equiv [\varphi]_i(t)$, $i = 0, 1, 2$.

Рассмотрим интерполяционную задачу вида

$$\langle g_j^*, \widetilde{u}\rangle = v_j \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{u} \in \mathbb{S}(X, \varphi), \tag{2.20}$$

где v_j — заданные числа. Очевидно, что единственным решением этой задачи служит функция

$$\widetilde{\widetilde{u}}(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j \omega_j^*(t), \qquad t \in (\alpha, \beta). \tag{2.21}$$

3.3. Квадратичные сплайны и биортогональная система функционалов

Если $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, то из аппроксимационных соотношений (2.5)–(2.6) получаются известные квадратичные непрерывно дифференцируемые сплайны $\omega_j^*(t)$ (их будем обозначать $\omega_j(t)$). Линейное пространство, натянутое на эти сплайны, обозначим $\mathbb{S}(X)$.

В этом случае имеем

$$\det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) = (x_{j+2} - x_{j+1})^2, \tag{3.1}$$

$$\det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) = -2(x_{j+2} - x_{j+1}). \tag{3.2}$$

Обозначая соответствующую систему векторов $\mathbf{a}_j^*$ через $\mathbf{a}_j$, из (2.1) и (3.1)–(3.2) имеем

$$\mathbf{a}_j = 2(x_{j+2} - x_{j+1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} \\ x_{j+2}x_{j+1} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Для распространения системы функционалов $\{g_j\}$, биортогональной к базисной системе $\{\omega_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, воспользуемся формулами (2.18). Учитывая соотношения (3.1)–(3.2), находим

$$\langle g_j, u\rangle = 2(x_{j+2} - x_{j+1})\Big(u_{j+1} + \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} u'_{j+1}\Big). \tag{3.4}$$

3.4. Нормализованные квадратичные сплайны

Рассмотрим взаимно биортогональные системы $\{g_i^@\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\omega_j^@\}_{j\in\mathbb{Z}}$, определяемые формулами

$$g_i^@ \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(x_{i+2} - x_{i+1})^{-1} g_i, \qquad \omega_j^@ \overset{\text{def}}{=} 2(x_{j+2} - x_{j+1})\omega_j. \tag{4.1}$$

Интерполяционная задача (2.20) в этом случае может быть записана в виде

$$\widetilde{u}(x_{j+1}) + (x_{j+2} - x_{j+1})\widetilde{u}'(x_{j+1})/2 = v_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{u} \in \mathbb{S}(X), \tag{4.2}$$

а ее решением (2.21) явится сплайн

$$\widetilde{u}(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j \omega_j^@(t), \qquad t \in (\alpha, \beta). \tag{4.3}$$

Введем обозначения $\mathbf{a}_j^@ \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(x_{j+2} - x_j)^{-1}\mathbf{a}_j$, так что $\mathbf{a}_j^@ = (1,\ (x_{j+2} + x_{j+1})/2,\ x_{j+2}x_{j+1})^T$. Очевидно, что

$$\langle g_i^@, \omega_j^@\rangle = \delta_{i,j}, \qquad \mathbf{a}_j^@ = \langle g_j^@, \varphi\rangle, \tag{4.4}$$

а при $t \in (x_k, x_{k+1})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, функции $\omega_j^@(t)$ удовлетворяют аппроксимационным соотошениям

$$\mathbf{a}_{k-2}^@\omega_{k-2}^@(t) + \mathbf{a}_{k-1}^@\omega_{k-1}^@(t) + \mathbf{a}_k^@\omega_k^@(t) \equiv \varphi(t), \tag{4.5}$$

$$\operatorname{supp}\omega_j^{@} \subset (x_j, x_{j+3}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим аппроксимацию функции $u \in C^1(\alpha, \beta)$ вида

$$\widetilde{u}(t) = \langle g_{k-2}^{@}, u\rangle \omega_{k-2}^{@}(t) + \langle g_{k-1}^{@}, u\rangle \omega_{k-1}^{@}(t) + \langle g_k^{@}, u\rangle \omega_k^{@}(t) \tag{4.7}$$

при $t \in (x_k, x_{k+1})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Из (4.3) и (4.5)–(4.6) при $t \in (x_k, x_{k+1})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{x_{k-1}+x_k}{2} & \frac{x_k+x_{k+1}}{2} & \frac{x_{k+1}+x_{k+2}}{2} \\ x_{k-1}x_k & x_k x_{k+1} & x_{k+1}x_{k+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{k-2}^{@}(t) \\ \omega_{k-1}^{@}(t) \\ \omega_k^{@}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Обозначим Δ_k определитель матрицы системы (4.8). Из этой системы при $t \in (x_k, x_{k+1})$ находим $\omega_{k-2}(t)$,

$$\omega_{k-2}^{@}(t) = \frac{1}{2\Delta_k}(x_{k+1} - t)^2 (x_{k+2} - x_k). \tag{4.9}$$

Аналогично при $t \in (x_k, x_{k+1})$ получаем

$$\omega_{k-1}^{@}(t) = -\frac{1}{2\Delta_k}[x_{k-1}x_{k+1}(x_{k+2} - x_k) + x_k x_{k+2}(x_{k+1} - x_{k-1}) -$$

$$-2t(x_{k+1}x_{k+2} - x_{k-1}x_k) + t^2(x_{k+1} + x_{k+2} - x_{k-1} - x_k)]. \tag{4.10}$$

Наконец, для $\omega_k^{@}(t)$ при $t \in (x_k, x_{k+1})$ имеем

$$\omega_k^{@}(t) = \frac{1}{2\Delta_k}(x_k - t)^2 (x_{k+1} - x_{k-1}). \tag{4.11}$$

Поскольку

$$\Delta_k = \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)(x_{k+2} - x_k), \tag{4.12}$$

то из (4.9)–(4.12) находим

$$\omega_{k-2}^{@}(t) = (x_{k+1} - x_{k-1})^{-1}(x_{k+1} - x_k)^{-1}(x_{k+1} - t)^2. \tag{4.13}$$

$$\omega_{k-1}^{@}(t) = (x_{k+1} - x_{k-1})^{-1}(x_{k+1} - x_k)^{-1}(x_{k+2} - x_k)^{-1} \times$$

$$\times [x_{k-1}x_{k+1}(x_k - x_{k+2}) + x_k x_{k+2}(x_{k-1} - x_{k+1}) +$$

$$+2t(x_{k+1}x_{k+2} - x_{k-1}x_k) + t^2(x_{k-1} + x_k - x_{k+1} - x_{k+2})]. \tag{4.14}$$

$$\omega_k^{@}(t) = (x_{k+1} - x_k)^{-1}(x_{k+2} - x_k)^{-1}(x_k - t)^2. \tag{4.15}$$

После подстановки $t = x_k + \tau$, $\tau \in (0, x_{k+1} - x_k)$, из соотношений (4.13)–(4.15) находим (подробности преобразований опускаем):

$$\omega^{@}_{k-2}(x_k + \tau) = (x_{k+1} - x_{k-1})^{-1}(x_{k+1} - x_k)^{-1}(x_{k+1} - x_k - \tau)^2, \tag{4.16}$$

$$\omega^{@}_{k-1}(x_k + \tau) = (x_{k+1} - x_{k-1})^{-1}(x_{k+1} - x_k)^{-1}(x_{k+2} - x_k)^{-1}\times \tag{4.17}$$
$$\times[\tau^2(x_{k-1} + x_k - x_{k+1} - x_{k+2}) + 2\tau(x_{k+1} - x_k)(x_{k+2} - x_k)+$$
$$(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)(x_{k+2} - x_k)],$$
$$\omega^{@}_{k}(x_k + \tau) = (x_{k+1} - x_k)^{-1}(x_{k+2} - x_k)^{-1}\tau^2. \tag{4.18}$$

Вводя обозначения

$$a = x_{k+1} - x_{k-1}, \quad b = x_{k+1} - x_k, \quad c = x_{k+2} - x_k, \tag{4.19}$$

из (4.16)–(4.19) находим

$$\omega^{@}_{k-2}(x_k + \tau) = \frac{1}{ab}(b - \tau)^2, \tag{4.20}$$

$$\omega^{@}_{k-1}(x_k + \tau) = \frac{1}{abc}[-\tau^2(a + c) + 2\tau bc + (a - b)bc], \tag{4.21}$$

$$\omega^{@}_{k}(x_k + \tau) = \frac{1}{bc}\tau^2. \tag{4.22}$$

Замечание 1. *В случае равномерной сетки* $x_j \overset{\text{def}}{=} jh$ *имеем* $a = 2h$, $b = h$, $c = 2h$, *так что из (4.20)–(4.22) при* $\tau \in (0, h)$ *получаем* $\omega^{@}_{k-2}(x_k+\tau) = \frac{1}{2h^2}(h-\tau)^2$, $\omega^{@}_{k-1}(x_k + \tau) = \frac{1}{2h^2}\big((1 - \sqrt{3})\tau + h\big)\big((1 + \sqrt{3})\tau + h\big)$, $\omega^{@}_{k}(x_k + \tau) = \frac{1}{2h^2}\tau^2$.

3.5. Остаток биортогональной аппроксимации

Положим

$$\widetilde{u}(t) \overset{\text{def}}{=} \Big(u_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{2}u'_{k-1}\Big)\omega^{@}_{k-2} + \Big(u_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{2}u'_k\Big)\omega^{@}_{k-1}+$$
$$+\Big(u_{k+1} + \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{2}u'_{k+1}\Big)\omega^{@}_{k}. \tag{5.1}$$

Используя представления (4.20)–(4.22), из (5.1) находим

$$\widetilde{u}(t) = \Big(u_{k-1} + \frac{a - b}{2}u'_{k-1}\Big)\frac{(b - \tau)^2}{ab} + \Big(u_k + \frac{b}{2}u'_k\Big)\times$$

$$\times \frac{1}{abc}[-\tau^2(a+c) + 2\tau bc + (a-b)bc] +$$

$$+\Big(u_{k+1} + \frac{c-b}{2}u'_{k+1}\Big)\frac{\tau^2}{bc}. \tag{5.2}$$

По формуле Тейлора имеем

$$u_{k-1} = u_k + (b-a)u'_k + (b-a)^2\int_0^1 (1-\xi)u''(x_k + \xi(x_{k-1}-x_k))d\xi, \tag{5.3}$$

$$u'_{k-1} = u'_k + (b-a)\int_0^1 u''(x_k + \xi(x_{k-1}-x_k))d\xi, \tag{5.4}$$

$$u_{k+1} = u_k + bu'_k + b^2\int_0^1 (1-\xi)u''(x_k + \xi(x_{k+1}-x_k))d\xi, \tag{5.5}$$

$$u'_{k+1} = u'_k + b\int_0^1 u''(x_k + \xi(x_{k+1}-x_k))d\xi. \tag{5.6}$$

Подставляя (5.3)–(5.6) в (5.2), получаем

$$\widetilde{u}(t) = \Big[u_k + (b-a)u'_k + (b-a)^2\int_0^1 (1-\xi)u''(x_k + \xi(x_{k-1}-x_k))d\xi -$$

$$-\frac{b-a}{2}\Big(u'_k + (b-a)\int_0^1 u''(x_k + \xi(x_{k-1}-x_k))d\xi\Big)\Big] \times$$

$$\times \frac{(b-\tau)^2}{ab} + \Big(u_k + \frac{b}{2}u'_k\Big)\Big(-\tau^2(a+c) + 2\tau bc + (a-b)bc\Big)\frac{1}{abc} +$$

$$+\Big[u_k + bu'_k + b^2\int_0^1 (1-\xi)u''(x_k + \xi(x_{k+1}-x_k))d\xi +$$

$$+\frac{c-b}{2}\Big(u'_k + b\int_0^1 u''(x_k + \xi(x_{k+1}-x_k))d\xi\Big)\Big]\frac{\tau^2}{bc}. \tag{5.7}$$

Подсчитывая коэффициент A при u_k, имеем

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(b-\tau)^2}{ab} + \frac{1}{abc}\Big[-\tau^2(a+c) + 2\tau bc + (a-b)bc\Big] + \frac{\tau^2}{bc} =$$

$$= \frac{1}{abc}[c(b-\tau)^2 - \tau^2(a+c) + 2\tau bc + (a-b)bc + a\tau^2] = 1. \tag{5.8}$$

Теперь подсчитаем коэффициент B при u'_k; получаем

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2abc}[(b-a)(b-\tau)^2 c + (-\tau^2(a+c)b + 2b^2 c\tau +$$

$$+(a-c)b^2c) + a(b+c)\tau^2] = \tau. \tag{5.9}$$

Из (5.7) с помощью равенств (5.8)–(5.9) находим

$$\widetilde{u}(t) = u_k + \tau u'_k + R_k, \tag{5.10}$$

где

$$R_k(t) = \frac{(b-\tau)^2}{ab}(a-b)^2 \int_0^1 (1/2-\xi)u''(x_k + \xi(x_{k-1}-x_k))d\xi +$$

$$+\tau^2 \int_0^1 \Big((1/2-\xi)b/c + 1/2\Big)u''(x_k + \xi(x_{k+1}-x_k))d\xi. \tag{5.11}$$

Теорема 3. *Справедливо следующее представление остатка биортогональной аппроксимации*

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = \tau^2 \int_0^1 (1-\xi)u''(x_k+\xi\tau)d\xi - R_k(t). \tag{5.12}$$

где $R_k(t)$ имеет вид (5.11).

Доказательство. Поскольку

$$u(x_k+\tau) = u_k + \tau u'_k + \tau^2 \int_0^1 (1-\xi)u''(x_k+\xi\tau)d\xi,$$

то при $t \in (x_k, x_{k+1})$ из (5.10)–(5.11) получаем (5.12). ■

3.6. Оценка аппроксимации дважды непрерывно дифференцируемых функций

Из (5.12) при $t \in (x_k, x_{k+1})$ имеем

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \tau^2/2 \max_{y\in[x_k,x_{k+1}]} |u''(y)| + |R_k|. \tag{6.1}$$

Из (5.11) получаем

$$|R_k| \le \frac{(b-\tau)^2}{4ab}(a-b)^2 \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} |u''(x)| + \tau^2 \max_{y\in[x_k,x_{k+1}]} |u''(y)| \Big(\frac{b}{4c} + \frac{1}{2}\Big). \tag{6.2}$$

Из (6.1) и (6.2) имеем

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \tau^2 \Big(\frac{b}{4c} + 1\Big) \max_{y\in[x_k,x_{k+1}]} |u''(y)| +$$

$$+\frac{(b-\tau)^2}{4ab}(a-b)^2 \max_{x\in[x_{k-1},x_k]}|u''(x)|.$$

Принимая во внимание неравенства $\tau \le b$, $b-\tau \le b$, теперь находим

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)| \le \frac{b}{4a}(a-b)^2 \max_{x\in[x_{k-1},x_k]}|u''(x)|+$$

$$+b^2\Big(\frac{b}{4c}+1\Big)\max_{y\in[x_k,x_{k+1}]}|u''(y)|. \tag{6.3}$$

Определение 2. *Сетка X называется локально квазиравномерной, если существует такое число $K_0 \ge 1$, с которым выполнено соотношение*

$$K_0^{-1} \le \frac{x_{i+1}-x_i}{x_i-x_{i-1}} \le K_0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{6.4}$$

Множество сеток X, удовлетворяющих соотношению (6.4), обозначим через $\mathfrak{X}(K_0)$.

Согласно (4.19) из (6.4) имеем

$$a-b = x_k - x_{k-1} \le K_0(x_{k+1}-x_k), \tag{6.5}$$

$$\frac{b}{a} = \Big(\frac{x_{k+1}-x_k+x_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_k}\Big)^{-1} \le (1+K_0^{-1})^{-1}, \tag{6.6}$$

$$\frac{b}{c} = \Big(\frac{x_{k+2}-x_{k+1}+x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}-x_k}\Big)^{-1} \le (1+K_0^{-1})^{-1}. \tag{6.7}$$

Теорема 4. *При условии (6.4) справедлива оценка*

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)| \le (x_{k+1}-x_k)^2\Big[(1+K_0^{-1})^{-1}K_0^2 \max_{x\in[x_{k-1},x_k]}|u''(x)|/4+$$

$$+\Big((1+K_0^{-1})^{-1}/4+1\Big)\max_{y\in[x_k,x_{k+1}]}|u''(y)|\Big]. \tag{6.8}$$

Доказательство. Используя (6.5)–(6.7) в неравенстве (6.3), при $t \in [x_k, x_{k+1}]$ находим (6.8). ∎

3.7. Некоторые вспомогательные утверждения

Определитель
$$w(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} \det(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(y)) \tag{7.1}$$
назовем *продолженным вронскианом.*

Используя свойства аддитивности интеграла и определителя, последовательно получаем (см. также [85]):

$$\det(\varphi_s, {\varphi'}_s, \varphi_p) = \int_{x_s}^{x_p} \det(\varphi_s, {\varphi'}_s, \varphi'(\xi)) d\xi =$$

$$= \int_{x_s}^{x_p} d\xi \int_{x_s}^{\xi} \det(\varphi_s, {\varphi'}_s, \varphi''(\eta)) d\eta.$$

После перестановки порядка интегрирования в полученном соотношении воспользуемся обозначением (7.1); в результате находим

$$\det(\varphi_s, {\varphi'}_s, \varphi_p) = \int_{x_s}^{x_p} (x_p - \eta) w(x_s, \eta) d\eta. \tag{7.2}$$

Аналогичным образом получаем соотношения

$$\det(\varphi_s, {\varphi'}_s, {\varphi'}_p) = \int_{x_s}^{x_p} w(x_s, \eta) d\eta. \tag{7.3}$$

$$\det(\varphi_s, {\varphi'}_s, \varphi(t)) = \int_{x_s}^{t} (t - \eta) w(x_s, \eta) d\eta. \tag{7.4}$$

Справедливо следующее интегральное представление

$$\mathbf{b}_s^T \mathbf{a}_j^* = \int_{x_{j+1}}^{x_s} w(x_s, \eta) \left(\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} (\eta - \zeta) w(x_{j+2}, \zeta) d\zeta \right) d\eta. \tag{7.5}$$

Для его доказательства используем формулу (7.2) и соотношение (7.3); в результате находим

$$\det(\varphi_s, {\varphi'}_s, {\varphi'}_{j+1}) = \int_{x_s}^{x_{j+1}} w(x_s, \eta) d\eta, \tag{7.6}$$

$$\det(\varphi_{j+2}, {\varphi'}_{j+2}, {\varphi'}_{j+1}) = \int_{x_{j+2}}^{x_{j+1}} w(x_{j+2}, \zeta) d\zeta. \tag{7.7}$$

Подставляя правые части равенств (7.6)–(7.7) в определитель (2.2), вынося интегралы $\int_{x_s}^{x_{j+1}} \ldots d\eta$ и $\int_{x_{j+2}}^{x_{j+1}} \ldots d\zeta$ из первой и второй строк полученного определителя (используя при этом аддитивность определителя относительно строк), а также вынося из этих строк общие множители $w(x_s, \eta)$ и $w(x_{j+2}, \zeta)$ соответственно, приходим к интегральному представление (7.5).

Используя аналогичные преобразования для функции $u \in C^1(\alpha, \beta)$, получаем представление

$$\langle g_s^*, u\rangle = \int_{x_{s+1}}^{x_{s+2}} (u_{s+1} + (\zeta - x_{s+1}){u'}_{s+1}) w(x_{s+2}, \zeta) d\zeta. \tag{7.8}$$

3.8. Интегральные представления компонент аппроксимации

Выражения

$$A_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_i^T \varphi(t), \ i = k-1, k, k+1, \quad B_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_{k+1}\mathbf{a}_{k-2}^*, \tag{8.1}$$

$$C_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^*, \ j = k-1, k, \qquad D_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^* \tag{8.2}$$

называются *компонентами аппроксимации.*

Принимая во внимание определение вектора $\mathbf{b}_i$, учитывая обозначения (8.1) и используя соотношение (7.4) при $s = i$, получаем формулу

$$A_i(t) = \int_{x_i}^{t} (t - \eta) w(x_i, \eta) d\eta, \tag{8.3}$$

Применение формулы (7.5) при $s = k+1$, $j = k-2$ приводит к соотношению

$$B_k = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} w(x_{k+1}, \eta) \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\eta - \zeta) w(x_k, \zeta) d\zeta \right) d\eta. \tag{8.4}$$

Аналогично из (7.5) при $s = j$ находим

$$C_j = \int_{x_{j+1}}^{x_j} w(x_j, \eta) \left(\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} (\eta - \zeta) w(x_{j+2}, \zeta) d\zeta \right) d\eta. \tag{8.5}$$

Наконец, применяя формулу (7.5) при $s = k-1$ и $j = k$, получаем соотношение

$$D_k = \int_{x_{k+1}}^{x_{k-1}} w(x_{k-1}, \eta) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} (\eta - \zeta) w(x_{k+2}, \zeta) d\zeta \right) d\eta. \tag{8.6}$$

Формулы (2.12)–(2.15) запишем с использованием компонент аппроксимации

$$\omega_j^*(t) = \frac{A_j(t)}{C_j} \qquad \text{при} \ \ t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{8.7}$$

$$\omega_j^*(t) = \frac{A_j(t)}{C_j} - \frac{D_{j+1}}{C_j}\frac{A_{j+1}}{C_{j+1}} \qquad \text{при } \; t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{8.8}$$

$$\omega_j^*(t) = \frac{A_{j+3}(t)}{B_{j+2}} \qquad \text{при } \; t \in (x_{j+2}, x_{j+3}), \tag{8.9}$$

$$\operatorname{supp} \omega_j^* = [x_j, x_{j+3}]. \tag{8.10}$$

Теперь видно, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *При $t \in [x_k, x_{k+1}]$ функции $\omega_{k-2}(t)$, $\omega_{k-1}(t)$, $\omega_k(t)$ могут быть представлены с помощью продолженного вронскиана $w(x, y)$, а именно, в интегральной форме, определяемой соотношениями (2.8)–(2.10) и компонентами аппроксимации (8.1)–(8.6).*

3.9. Об оценках продолженного вронскиана $w(x, y)$

Положим

$$m_j = \min_{x_{j-2} \le \eta \le x_{j+2}} w(x_j, \eta), \quad M_j = \max_{x_{j-2} \le \eta \le x_{j+2}} w(x_j, \eta). \tag{9.1}$$

Принимая во внимание условие (A), в дальнейшем будем считать, что

$$m_j > 0 \qquad \text{при} \quad j = k-1, k, k+1, k+2.$$

Заметим, что ввиду непрерывности функции $w(x, y)$ для каждого фиксированного $s > 0$ при $|i - j| \le s$ справедливо соотношение

$$\lim_{h_X \to 0} \frac{m_i}{M_j} = 1.$$

В дальнейшем через $o_\delta(1)$ обозначаем бесконечно малую величину при $\delta \to 0$, а через $O(\delta)$ величину, для которой существует константа $C > 0$ такая, что $|O(\delta)/\delta| \le C$ при $\delta \to 0$.

Пусть $\gamma \in (0, 1]$. Через $C^{2,\gamma}$ обозначим класс дважды непрерывно дифференцируемых функций, вторая производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем γ.

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in C^2[\alpha, \beta]$, выполнено условие (A), $x \in (\alpha, \beta)$ и $y \to x$; тогда*

$$\frac{w(x, y)}{w(x, x)} = 1 + o_{y-x}(1),$$

а если $\varphi \in C^{2,\gamma}[\alpha, \beta]$, $\gamma \in (0, 1]$, то

$$\frac{w(x, y)}{w(x, x)} = 1 + O(|y - x|^\gamma).$$

Доказательство очевидно.

Рассмотрим условие

(B_γ) *При некотором фиксированном* $\gamma \in (0,1]$ *справедливо соотношение*

$$\frac{w(y,y)}{w(x,x)} = 1 + O(|y-x|^{1+\gamma}), \quad \frac{w(x,y)}{w(x,x)} = 1 + O(|y-x|^{1+\gamma}).$$

Множество определителей $w(x,y) = \det(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(y))$, которые удовлетворяют условиям (A) и (B_γ) не пусто: такими свойствами обладает определитель $w(x,y)$ при $\varphi(t) = \varphi_{\mathcal{T}}(t)$, где $\varphi_{\mathcal{T}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \cos t, \sin t)^T$. Действительно, в этом случае $w(x,y) = \cos(y-x) = 1 + O((y-x)^2)$, и потому условия (A) и (B_1) выполнены. Всплесковое разложение пространств тригонометрических сплайнов, полученных с помощью генерирующей функции $\varphi_{\mathcal{T}}(t)$ рассмотрено в работе [4].

Теорема 6. *Если отрезок* $[\alpha, \beta]$ *лежит на положительной части вещественной оси (т. е.* $\alpha > 0$*), то в каждом из следующих двух случаев 1)* $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t^3, \ln t)^T$ *и 2)* $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t^{\varkappa+1}, t^{2-\varkappa})^T$, $\varkappa \notin \{-1, 0, 1/2, 1, 2\}$, *выполнены условия* (A) *и* (B_1).

Доказательство. 1. В случае $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t^3, \ln t)^T$ имеем

$$w(x,y) = -3\Big[\Big(\frac{x}{y}\Big)^2 + 2\frac{y}{x}\Big].$$

так что $w(x,x) = -9$, и

$$w(x, x+\Delta x) - w(x,x) = -\frac{3(\Delta x)^2}{x(x+\Delta x)^2} \cdot (3x + 2\Delta x) = O((\Delta x)^2).$$

Таким образом, условия (A) и (B_1) выполнены.

2. В случае $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t^{\varkappa+1}, t^{2-\varkappa})^T$ имеем

$$w(x,y) = (1+\varkappa)(2-\varkappa)\Big[(1-\varkappa)\Big(\frac{y}{x}\Big)^{-\varkappa} - \varkappa\Big(\frac{y}{x}\Big)^{\varkappa-1}\Big],$$

откуда

$$\det(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = w(x,x) = (1+\varkappa)(2-\varkappa)(1-2\varkappa) \neq 0.$$

и

$$w(x, x+\Delta x) - w(x,x) =$$
$$= \frac{1}{2}\varkappa(1-\varkappa^2)(2-\varkappa)(1-2\varkappa)\Big(\frac{\Delta x}{x}\Big)^2 + o\Big(\Big(\frac{\Delta x}{x}\Big)^2\Big);$$

итак, условия (A) и (B_1) выполнены. ∎

Замечание 2. *Из формулы Лиувилля следует, что вронскиан фундаментальной системы решений уравнения $u''' + au' + bu = 0$ с непрерывными коэффициентами $a(x)$ и $b(x)$ является константой, отличной от нуля. Таким образом, если компоненты вектор-функции $\varphi(t)$ представляют собой фундаментальную систему решений упомянутого уравнения, то*

$$\det(\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) \neq 0,$$

и потому $w(x, x) \neq 0$.

Используя неотрицательность ядра в интегральных представлениях (7.2)–(7.5), обозначения (8.1)–(8.2) и границы (9.1) функции w, легко получить двусторонние оценки выражений $A_j(t)$, B_k, C_j и D_k.

В частности, при $t \in [x_k, x_{k+1}]$ из (8.3) получаем неравенства

$$\frac{m_j}{2}(t - x_j)^2 \leq A_j(t) \leq \frac{M_j}{2}(t - x_j)^2, \qquad j = k-1, k, k+1. \tag{9.2}$$

Используя соотношение

$$\int_a^b d\eta \int_b^c (\zeta - \eta) d\zeta = (c-a)(b-a)(c-b)/2,$$

из (8.5)–(8.6) находим следующие неравенства

$$\begin{gathered} m_j m_{j+2}(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+1} - x_j) \leq 2C_j \leq \\ \leq M_j M_{j+2}(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+1} - x_j), \\ m_{k-1} m_{k+2}(x_{k+2} - x_{k-1})(x_{k+2} - x_{k+1})(x_{k+1} - x_{k-1}) \leq 2D_k \leq \\ M_{k-1} M_{k+2}(x_{k+2} - x_{k-1})(x_{k+2} - x_{k+1})(x_{k+1} - x_{k-1}). \end{gathered} \tag{9.3}$$

Предположим, что

$$u_{s+1} + (\zeta - x_{s+1}) u'_{s+1} \geq 0 \qquad \forall \zeta \in (x_{s+1}, x_{s+2}). \tag{9.4}$$

Тогда из (7.8) имеем

$$\begin{gathered} m_{s+2}(x_{s+2} - x_{s+1})(u_{s+1} + (x_{s+2} - x_{s+1}) u'_{s+1}/2) \leq \langle g^*_s, u \rangle \leq \\ \leq M_{s+2}(x_{s+2} - x_{s+1})(u_{s+1} + (x_{s+2} - x_{s+1}) u'_{s+1}/2). \end{gathered} \tag{9.5}$$

Сложнее получается оценка B_k. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 11. *В условиях (5.1)–(5.3) справедлива оценка*

$$\frac{m_k m_{k+1}}{2}(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1}) - R_k \leq$$

$$\leq B_k \leq \frac{M_k M_{k+1}}{2}(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1}) + R_k, \tag{9.6}$$

где $R_k \stackrel{\text{def}}{=} (M_k M_{k+1} - m_k m_{k+1})(x_k - x_{k-1})^3/6$.

Доказательство. Согласно соотношению (8.4) имеем

$$B_k = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} w(x_{k+1}, \eta)\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\eta - \zeta) w(x_k, \zeta) d\zeta\right) d\eta = I_1 + I_2, \tag{9.7}$$

где

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_{k-1}}^{x_k} w(x_{k+1}, \eta)\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\eta - \zeta) w(x_k, \zeta) d\zeta\right) d\eta, \tag{9.8}$$

$$I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x_{k+1}, \eta)\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\eta - \zeta) w(x_{k+1}, \zeta) d\zeta\right) d\eta. \tag{9.9}$$

Внутренний интеграл в (9.8) представим в виде суммы двух слагаемых и каждое из слагаемых оценим сверху и снизу, используя предположения (9.1). Имеем

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\eta - \zeta) w(x_k, \zeta) d\zeta = I_{11}(\eta) + I_{12}(\eta), \tag{9.10}$$

где

$$I_{11}(\eta) = \int_{x_{k-1}}^{\eta} (\eta - \zeta) w(x_k, \zeta) d\zeta, \tag{9.11}$$

$$I_{12}(\eta) = \int_{\eta}^{x_k} (\zeta - \eta) w(x_k, \zeta) d\zeta. \tag{9.12}$$

Ясно, что справедливо неравенство

$$\frac{m_k m_{k+1}}{2}(\eta - x_{k-1})^2 \leq w(x_{k+1}, \eta) I_{11}(\eta) \leq$$
$$\leq \frac{M_k M_{k+1}}{2}(\eta - x_{k-1})^2. \tag{9.13}$$

Кроме того, имеем

$$\frac{m_k m_{k+1}}{2}(\eta - x_k)^2 \leq w(x_{k+1}, \eta) \int_{\eta}^{x_k} (\zeta - \eta) w(x_k, \zeta) d\zeta \leq$$
$$\leq \frac{M_k M_{k+1}}{2}(\eta - x_k)^2; \tag{9.14}$$

из (9.14) выводим

$$-\frac{M_k M_{k+1}}{2}(\eta - x_k)^2 \leq w(x_{k+1}, \eta) I_{12} \leq -\frac{m_k m_{k+1}}{2}(\eta - x_k)^2. \tag{9.15}$$

Складывая неравенства (9.13) и (9.15), получаем

$$\frac{m_k m_{k+1}}{2}(\eta - x_{k-1})^2 - \frac{M_k M_{k+1}}{2}(\eta - x_k)^2 \le w(x_{k+1},\eta)(I_{11}(\eta) + I_{12}(\eta)) \le$$

$$\le \frac{M_k M_{k+1}}{2}(\eta - x_{k-1})^2 - \frac{m_k m_{k+1}}{2}(\eta - x_k)^2. \tag{9.16}$$

Интегрированием соотношения (9.16) по промежутку $[x_{k-1}, x_k]$ с учетом формул (9.8) и (9.10)–(9.12) находим

$$|I_1| \le R_k, \tag{9.17}$$

где $R_k \stackrel{\text{def}}{=} (M_k M_{k+1} - m_k m_{k+1})(x_k - x_{k-1})^3/6$.

Рассматривая внутренний интеграл в (9.9) и учитывая неотрицательность подинтегрального ядра $\eta - \zeta$ при $\eta \in [x_k, x_{k+1}]$, имеем

$$\frac{m_k m_{k+1}}{2}[(x_{k-1} - \eta)^2 - (x_k - \eta)^2] \le w_{k+1}(\eta) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\eta - \zeta) w(x_k, \zeta) d\zeta \le$$

$$\le \frac{M_k M_{k+1}}{2}[(x_{k-1} - \eta)^2 - (x_k - \eta)^2],$$

откуда после интегрирования по интервалу $[x_k, x_{k+1}]$ получаем

$$\frac{m_k m_{k+1}}{6}[(x_{k+1} - x_{k-1})^3 - (x_k - x_{k-1})^3 - (x_{k+1} - x_k)^3] \le$$

$$\le \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x_{k+1}, \eta) \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\eta - \zeta) w_k(\zeta) d\zeta \right) d\eta \le$$

$$\le \frac{M_k M_{k+1}}{6}[(x_{k+1} - x_{k-1})^3 - (x_k - x_{k-1})^3 - (x_{k+1} - x_k)^3].$$

В результате находим

$$\frac{m_k m_{k+1}}{2}(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1}) \le I_2 \le$$

$$\le \frac{M_k M_{k+1}}{2}(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1}). \tag{9.18}$$

Складывая неравенства (9.17) и (9.18) и учитывая соотношение (9.7), получаем (9.6). Лемма доказана. ■

Заменяя обозначения узлов сетки таким образом, что $\overline{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+3}$, $\overline{x}_{j+1} \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+2}$, $\overline{x}_{j+2} \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1}$, $\overline{x}_{j+3} \stackrel{\text{def}}{=} x_j$, т. е. эаменяя обозначения по формуле $\overline{x}_{j+s} \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+3-s}$, $\forall s \in \mathbb{Z}$, получаем замену системы координат на многообразии

$\mathcal{R}$ точек вещественной оси. Ясно, что при этом соответствие $t \to \omega_j(t) \quad \forall t \in \mathcal{R}$ сохраняется, и формулы (8.7)–(8.10) могут быть переписаны в виде

$$\omega_j^*(\bar{t}) = \frac{\overline{A}_j(t)}{\overline{C}_j} \qquad \text{при} \ \ \bar{t} \in (\overline{x}_j, \overline{x}_{j+1}), \tag{9.19}$$

$$\omega_j^*(\bar{t}) = \frac{\overline{A}_j(\bar{t})}{\overline{C}_j} - \overline{D}_{j+1}{}^{-}C_j \frac{\overline{A}_{j+1}}{\overline{C}_{j+1}} \qquad \text{при} \ \ \bar{t} \in (\overline{x}_{j+1}, \overline{x}_{j+2}), \tag{9.20}$$

$$\omega_j^*(\bar{t}) = \frac{\overline{A}_{j+3}(t)}{\overline{B}_{j+2}} \qquad \text{при} \ \ \bar{t} \in (\overline{x}_{j+2}, \overline{x}_{j+3}), \tag{9.21}$$

$$\operatorname{supp} \omega_j^* = [\overline{x}_j, \overline{x}_{j+3}]. \tag{9.22}$$

Из (9.19)–(9.22) видно, что оценки, полученные для $A_j(t)$, B_j, C_j и D_j могут быть применены к $\overline{A}_j(t)$, $\overline{B}_j$, $\overline{C}_j$ и $\overline{D}_j$: достаточно сделать соответствующие надчеркивания во всех оценках. С другой стороны, очевидно, что $\overline{A}_j(t)/\overline{C}_j = A_{j+3}/B_{j+2}$ и т. д. Приведенное обстоятельство позволяет выбирать наилучшие границы в оценках (наибольшую нижнюю границу и наименьшую верхнюю).

4. БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И АППРОКСИМАЦИЯ

В предыдущих разделах (см. разделы 1–3) читатель мог убедиться в том, что использование систем функционалов, биортогональных к системам координатных сплайнов, приводит к простым методам построения вложенных пространств, к интегральным представлениям остатка аппроксимации и к его эффективной оценке. В дальнейшем будет видна существенная роль таких систем для новых подходов к отысканию сплайн-всплескового раложения. В предлагаемом разделе представлены некоторые способы построения биортогональных систем функционалов, и продолжается исследование аппроксимаций, построенных на их основе.

4.1. Биортогональность заданных функционалов к компонентам вектор-функции φ

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое линейное пространство функций $u(t)$ с областью определения $M \subset \mathbb{R}^1$. Рассмотрим $m+1$-компонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ (столбец), компонентами которой являются линейно независимые функции $\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)\}$ из пространства $\mathcal{X}$.

Действие линейного функционала $f \in \mathcal{X}^*$ на функцию $u \in \mathcal{X}$ будем обозначать $\langle f, u\rangle$. Пусть $\mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} (f_0, f_1, \dots, f_m)^T$, где $\{f_0, f_1, \dots, f_m\}$ — система линейных функционалов над $\mathcal{X}$, т. е. $f_i \in \mathcal{X}^*$, $i \in \{0, 1, \dots, m\}$. В дальнейшем часто используется матричная запись, так что, например, $\mathbf{f}\varphi^T$ означает числовую матрицу $m+1$-го порядка вида $(\langle f_i, \varphi_j\rangle)_{i,j\in\{0,1,\dots,m\}}$.

Предположим, что система функционалов $\{f_i\}_{i\in\{0,1,\dots,m\}}$ биортогональная системе функций $\{\varphi_j\}_{j\in\{0,1,\dots,m\}}$, т. е.

$$\mathbf{f}\varphi^T = I, \tag{1.1}$$

где I — квадратная единичная матрица порядка $m+1$.

Для функций $u \in \mathcal{X}$ будем рассматривать представление в виде

$$u(t) = \sum_{i=0}^{m} \langle f_i, u \rangle \varphi_i(t) + R_u(t). \tag{1.2}$$

Пусть $u_i \in \mathcal{X}$, $i = 0, 1, \ldots, m$; согласно (1.2) имеем

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^{m} \langle f_j, u_i \rangle \varphi_j(t) + R_{u_i}(t), \tag{1.3}$$

Вводя обозначение $U(t) \overset{\text{def}}{=} (u_0(t), u_1(t), \ldots, u_m(t))^T$, получаем матричную форму записи соотношений (1.3):

$$U(t) = (\mathbf{f}U^T)^T \varphi(t) + R_U(t), \tag{1.4}$$

где

$$R_U(t) \overset{\text{def}}{=} (R_{u_0}(t), R_{u_1}(t), \ldots, R_{u_m}(t))^T. \tag{1.5}$$

Рассмотрим вектор-функцию (столбец) $\omega(t)$ с компонентами $\{\omega_i(t)\}_{i \in \{0,1,\ldots,m\}}$, полученную из соотношений

$$A\omega(t) = \varphi(t), \tag{1.6}$$

где A — неособенная числовая матрица порядка $m+1$.

Пусть $g_i \in \mathcal{X}^*$, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, — линейно независимая система функционалов, $\mathbf{g} \overset{\text{def}}{=} (g_0, g_1, \ldots, g_m)^T$ — вектор-столбец, компонентами которого являются упомянутые функционалы, $u(t)$ — функция из пространства $\mathcal{X}$, а $\widetilde{\mathcal{X}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m\}$ — подпространство пространства $\mathcal{X}$; здесь $\mathcal{L}\{\ldots\}$ означает линейную оболочку элементов, находящихся в фигурных скобках.

Лемма 1. *Если система функционалов* $\mathbf{g} \overset{\text{def}}{=} (g_0, g_1, \ldots, g_m)^T$ *получена по формуле*

$$\mathbf{g} = A^T \mathbf{f}, \tag{1.7}$$

то она биортогональна системе функций $\{\omega_0(t), \omega_1(t), \ldots, , \omega_m(t)\}$, *так что* $\langle g_i, \omega_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Доказательство. Последовательно учитывая соотношения (1.7), (1.6) и (1.1), имеем $\mathbf{g}\omega^T = A^T \mathbf{f} \omega^T = A^T \mathbf{f}(\varphi^T (A^T)^{-1}) = A^T(\mathbf{f}\varphi^T)(A^T)^{-1} = I$. ∎

Рассмотрим операцию проектирования P пространства $\mathcal{X}$ на подпространство $\widetilde{\mathcal{X}}$, задаваемую формулой

$$P: \quad u \to \widetilde{u}, \quad \text{где} \quad \widetilde{u} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{m} \langle g_i, u \rangle \omega_i(t) \quad \forall u \in \mathcal{X}. \tag{1.8}$$

Используя проектирование (1.8) упомянутых выше элементов u_i, находим

$$\widetilde{u}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{m} \langle g_j, u_i \rangle \omega_j(t), \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Обозначая $\widetilde{U} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_m)^T$, имеем

$$\widetilde{U}(t) = (\mathbf{g}U^T)^T \omega(t). \tag{1.9}$$

Применением соотношений (1.6) и (1.7) из (1.9) выводим $\widetilde{U}(t) = (A^T \mathbf{f} U^T)^T A^{-1} \varphi(t) = (\mathbf{f} U^T)^T A A^{-1} \varphi(t)$, откуда

$$\widetilde{U}(t) = (\mathbf{f}U^T)^T \varphi(t). \tag{1.10}$$

Теорема 1. *Если $\{\varphi_j\}_{j \in \{0,1,\ldots,m\}}$ — линейно независимая система функций в пространстве $\mathcal{X}$, $\{f_i\}_{i \in \{0,1,\ldots,m\}}$ — система функционалов, биортогональная упомянутой системе функций, вектор-функция $R_U(t)$ определена соотношениями (1.4)–(1.5), а функции $\{\omega_j\}_{j \in \{0,1,\ldots,m\}}$ удовлетворяют аппроксимационным соотношениям (1.6) с неособенной матрицей A, то уклонение $\widetilde{U}(t)$ от $U(t)$ определяется равенством*

$$U(t) - \widetilde{U}(t) = R_U(t). \tag{1.11}$$

Доказательство формулы (1.11) вытекает из соотношений (1.4) и (1.10). ∎

4.2. Общий случай (небиортогональная система функционалов)

Отказываясь от предположения, что матрица $\mathbf{f}\varphi^T$ единичная, предположим лишь, что эта матрица неособенная. Вместо представления (1.5)–(1.6) рассмотрим представление вида

$$U(t) = (\mathbf{f}U^T)^T [(\mathbf{f}\varphi^T)^{-1}]^T \varphi(t) + R_U(t). \tag{2.1}$$

Лемма 2. *Если*

$$\mathbf{g} = A^T (\mathbf{f}\varphi^T)^{-1} \mathbf{f}, \tag{2.2}$$

то компоненты вектора $\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} (g_0, g_1, \ldots, g_m)^T$ являются системой функционалов

$\{g_0, g_1, \ldots, g_m\}$, *биортогональной системе функций* $\{\omega_0(t), \omega_1(t), \ldots, , \omega_m(t)\}$, *так что* $\langle g_i, \omega_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Доказательство. Учитывая соотношение (2.2), имеем

$$\mathbf{g}\omega^T = A^T(\mathbf{f}\varphi^T)^{-1}\mathbf{f}\omega^T,$$

так что из (1.6) выводим

$$\mathbf{g}\omega^T = A^T(\mathbf{f}\varphi^T)^{-1}\mathbf{f}(\varphi^T(A^T)^{-1}).$$

Пользуясь ассоциативностью матричного умножения, находим

$$\mathbf{g}\omega^T = A^T(\mathbf{f}\varphi^T)^{-1}(\mathbf{f}\varphi^T)(A^T)^{-1} = I.$$

Лемма локазана. ■

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$U(t) - \widetilde{U}(t) = R_U(t). \tag{2.3}$$

Доказательство. Используя выражения (2.2) и (1.6) в (1.9), имеем

$$\widetilde{U}(t) = (\mathbf{g}U^T)^T\omega(t) = [A^T(\mathbf{f}\varphi^T)^{-1}\mathbf{f}U^T]^T A^{-1}\varphi(t).$$

Транспонируя произведение трех матриц, находящихся в квадратных скобках, получаем

$$\widetilde{U}(t) = (\mathbf{f}U^T)^T[(\mathbf{f}\varphi^T)^{-1}]^T AA^{-1}\varphi(t) = (\mathbf{f}U^T)^T[(\mathbf{f}\varphi^T)^{-1}]^T\varphi(t).$$

Итак,

$$\widetilde{U}(t) = (\mathbf{f}U^T)^T[(\mathbf{f}\varphi^T)^{-1}]^T\varphi(t). \tag{2.4}$$

Теперь формула (2.3) вытекает из соотношений (2.1) и (2.4). ■

4.3. О вариантах реализации системы функционалов, биортогональной к заданной системе функций

Рассмотрим вопрос о продолжении на пространство $C(\alpha, \beta)$ системы функционалов, биортогональной к заданной линейно независимой системе функций.

Пусть $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$, где $\varphi_i \in C(\alpha, \beta)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $t \in (\alpha, \beta)$. Рассмотрим систему $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ функционалов $f_i \in C^*(\alpha, \beta)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, вида

$$\langle f_i, u\rangle = \sum_{j=0}^{m} c_{i,j} u(\xi_j) \quad \forall u \in C(\alpha, \beta) \tag{3.1}$$

со свойствами

$$\langle f_i, \varphi_s\rangle = \delta_{i,s} \qquad \forall s \in \{0, 1, \ldots, m\}; \tag{3.2}$$

здесь $\{\xi_j\}_{j=0,1,\ldots,m}$ — сетка в интервале (α, β), т. е.

$$\Xi: \quad \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m, \qquad \xi_j \in (\alpha, \beta) \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, m\}. \tag{3.3}$$

Из (3.1)–(3.3) имеем

$$\sum_{j=0}^{m} c_{i,j} \varphi_s(\xi_j) = \delta_{i,s} \quad \forall i, s \in \{0, 1, \ldots, m\}. \tag{3.4}$$

Вводя квадратные матрицы порядка $m+1$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} (c_{i,j})_{i,j\in\{0,1,\ldots,m\}}, \qquad \Phi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(\xi_0), \varphi(\xi_1), \ldots, \varphi(\xi_m)),$$

соотношения (3.4) перепишем в виде

$$C\Phi^T = I. \tag{3.5}$$

Предполагая, что существует обратная матрица Φ^{-1} (это справедливо, например, в случае, когда система функций $\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$ чебышевская), из (3.5) имеем

$$C = (\Phi^T)^{-1}. \tag{3.6}$$

Введем обозначение $\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} (u(\xi_0), u(\xi_1), \ldots, u(\xi_m))^T$. Из (3.1) получаем

$$(\langle f_0, u\rangle, \langle f_1, u\rangle, \ldots, \langle f_m, u\rangle)^T = C\mathcal{U},$$

так что из (3.6) выводим

$$\Phi^T(\langle f_0, u\rangle, \langle f_1, u\rangle, \ldots, \langle f_m, u\rangle)^T = \mathcal{U}. \tag{3.7}$$

Теорема 3. *Пусть для сетки Ξ матрица $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(\xi_0), \varphi(\xi_1), \ldots, \varphi(\xi_m))$ обратима, $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \det \Phi$, а определитель $\Delta_i(u)$ получается из Δ заменой i-й строки на строку $\mathcal{U}^T$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Тогда система функционалов $f_0, f_1, \ldots, f_m$, $f_i \in (C(\alpha, \beta))^*$, заданная на функциях $u \in C(\alpha, \beta)$ формулами*

$$\langle f_i, u\rangle = \frac{\Delta_i(u)}{\Delta}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{3.8}$$

является продолжением на пространство $C(\alpha,\beta)$ системы функционалов, биортогональной системе функций $\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_m$.

Доказательство. Доказываемое утверждение следует из формул (3.1)–(3.7). ∎

Пусть сетка (3.3) зависит от параметра $h>0$, так что $\xi_i(h)=\xi_0+ih$, $i=0,1,\dots,m$.

Теорема 4. *Предположим, что $u\in C^{(m)}(\alpha,\beta)$ и $\varphi_i\in C^{(m)}(\alpha,\beta)$, $i=0,1,\dots,m$. Пусть вронскиан $W(\xi_0)\overset{\text{def}}{=}\det(\varphi(\xi_0),\varphi'(\xi_0),\dots,\varphi^{(m)}(\xi_0))$ отличен от нуля*

$$W(\xi_0)\neq 0. \tag{3.9}$$

Тогда существует такое $h_0>0$, что при $h\in(0,h_0)$ линейные функционалы $f_i=f_i(h)$, определяемые формулами (3.8), равномерно ограничены по норме, как функционалы, действующие в пространстве $C^{(m)}(\alpha,\beta)$:

$$\|f_i(h)\|_{(C^{(m)}(\alpha,\beta))^*}\le C_0\quad\forall h\in(0,h_0). \tag{3.10}$$

Доказательство. В условиях теоремы рассматриваемые объекты зависят и от h: $\Delta=\Delta(h)$, $\Delta_i(u)=\Delta_i(h;u)$; при этом

$$W(\xi_0)=\lim_{h\to+0}\Delta(h)=\lim_{h\to+0}\det(\varphi(\xi_0),\varphi(\xi_1(h)),\dots,\varphi(\xi_m(h)))=$$

$$=\det(\varphi(\xi_0),\varphi'(\xi_0),\dots,\varphi^{(m)}(\xi_0)),\qquad W_i(\xi_0;u)\overset{\text{def}}{=}\lim_{h\to+0}\Delta_i(h;u); \tag{3.11}$$

здесь $W_i(\xi_0;u)$ получается из $W(\xi_0)$ заменой i-й строки на строку $(u(\xi_0),u'(\xi_0),\dots,u^{(m)}(\xi_0))$. Из-за предположения (3.9) благодаря непрерывности рассматриваемых функций найдется такие $h_0>0$ и $c>0$, что

$$|W(\xi)|\ge c>0\quad\forall\xi\in[\xi_0,\xi_0+mh_0]\subset(\alpha,\beta). \tag{3.12}$$

Из формул (3.8)–(3.9), (3.11)–(3.12) следует соотношение (3.10). ∎

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4, $W(\xi_0)\overset{\text{def}}{=}\det(\varphi(\xi_0),\varphi'(\xi_0),\dots,\varphi^{(m)}(\xi_0))$, а $W_i(\xi_0,u)$ получается из $W(\xi_0)$ заменой i»=й строки на строку $(u(\xi_0),u'(\xi_0),\dots,u^{(m)}(\xi_0))$. Тогда функционалы $f_i^{\langle 0\rangle}$, определяемые формулами*

$$\langle f_i^{\langle 0\rangle},u\rangle\overset{\text{def}}{=}\frac{W_i(\xi_0,u)}{W(\xi_0)}, \tag{3.13}$$

ограничены в пространстве $C^{(m)}(\alpha,\beta)$ и представляют собой систему функционалов, биортогональную к системе функций $\{\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$.

Доказательство. Доказываемое утверждение следует из формул (3.8)–(3.12). ■

Следствие 1. *В условиях теорем 4 и 5 справедливы представления*

$$\langle f_i(h), u\rangle = \langle f_i^{\langle 0\rangle}, u\rangle + o_{i,\varphi,u}(1) \quad i \in \{0,1,2,\dots,m\}, \qquad \text{где} \quad \lim_{h\to+0} o_{i,\varphi,u}(1) = 0; \tag{3.14}$$

кроме того,

$$o_{i,\varphi,\varphi_j}(1) = 0 \quad \forall i,j \in \{0,1,2,\dots,m\}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Соотношения (3.14) вытекают из теорем 4 и 5, а формулы (3.15) получаются из (3.14), если учесть, что системы функционалов $\{f_i(h)\}_{i=0,1,\dots,m}$ и $\{f_i^{\langle 0\rangle}\}_{i=0,1,\dots,m}$ биортогональны системе функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$:

$$\langle f_i^{\langle 0\rangle}, \varphi_j\rangle = \langle f_i(h), \varphi_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i,j \in \{0,1,\dots,m\}.$$

■

Замечание 1. Вместо функционалов (3.1)–(3.2) рассмотрим функционалы вида

$$\langle f_{i,\eta}, u\rangle = \sum_{j=0}^{m} c_{i,j} u_\eta(\xi_j) \quad \forall u \in C(\alpha,\beta)$$

со свойствами

$$\langle f_{i,\eta}, \varphi_s\rangle = \delta_{i,s} \qquad \forall s \in \{0,1,\dots,m\}, \tag{3.16}$$

где

$$u_\eta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 K(\tau) u(t+\eta\tau)\, d\tau,$$

$K(\tau)$ — ядро усреднения (возможно, с рядом нулевых моментов).

Свойства (3.16) приведут к аналогам соотношений (3.10)–(3.13), так что, например, при $m = 1$ и $h \to +0$ получим

$$\langle f_0, u\rangle = \frac{\left|\begin{pmatrix} u_\eta(x_0) & (\varphi_1)_\eta(x_0) \\ {u_\eta}'(x_0) & ({\varphi'}_1)_\eta(x_0) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} (\varphi_0)_\eta(x_0) & (\varphi_1)_\eta(x_0) \\ ({\varphi'}_0)_\eta(x_0) & ({\varphi'}_1)_\eta(x_0) \end{pmatrix}\right|} + \tilde{o}_{0(u)}(1), \tag{3.17}$$

причем $\lim_{h\to+0}\tilde{o}_{0(u)}(1)=0 \qquad \tilde{o}_{0(\varphi_j)}(1)=0 \qquad$ *при* $\quad j\in\{0,1\}$, *а также*

$$\langle f_1,u\rangle=\frac{\left|\begin{pmatrix}(\varphi_0)_\eta(x_0) & u_\eta(x_0)\\ (\varphi'_0)_\eta(x_0) & {u_\eta}'(x_0)\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}(\varphi_0)_\eta(x_0) & (\varphi_1)_\eta(x_0)\\ (\varphi'_0)_\eta(x_0) & (\varphi'_1)_\eta(x_0)\end{pmatrix}\right|}+\tilde{o}_{1(u)}(1), \tag{3.18}$$

и $\lim_{h\to+0}\tilde{o}_{1(u)}(1)=0 \qquad \tilde{o}_{1(\varphi_j)}(1)=0 \qquad$ *при* $\quad j\in\{0,1\}$. *Заметим еще, что функционалы (3.17) и (3.18) при фиксированном* $\eta>0$ *ограничены в* $C(\alpha,\beta)$ *(однако, при* $\eta\to 0$ *равномерной ограниченности нет).*

5. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРОСТРАНСТВ ГЛАДКИХ СПЛАЙНОВ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Основой исследований в теории минимальных сплайнов являются аппроксимационные соотношения, появившиеся первоначально в методе конечных элементов и названные С. Г. Михлиным фундаментальными соотношениями (см. [33,48,98]). На использовании упомянутых соотношений базируются не только свойства аппроксимации, гладкости и интерполяции (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов, но также и вэйвлетные разложения соответствующих пространств. Центральной структурой в этих построениях является цепочка вложенных пространств. Проблема построения таких цепочек в случае пространств неполиномиальных сплайнов на неравномерных сетках решалась в работах [8, 14, 18, 23, 75, 79, 92]. В них построены такие цепочки в случае пространств гладких сплайнов (называемых B_φ-сплайнами) с первого по пятый порядок; в работе [26] построены пространства сплайнов любых порядков (в том числе и пространства B_φ-сплайнов), но вложенность установлена лишь для специальных (но негладких) сплайновых пространств.

В данном разделе установлены необходимые и достаточные условия существования и гладкости пространств (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов, и доказано, что во множестве таких пространств порядка m существует единственное (при фиксированной сетке) пространство класса C^{m-1} (оно оказывается пространством B_φ-сплайнов). Кроме того, доказана вложенность пространств B_φ-сплайнов порядка m, построенных на вложенных сетках, и найдены калибровочные соотношения для их координатных функций.

Предлагаемый подход состоит в исследовании зависимости построенных сплайнов от значений генерирующей вектор-функции $\varphi(t)$ и ее производных в узлах сетки X; благодаря этому подходу удается избежать громоздких выкладок, сопровождавших предыдущие исследования (см., например, 14), и значительно расширить область применения получаемых результатов.

5.1. Пространства $(X, \mathbf{A}, \varphi)$-сплайнов порядка m

Здесь введем (вообще говоря, неполиномиальные) минимальные сплайны на конечном или бесконечном интервале (α, β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ с сеткой X (см. раздел 1).

Пусть $\varphi(t)$ — $m+1$-компонентная вектор-функция (вектор-столбец) с компонентами из $C^m[\alpha, \beta]$, такая, что вронскиан ее компонент отделен от нуля:

$$|\det(\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(m)})(t)| \geq c > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \tag{1.1}$$

Как было определено в разделе 1, упорядоченное множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m+1}$ называется цепочкой векторов; для одной и той же цепочки допустимы различные нумерации; при этом две различные нумерации могут отличаться лишь постоянным слагаемым и направлением нумерации, например, $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$ с $j' = -j + j_0$ (где j_0 — целочисленная константа) представляет собой другую нумерацию той же самой цепочки.

Цепочка $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ называется *локально ортогональной* цепочке $\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, если существуют такие нумерации, при которых

$$\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j-p} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad p \in I_m, \tag{1.2}$$

где $I_m \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, m\}$.

Лемма 1. *Если цепочка* $\mathbf{A}$ *локально ортогональна к цепочке* $\mathbf{B}$*, то и цепочка* $\mathbf{B}$ *локально ортогональна к цепочке* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Соотношения (1.2) перепишем в эквивалентном виде

$$\mathbf{a}_j^T \mathbf{b}_{j+p} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad p \in I_m;$$

перенумеруем цепочку $\{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, полагая $\mathbf{b}_{\langle j\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_{j-m-1}$. В результате получим

$$\mathbf{a}_j^T \mathbf{b}_{\langle j-p\rangle} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad p \in I_m,$$

что и требовалось доказать. ∎

Итак, локальная ортогональность симметрична, так что в рассматриваемой ситуации цепочки $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно называть *локально ортогональными.* Цепочка $\mathbf{A}$ называется *невырожденной цепочкой векторов*, если среди векторов цепочки нет нулевых векторов; в противном случае цепочка называется *вырожденной.*

Пусть $A_j \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\mathbf{a}_{j-m}, \mathbf{a}_{j-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\Big)$. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой n-мерных векторов*, если $\det A_j \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Ясно, что полная цепочка является невырожденной. Совокупность всех полных цепочек будем обозначать $\mathcal{A}$.

Лемма 2. *Пусть цепочки* $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *и* $\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *локально ортогональные и невырожденные. Тогда цепочка* $\mathbf{A}$ *является полной, если и только если полной является цепочка* $\mathbf{B}$.

Доказательство. Предположим, что цепочка $\mathbf{B}$ полная. Докажем методом от противного, что в этом случае полной будет и цепочка $\mathbf{A}$. Итак, если $\mathbf{A}$ не является полной, то найдется такое j, что имеется представление $\mathbf{a}_j = c_1\mathbf{a}_{j-1} + c_2\mathbf{a}_{j-2} + \ldots + c_m\mathbf{a}_{j-m}$, где $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^1$. Ввиду предположенной локальной ортогональности отсюда (см. (1.2)) получаем

$$\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_j = 0. \tag{1.3}$$

Используя снова условие локальной ортогональности (1.2), находим

$$\mathbf{b}_{j+p}^T\mathbf{a}_j = 0 \qquad p \in I_m. \tag{1.4}$$

Из соотношений (1.3) и (1.4) видно, что $\mathbf{a}_j = 0$. Полученное противоречие доказывает, что цепочка $\mathbf{A}$ полная. Первая часть леммы доказана. Вторая ее часть доказывается аналогично. ■

Лемма 3. *Если цепочки* $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *и* $\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *полные и выполнено соотношение (1.2), то*

$$\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_j \neq 0, \qquad \mathbf{b}_{j+m+1}^T\mathbf{a}_j \neq 0. \tag{1.5}$$

Доказательство первого из соотношений (1.5) получается от противного: если существует номер j, для которого выполнено (1.3), то ввиду формул (1.4) получаем $\mathbf{a}_j = 0$, что противоречит полноте цепочки $\mathbf{A}$. Доказательство второго соотношения также легко получается от противного. ■

Лемма 4. *Какова бы ни была полная цепочка векторов, существует невырожденная локально ортогональная ей цепочка; направления векторов последней определяются однозначно (с точностью до постоянного множителя).*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — полная цепочка векторов. Зафиксируем целое число k и найдем вектор $\mathbf{b}_k$ из условий

$$\mathbf{b}_k^T\mathbf{a}_{k-p} = 0, \qquad p \in I_m. \tag{1.6}$$

Условия (1.6) можно представить в виде линейной системы уравнений относительно вектора $\mathbf{b}_k$:

$$(\mathbf{a}_{k-m}, \mathbf{a}_{k-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_{k-1})^T\mathbf{b}_k = 0. \tag{1.7}$$

Ввиду полноты цепочки $\mathbf{A}$ векторы $\mathbf{a}_{k-m}, \mathbf{a}_{k-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ линейно независимы. Следовательно, система (1.7) имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) ненулевое решение $\mathbf{b}_k$, которое может быть определено, например, тождеством

$$\mathbf{b}_k^T \mathbf{x} \equiv \det(\mathbf{a}_{k-m}, \mathbf{a}_{k-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{x}).$$

Лемма доказана. ■

Следствие 1. *Какова бы ни была полная цепочка, существует локально ортогональная ей полная цепочка, определяемая однозначно с точностью до ненулевых постоянных множителей.*

Доказательство вытекает из лемм 2 и 4. ■

Пусть

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}}\,(x_j, x_{j+1}), \quad S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+m+1}], \quad J_k \stackrel{\text{def}}{=} \{k-m, k-m+1, \ldots, k\}.$$

Считая, что $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, определим функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$, из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_{j'}\omega_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1})\ \forall k \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{supp}\omega_j \subset S_j\ \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

При каждом фиксированном $t \in (x_k, x_{k+1})$ соотношения (1.8) содержат не более $m+1$ ненулевых слагаемых:

$$\sum_{j=k-m}^{k} \mathbf{a}_j\omega_j(t) \equiv \varphi(t); \tag{1.9}$$

при указанном t соотношения (1.9) будем рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$.

Используя теорему Крамера и произвольно фиксируя $j \in \mathbb{Z}$, в соотношениях (1.9) последовательно полагаем $k = j$, $k = j+1$, $k = j+2$, $\ldots$, $k = j+m$; в результате получаем

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j}\ ||'^{j}\ \varphi(t)\Big)}{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k}\Big)} \ \text{ при } t \in (x_k, x_{k+1}), \quad k-j \in I_{m+1}; \tag{1.10}$$

здесь столбцы в определителях числителя и знаменателя одинаково упорядочены, а символ $||'^{j}\ \varphi(t)$ означает, что вектор-столбец $\varphi(t)$ следует поставить вместо вектор-столбца $\mathbf{a}_j$.

Благодаря предположению (1.1) функции ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, образуют линейно независимую систему. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathbb{S}_m(X, \mathbf{A}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}},$$

где $\mathcal{L}$ означает линейную оболочку, а Cl_p означает замыкание в топологии поточечной сходимости. Пространство $\mathbb{S}_m(X, \mathbf{A}, \varphi)$ называется пространством минимальных $(X, \mathbf{A}, \varphi)$-сплайнов порядка m.

5.2. Непрерывность и непрерывная дифференцируемость минимальных сплайнов

Рассмотрим возможность продолжения функций ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, и их производных непрерывным образом на интервал (α, β).

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— полная цепочка векторов, и пусть фиксированы числа* $k \in \mathbb{Z}$ *и* $t_* \in [x_k, x_{k+1}]$. *Для того чтобы*

$$\lim_{t\to t_*,\ t\in(x_k,x_{k+1})} \omega_j(t) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j} \ \| \ {}'^j\varphi(t_*)\Big) = 0.$$

Доказательство вытекает из формулы (1.10).

Лемма 6. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— полная цепочка векторов. Для того, чтобы в узле* x_k *выполнялись условия*

$$\lim_{t\to x_k-0} \omega_{k-m-1}(t) = 0, \qquad \lim_{t\to x_k+0} \omega_k(t) = 0, \tag{2.1}$$

необходимо, а если $\mathbf{a}_{k-m-1}$ *и* $\mathbf{a}_k$ *не коллинеарны, то и достаточно, чтобы были справедливы соотношения*

$$\lim_{t\to x_k-0} \omega_j(t) = \lim_{t\to x_k+0} \omega_j(t) \ \textit{при}\ \ j \in \{k-m, k-m+1, \ldots, k-2, k-1\}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Необходимость. Заменяя k на $k-1$ в соотношении (1.9), имеем

$$\sum_{j=k-m-1}^{k-1} \mathbf{a}_j \omega_j(t) \equiv \varphi(t), \quad t \in (x_{k-1}, x_k) \tag{2.3}$$

откуда в пределе при $t \to x_k - 0$ ввиду первого из предположений (2.1) получаем

$$\sum_{j=k-m}^{k-1} \mathbf{a}_j \omega_j(x_k - 0) = \varphi(x_k). \tag{2.4}$$

Аналогично из (1.9) и из второго соотношения в (2.1) при $t \to x_k + 0$ находим

$$\sum_{j=k-m}^{k-1} \mathbf{a}_j \omega_j(x_k + 0) = \varphi(x_k). \tag{2.5}$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}_{k-m}, \mathbf{a}_{k-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ линейно независимы, то из равенств (2.4)–(2.5) следуют соотношения (2.2). Необходимость доказана.

Перейдем к доказательству достаточности. Используя (2.3), найдем

$$\sum_{j=k-m-1}^{k-1} \mathbf{a}_j \omega_j(x_k - 0) = \varphi(x_k), \tag{2.6}$$

а из (1.9) имеем

$$\sum_{j=k-m}^{k} \mathbf{a}_j \omega_j(x_k + 0) = \varphi(x_k). \tag{2.7}$$

Вычитая (2.7) из (2.6) и принимая во внимание соотношения (2.2), находим $\mathbf{a}_{k-m-1}\omega_{k-m-1}(x_k - 0) = \mathbf{a}_k \omega_k(x_k + 0)$; ввиду предположенной линейной независимости векторов $\mathbf{a}_{k-m-1}$ и $\mathbf{a}_k$ получаем равенства (2.1). ■

Теорема 1. *Если* $\mathbf{A}$ *— полная цепочка векторов, то для непрерывности функций* $\omega_j(t)$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$ *на интервале* (α, β)*, необходимо и достаточно, чтобы предельные значения на границе носителя каждой из них были равны нулю.*

Доказательство. Достаточность. Благодаря непрерывности вектор-функции $\varphi(t)$, достаточно исследовать непрерывность функций $\omega_j(t)$ в узлах сетки X. Если узел x_k находится на границе множества S_j, то непрерывность ω_j в этой точке вытекает из условия доказываемой теоремы. Если же узел x_k лежит внутри этого множества, то в ней выполнены условия леммы 6 (в части необходимости), и, следовательно, справедливы соотношения (2.2).

Необходимость очевидна. ■

В дальнейшем используются обозначения $\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_k)$, $\varphi_k^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{(i)}(x_k)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы функции* $\omega_j(t)$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$ *могли быть продолжены до функций, непрерывных на интервале* (α, β)*, необходимо и достаточно выполнение соотношений*

$$\det\Big(\mathbf{a}_{j-m}, \mathbf{a}_{j-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi_j\Big) = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Покажем, что условие равенства нулю предельных значений функций $\omega_j(t) \quad (\forall j \in \mathbb{Z})$ на границе носителя каждой из них эквивалентно условию (2.8).

Действительно, ввиду (1.10) равенства (2.8) эквивалентны равенствам

$$\omega_j(x_j + 0) = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}; \tag{2.9}$$

заменяя в (2.8) индекс j на $j + m + 1$, находим

$$\det\Big(\mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}, \dots, \mathbf{a}_{j+m}, \varphi_{j+m+1}\Big) = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{2.10}$$

откуда в силу (1.10) выводим

$$\omega_j(x_{j+m+1} - 0) = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.11}$$

Итак, равенства (2.8) эквивалентны равенствам (2.9) и (2.11); последние означают, что предельные значения функций на концах их носителей равны нулю. Осталось воспользоваться теоремой 1. Теорема 2 полностью доказана. ■

Теорема 3. *Пусть $\varphi^{(S)} \in C(\alpha, \beta)$, где S — натуральное число. Для того, чтобы функции $\omega_j^{(S)}(t)$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$ могли быть продолжены до функций, непрерывных на интервале (α, β), необходимо и достаточно выполнение соотношений*

$$\det\Big(\mathbf{a}_{j-m}, \mathbf{a}_{j-m+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi_j^{(S)}\Big) = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно продифференцировать соотношения (1.9) и применить предыдущие рассуждения (см. доказательства теорем 1 и 2). ■

5.3. B_φ-сплайны порядка m

Рассмотрим частный случай соотношений (1.8), выбирая в них цепочку векторов $\mathbf{a}_j$ специальным образом.

Определим векторы $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^{m+1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ тождествами

$$\mathbf{d}_k^T \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi_k, \varphi'_k, \varphi''_k, \dots, \varphi_k^{(m-1)}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m+1}, \tag{3.1}$$

и введем векторы $\mathbf{a}_j^*$ с помощью символического определителя

$$\mathbf{a}_j^* \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} & \varphi''_{j+1} & \dots & \varphi_{j+1}^{(m-1)} \\ \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi''_{j+1} & \dots & \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi_{j+1}^{(m-1)} \\ \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi''_{j+1} & \dots & \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi_{j+1}^{(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{d}_{j+m}^T\varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+m}^T\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}_{j+m}^T\varphi''_{j+1} & \dots & \mathbf{d}_{j+m}^T\varphi_{j+1}^{(m-1)} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Лемма 7. *Вектор $\mathbf{a}_j^*$ зависит лишь от значений функций $\varphi^{(s)}(t)$, $s = 0, 1, 2, \dots, m-1$, в узлах x_{j+1}, x_{j+2},…,x_{j+m}.*

Доказательство легко следует из того обстоятельства, что в представлении (3.2) участвуют векторы $\mathbf{d}_i$ при $j+2 \le i \le j+m$, а согласно определению (3.1) каждый вектор $\mathbf{d}_i$ в свою очередь, определяется векторами φ_i, φ'_i, φ''_i, …, $\varphi_i^{(m-1)}$. Для завершения доказательства следует снова обратиться к представлению (3.2). ■

Введем обозначения

$$\mathbf{A}^*(X,\varphi) \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}, \qquad h_X \overset{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}}(x_{j+1} - x_j).$$

Теорема 4. *Если выполнено условие (1.1), то существует такое $\delta = \delta_\varphi > 0$, что при $h_X < \delta$ цепочка $\mathbf{A}^*(X,\varphi)$ полная.*

Доказательство. Доказательство полноты цепочки $\{\mathbf{a}_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$ сводится к применению формулы Тейлора в представлении (3.2) для получения асимптотики (при $h_X \to 0$), равномерной на интервале (α, β). ■

Теорема 5. *Цепочки векторов $\{\mathbf{d}_j^T\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{a}_i^*\}_{i\in\mathbb{Z}}$ локально ортогональны:*

$$\mathbf{d}_{j+p}^T\mathbf{a}_j^* = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad p \in I_m. \tag{3.3}$$

Доказательство. Для доказательства (3.3) рассмотрим выражение $\mathbf{d}_{j+p}^T\mathbf{a}_j^*$; в соответствии с (3.2) оно может быть представлено в виде

$$\mathbf{d}_{j+p}^T\mathbf{a}_j^* \stackrel{\rm def}{=} \det \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{j+p}^T\varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+p}^T\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}_{j+p}^T\varphi''_{j+1} & \dots & \mathbf{d}_{j+p}^T\varphi^{(m-1)}_{j+1} \\ \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi''_{j+1} & \dots & \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi^{(m-1)}_{j+1} \\ \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi''_{j+1} & \dots & \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi^{(m-1)}_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{d}_{j+m}^T\varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+m}^T\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}_{j+m}^T\varphi''_{j+1} & \dots & \mathbf{d}_{j+m}^T\varphi^{(m-1)}_{j+1} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с формулой (3.1) при $p = 1$ первая строка этого определителя состоит из нулей, а при $p = 2, 3, \dots, m$ в рассматриваемом определителе оказывается две одинаковых строки; таким образом, соотношения (3.3) установлены. Теорема доказана. ■

В аппроксимационных соотношениях (1.8) положим $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^*$, считая, что цепочка векторов $\mathbf{A}^* = \{\mathbf{a}_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — полная (см. теорему 4); сплайны, полученные из этих соотношений обозначим ω_j^*.

Теорема 6. *Справедливы соотношения* $\omega_j^* \in C^{m-1}(\alpha, \beta)$.

Доказательство. Соотношения (3.3) могут быть записаны в виде $\mathbf{d}_j \perp \mathbf{a}_{j-i}^*$, $i \in I_m$, что эквивалентно записи

$$\mathbf{d}_j \perp \mathcal{L}(\mathbf{a}_{j-m}^*, \mathbf{a}_{j-m+1}^*, \dots, \mathbf{a}_{j-2}^*, \mathbf{a}_{j-1}^*). \tag{3.4}$$

С другой стороны, согласно формуле (3.1) имеем

$$\mathbf{d}_j \perp \mathcal{L}(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi''_j, \dots, \varphi^{(m-1)}_j). \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}_{j-m}^*, \mathbf{a}_{j-m+1}^*, \dots, \mathbf{a}_{j-2}^*, \mathbf{a}_{j-1}^*) = \mathcal{L}(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi''_j, \dots, \varphi^{(m-1)}_j),$$

откуда $\varphi_k^{(S)} \in \mathcal{L}(\mathbf{a}_{j-m}^*, \mathbf{a}_{j-m+1}^*, \dots, \mathbf{a}_{j-2}^*, \mathbf{a}_{j-1}^*)$ при $S = 0, 1, 2, \dots, m-1$; итак

$$\det(\mathbf{a}_{j-m}^*, \mathbf{a}_{j-m+1}^*, \dots, \mathbf{a}_{j-2}^*, \mathbf{a}_{j-1}^*, \varphi_k^{(S)}) = 0.$$

Осталось воспользоваться теоремой 3. ■

Рассматривая линейное пространство

$$\mathbb{S}_m^*(X, \varphi) \stackrel{\rm def}{=} Cl_p\, \mathcal{L}\{\omega_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}},$$

получаем
$$\mathbb{S}^*_m(X,\varphi) \subset C^{m-1}(\alpha,\beta).$$

Обозначим $\mathfrak{S}_m(X,\varphi)$ множество пространств сплайнов порядка m при фиксированной сетке X и фиксированной вектор-функции $\varphi(t)$ на множестве $\mathcal{A}$ всех полных цепочек $\mathbf{A}$:

$$\mathfrak{S}_m(X,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbb{S}_m(X,\mathbf{A},\varphi) \mid \forall \mathbf{A} \in \mathcal{A}\}.$$

Теорема 7. *Во множестве $\mathfrak{S}_m$ существует единственное пространство класса $C^{m-1}(\alpha,\beta)$; таким пространством является пространство $\mathbb{S}^*_m(X,\varphi)$.*

Доказательство. Согласно теореме 3 для того, чтобы ω_j лежали в пространстве $C^{m-1}(\alpha,\beta)$ необходимо и достаточно, чтобы соотношения (2.12) выполнялись при $S = 0,1,2,\ldots,m-1$. Итак, пусть цепочка $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет условию

$$\det\Big(\mathbf{a}_{j-m},\mathbf{a}_{j-m+1},\ldots,\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\varphi_j^{(S)}\Big) = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{3.6}$$
$$S = 0,1,2,\ldots,m-1.$$

Для доказательства теоремы покажем, что векторы $\mathbf{a}_j$ лишь постоянным (отличным от нуля) множителем отличаются от векторов $\mathbf{a}^*_j$.

По цепочке $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ построим локально ортогональную ей цепочку $\mathbf{b}_j$, так что
$$\mathbf{b}_j \perp \mathcal{L}\{\mathbf{a}_{j-m},\mathbf{a}_{j-m+1},\ldots,\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1}\};$$
согласно лемме 4 такая цепочка существует и определяется однозначно с точностью до ненулевых постоянных множителей (для каждого вектора, вообще говоря, множитель свой). В виду условия (3.6) имеем

$$\varphi_j^{(S)} \in \mathcal{L}\{\mathbf{a}_{j-m},\mathbf{a}_{j-m+1},\ldots,\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1}\}, \quad S = 0,1,2,\ldots,m-1,$$

отсюда $\mathbf{b}_j \perp \varphi_j^{(S)}$, $S = 0,1,2,\ldots,m-1$; таким образом

$$\mathbf{b}_j \perp \mathcal{L}\{\varphi_j,\varphi'_j,\varphi''_j,\ldots,\varphi_j^{(m-1)}\}.$$

Ввиду условия (1.1) векторы φ_j, φ'_j, φ''_j, …, $\varphi_j^{(m-1)}$ линейно независимые и потому (с учетом того, что все рассматриваемые векторы $m+1$-мерные) справедливы соотношения $\mathbf{b}_j = c_j\mathbf{d}_j$ (см. определение векторов $\mathbf{d}_j$ согласно соотношениям (3.1)) с константами c_j, отличными от нуля. Биортогональные к цепочкам $\{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{d}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ цепочки $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{a}^*_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ соответственно также отличаются лишь ненулевыми константами: $\mathbf{a}_j = c_j^* \mathbf{a}_j^*$. Отсюда следует, что $\omega_j = \omega_j^* / c_j^*$; последнее доказывает теорему. ∎

При $t \in (x_k, x_{k+1})$ рассмотрим соотношение

$$\sum_{i=k-m}^{k} \mathbf{a}_i^* \omega_i^*(t) = \varphi(t) \tag{3.7}$$

и умножим его слева на вектор-строки $\mathbf{d}_j^T$ при $j = k-m, k-m+1, \ldots, k-1, k$. Принимая во внимание локальную ортогональность цепочек $\{\mathbf{d}_j^T\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{a}_i^*\}_{i\in\mathbb{Z}}$, получим $m+1$ скалярных уравнений, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{k-m}^T \mathbf{a}_{k-m}^* & \mathbf{d}_{k-m}^T \mathbf{a}_{k-m+1}^* & \ldots & \mathbf{d}_{k-m}^T \mathbf{a}_{k-1}^* & \mathbf{d}_{k-m}^T \mathbf{a}_{k}^* \\ 0 & \mathbf{d}_{k-m+1}^T \mathbf{a}_{k-m+1}^* & \ldots & \mathbf{d}_{k-m+1}^T \mathbf{a}_{k-1}^* & \mathbf{d}_{k-m+1}^T \mathbf{a}_{k}^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^* & \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k}^* \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{d}_{k}^T \mathbf{a}_{k}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{k-m}^*(t) \\ \omega_{k-m+1}^*(t) \\ \ldots \\ \omega_{k-1}^*(t) \\ \omega_{k}^*(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{k-m}^T \varphi(t) \\ \mathbf{d}_{k-m+1}^T \varphi(t) \\ \ldots \\ \mathbf{d}_{k-1}^T \varphi(t) \\ \mathbf{d}_{k}^T \varphi(t) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Аналогичным образом, умножая уравнение (3.7) слева на вектор-строки $\mathbf{d}_j^T$ при $j = k+1, k+2, \ldots, k+m, k+m+1$ ввиду локальной ортогональности цепочек $\{\mathbf{d}_j^T\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{a}_i^*\}_{i\in\mathbb{Z}}$, получим еще одну систему соотношений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k-m}^* & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mathbf{d}_{k+2}^T \mathbf{a}_{k-m}^* & \mathbf{d}_{k+2}^T \mathbf{a}_{k-m+1}^* & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{d}_{k+m}^T \mathbf{a}_{k-m}^* & \mathbf{d}_{k+m}^T \mathbf{a}_{k-m+1}^* & \ldots & \mathbf{d}_{k+m}^T \mathbf{a}_{k-1}^* & 0 \\ \mathbf{d}_{k+m+1}^T \mathbf{a}_{k-m}^* & \mathbf{d}_{k+m+1}^T \mathbf{a}_{k-m+1}^* & \ldots & \mathbf{d}_{k+m+1}^T \mathbf{a}_{k-1}^* & \mathbf{d}_{k+m+1}^T \mathbf{a}_{k}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{k-m}^*(t) \\ \omega_{k-m+1}^*(t) \\ \ldots \\ \omega_{k-1}^*(t) \\ \omega_{k}^*(t) \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{k+1}^T \varphi(t) \\ \mathbf{d}_{k+2}^T \varphi(t) \\ \dots \\ \mathbf{d}_{k+m}^T \varphi(t) \\ \mathbf{d}_{k+m+1}^T \varphi(t) \end{pmatrix}. \qquad (3.9)
$$

Соотношения (3.8) и (3.9) будем рассматривать как системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$, $j \in J_k$. Треугольные матрицы этих уравнений неособенные, поскольку диагональные элементы отличны от нуля согласно лемме 3.

Замечание 1. Решения систем (3.8) и (3.9), конечно, совпадают: приравнивание их явных представлений, полученных из этих систем, приводит к ряду детерминантных тождеств, имеющих самостоятельный интерес; здесь на этом останавливаться не будем.

Введем обозначения $I_p^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{-p, -p+1, \dots, m\}$, $I_p^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{-m+1, -m+2, \dots, m+1-p\}$, где $p = 0, 1, 2, \dots, m$.

Лемма 8. *В соответствии с формулами (3.8) функции $\omega_{k-p}^*(t)$, $p = 0, 1, 2, \dots, m$, на интервале $t \in (x_k, x_{k+1})$ заведомо определяются значениями вектор-функции $\varphi(t)$ на этом интервале, дополненными значениями вектор-функции $\varphi(t)$ и ее производных до $m-1$-го порядка включительно в узлах x_{k+i} $\forall i \in I_p^1$.*

Доказательство. В соответствии с формулами (3.1) $\mathbf{d}_j$ зависит от значения функции и ее производных до $m-1$-го порядка включительно в узле x_j, а согласно формулам (3.2) вектор $\mathbf{a}_s^*$ определяется значениями функции и ее производных до $m-1$ порядка включительно в узлах x_{s+i}, $i = 1, 2, \dots, m$; благодаря этому из представления (3.8) легко получаем доказываемое утверждение. ■

Лемма 9. *В соответствии с формулами (3.9) функции $\omega_{k-p}^*(t)$, $p = 0, 1, 2, \dots, m$, на интервале $t \in (x_k, x_{k+1})$ несомненно могут быть определены с использованием значений вектор-функции $\varphi(t)$ на этом интервале, дополненными значениями вектор-функции $\varphi(t)$ и ее производных до $m-1$ порядка включительно в узлах x_{k+i} $\forall i \in I_p^2$.*

Доказательство. Здесь снова учтем, что согласно формулам (3.1) $\mathbf{d}_j$ зависит от значения функции и ее производных до $m-1$ порядка включительно в узле x_j, а согласно формулам (3.2) вектор $\mathbf{a}_s^*$ определяется значениями функции и ее производных до $m-1$ порядка включительно в узлах

x_{s+i}, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. Теперь справедливость доказываемой леммы вытекает из представления (3.9). ∎

Лемма 10. *Функции* $\omega^*_{k-p}(t)$, $p = 0, 1, 2, \ldots, m$, *на интервале* $t \in (x_k, x_{k+1})$ *могут быть определены значениями вектор-функции* $\varphi(t)$ *на этом интервале и значениями ее производных до* $m-1$ *порядка включительно в узлах* x_{k+i} $\forall i \in I^1_p \bigcap I^2_p$.

Доказательство вытекает из лемм 8 и 9, если заметить, что значения вектор-функции $\varphi(t)$ и ее производных в узлах произвольны. ∎

Теорема 8. *Функция* $\omega^*_j(t)$ *определяется значениями вектор-функции* $\varphi(t)$*, причем требуется привлечь также значения ее производных вплоть до* $m-1$ *порядка включительно, а именно*

A) при вычислении функции $\omega^*_j(t)$ *на промежутке* (x_j, x_{j+1}) *потребуется вычислить упомянутые производные в узлах* x_{j+i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$,

B) при ее вычислении на промежутках (x_{j+s}, x_{j+s+1}), $s = 1, 2, \ldots, m-1$, *потребуется вычислить эти производные в узлах* x_{j+i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $m+1$,

C) наконец, при вычислении функции $\omega^*_j(t)$ *на промежутке* (x_{j+m}, x_{j+m+1}) *потребуется вычислить указанные производные в узлах* x_{j+i}, $i = 1, 2, \ldots, m, m+1$.

Доказательство следует из леммы 10, если в ней последовательно положить $k = j, j+1, \ldots, j+m-1, j+m$. ∎

Теорема 9. *Каждая функция* $\omega^*_j(t)$ *определяется значениями вектор-функции* $\varphi(t)$ *на множестве* $\operatorname{supp} \omega^*_j$.

Доказательство. Согласно теореме 8 все значения функции и ее производных вычисляются в точках, лежащих в отрезке $[x_j, x_{j+m+1}]$. Благодаря очевидному соображению, что производные определяются значениями функции в окрестности рассматриваемого узла, видим, что доказываемая теорема справедлива. ∎

5.4. Калибровочные соотношения

Укрупним исходную сетку X выбрасыванием узла x_{k+1}, а именно, положим

$$\widetilde{x}_j = x_j \quad \text{при } j \le k, \qquad \widetilde{x}_j = x_{j+1} \quad \text{при } j \ge k+1,$$

и рассмотрим новую сетку $\widetilde{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{x}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$,

$$\widetilde{X}: \ \ldots < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots .$$

Используя новую сетку и полагая $\widetilde{\varphi}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(\widetilde{x}_j)$, $\widetilde{\varphi}\,'_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi\,'(\widetilde{x}_j)$, аналогично предыдущему определим векторы $\widetilde{\mathbf{d}}_k \in \mathbb{R}^{m+1}$ тождествами

$$\widetilde{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{x} \equiv \det(\widetilde{\varphi}_k, \widetilde{\varphi}\,'_k, \widetilde{\varphi}\,''_k, \ldots, \widetilde{\varphi}\,^{m-1}_k, \mathbf{x}) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m+1}, \tag{4.1}$$

и введем векторы $\widetilde{\mathbf{a}}_j^*$ с помощью символического определителя

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j^* \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{j+1} & \widetilde{\varphi}\,'_{j+1} & \widetilde{\varphi}\,''_{j+1} & \ldots & \widetilde{\varphi}\,^{(m-1)}_{j+1} \\ \widetilde{\mathbf{d}}_{j+2}^T \widetilde{\varphi}_{j+1} & \widetilde{\mathbf{d}}_{j+2}^T \widetilde{\varphi}\,'_{j+1} & \widetilde{\mathbf{d}}_{j+2}^T \widetilde{\varphi}\,''_{j+1} & \ldots & \widetilde{\mathbf{d}}_{j+2}^T \widetilde{\varphi}\,^{(m-1)}_{j+1} \\ \widetilde{\mathbf{d}}_{j+3}^T \widetilde{\varphi}_{j+1} & \widetilde{\mathbf{d}}_{j+3}^T \widetilde{\varphi}\,'_{j+1} & \widetilde{\mathbf{d}}_{j+3}^T \widetilde{\varphi}\,''_{j+1} & \ldots & \widetilde{\mathbf{d}}_{j+3}^T \widetilde{\varphi}\,^{(m-1)}_{j+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widetilde{\mathbf{d}}_{j+m}^T \widetilde{\varphi}_{j+1} & \widetilde{\mathbf{d}}_{j+m}^T \widetilde{\varphi}\,'_{j+1} & \widetilde{\mathbf{d}}_{j+m}^T \widetilde{\varphi}\,''_{j+1} & \ldots & \widetilde{\mathbf{d}}_{j+m}^T \widetilde{\varphi}\,^{(m-1)}_{j+1} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим аппроксимационные соотношения

$$\sum_{j' \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_{j'}^* \widetilde{\omega}_{j'}^*(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1}) \; \forall k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{supp} \widetilde{\omega}_j = [\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+m+1}] \; \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Пространство B_φ-сплайнов на новой сетке обозначим

$$\mathbb{S}_m^*(\widetilde{X}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \, \mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Теорема 10. *Если сетка $\widetilde{X}$ столь мелкая, что цепочка $\widetilde{\mathbf{A}}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{\mathbf{a}}_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}}$ полная, то пространство B_φ-сплайнов на сетке X содержит пространство B_φ-сплайнов на сетке $\widetilde{X}$:*

$$\mathbb{S}_m^*(\widetilde{X}, \varphi) \subset \mathbb{S}_m^*(X, \varphi). \tag{4.4}$$

Доказательство. Учитывая определение сетки $\widetilde{X}$, из формул (4.2)–(4.3) легко получаем соотношения

$$\widetilde{\omega}_j^*(t) \equiv \omega_j^*(t), \quad \widetilde{\mathbf{a}}_j^* = \mathbf{a}_j^* \quad \text{при } j \le k - m - 1, \tag{4.5}$$

$$\widetilde{\omega}_j^*(t) \equiv \omega_{j+1}^*(t), \quad \widetilde{\mathbf{a}}_j^* = \mathbf{a}_{j+1}^* \quad \text{при } j \ge k + 1. \tag{4.6}$$

Из (1.8) и (4.3) имеем

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}^*_{j'}\widetilde{\omega}^*_{j'}(t) \equiv \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}^*_j\widetilde{\omega}^*_j(t) \quad \forall t\in(\alpha,\beta),$$

откуда после уничтожения одинаковых слагаемых, определяемых соотношениями (4.5) и (4.6), получаем

$$\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-m}\widetilde{\omega}^*_{k-m}(t)+\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-m+1}\widetilde{\omega}^*_{k-m+1}(t)+\ldots+\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1}\widetilde{\omega}^*_{k-1}(t)+\widetilde{\mathbf{a}}^*_k\widetilde{\omega}^*_k(t)\equiv$$
$$\equiv \mathbf{a}^*_{k-m}\omega^*_{k-m}(t)+\mathbf{a}^*_{k-m+1}\omega^*_{k-m+1}(t)+\ldots+$$
$$+\mathbf{a}^*_{k-1}\omega^*_{k-1}(t)+\mathbf{a}^*_k\omega^*_k(t)+\mathbf{a}^*_{k+1}\omega^*_{k+1}(t) \quad \forall t\in(\alpha,\beta). \tag{4.7}$$

Рассматривая соотношения (4.7) как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $\widetilde{\omega}^*_{k-m}(t)$, $\widetilde{\omega}^*_{k-m+1}(t)$, $\ldots$, $\widetilde{\omega}^*_{k-2}(t)$, $\widetilde{\omega}^*_{k-1}(t)$, $\widetilde{\omega}^*_k(t)$, и учитывая, что матрица системы неособенная (так как по условию цепочка $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ полная), выразим упомянутые функции через $\omega^*_{k-m}(t)$, $\omega^*_{k-m+1}(t)$, $\ldots$, $\omega^*_{k-2}(t)$, $\omega^*_{k-1}(t)$, $\omega^*_k(t)$, $\omega^*_{k+1}(t)$. Учитывая соотношения (4.5)–(4.6) видим, что базисные функции $\widetilde{\omega}^*_j(t)$ пространства $\mathbb{S}^*_m(\widetilde{X},\varphi)$ выражаются через базисные функции $\omega^*_j(t)$ пространства $\mathbb{S}^*_m(X,\varphi)$. Включение (4.4) установлено. ∎

Соотношения, выражающие координатные сплайны на укрупненной сетке через сплайны на исходной сетке, называем *калибровочными соотношениями* (см. [24]).

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 4 для любой сетки X' со свойствами $X'\subset X$, $h_{X'}\le\delta_\varphi$, справедливо включение*

$$\mathbb{S}^*_m(X',\varphi)\subset\mathbb{S}^*_m(X,\varphi). \tag{4.8}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность сеток $X=X_0\supset X_1\supset X_2\ldots\supset X'$, в которой каждые две соседние сетки отличаются одним удаленным узлом. Очевидно, для них выполнено условие теоремы 4: $h_{X_i}\le\delta_\varphi$, $i=0,1,2,\ldots$, ибо оно выполнено для самой крупной сетки X'; поэтому аналогично соотношению (4.8) имеем $\mathbb{S}^*_m(X_i,\varphi)\supset\mathbb{S}^*_m(X_{i+1},\varphi)$. Следствие доказано. ∎

6. О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ КООРДИНАТНЫХ СПЛАЙНОВ

В данном разделе получены достаточные условия положительности непрерывно дифференцируемых минимальных координатных сплайнов второго порядка в общем случае (т. е. при достаточно произвольной генерирующей вектор-функции). Основными условиями являются неравенство нулю вронскиана генерирующей вектор-функции и достаточная мелкость локально квазиравномерной сетки. Полученные здесь условия использованы для построения положительных экспоненциальных непрерывно дифференцируемых координатных сплайнов. Установлена положительность гиперболических и дробно-рациональных минимальных координатных сплайнов без каких-либо ограничений на сетку.

6.1. Предварительные сведения

В работах [10, 25, 40, 58, 73, 74, 102, 103] рассматривались разные варианты построения аппроксимаций. Среди них фигурировали полиномиальные сплайны (кусочно-полиномиальные функции) различной гладкости, а также неполиномиальные, а именно, тригонометрические и экспоненциальные сплайны, сплайны, определяемые тем или иным оператором (так называемые L-сплайны), сплайны, определяемые семейством линейных функционалов (G-сплайны), сплайны, получаемые минимизацией квадратичного функционала и т.п. (библиографию см., например, в монографиях [10,40]). Сплайны, которые получаются из аппроксимационных соотношений с использованием полной цепочки векторов и генерирующей вектор-функции, рассматривались в ряде работ (см., например, [4, 14, 25]); подобные сплайны с минимальным носителем были названы минимальными. Определенный способ выбора упомянутой цепочки векторов позволил рассмотреть минимальные сплайны максимальной гладкости и установить единственность пространства таких сплайнов среди множества пространств минимальных сплайнов (определяемых произвольным выбором полной цепочки векторов при фиксированной сетке и фиксированной генерирующей вектор-функции). Оказалось, что такие пространства образуют цепочку вложенных пространств на последовательности вложенных сеток, а это, в свою очередь, позволило построить вэйвлетное разложение таких цепочек (см., например, [38]).

С другой стороны, минимальные сплайны предоставляют прекрасный аппарат аппроксимации (ибо они получаются из аппроксимационных соотношений). Аппроксимация сплайнами является линейной комбинацией координатных сплайнов, так что наблюдение за качеством аппроксимации и разработка путей ее улучшения значительно упрощаются в случае, когда координатные сплайны имеют определенный знак.

Координатный сплайн будем называть положительным (отрицательным), если он положителен (соответственно, отрицателен) во всех внутренних точках своего носителя.

Положительность координатных сплайнов важна для практического применения в задачах геометрического моделирования, связанных с построением обобщенных NURBS-кривых для систем автоматизированного проектирования (см., например, [41, 53, 59, 101, 107]), и в задачах изогеометрического анализа (подробности см. в монографии [71]); последний предполагает возможность непосредственного включения конечно-элементного анализа в обычные средства проектирования, основанные на NURBS-кривых и их обобщениях. Заметим также, что знакоопределенность координатных сплайнов важна в использующих эти сплайны методах для минимизации ошибок округления и для поддержания устойчивости вычислительного процесса.

Давно известно (см., например, [40]), что координатные сплайны, генерируемые вектор-функцией $\varphi(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1, t, t^2)$, положительны: это непрерывно дифференцируемые квадратичные сплайны; в этом случае никаких ограничений на сетку не налагается. Для положительности минимальных тригонометрических координатных сплайнов [14] необходимо и достаточно, чтобы расстояние между соседними узлами было меньше числа π (см. [4, 22, 93]).

Цель данного раздела — получить достаточные условия положительности непрерывно дифференцируемых координатных сплайнов второго порядка в общем случае (т. е. при достаточно произвольной генерирующей вектор-функции $\varphi(t)$). Основными условиями положительности являются неравенство нулю вронскиана генерирующей функции $\varphi(t)$ и достаточная мелкость локально квазиравномерной сетки. Полученные здесь условия использованы для построения положительных экспоненциальных непрерывно дифференцируемых координатных сплайнов. Рассмотрены также случаи гиперболических и дробно-рациональных координатных сплайнов и показана их положительность без каких-либо ограничений на сетку (в этом случае ни мелкость, ни локальная квазиравномерность сетки не требуются).

Обращаясь к описанию структуры главы, заметим, что в следующем (втором) пункте даны предварительные сведения: там рассматривается известная (см. [38]) схема построения минимальных непрерывно дифференцируемых координатных сплайнов второго порядка. В третьем пункте дано новое представление упомянутых сплайнов. Четвертый пункт содержит вспомогательные утверждения, относящиеся к трехкомпонентной вектор-функции и к асимптотике представления некоторого определителя, задаваемого значениями этой функции. В пятом пункте вводится понятие позитивности цепочки векторов, и устанавливаются достаточные условия позитивности. Шестой пункт посвящен критерию (достаточному условию) положительности координатных сплайнов: такой критерий в основном характеризуется невырожденностью вронскиана генерирующей вектор-функции $\varphi(t)$ и достаточной мелкостью локально квазиравномерной сетки. В седьмом пункте продемонстрировано применение этого критерия для установления положительности экспоненциальных непрерывно дифференцируемых базисных сплайнов; кроме достаточных условий положительности в этом случае получены также и достаточные условия отрицательности. В восьмом пункте для любой сетки устанавливается положительность гиперболических координатных сплайнов; при этом ни мелкость сетки, ни ее локальная квазиравномерность не требуются. В девятом пункте в аналогичной ситуации устанавливается положительность дробно-рациональных непрерывно дифференцируемых координатных сплайнов.

6.2. Общая схема построений

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, а $\mathbb{R}^3$ — множество трехмерных векторов с компонентами из множества $\mathbb{R}^1$ всех вещественных чисел. На интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X (см. раздел 1.1) и обозначим $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}} (x_j, x_{j+1})$ и $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+3}]$.

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию (столбец) $\varphi(t)$ с компонентами из пространства $C^2(\alpha, \beta)$ и с отличным от нуля вронскианом

$$\det(\varphi, \varphi', \varphi'')(t) \neq 0 \qquad \forall t \in (\alpha, \beta). \tag{2.1}$$

Обозначим $\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_j), \varphi'_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_j)$ и рассмотрим цепочку трехмерных вектор-столбцов $\{\mathbf{a}^*_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ вида

$$\mathbf{a}^*_j \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1})\, \varphi'_{j+1} - \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1})\, \varphi_{j+1}. \tag{2.2}$$

Предположим, что цепочка $\{\mathbf{a}_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$ «— полная, т. е. что квадратные матрицы третьего порядка $(\mathbf{a}_j^*, \mathbf{a}_{j+1}^*, \mathbf{a}_{j+2}^*)$ «— неособенные:

$$\det(\mathbf{a}_j^*, \mathbf{a}_{j+1}^*, \mathbf{a}_{j+2}^*) \neq 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Если сетка X локально квазиравномерная, а параметр $h_X \overset{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}}(x_{j+1} - x_j)$ достаточно мал, то при условии (2.1) упомянутая цепочка — полная (см. ниже).

Пусть функции $\omega_j^*(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют тождествам

$$\mathbf{a}_{k-2}\omega_{k-2}^*(t) + \mathbf{a}_{k-1}\omega_{k-1}^*(t) + \mathbf{a}_k\omega_k^*(t) \equiv \varphi(t) \qquad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \tag{2.4}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \;\; \omega_j^*(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in M\backslash S_j \;\; \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

При каждом фиксированном $t \in (x_k, x_{k+1})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, соотношения (2.4) рассматриваем как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j^*(t)$. Ввиду предположения (2.3) система (2.4) однозначно разрешима. Получаемые функции являются B_φ-сплайнами.

Как известно (см. [4]), функции ω_j^* могут быть продолжены на весь интервал (α, β) с сохранением непрерывности самой функции и ее первой производной; будем считать, что такое продолжение состоялось, так что $\omega_j^* \in C^1(\alpha, \beta)$ $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Из (2.3)–(2.5) видно, что при $t \in (x_k, x_{k+1})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\omega_{k-2}^*(t) = \frac{\det\Big(\varphi(t), \mathbf{a}_{k-1}^*, \mathbf{a}_k^*\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{k-2}^*, \mathbf{a}_{k-1}^*, \mathbf{a}_k^*\Big)}, \tag{2.6}$$

$$\omega_{k-1}^*(t) = \frac{\det\Big(\mathbf{a}_{k-2}^*, \varphi(t), \mathbf{a}_k^*\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{k-2}^*, \mathbf{a}_{k-1}^*, \mathbf{a}_k^*\Big)}, \tag{2.7}$$

$$\omega_k^*(t) = \frac{\det\Big(\mathbf{a}_{k-2}^*, \mathbf{a}_{k-1}^*, \varphi(t)\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{k-2}^*, \mathbf{a}_{k-1}^*, \mathbf{a}_k^*\Big)}, \tag{2.8}$$

$$\operatorname{supp} \omega_j^* = [x_j, x_{j+3}] \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

6.3. Другое представление координатных сплайнов

В дальнейшем будут использоваться скалярное и векторное произведения, обозначаемые символами $\cdot$ и $\times$ соответственно.

Введем вектор-функцию (столбец)

$$\mathbf{b}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t) \times \varphi'(t) \tag{3.1}$$

и положим $\mathbf{b}_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}(x_s)$ $\forall s \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что векторы $\mathbf{b}_s$ удовлетворяют соотношениям $\mathbf{b}_s^T \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi_s, {\varphi'}_s, \mathbf{x})$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, и

$$\mathbf{b}_s = \varphi_s \times {\varphi'}_s. \tag{3.2}$$

Дальше используется формула двойного векторного произведения

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w})\mathbf{z} - \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{w} = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, \tag{3.3}$$

а также вытекающая из (3.3) при $\mathbf{w} = \mathbf{y}$ формула

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{y} \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Справедливо соотношение*

$$\mathbf{a}_j^* = \mathbf{b}_{j+1} \times \mathbf{b}_{j+2}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из (3.3) при $\mathbf{x} = \varphi_{j+2}$, $\mathbf{y} = {\varphi'}_{j+2}$, $\mathbf{z} = \varphi_{j+1}$, $\mathbf{w} = {\varphi'}_{j+1}$ имеем

$$\begin{aligned} \det(\varphi_{j+2}, {\varphi'}_{j+2}, {\varphi'}_{j+1})\varphi_{j+1} - \det(\varphi_{j+2}, {\varphi'}_{j+2}, \varphi_{j+1}){\varphi'}_{j+1} = \\ = (\varphi_{j+2} \times {\varphi'}_{j+2}) \times (\varphi_{j+1} \times {\varphi'}_{j+1}), \end{aligned} \tag{3.6}$$

так что из (2.2) получаем

$$\mathbf{a}_j^* = -(\varphi_{j+2} \times {\varphi'}_{j+2}) \times (\varphi_{j+1} \times {\varphi'}_{j+1}). \tag{3.7}$$

Из (3.2) и (3.7) находим

$$\mathbf{a}_j^* = -\mathbf{b}_{j+2} \times \mathbf{b}_{j+1}, \tag{3.8}$$

что эквивалентно соотношению (3.5). Лемма доказана. ■

Лемма 3.2. *Верна формула*

$$\det(\mathbf{a}_{k-2}^*, \mathbf{a}_{k-1}^*, \mathbf{a}_k^*) = \det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2}) \det(\mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}). \tag{3.9}$$

Доказательство. Из равенства (3.5) с помощью соотношения (3.4) при $\mathbf{x} = \mathbf{b}_{k-1}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}_k$, $\mathbf{z} = \mathbf{b}_{k+1}$, имеем

$$\mathbf{a}^*_{k-2} \times \mathbf{a}^*_{k-1} = (\mathbf{b}_{k-1} \times \mathbf{b}_k) \times (\mathbf{b}_k \times \mathbf{b}_{k+1}) = \det(\mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1})\mathbf{b}_k. \tag{3.10}$$

Аналогично формуле (3.10) получаем соотношение

$$\mathbf{a}^*_{k-1} \times \mathbf{a}^*_k = \det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2})\mathbf{b}_{k+1}. \tag{3.11}$$

Используя (3.11), находим

$$\det(\mathbf{a}^*_{k-2}, \mathbf{a}^*_{k-1}, \mathbf{a}^*_k) = \mathbf{a}^*_{k-2} \cdot (\mathbf{a}^*_{k-1} \times \mathbf{a}^*_k) = \det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2})\mathbf{a}^*_{k-2} \cdot \mathbf{b}_{k+1}. \tag{3.12}$$

Применяя здесь формулу (3.8) при $j = k-2$, выводим

$$\det(\mathbf{a}^*_{k-2}, \mathbf{a}^*_{k-1}, \mathbf{a}^*_k) = \det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2})(\mathbf{b}_{k-1} \times \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{b}_{k+1}; \tag{3.13}$$

из (3.13) следует формула (3.9). Лемма доказана. ∎

Перейдем к отысканию числителей в формулах (2.6) и (2.8).

Лемма 3.3. *Верны соотношения*

$$\det\Big(\varphi(t), \mathbf{a}^*_{k-1}, \mathbf{a}^*_k\Big) = \det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2}) \det(\varphi(t), \varphi_{k+1}, {\varphi'}_{k+1}), \tag{3.14}$$

$$\det\Big(\mathbf{a}^*_{k-2}, \mathbf{a}^*_{k-1}, \varphi(t)\Big) = \det(\mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}) \det(\varphi_k, {\varphi'}_k, \varphi(t)). \tag{3.15}$$

Доказательство. Используя соотношение (3.5), имеем

$$\det\Big(\varphi(t), \mathbf{a}^*_{k-1}, \mathbf{a}^*_k\Big) = \varphi(t) \cdot (\mathbf{a}^*_{k-1} \times \mathbf{a}^*_k) = \varphi(t) \cdot \Big((\mathbf{b}_k \times \mathbf{b}_{k+1}) \times (\mathbf{b}_{k+1} \times \mathbf{b}_{k+2})\Big);$$

из формулы (3.4) при $\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}_{k+1}$, $\mathbf{z} = \mathbf{b}_{k+2}$, получаем

$$(\mathbf{b}_k \times \mathbf{b}_{k+1}) \times (\mathbf{b}_{k+1} \times \mathbf{b}_{k+2}) = \det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2})\mathbf{b}_{k+1},$$

так что

$$\det\Big(\varphi(t), \mathbf{a}^*_{k-1}, \mathbf{a}^*_k\Big) = \det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2})\varphi(t) \cdot \mathbf{b}_{k+1} =$$
$$= \det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2})\varphi(t) \cdot (\varphi_{k+1} \times {\varphi'}_{k+1}). \tag{3.16}$$

Аналогично

$$\det\Big(\mathbf{a}^*_{k-2}, \mathbf{a}^*_{k-1}, \varphi(t)\Big) = \det(\mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1})(\varphi_k \times {\varphi'}_k) \cdot \varphi(t). \tag{3.17}$$

Из (3.16)–(3.17) получаем соотношения (3.14)–(3.15). Лемма доказана. ∎

Теорема 3.1. *При* $t \in (x_k, x_{k+1})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ *верны соотношения*

$$\omega^*_{k-2}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \varphi_{k+1}, \varphi'_{k+1})}{\det(\mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1})}, \tag{3.18}$$

$$\omega^*_{k-1}(t) = \frac{\det(\mathbf{b}_{k-1} \times \mathbf{b}_k, \varphi(t), \mathbf{b}_{k+1} \times \mathbf{b}_{k+2})}{\det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2}) \det(\mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1})}, \tag{3.19}$$

$$\omega^*_k(t) = \frac{\det(\varphi_k, \varphi'_k, \varphi(t))}{\det(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+2})}. \tag{3.20}$$

Доказательство. Ввиду формулы (3.5) имеем представление

$$\det\Big(\mathbf{a}^*_{k-2}, \varphi(t), \mathbf{a}^*_k\Big) = \det(\mathbf{b}_k \times \mathbf{b}_{k-1}, \varphi(t), \mathbf{b}_{k+2} \times \mathbf{b}_{k+1}). \tag{3.21}$$

Принимая во внимание формулы (3.9), (3.14)–(3.15) и (3.21), из (2.6)–(2.8) получаем соотношения (3.18)–(3.20). ■

Следствие 3.1. *Для* B_φ*-сплайна* ω^*_j $\forall j \in \mathbb{Z}$ *справедливы формулы*

$$\omega^*_j(t) = \frac{\det(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi(t))}{\det(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2})} \qquad \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{3.22}$$

$$\omega^*_j(t) = \frac{\det(\mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_{j+1}, \varphi(t), \mathbf{b}_{j+2} \times \mathbf{b}_{j+3})}{\det(\mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2}, \mathbf{b}_{j+3}) \det(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2})} \qquad \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{3.23}$$

$$\omega^*_j(t) = \frac{\det(\varphi(t), \varphi_{j+3}, \varphi'_{j+3})}{\det(\mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2}, \mathbf{b}_{j+3})} \qquad \text{при } t \in (x_{j+2}, x_{j+3}), \tag{3.24}$$

$$\operatorname{supp} \omega^*_j = [x_j, x_{j+3}].$$

Для доказательства формул (3.22)–(3.24) достаточно зафиксировать $j \in \mathbb{Z}$ и, используя (2.9) и (3.18)–(3.20), найти значения функции $\omega^*_j(t)$ на интервале (α, β).

6.4. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем квадратными скобками часто обозначаются компоненты трехмерных векторов, они нумеруются индексами $0, 1, 2$; например, вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ записывается в виде $\mathbf{x} = ([\mathbf{x}]_0, [\mathbf{x}]_1, [\mathbf{x}]_2)$, а его норма в $\mathbb{R}^3$ имеет вид $\|\mathbf{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{[\mathbf{x}]_0^2 + [\mathbf{x}]_1^2 + [\mathbf{x}]_2^2}$.

Для непрерывной вектор-функции $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^3$, $t \in (\alpha, \beta)$, и числа $h > 0$ введем обозначения

$$S(\mathbf{f}, t, h) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0<\theta<h} \|\mathbf{f}(t+\theta) - \mathbf{f}(t)\| \quad \text{при } t, t+h \in (\alpha, \beta),$$

$$\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}, h) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t'', t' \in (\alpha,\beta),\ |t''-t'| \le h} \|\mathbf{f}(t'') - \mathbf{f}(t')\|. \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. *Справедливы следующие свойства:*
1) если $0 < h \le H$, *то*

$$S(\mathbf{f}, t, h) \le S(\mathbf{f}, t, H) \ \textit{при}\ t, t+H \in (\alpha, \beta), \tag{4.2}$$

$$\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}, h) \le \mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}, H), \tag{4.3}$$

2) для натурального числа n *справедливо неравенство*

$$\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}, nh) \le n\, \mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}, h). \tag{4.4}$$

Доказательство. Формулы (4.2) и (4.3) очевидны. Докажем формулу (4.4). Рассмотрим $t', t'' \in (\alpha, \beta)$ такие, что $|t'' - t'| \le nh$. Не нарушая общности, будем считать, что $t'' > t'$; рассмотрим разбиение отрезка $[t', t'']$ на n частей точками t_i так, что

$$t' = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t'',$$

где $t_{i+1} - t_i \le h$. Очевидно, что

$$\|\mathbf{f}(t'') - \mathbf{f}(t')\| \le \|\mathbf{f}(t_n) - \mathbf{f}(t_{n-1})\| + \|\mathbf{f}(t_{n-1}) - \mathbf{f}(t_{n-2})\| + \ldots + \|\mathbf{f}(t_1) - \mathbf{f}(t_0)\|.$$

Поскольку

$$\|\mathbf{f}(t_{i+1}) - \mathbf{f}(t_i)\| \le \sup_{t\text{`}, t\text{``} \in (\alpha,\beta),\ |t\text{``}-t\text{`}| \le h} \|\mathbf{f}(t\text{``}) - \mathbf{f}(t\text{`})\| \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

то легко найдем

$$\|\mathbf{f}(t'') - \mathbf{f}(t')\| \le n \sup_{t\text{`}, t\text{``} \in (\alpha,\beta),\ |t\text{``}-t\text{`}| \le h} \|\mathbf{f}(t\text{``}) - \mathbf{f}(t\text{`})\|;$$

переходя в левой части к точной верхней грани при условиях

$$t'', t' \in (\alpha, \beta),\ |t'' - t'| \le nh,$$

благодаря формуле (4.1) получаем неравенство (4.4). ■

Замечание 4.1. Если c — вещественное положительное число, то вместо неравенства (4.4) справедливо неравенство

$$\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}, ch) \le \lceil c \rceil\, \mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}, h),$$

где

$$\lceil c \rceil \stackrel{\text{def}}{=} \min_{k\in\mathbb{Z},\ c\le k} k.$$

Лемма 4.2. *Если $\mathbf{f}(t)$ вектор-функция с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами на интервале (α, β), то при $t, t+\tau \in (\alpha, \beta)$*

1) справедлива формула Тейлора в виде

$$\mathbf{f}(t+\tau) = \mathbf{f}(t) + \tau \mathbf{f}'(t) + \frac{1}{2}\tau^2 \mathbf{f}''(t) + \mathbf{R_f}(t,\tau), \tag{4.5}$$

где

$$\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau^2 \int_0^1 (1-\theta)\Big[\mathbf{f}''(t+\theta\tau) - \mathbf{f}''(t)\Big] d\theta, \quad t, t+\tau \in (\alpha,\beta), \tag{4.6}$$

2) выполнено неравенство

$$\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\| \le \tau^2 S(\mathbf{f}'', t, \tau), \tag{4.7}$$

3) справедливо соотношение

$$S(\mathbf{f}'', t, \tau) \le \mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}'', \tau). \tag{4.8}$$

Доказательство. Сначала предположим, что $\mathbf{f} \in C^3(\alpha, \beta)$. Интегральная форма остатка в формуле Тейлора (4.5) такова

$$\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau) = \frac{\tau^3}{2} \int_0^1 (1-\theta)^2 \mathbf{f}'''(t+\theta\tau) d\theta.$$

Интегрируя по частям интеграл в правой части последней формулы, находим

$$\int_0^1 (1-\theta)^2 \mathbf{f}'''(t+\theta\tau) d\theta = \frac{2}{\tau} \int_0^1 (1-\theta)[\mathbf{f}''(t+\theta\tau) - \mathbf{f}''(t)] d\theta,$$

так что упомянутый остаток принимает вид (4.6).

Пусть теперь $\mathbf{f} \in C^2(\alpha, \beta)$; рассмотрим усреднение $\mathbf{f}_h(t)$ этой вектор-функции по Стеклову

$$\mathbf{f}_h(t) = h^{-1} \int_t^{t+h} \mathbf{f}(\theta) d\theta,$$

предполагая, что $0 < h < h_0$, где $h_0 < \beta - \alpha$.

Учитывая, что $\mathbf{f}_h \in C^3(a, b - h_0)$ и рассматривая формулу Тейлора (4.5)–(4.6) для этой функции, получаем

$$\mathbf{f}_h(t+\tau) = \mathbf{f}_h(t) + \tau \mathbf{f}_h{}'(t) + \frac{1}{2}\tau^2 \mathbf{f}_h{}''(t) + \mathbf{R}_{\mathbf{f}_h}(t, \tau),$$

где

$$\mathbf{R}_{\mathbf{f}_h}(t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau^2 \int_0^1 (1-\theta)\Big[\mathbf{f}_h{}''(t+\theta\tau) - \mathbf{f}_h{}''(t)\Big] d\theta, \quad t, t+\tau \in (\alpha, \beta - h_0);$$

переходя здесь к пределу при $h \to 0$, а затем и h_0 устремляя к нулю, придем к представлению (4.5)–(4.6) для $\mathbf{f} \in C^2(\alpha, \beta)$.

Неравенство (4.7) получается очевидным образом оценкой интеграла в правой части формулы (4.6). Неравенство (4.8) также очевидно. ■

В дальнейшем считаем, что τ и η — положительные числа, K_0 — натуральное число и

$$K_0^{-1} \le \tau/\eta \le K_0, \qquad t, t + (1+K_0)\tau \in (\alpha, \beta). \tag{4.9}$$

Если выполнено неравенство $K^{-1} \le \tau/\eta \le K$ для некоторого вещественного $K \ge 1$, то справедливо (4.9) с $K_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lceil K \rceil$.

Теорема 4.1. *Если выполнено условие (4.9), трехкомпонентная вектор-функция $\mathbf{f}(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (α, β), и для некоторого числа $c \in \mathbb{R}^1$ справедливо неравенство*

$$|\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t))| \ge c^2, \tag{4.10}$$

то существует положительное число $\delta = \delta(c, K_0, \mathbf{f}, t)$ такое, что из условия $\tau \in (0, \delta)$ следует соотношение

$$|\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t+\tau), \mathbf{f}(t+\tau+\eta))| \ge c^2\, \tau\, \eta\, (\tau+\eta)/4. \tag{4.11}$$

Доказательство. Применяя формулу (4.5) во втором и третьем столбцах интересующего нас определителя, имеем

$$\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t+\tau), \mathbf{f}(t+\tau+\eta)) = \det\Big(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t) + \tau\mathbf{f}'(t) + \frac{\tau^2}{2}\mathbf{f}''(t) +$$

$$+\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau), \mathbf{f}(t)+(\tau+\eta)\mathbf{f}'(t)+\frac{(\tau+\eta)^2}{2}\mathbf{f}''(t)+\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)\Big). \tag{4.12}$$

Вычитая первый столбец определителя из второго и третьего столбцов и вынося после этого τ из второго столбца и $\tau+\eta$ из третьего, из (4.12) находим

$$\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}(t+\tau),\mathbf{f}(t+\tau+\eta)) = \det\Big(\mathbf{f}(t), \tau\mathbf{f}'(t)+\frac{\tau^2}{2}\mathbf{f}''(t)+\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau),$$

$$(\tau+\eta)\mathbf{f}'(t)+\frac{(\tau+\eta)^2}{2}\mathbf{f}''(t)+\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)\Big)=$$

$$=\tau(\tau+\eta)\det\Big(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t)+\frac{\tau}{2}\mathbf{f}''(t)+\frac{1}{\tau}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau),$$

$$\mathbf{f}'(t)+\frac{\tau+\eta}{2}\mathbf{f}''(t)+\frac{1}{\tau+\eta}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)\Big). \tag{4.13}$$

Вычитанием второго столбца из третьего столбца в правой части формулы (4.13) приходим к соотношению

$$\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}(t+\tau),\mathbf{f}(t+\tau+\eta)) = \tau(\tau+\eta)\det\Big(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t)+\frac{\tau}{2}\mathbf{f}''(t)+\frac{1}{\tau}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau),$$

$$\frac{\eta}{2}\mathbf{f}''(t)+\frac{1}{\tau+\eta}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)-\frac{1}{\tau}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\Big).$$

Вынесем из третьего столбца множитель $\eta/2$

$$\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}(t+\tau),\mathbf{f}(t+\tau+\eta)) = \frac{\tau\eta(\tau+\eta)}{2}\det\Big(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t)+\frac{\tau}{2}\mathbf{f}''(t)+\frac{1}{\tau}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau),$$

$$\mathbf{f}''(t)+\frac{2}{\eta}\Big[\frac{1}{\tau+\eta}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)-\frac{1}{\tau}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\Big]\Big)$$

и вычтем теперь из второго столбца третий столбец, умноженный на $\frac{\tau}{2}$; получаем

$$\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}(t+\tau),\mathbf{f}(t+\tau+\eta)) = \frac{\tau\eta(\tau+\eta)}{2}\det\Big(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t)+\frac{1}{\tau}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)-$$

$$-\frac{\tau}{\eta}\Big[\frac{1}{\tau+\eta}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)-\frac{1}{\tau}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\Big],\mathbf{f}''(t)+\frac{2}{\eta}\Big[\frac{1}{\tau+\eta}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)-\frac{1}{\tau}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\Big]\Big).$$

Введя обозначения

$$\mathbf{r}^1_{\mathbf{f}} = \mathbf{r}^1_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\eta}\Big)\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)-\frac{\tau}{\eta(\tau+\eta)}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta), \tag{4.14}$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2 = \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2(t,\tau,\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\eta}\Big[\frac{1}{\tau+\eta}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta) - \frac{1}{\tau}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\Big], \tag{4.15}$$

найдем

$$\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}(t+\tau),\mathbf{f}(t+\tau+\eta)) = \frac{\tau\eta(\tau+\eta)}{2}\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t)+\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1,\mathbf{f}''(t)+\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2). \tag{4.16}$$

С учетом формулы (4.6) из (4.14)–(4.15) имеем

$$\lim_{\tau\to 0,\ K_0^{-1}\le\tau/\eta\le K_0} \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1(t,\tau,\eta) = 0, \qquad \lim_{\tau\to 0,\ K_0^{-1}\le\tau/\eta\le K_0} \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2(t,\tau,\eta) = 0. \tag{4.17}$$

Для оценки снизу определителя в правой части соотношения (4.16) воспользуемся представлением

$$\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t)+\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1,\mathbf{f}''(t)+\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2) = \det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{f}''(t)) + \det(\mathbf{f}(t),\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1,\mathbf{f}''(t)) +$$

$$+\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2) + \det(\mathbf{f}(t),\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1,\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2),$$

откуда найдем

$$|\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t)+\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1,\mathbf{f}''(t)+\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2)| \ge |\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{f}''(t))| - |\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1,\mathbf{f}''(t))| -$$

$$-|\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2)| - |\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1,\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2)|. \tag{4.18}$$

Применяя очевидную оценку объема $\det(\mathbf{a},\mathbf{g},\mathbf{c})$ параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a},\mathbf{g},\mathbf{c}$ через произведение длин этих векторов,

$$|\det(\mathbf{a},\mathbf{g},\mathbf{c})| \le \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{g}\|\cdot\|\mathbf{c}\|,$$

из (4.18) получим

$$|\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t)+\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1,\mathbf{f}''(t)+\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2)| \ge |\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{f}''(t))| - E_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta), \tag{4.19}$$

где

$$E_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{f}(t)\|\cdot\Big(\|\mathbf{f}''(t)\|\cdot\|\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1\| + \|\mathbf{f}'(t)\|\cdot\|\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2\| + Q_{\mathbf{r}}\Big), \tag{4.20}$$

$$Q_{\mathbf{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^1\|\cdot\|\mathbf{r}_{\mathbf{f}}^2\|. \tag{4.21}$$

Ввиду соотношений (4.17), (4.20)–(4.21) можно выбрать $\delta = \delta(c, K_0, \mathbf{f}, t) > 0$ так, что при $\tau \in (0,\delta)$ будет выполнено неравенство

$$E_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta) \le \frac{1}{2}|\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{f}''(t))|;$$

в этом случае из (4.19) следует

$$|\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t) + \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^{1}, \mathbf{f}''(t) + \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^{2})| \geq \frac{1}{2}|\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t))|. \tag{4.22}$$

Умножая обе части неравенства (4.22) на $\tau\eta(\tau+\eta)/2$, в силу (4.16) имеем

$$|\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t+\tau), \mathbf{f}(t+\tau+\eta))| \geq \frac{\tau\eta(\tau+\eta)}{4}|\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t))|;$$

учитывая неравенство (4.10), отсюда получаем соотношение (4.11). Теорема доказана. ■

Теорема 4.2. *Если выполнены условия теоремы 4.1 и для некоторого числа $c \in \mathbb{R}^1$ справедливо неравенство*

$$\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t)) \geq c^2, \tag{4.23}$$

то существует положительное число $\delta = \delta(c, K_0, \mathbf{f}, t)$ такое, что из условия $\tau \in (0, \delta)$ следует соотношение

$$\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t+\tau), \mathbf{f}(t+\tau+\eta)) \geq c^2\,\tau\,\eta\,(\tau+\eta)/4. \tag{4.24}$$

Доказательство. Доказательство неравенства (4.24) при условии (4.23) аналогично доказательству теоремы 4.1. Отметим лишь, что здесь вместо неравенства (4.18) следует воспользоваться неравенством

$$\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t) + \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^{1}, \mathbf{f}''(t) + \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^{2}) \geq \det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t)) - |\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^{1}, \mathbf{f}''(t))| -$$

$$- |\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^{2})| - |\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^{1}, \mathbf{r}_{\mathbf{f}}^{2})|. \tag{4.25}$$

Детали доказательства предоставляем читателю. ■

6.5. Полнота и позитивность цепочки векторов

Определение 5.1. *Цепочку векторов $\{\mathbf{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ будем называть позитивной, если выполнено условие*

$$\det(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_{j+1}, \mathbf{f}_{j+2}) > 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что позитивная цепочка векторов является полной.

Лемма 5.1. *Если выполнено условие (4.9), то справедливы неравенства*

$$\|\mathbf{r}^{\,1}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le \frac{1}{\tau}\Big[(1+K_0)\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\| + \frac{K_0^2}{1+K_0}\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)\|\Big], \tag{5.1}$$

$$\|\mathbf{r}^{\,2}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le \frac{2K_0}{\tau^2}\Big[\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\| + \frac{K_0}{1+K_0}\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)\|\Big]. \tag{5.2}$$

Доказательство. Из (4.14) имеем

$$\|\mathbf{r}^{\,1}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le \Big(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\eta}\Big)\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\| + \frac{\tau}{\eta(\tau+\eta)}\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)\|;$$

теперь из (4.9) следует неравенство (5.1). Аналогичным образом из (4.15) получаем

$$\|\mathbf{r}^{\,2}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le \frac{2}{\eta}\Big[\frac{1}{\tau}\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau)\| + \frac{1}{\tau+\eta}\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(t,\tau+\eta)\|\Big],$$

откуда выводим соотношение (5.2). ∎

Лемма 5.2. *При условии (4.9) справедливы соотношения*

$$\|\mathbf{r}^{\,1}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le \tau(1+K_0)\Big[S(\mathbf{f}'',t,\tau) + K_0^2 S(\mathbf{f}'',t,(1+K_0)\tau)\Big], \tag{5.3}$$

$$\|\mathbf{r}^{\,2}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le 2K_0\Big[S(\mathbf{f}'',t,\tau) + K_0(1+K_0) S(\mathbf{f}'',t,(1+K_0)\tau)\Big]. \tag{5.4}$$

Доказательство. Из (5.1) с помощью (4.2) и (4.7) имеем

$$\|\mathbf{r}^{\,1}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le \frac{1}{\tau}\Big[(1+K_0)\tau^2 S(\mathbf{f}'',t,\tau) + \frac{K_0^2}{1+K_0}(1+K_0)^2\tau^2 S(\mathbf{f}'',t,(1+K_0)\tau)\Big],$$

$$\|\mathbf{r}^{\,2}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le \frac{2K_0}{\tau^2}\Big[\tau^2 S(\mathbf{f}'',t,\tau) + \frac{K_0}{1+K_0}(1+K_0)^2\tau^2 S(\mathbf{f}'',t,(1+K_0)\tau)\Big],$$

откуда следуют соотношения (5.3) и (5.4). ∎

Следствие 5.1. *При условии (4.9) верны неравенства*

$$\|\mathbf{r}^{\,1}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le \tau(1+K_0)(1+K_0^2) S(\mathbf{f}'',t,(1+K_0)\tau), \tag{5.5}$$

$$\|\mathbf{r}^{\,2}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le 2K_0(1+K_0+K_0^2) S(\mathbf{f}'',t,(1+K_0)\tau). \tag{5.6}$$

Доказательство. Из (5.3)–(5.4) с использованием формулы (4.2) получаем (5.5)–(5.6). ∎

Следствие 5.2. *Если выполнено условие (4.9), то справедливы неравенства*

$$Q_{\mathbf{r}} \leq M_1(K_0)\tau\Big(S(\mathbf{f}'', t, (1+K_0)\tau)\Big)^2, \tag{5.7}$$

где

$$M_1(K_0) \stackrel{\text{def}}{=} 2K_0(1+K_0)(1+K_0^2)(1+K_0+K_0^2). \tag{5.8}$$

Доказательство. Учитывая соотношение (4.21), видим, что для доказательства формул (5.7)–(5.8) достаточно перемножить неравенства (5.5)–(5.6). ∎

Лемма 5.3. *Справедливо соотношение*

$$E_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta) \leq C_1(\mathbf{f}, t, \tau, K_0) S(\mathbf{f}'', t, (1+K_0)\tau), \tag{5.9}$$

где

$$C_1(\mathbf{f}, t, \tau, K_0) \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{f}(t)\| \cdot \Big[\tau(1+K_0)(1+K_0^2)\|\mathbf{f}''(t)\| +$$

$$+2K_0\Big(1+K_0+K_0^2\Big)\|\mathbf{f}'(t)\| + \tau M_1(K_0) S(\mathbf{f}'', t, (1+K_0)\tau)\Big]. \tag{5.10}$$

Доказательство. Из (4.20)–(4.21) и (5.5)–(5.8) простой подстановкой получаем (5.9)–(5.10). ∎

Предположим, что сетка X локально квазиравномерная, точнее: пусть для некоторого натурального числа K_0 справедливы соотношения

$$K_0^{-1} \leq \frac{x_{j+1}-x_j}{x_j - x_{j-1}} \leq K_0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{5.11}$$

Замечание. Если выполнено неравенство $K^{-1} \leq \frac{x_{j+1}-x_j}{x_j-x_{j-1}} \leq K \ \forall j \in \mathbb{Z}$ *для некоторого вещественного* $K \geq 1$, *то полагаем* $K_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lceil K \rceil$.

Рассмотрим цепочку трехмерных векторов $\mathbf{f}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}(x_j)\ \forall j \in \mathbb{Z}$.

Теорема 5.1. *Если* $\mathbf{f} \in C^2(\alpha,\beta)$, *выполнены неравенства (5.11), а вронскиан* $\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t))$ *отделен от нуля:*

$$|\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t))| \geq c^2 > 0 \qquad \forall t \in (\alpha,\beta), \tag{5.12}$$

и если для $\bar{t} = x_j$, $\tau = x_{j+1} - x_j$ *справедливо условие*

$$C_1(\mathbf{f}, \bar{t}, \tau, K_0) S(\mathbf{f}'', \bar{t}, (1+K_0)\tau) \leq c^2/2, \tag{5.13}$$

то верно соотношение

$$|\det(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_{j+1}, \mathbf{f}_{j+2})| \geq \frac{c^2}{4}(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_j). \tag{5.14}$$

Доказательство. Из (5.13) с помощью (5.9)–(5.10) получаем $E_{\mathbf{f}}(\overline{t},\tau,\eta) \le c^2/2$; учитывая неравенство (5.12) и теорему 4.1, примененную для $t = \overline{t}$, $\tau = x_{j+1} - x_j$, $\eta = x_{j+2} - x_{j+1}$, из (4.11) и (4.19) находим (5.14). ■

Следствие 5.3. *Если условия теоремы 5.1 выполнены для всех $j \in \mathbb{Z}$, то неравенство (5.14) справедливо для всех $j \in \mathbb{Z}$; таким образом цепочка векторов $\{\mathbf{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является полной цепочкой.*

Теорема 5.2. *Если выполнены условия теоремы 5.1 для всех $j \in \mathbb{Z}$, и*

$$\det(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t)) \ge c^2 > 0 \qquad \forall t \in (\alpha,\beta), \tag{5.15}$$

то справедливо соотношение

$$\det(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_{j+1}, \mathbf{f}_{j+2}) \ge \frac{c^2}{4}(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+2} - x_j) \qquad \forall j \in \mathbb{Z}; \tag{5.16}$$

итак, цепочка векторов $\{\mathbf{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ позитивна.

Доказательство соотношения (5.16) при условии (5.15) аналогично доказательству теоремы 5.1 (см. также теорему 4.2 и соотношение (4.25)).

Вместо величины $S(\mathbf{f}, t, \tau)$ иногда удобнее использовать модуль непрерывности $\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}'', \tau)$.

Применяя неравенство (4.8) и свойства (4.3)–(4.4), читатель легко получит следующие утверждения.

Лемма 5.4. *При условии (4.9) справедливы соотношения*

$$\|\mathbf{r}^{\,1}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le \tau(1+K_0)\Big[1 + K_0^2(1+K_0)\Big]\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}'',\tau),$$

$$\|\mathbf{r}^{\,2}_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta)\| \le 2K_0\Big[1 + K_0(1+K_0)^2\Big]\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}'',\tau).$$

Следствие 5.4. *Если выполнено условие (4.9), то справедливы неравенства*

$$Q_{\mathbf{r}} \le M(K_0)\tau\Big(\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}'',\tau)\Big)^2,$$

где

$$M(K_0) \stackrel{\text{def}}{=} 2K_0(1+K_0)\Big(1 + K_0^2(1+K_0)\Big)\cdot\Big(1 + K_0(1+K_0)^2\Big).$$

Лемма 5.5. *При выполнении неравенства (4.9) справедливо соотношение*

$$E_{\mathbf{f}}(t,\tau,\eta) \le C(\mathbf{f},t,\tau,K_0)\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}'',\tau),$$

где

$$C(\mathbf{f},t,\tau,K_0) \overset{\text{def}}{=} \|\mathbf{f}(t)\| \cdot \Big[\tau(1+K_0)\Big(1+K_0^2(1+K_0)\Big)\|\mathbf{f}''(t)\| +$$
$$+2K_0\Big(1+K_0(1+K_0)^2\Big)\|\mathbf{f}'(t)\| +$$
$$+2K_0(1+K_0)\Big(1+K_0^2(1+K_0)\Big)\cdot\Big(1+K_0(1+K_0)^2\Big)\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}'',\tau)\tau\Big].$$

Теорема 5.3. *Если* $\mathbf{f} \in C^2(\alpha,\beta)$, *выполнено условие (5.11),* $\tau \overset{\text{def}}{=} x_{j+1} - x_j$, *а вронскиан* $\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{f}''(t))$ *отделен от нуля:*

$$|\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{f}''(t))| \ge c^2 > 0 \qquad \forall t \in (\alpha,\beta),$$

то при условии

$$C(\mathbf{f},t,\tau,K_0)\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}'',\tau) \le c^2/2 \tag{5.17}$$

справедливо соотношение

$$|\det(\mathbf{f}_j,\mathbf{f}_{j+1},\mathbf{f}_{j+2})| \ge \frac{c^2}{4}(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_j). \tag{5.18}$$

Следствие 5.5. *Пусть* $h_X \overset{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1} - x_j$. *Если в условиях теоремы 5.3 заменить соотношение (5.17) на соотношение*

$$C(\mathbf{f},t,h_X,K_0)\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{f}'',h_X) \le c^2/2 \qquad \forall t \in (\alpha,\beta), \tag{5.19}$$

то неравенство (5.18) будет справедливо для всех $j \in \mathbb{Z}$; *в этом случае цепочка векторов* $\{\mathbf{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *— полная цепочка.*

Теорема 5.4. *Если выполнено условие (5.11),* $\mathbf{f} \in C^2(\alpha,\beta)$ *и* $\tau \overset{\text{def}}{=} x_{j+1} - x_j$, *а вронскиан* $\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{f}''(t))$ *положителен:*

$$\det(\mathbf{f}(t),\mathbf{f}'(t),\mathbf{f}''(t)) \ge c^2 > 0 \qquad \forall t \in (\alpha,\beta),$$

то при условии (5.19) справедливо соотношение

$$\det(\mathbf{f}_j,\mathbf{f}_{j+1},\mathbf{f}_{j+2}) \ge \frac{c^2}{4}(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_j) \qquad \forall j \in \mathbb{Z};$$

таким образом, цепочка векторов $\{\mathbf{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *позитивна.*

6.6. Критерий положительности координатных сплайнов

Лемма 6.1. *Для произвольных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ *справедливо тождество*

$$\det(\mathbf{a}\times\mathbf{g}, \mathbf{c}\times\mathbf{d}, \mathbf{e}\times\mathbf{f}) = \det(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\det(\mathbf{g},\mathbf{e},\mathbf{f}) - \det(\mathbf{g},\mathbf{c},\mathbf{d})\det(\mathbf{a},\mathbf{e},\mathbf{f}). \quad (6.1)$$

Доказательство. Рассматривая определитель $\det(\mathbf{a}\times\mathbf{g}, \mathbf{c}\times\mathbf{g}, \mathbf{e}\times\mathbf{f})$ как смешанное произведение векторов $\mathbf{a}\times\mathbf{g}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$, $\mathbf{e}\times\mathbf{f}$, запишем его в виде векторного произведения первых двух из них, скалярно умноженного на третий вектор:

$$\det(\mathbf{a}\times\mathbf{g}, \mathbf{c}\times\mathbf{d}, \mathbf{e}\times\mathbf{f}) = [(\mathbf{a}\times\mathbf{g})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{f}). \quad (6.2)$$

Используя формулу (3.3) при $\mathbf{x}=\mathbf{c}$, $\mathbf{y}=\mathbf{d}$, $\mathbf{z}=\mathbf{g}$, $\mathbf{w}=\mathbf{a}$, видим, что формула (6.2) эквивалентна соотношению

$$\det(\mathbf{a}\times\mathbf{g}, \mathbf{c}\times\mathbf{d}, \mathbf{e}\times\mathbf{f}) = [\det(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{g} - \det(\mathbf{g},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}]\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{f});$$

отсюда с помощью представления смешанного произведения в виде определителя, приходим к эквивалентной записи (6.1). Лемма доказана. ■

Дальше рассматривается вектор-функция $\mathbf{b}(t)$, введенная формулой (3.1).

Лемма 6.2. *Пусть вектор-функция* $\varphi(t)$ *трижды непрерывно дифференцируема. Тогда*

$$\det(\mathbf{b}(t), \mathbf{b}'(t), \mathbf{b}''(t)) = |\det(\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t))|^2. \quad (6.3)$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{b}' = \varphi'\times\varphi' + \varphi\times\varphi'' = \varphi\times\varphi''$, $\mathbf{b}'' = \varphi'\times\varphi'' + \varphi\times\varphi'''$, и потому

$$\det(\mathbf{b}(t), \mathbf{b}'(t), \mathbf{b}''(t)) = \det(\varphi\times\varphi', \varphi\times\varphi'', \varphi'\times\varphi'' + \varphi\times\varphi''') =$$

$$= \det(\varphi\times\varphi', \varphi\times\varphi'', \varphi'\times\varphi'') + \det(\varphi\times\varphi', \varphi\times\varphi'', \varphi\times\varphi'''). \quad (6.4)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части формулы (6.4), имея ввиду формулу (6.1) при

$$\mathbf{a}=\varphi, \quad \mathbf{g}=\varphi', \quad \mathbf{c}=\varphi, \quad \mathbf{d}=\varphi'', \quad \mathbf{e}=\varphi', \quad \mathbf{f}=\varphi''.$$

Ясно,что

$$\det(\varphi\times\varphi', \varphi\times\varphi'', \varphi'\times\varphi'') =$$

$$= \det(\varphi,\varphi,\varphi'')\det(\varphi',\varphi',\varphi'') - \det(\varphi',\varphi,\varphi'')\det(\varphi,\varphi',\varphi'');$$

заметим, что первое слагаемое правой части последней формулы равно нулю, так что

$$\det(\varphi\times\varphi',\varphi\times\varphi'',\varphi'\times\varphi'')=|\det(\varphi,\varphi',\varphi'')|^2.$$

Второе слагаемое в правой части формулы (6.4) преобразуем с использованием соотношения (6.1); полагая

$$\mathbf{a}=\varphi,\quad \mathbf{g}=\varphi',\quad \mathbf{c}=\varphi,\quad \mathbf{d}=\varphi'',\quad \mathbf{e}=\varphi,\quad \mathbf{f}=\varphi''',$$

получаем

$$\det(\varphi\times\varphi',\varphi\times\varphi'',\varphi\times\varphi''')=$$
$$=\det(\varphi,\varphi,\varphi'')\det(\varphi',\varphi,\varphi''')-\det(\varphi',\varphi,\varphi'')\det(\varphi,\varphi,\varphi''')=0.$$

Итак, формула (6.3) установлена. Лемма доказана. ■

Следствие 6.1. *Если* $\varphi\in C^3[\alpha,\beta]$ $\det(\varphi,\varphi',\varphi'')(t)\neq 0$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$, *то в условиях леммы 6.2 существует константа* $c>0$ *такая, что* $\det(\mathbf{b}(t),\mathbf{b}'(t),\mathbf{b}''(t))\geq c$.

Обратимся к формулам (3.22)–(3.24) представления B_φ-сплайна ω_j^*.

В дальнейшем точку, в которой производная рассматриваемой функции обращается в ноль, будем называть *критической точкой.*

Теорема 6.1. *Пусть цепочка векторов* $\{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *позитивна, выполнено условие*

$$\det(\varphi_j,{\varphi'}_j,\varphi'(t))(t-x_j)>0\qquad\forall t\in[x_{j-1},x_j)\cup(x_j,x_{j+1}]\quad\forall j\in\mathbb{Z},\tag{6.5}$$

а кроме того при каждом $j\in\mathbb{Z}$ *функция* $f_j(t)\stackrel{\text{def}}{=}\det(\mathbf{b}_j\times\mathbf{b}_{j+1},\varphi(t),\mathbf{b}_{j+2}\times\mathbf{b}_{j+3})$ *имеет не более двух критических точек на промежутке* (x_{j+1},x_{j+2}). *Тогда* B_φ*-сплайн* ω_j^* $\forall j\in\mathbb{Z}$ *положителен на интервале* (x_j,x_{j+3}), *возрастает на интервале* (x_j,x_{j+1}), *выпукл на интервале* (x_{j+1},x_{j+2}), *убывает на интервале* (x_{j+2},x_{j+3}).

Доказательство. Поскольку $\det(\varphi_j,{\varphi'}_j,\varphi(t))\Big|_{t=x_j}=0$, то из условия (6.5) делаем вывод, что функция $\det(\varphi_j,{\varphi'}_j,\varphi(t))$ на промежутке $(x_j,x_{j+1}]$ положительна и возрастает, а на промежутке $[x_{j-1},x_j)$ положительна и убывает. Учитывая позитивность цепочки векторов $\{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, из соотношения (3.22) получаем неравенства

$$\omega_j^*(t)>0,\quad \frac{d}{dt}\omega_j^*(t)>0\qquad\forall t\in(x_j,x_{j+1}].\tag{6.6}$$

Заменяя j на $j+3$ в (6.5) и снова используя позитивность упомянутой цепочки векторов, из (3.24) находим

$$\omega_j^*(t)>0,\quad \frac{d}{dt}\omega_j^*(t)<0\qquad\forall t\in[x_{j+2},x_{j+3}).\tag{6.7}$$

Теперь установим положительность функции $\omega_j^*(t)$ на промежутке (x_{j+1}, x_{j+2}). Предположим противное: пусть существует точка $t_* \in (x_{j+1}, x_{j+2})$, в которой рассматриваемая функция неположительна, т. е. $\omega_j^*(t_*) \le 0$. Принимая во внимание непрерывную дифференцируемость функции $\omega_j^*(t)$ и вытекающие из соотношений (6.6)–(6.7) неравенства

$$\omega_j^*(x_{j+1}) > 0, \quad \frac{d}{dt}\omega_j^*(x_{j+1}) > 0, \qquad \omega_j^*(x_{j+2}) > 0, \quad \frac{d}{dt}\omega_j^*(x_{j+2}) < 0,$$

приходим к выводу, что на промежутке (x_{j+1}, x_{j+2}) у функции $\omega_j^*(t)$ должно быть не менее трех критических точек. Поскольку функция $f_j(t)$ отличается от $\omega_j^*(t)$ лишь постоянным множителем, то $f_j(t)$ также должна иметь не менее трех критических точек на рассматриваемом промежутке. Однако этот вывод противоречит условию теоремы; итак, функция $\omega_j^*(t)$ положительна и на промежутке (x_{j+1}, x_{j+2}). Остальные утверждения очевидны. Теорема доказана. ■

Теорема 6.2. *Пусть $\varphi \in C^3(\alpha, \beta)$, выполнены условия (5.11), (6.5) и при некотором $c > 0$ справедливы соотношения*

$$|\det(\varphi, \varphi', \varphi'')(t)| \ge c,$$

$$C_1(\mathbf{b}, x_j, x_{j+1} - x_j, K_0) S(\mathbf{b}'', x_j, x_{j+1} - x_j) \le c^2/2 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{6.8}$$

где $\mathbf{b}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t) \times \varphi'(t)$. Пусть еще при каждом $j \in \mathbb{Z}$ функции $f_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_{j+1}, \varphi(t), \mathbf{b}_{j+2} \times \mathbf{b}_{j+3})$ имеют не более двух критических точек на промежутке (x_{j+1}, x_{j+2}). Тогда справедливы заключения предыдущей теоремы: B_φ-сплайн ω_j^* $\forall j \in \mathbb{Z}$ положителен на интервале (x_j, x_{j+3}), возрастает на интервале (x_j, x_{j+1}), выпуклый на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}), убывает на интервале (x_{j+2}, x_{j+3}).

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 6.1. Применяя теорему 5.2 для $\mathbf{f}(t) = \mathbf{b}(t)$ с учетом соотношения (6.3), видим, что при условиях (6.8) цепочка векторов $\{\mathbf{b}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ позитивна. Остальные условия теоремы 6.1 выполнены, так как они также являются условиями доказываемого утверждения. ■

Теорема 6.3. *Пусть $\varphi \in C^3(\alpha, \beta)$, выполнены условия (5.11), (6.5) и при некотором $c > 0$ справедливы соотношения*

$$|\det(\varphi, \varphi', \varphi'')(t)| \ge c,$$

$$C(\mathbf{b}, t, h_X, K_0) \mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{b}'', h_X) \le c^2/2 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{6.9}$$

где $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j \in \mathbb{Z}} x_{j+1} - x_j$. Пусть при каждом $j \in \mathbb{Z}$ функция $f_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_{j+1}, \varphi(t), \mathbf{b}_{j+2} \times \mathbf{b}_{j+3})$ имеют не более двух критических точек на промежутке (x_{j+1}, x_{j+2}). Тогда справедливы заключения предыдущей теоремы.

Доказательство. Легко видеть, что кроме неравенства (6.8) все предположения предыдущей теоремы выполнены. Ввиду соотношения (4.8) неравенство (6.8) является следствием предположения (6.9). Теорема доказана. ■

6.7. Экспоненциальные непрерывно дифференцируемые сплайны

На интервале (α, β) рассмотрим генерирующую вектор-функцию вида $\varphi(t) = (1, e^{at}, e^{bt})^T$, где a, b — различные вещественные числа, причем ни одно из них не равно нулю. В этом пункте будем получать координатные сплайны, используя соотношения (3.22)–(3.24); вместо символа * для их обозначения в данном конкретном случае будем использовать символ ^{E}, так что получаемые координатные сплайны будут обозначаться ω_j^E. Докажем некоторые вспомогательные утверждения. Для удобства читателей при вычислении векторного произведения будем использовать его представление через символьный определитель: если $\mathbf{a} = (x, y, z)^T$, $\mathbf{g} = (\xi, \eta, \zeta)^T$, то $\mathbf{a} \times \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — координатные орты. В дальнейшем $\mathbf{b}(u)$ по-прежнему означает векторное произведение $\varphi(u) \times \varphi'(u)$.

Лемма 7.1. *Справедливы соотношения*

$$\mathbf{b}(u) = \begin{pmatrix} (b-a)e^{(a+b)u} \\ -be^{bu} \\ ae^{au} \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

$$\mathbf{b}(u) \cdot \varphi(t) = (b-a)e^{(a+b)u} - be^{bu+at} + ae^{au+bt}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Ясно, что $\varphi'(t) = (0, ae^{at}, be^{bt})^T$, $\mathbf{b}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t) \times \varphi'(t) = \mathbf{i}(be^{(a+b)t} - ae^{(a+b)t}) - \mathbf{j}be^{bt} + \mathbf{k}ae^{at}$; таким образом установлено соотношение (7.1). Соотношение (7.2) легко получается из (7.1). ■

Введем обозначение

$$f(t, u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}(u) \cdot \varphi(t). \tag{7.3}$$

Лемма 7.2. *Для функции $f(t, u)$ справедлива формула*

$$\operatorname{sgn}\Bigl(\frac{d}{dt} f(t, u)\Bigr) = \operatorname{sgn}\bigl(ab(b-a)(t-u)\bigr). \tag{7.4}$$

Доказательство. Согласно (7.2)–(7.3) имеем

$$\frac{d}{dt}f(t,u) = ab(e^{bt+au} - e^{at+bu}).$$

Если $t < u$, то при $b - a > 0$ получаем $(b-a)t < (b-a)u$, что эквивалентно соотношению $bt + au < at + bu$, так что ввиду монотонного возрастания функции $\exp x$ имеем $e^{bt+au} - e^{at+bu} < 0$ при $t < u$, $b - a > 0$.

Аналогично получаем $e^{bt+au} - e^{at+bu} > 0$ при $t < u$, $b - a < 0$.

Таким образом, верна формула

$$\operatorname{sgn}\Bigl(\frac{d}{dt}f(t,u)\Bigr) = -\operatorname{sgn}\bigl(ab(b-a)\bigr) \qquad \text{при } t < u. \tag{7.5}$$

Тем же путем получаем

$$\operatorname{sgn}\Bigl(\frac{d}{dt}f(t,u)\Bigr) = +\operatorname{sgn}\bigl(ab(b-a)\bigr) \qquad \text{при } t > u. \tag{7.6}$$

Из формул (7.5)–(7.6) следует соотношение (7.4). ■

Теорема 7.1. *Функция* $\det(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi(t))$

1) при $t = x_j$ *обращается в нуль,*

2) при $ab(b-a) > 0$ *положительна и возрастает при* $t \in (x_j, x_{j+1})$*,*

3) при $ab(b-a) < 0$ *отрицательна и убывает при* $t \in (x_j, x_{j+1})$*.*

Доказательство. Первый пункт теоремы очевиден. Поскольку $\det(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi(t)) = \mathbf{b}(x_j) \cdot \varphi(t)$, то используя соотношения (7.2)–(7.4) при $u = x_j$, имеем $u < t$, и потому

$$\frac{d}{dt}\det(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi(t)) = \operatorname{sgn}\bigl(ab(b-a)\bigr).$$

Этим устанавливаются второй и третий пункты доказываемой теоремы. ■

Теорема 7.2. *Функция* $\det(\varphi(t), \varphi_{j+3}, \varphi'_{j+3})$

1) при $t = x_{j+3}$ *обращается в нуль,*

2) при $ab(b-a) > 0$ *положительна и убывает при* $t \in (x_{j+2}, x_{j+3})$*,*

3) при $ab(b-a) < 0$ *отрицательна и возрастает при* $t \in (x_{j+2}, x_{j+3})$*.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. Первый пункт теоремы очевиден, а поскольку $\det(\varphi(t), \varphi_{j+3}, \varphi'_{j+3}) = \mathbf{b}(x_{j+3}) \cdot \varphi(t)$, то используя соотношения (7.2)–(7.4) при $u = x_{j+3}$, видим, что $u > t$, и потому

$$\frac{d}{dt}\det(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi(t)) = -\operatorname{sgn}\bigl(ab(b-a)\bigr).$$

Теорема доказана. ■

Лемма 7.3. *Справедливы соотношения*

$$\mathbf{b}(u)\times\mathbf{b}(v)=\begin{pmatrix} ab\big(\exp(au+bv)-\exp(bu+av)\big)\\ a(b-a)\big(\exp((a+b)v+au)-\exp((a+b)u+av)\big)\\ b(b-a)\big(\exp((a+b)v+bu)-\exp((a+b)u+bv)\big)\end{pmatrix}, \tag{7.7}$$

$$\det(\mathbf{b}(u),\mathbf{b}(v),\varphi(t))=ab\big(\exp(au+bv)-\exp(bu+av)\big)+$$
$$+a(b-a)\big(\exp((a+b)v+au)-\exp((a+b)u+av)\big)\exp(at)+$$
$$+b(b-a)\big(\exp((a+b)v+bu)-\exp((a+b)u+bv)\big)\exp(bt), \tag{7.8}$$

$$\det(\mathbf{b}(u),\mathbf{b}(v),\mathbf{b}(w))=ab(b-a)\Big[\exp\big(au+bv+(a+b)w\big)-\exp\big(bu+av+(a+b)w\big)-$$
$$-\exp\big((a+b)v+au+bw\big)+\exp\big((a+b)u+av+bw\big)+$$
$$+\exp\big((a+b)v+bu+aw\big)-\exp\big((a+b)u+bv+aw\big)\Big]. \tag{7.9}$$

Доказательство. Найдем векторное произведение $\mathbf{b}(u)\times\mathbf{b}(v)$:

$$\mathbf{b}(u)\times\mathbf{b}(v)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ (b-a)e^{(a+b)u} & -be^{bu} & ae^{au}\\ (b-a)e^{(a+b)v} & -be^{bv} & ae^{av}\end{vmatrix}=\mathbf{i}\Big(-ab\exp(bu+av)+$$

$$+ab\exp(au+bv)\Big)-\mathbf{j}\Big(a(b-a)\exp\big((a+b)u+av\big)-a(b-a)\exp\big((a+b)v+au\big)\Big)+$$
$$+\mathbf{k}\Big(-(b-a)b\exp\big((a+b)u+bv\big)+(b-a)b\exp\big((a+b)v+bu\big)\Big).$$

Отсюда получается формула (7.7). Определитель (7.8) теперь получается скалярным произведением вектора (7.7) на вектор $\varphi(t)$.

Перейдем к вычислению определителя $\det(\mathbf{b}(u),\mathbf{b}(v),\mathbf{b}(w))$:

$$\det(\mathbf{b}(u),\mathbf{b}(v),\mathbf{b}(w))=(\mathbf{b}(u)\times\mathbf{b}(v))\cdot\mathbf{b}(w)=$$

$$=\begin{pmatrix} ab(e^{au+bv}-e^{bu+av})\\ a(b-a)(e^{(a+b)v+au}-e^{(a+b)u+av})\\ b(b-a)(e^{(a+b)v+bu}-e^{(a+b)u+bv})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(b-a)e^{(a+b)w}\\ -be^{bw}\\ ae^{aw}\end{pmatrix}$$

Складывая произведения одноименных компонент, находим формулу (7.9). ■

Лемма 7.4. *Если $u<v$, $0<a<b$, то*

$$\det(\mathbf{b}(u),\mathbf{b}(v),\varphi(t))>0\qquad\forall t\in\mathbb{R}^1. \tag{7.10}$$

Доказательство. В условиях леммы справедливы неравенства

$$au+bv > bu+av, \quad (a+b)v+au > (a+b)u+av, \quad (a+b)v+bu > (a+b)u+bv;$$

ввиду монотонности функции $\exp x$ все три слагаемые правой части соотношения (7.8) положительны, что и доказывает неравенство (7.10). ■

Лемма 7.5. *Если числа a, b различны, то производная функции $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{b}(u)\times\mathbf{b}(v), \varphi(t), \mathbf{b}(w)\times\mathbf{b}(z))$ имеет не более одного вещественного корня.*

Доказательство. Введем обозначение $[\mathbf{c}]_i$ для i-й компоненты вектора $\mathbf{c}$, $i = 0, 1, 2$, и полагая $\mathbf{c}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}(u) \times \mathbf{b}(v)$, имеем

$$F(t) = \det \begin{pmatrix} [\mathbf{c}(u,v)]_0 & 1 & [\mathbf{c}(w,z)]_0 \\ [\mathbf{c}(u,v)]_1 & e^{at} & [\mathbf{c}(w,z)]_1 \\ [\mathbf{c}(u,v)]_2 & e^{bt} & [\mathbf{c}(w,z)]_2 \end{pmatrix},$$

так что

$$F'(t) = \det \begin{pmatrix} [\mathbf{c}(u,v)]_0 & 0 & [\mathbf{c}(w,z)]_0 \\ [\mathbf{c}(u,v)]_1 & ae^{at} & [\mathbf{c}(w,z)]_1 \\ [\mathbf{c}(u,v)]_2 & be^{bt} & [\mathbf{c}(w,z)]_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $F'(t) = 0$ можно переписать в виде

$$Aae^{at} = Bbe^{bt}, \tag{7.11}$$

где

$$A \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{c}(u,v)]_0[\mathbf{c}(w,z)]_2 - [\mathbf{c}(u,v)]_2[\mathbf{c}(w,z)]_0,$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{c}(u,v)]_0[\mathbf{c}(w,z)]_1 - [\mathbf{c}(u,v)]_1[\mathbf{c}(w,z)]_0.$$

Ясно, что в условиях леммы уравнение (7.11) имеет не более одного вещественного корня. ■

Теорема 7.3. *Пусть α и β конечны, сетка X удовлетворяет условию (5.11), и выполнено условие*

$$C(\mathbf{b}, t, h_X, K_0)\mathsf{mod}_{(\alpha,\beta)}(\mathbf{b}'', h_X) \le c^2/2 \qquad \forall t \in [\alpha, \beta], \tag{7.12}$$

где $c \stackrel{\text{def}}{=} e^{(a+b)\alpha}|ab(b-a)|$ при $a+b \ge 0$, $c \stackrel{\text{def}}{=} e^{(a+b)\beta}|ab(b-a)|$ при $a+b < 0$. Тогда B_φ-сплайны ω_j^E 1) при $ab(b-a) > 0$ положительны на интервале (x_j, x_{j+3}), возрастают на интервале (x_j, x_{j+1}), убывают на интервале (x_{j+2}, x_{j+3}), выпуклы на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}); 2) при $ab(b-a) < 0$ отрицательны на интервале (x_j, x_{j+3}), убывают на интервале (x_j, x_{j+1}), возрастают на интервале (x_{j+2}, x_{j+3}), вогнуты на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}).

Доказательство. Заметим, что

$$\det(\varphi(t),\varphi'(t),\varphi''(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e^{at} & ae^{at} & a^2e^{at} \\ e^{bt} & be^{bt} & b^2e^{bt} \end{vmatrix} = e^{(a+b)t}ab(b-a) \neq 0,$$

так что

$$|\det(\varphi,\varphi',\varphi'')(t)| \geq c > 0 \qquad \forall t \in [\alpha,\beta],$$

где $c \stackrel{\text{def}}{=} e^{(a+b)\alpha}|ab(b-a)|$ при $a+b \geq 0$, $c \stackrel{\text{def}}{=} e^{(a+b)\beta}|ab(b-a)|$ при $a+b<0$. Поскольку

$$\det(\mathbf{b}(t),\mathbf{b}'(t),\mathbf{b}''(t)) = |\det(\varphi(t),\varphi'(t),\varphi''(t))|^2,$$

то выполнено неравенство (5.16), где $\mathbf{f}(t) = \mathbf{b}(t)$, так что цепочка $\{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ позитивная. Ввиду условия (7.12) доказываемая теорема следует из теоремы 6.1 и лемм 7.1–7.5. ∎

6.8. Гиперболические непрерывно дифференцируемые сплайны

Рассмотрим еще один вариант генерирующей вектор-функции: возьмем $\varphi(t) = (1, e^{at}, e^{-at})$ при $a \neq 0$. Соответствующие этому варианту функции $\omega_j^*(t)$ обозначим $\omega_j^H(t)$ и будем их называть гиперболическими непрерывно дифференцируемыми координатными сплайнами второго порядка. Очевидно,что эти сплайны являются частным случаем экспоненциальных сплайнов, рассмотренных в предыдущем пункте. В отличие от предыдущего пункта здесь устанавливается неотрицательность координатных гиперболических сплайнов без каких-либо ограничений на сетку X, т. е. не требуется ни мелкость сетки, ни ее локальная квазиравномерность.

Лемма 8.1. *Если $\varphi(t) = (1, e^{at}, e^{-at})$ при $a \neq 0$, то*

$$\mathbf{b}(u) \times \mathbf{b}(v) = 4a^2 \operatorname{sh}\Bigl(a\frac{v-u}{2}\Bigr) \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\bigl(a\frac{u-v}{2}\bigr) \\ \exp\bigl(a\frac{u+v}{2}\bigr) \\ -\exp\bigl(-a\frac{u+v}{2}\bigr) \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

$$\det(\mathbf{b}(u),\mathbf{b}(v),\mathbf{b}(w)) = 8 \operatorname{sh}\frac{a(w-v)}{2} \operatorname{sh}\frac{a(w-u)}{2} \operatorname{sh}\frac{a(v-u)}{2}. \tag{8.2}$$

Доказательство. Из (7.7) при $b=-a$ имеем

$$\mathbf{b}(u) \times \mathbf{b}(v) = \begin{pmatrix} -a^2\bigl(e^{a(u-v)} - e^{-a(u-v)}\bigr) \\ -2a^2\bigl(e^{au} - e^{av}\bigr) \\ 2a^2\bigl(e^{-au} - e^{-av}\bigr) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z$, $\operatorname{sh} z = (e^z - e^{-z})/2$, то

$$\mathbf{b}(u) \times \mathbf{b}(v) = 2a^2 \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\big(a(v-u)\big) \\ \operatorname{ch}(av) + \operatorname{sh}(av) - \operatorname{ch}(au) - \operatorname{sh}(au) \\ \operatorname{ch}(au) + \operatorname{sh}(au) - \operatorname{ch}(av) - \operatorname{sh}(av) \end{pmatrix}.$$

Используя формулы для гиперболических функций,

$$\operatorname{ch}\gamma - \operatorname{ch}\delta = 2\operatorname{sh}\frac{\gamma+\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{\gamma-\delta}{2}, \tag{8.3}$$

$$\operatorname{sh}\gamma - \operatorname{sh}\delta = 2\operatorname{sh}\frac{\gamma-\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{\gamma+\delta}{2}, \tag{8.4}$$

$$\operatorname{sh}\gamma = 2\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}, \tag{8.5}$$

находим

$$\mathbf{b}(u) \times \mathbf{b}(v) = 2a^2 \begin{pmatrix} 2\operatorname{sh}\big(a\frac{v-u}{2}\big)\operatorname{ch}\big(a\frac{v-u}{2}\big) \\ 2\operatorname{sh}\big(a\frac{u+v}{2}\big)\operatorname{sh}\big(a\frac{v-u}{2}\big) + 2\operatorname{sh}\big(a\frac{v-u}{2}\big)\operatorname{ch}\big(a\frac{v+u}{2}\big) \\ 2\operatorname{sh}\big(a\frac{u+v}{2}\big)\operatorname{sh}\big(a\frac{v-u}{2}\big) - 2\operatorname{sh}\big(a\frac{v-u}{2}\big)\operatorname{ch}\big(a\frac{v+u}{2}\big) \end{pmatrix} =$$

$$= 4a^2\operatorname{sh}\Big(a\frac{u-v}{2}\Big)\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\big(a\frac{u-v}{2}\big) \\ \operatorname{sh}\big(a\frac{u+v}{2}\big) + \operatorname{ch}\big(a\frac{v+u}{2}\big) \\ \operatorname{sh}\big(a\frac{u+v}{2}\big) - \operatorname{ch}\big(a\frac{v+u}{2}\big) \end{pmatrix} = 4a^2\operatorname{sh}\Big(a\frac{v-u}{2}\Big)\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\big(a\frac{u-v}{2}\big) \\ \exp\big(a\frac{u+v}{2}\big) \\ -\exp\big(-a\frac{u+v}{2}\big) \end{pmatrix}.$$

Формула (8.1) доказана.

Из (7.9) при $b = -a$ имеем

$$\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{b}(v), \mathbf{b}(w)) = \exp\big(a(u-v)\big) - \exp\big(-a(u-v)\big) - \exp\big(a(u-w)\big) +$$
$$+ \exp\big(a(v-w)\big) + \exp\big(-a(u-w)\big) - \exp\big(-a(v-w)\big),$$

так что

$$\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{b}(v), \mathbf{b}(w)) = 2\operatorname{sh}\big(a(u-v)\big) - 2\operatorname{sh}\big(a(u-w)\big) + 2\operatorname{sh}\big(a(v-w)\big).$$

Используя формулы (8.4)–(8.5), имеем

$$\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{b}(v), \mathbf{b}(w)) = 4\Big[\operatorname{sh}\frac{a(w-v)}{2}\operatorname{ch}\frac{a(2u-v-w)}{2} +$$
$$+ \operatorname{sh}\frac{a(v-w)}{2}\operatorname{ch}\frac{a(v-w)}{2}\Big]. \tag{8.6}$$

Из формул (8.3) и (8.6) имеем

$$\det(\mathbf{b}(u),\mathbf{b}(v),\mathbf{b}(w)) = 4\,\mathrm{sh}\,\frac{a(w-v)}{2}\Big[\mathrm{ch}\,\frac{a(2u-v-w)}{2} - \mathrm{ch}\,\frac{a(v-w)}{2}\Big] =$$

$$= 8\,\mathrm{sh}\,\frac{a(w-v)}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{a(w-u)}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{a(v-u)}{2}.$$

Соотношение (8.2) доказано. ∎

Следствие 8.1. *Из формулы (8.2) вытекает, что цепочка векторов* $\{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, *определяемая формулой* $\mathbf{b}_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{b}(x_j)$, *— позитивная цепочка.*

Лемма 8.2. *При* $b=-a$ *производная функции* $F(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det(\mathbf{b}(u)\times\mathbf{b}(v), \varphi(t), \mathbf{b}(w)\times\mathbf{b}(z))$ *имеет не более одного вещественного корня.*

Доказательство. Используя формулу (8.1), имеем $F(t) = C\mathcal{D}(e^{at})$, где $C \stackrel{\mathrm{def}}{=} 16a^4\,\mathrm{sh}(a\frac{v-u}{2})\,\mathrm{sh}(a\frac{z-w}{2})$,

$$\mathcal{D}(\tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(a\frac{v-u}{2}) & 1 & \mathrm{ch}(a\frac{z-w}{2}) \\ \exp(a\frac{v+u}{2}) & \tau & \exp(a\frac{z+w}{2}) \\ -\exp(-a\frac{v+u}{2}) & \tau^{-1} & -\exp(-a\frac{z+w}{2}) \end{pmatrix}, \quad \tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{at}.$$

Ввиду формулы $F'(t) = C\mathcal{D}'(\tau)\big|_{\tau=e^{at}} a e^{at}$ доказательство леммы сводится к доказательству того, что функция $\mathcal{D}'(\tau)$ имеет не более одного положительного корня. Поскольку

$$\mathcal{D}'(\tau) = \det\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(a\frac{v-u}{2}) & 0 & \mathrm{ch}(a\frac{z-w}{2}) \\ \exp(a\frac{v+u}{2}) & 1 & \exp(a\frac{z+w}{2}) \\ -\exp(-a\frac{v+u}{2}) & -\tau^{-2} & -\exp(-a\frac{z+w}{2}) \end{pmatrix},$$

то уравнение $\mathcal{D}'(\tau)=0$ либо не имеет вещественных корней, либо имеет два ненулевых корня, лишь один из которых положителен. Лемма доказана. ∎

Теорема 8.1. *Функция* ω_j^H *положительна на промежутке* (x_j, x_{j+3}), *возрастает на промежутке* (x_j, x_{j+1}), *убывает на промежутке* (x_{j+2}, x_{j+3}) *и выпукла на промежутке* (x_{j+1}, x_{j+2}).

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 6.1, леммами 7.1–7.5 при $b=-a$ и леммами 8.1–8.2 настоящего пункта. ∎

6.9. Дробно-рациональные непрерывно дифференцируемые сплайны

В определении сетки X положим $\alpha = 0$ и на интервале $(0,\beta)$ рассмотрим генерирующую вектор-функцию вида $\varphi(t) = (1, t, 1/t)^T$. Координатные сплайны будем получать, используя соотношения (3.22)–(3.24), но вместо символа * для их обозначения в данном конкретном случае будем использовать символ ^{D}, так что получаемые координатные сплайны обозначим ω_j^D, а фигурирующие в соотношениях (2.4) векторы обозначим $\mathbf{a}_j^D$. Сначала потребуются некоторые вспомогательные формулы.

Лемма 9.1. *Если* $\varphi(t) = (1, t, 1/t)^T$, *то*

$$\mathbf{b}(u) \times \mathbf{b}(v) = \frac{v-u}{(uv)^2} \begin{pmatrix} u+v \\ 2uv \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

$$\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{b}(v), \mathbf{b}(w)) = 2(v-u)(w-u)(w-v)(uvw)^{-2}, \tag{9.2}$$

$$\det(\varphi(u), \varphi'(u), \varphi(t)) = t^{-1}u^{-2}(u-t)^2. \tag{9.3}$$

Доказательство. Поскольку $\varphi'(t) = (0, 1, -1/t^2)^T$, то в согласии с соотношением (3.1) получаем

$$\mathbf{b}(u) = \varphi(u) \times \varphi'(u) = \begin{pmatrix} -2/u \\ 1/u^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\mathbf{b}(u) \times \mathbf{b}(v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2/u & 1/u^2 & 1 \\ -2/v & 1/v^2 & 1 \end{vmatrix}; \tag{9.4}$$

из (9.4) получаем (9.1). Ввиду формулы $\det(\mathbf{b}(u), \mathbf{b}(v), \mathbf{b}(w)) = \mathbf{b}(u) \times \mathbf{b}(v) \cdot \mathbf{b}(w)$, из (9.1) и из тождества

$$\begin{pmatrix} u+v \\ 2uv \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/w \\ 1/w^2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2w^{-2}[w^2 - uw - vw + uv] = 2w^{-2}(w-u)(w-v)$$

выводим (9.2).

Соотношение (9.3) получается из формулы $\det(\varphi(u), \varphi'(u), \varphi(t)) = \mathbf{b}(u) \cdot \varphi(t) == (-2/u, 1/u^2, 1)^T \cdot (1, t, 1/t)^T = t^{-1}u^{-2}(-2ut + t^2 + u^2)$. Лемма доказана. ■

На промежутке $(0, \beta)$ рассмотрим сетку

$$X: \quad \ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots, \quad \text{где} \lim_{j \to -\infty} x_j = 0, \ \lim_{j \to +\infty} x_j = \beta.$$

Следствие 9.1. *Из представления (9.2) следует, что цепочка векторов* $\{\mathbf{b}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, *определяемая формулой* $\mathbf{b}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}(x_j)$, *является позитивной цепочкой.*

Теорема 9.1. *Непрерывно дифференцируемые координатные сплайны* ω_j^D, $j \in \mathbb{Z}$, *генерируемые вектор-функцией* $\varphi(t) \overset{\mathrm{def}}{=} (1, t, 1/t)^T$, *определяются формулами*

$$\omega_j^D(t) = \frac{(t-x_j)^2(x_{j+1}x_{j+2})^2}{2t(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_j, x_{j+1}), \quad (9.5)$$

$$\omega_j^D(t) = (x_{j+1}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+1}x_{j+2})^2 \times \Big[4(x_{j+2}x_{j+3} - x_jx_{j+1}) +$$
$$+2t(x_j + x_{j+1} - x_{j+2} - x_{j+3}) - \frac{1}{t}\big((x_j + x_{j+1})x_{j+2}x_{j+3} + (x_{j+2} + x_{j+3})x_jx_{j+1}\big)\Big] \times$$
$$\times [(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})]^{-1}/4$$
$$\text{при} \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \quad (9.6)$$

$$\omega_j^D(t) = \frac{(x_{j+3}-t)^2(x_{j+2}x_{j+3})^2}{2t(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j+2}, x_{j+3}). \quad (9.7)$$

Доказательство. Используя формулу (9.3), находим

$$\det(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi(t)) = (t-x_j)^2 x_j^{-2} t^{-1}, \quad (9.8)$$

$$\det(\varphi(t), \varphi_{j+3}, \varphi'_{j+3}) = (t-x_{j+3})^2 x_{j+3}^{-2} t^{-1}. \quad (9.9)$$

Из (9.2) при $u = x_j$, $v = x_{j+1}$, $w = x_{j+2}$ получаем

$$\det(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2}) = 2(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_jx_{j+1}x_{j+2})^{-2}, \quad (9.10)$$

$$\det(\mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2}, \mathbf{b}_{j+3}) = 2(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+1}x_{j+2}x_{j+3})^{-2}. \quad (9.11)$$

Из формул (3.22), (9.8) и (9.10) при $t \in (x_j, x_{j+1})$ находим (9.5), а из формул (3.24), (9.9) и (9.11) при $t \in (x_{j+2}, x_{j+3})$ выводим (9.7). Используя формулу (9.1) при $u = x_j$, $v = x_{j+1}$, определяем

$$\mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_{j+1} = \frac{x_{j+1}-x_j}{(x_jx_{j+1})^2} \begin{pmatrix} x_j + x_{j+1} \\ 2x_jx_{j+1} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (9.12)$$

а полагая в (9.1) $u = x_{j+2}$, $v = x_{j+3}$, выводим

$$\mathbf{b}_{j+2} \times \mathbf{b}_{j+3} = \frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{(x_{j+2}x_{j+3})^2} \begin{pmatrix} x_{j+2} + x_{j+3} \\ 2x_{j+2}x_{j+3} \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

Для числителя формулы (2.7) согласно формуле (3.21) и соотношений (9.12) и (9.13) имеем

$$\det\Big(\mathbf{a}_{k-2}^D, \varphi(t), \mathbf{a}_k^D\Big) = \det(\mathbf{b}_k \times \mathbf{b}_{k-1}, \varphi(t), \mathbf{b}_{k+2} \times \mathbf{b}_{k+1}) =$$

$$= \frac{(x_{j+1} - x_j)}{(x_j x_{j+1})^2} \frac{(x_{j+3} - x_{j+2})}{(x_{j+2} x_{j+3})^2} \begin{vmatrix} x_j + x_{j+1} & 1 & x_{j+2} + x_{j+3} \\ 2x_j x_{j+1} & t & 2x_{j+2} x_{j+3} \\ 2 & 1/t & 2 \end{vmatrix},$$

так что

$$\det\Big(\mathbf{a}_{k-2}^D, \varphi(t), \mathbf{a}_k^D\Big) = \frac{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+3} - x_{j+2})}{(x_j x_{j+1} x_{j+2} x_{j+3})^2} \times \Big[4(x_{j+2} x_{j+3} - x_j x_{j+1}) +$$

$$+2t(x_j + x_{j+1} - x_{j+2} - x_{j+3}) - \frac{1}{t}\Big((x_j + x_{j+1}) x_{j+2} x_{j+3} + (x_{j+2} + x_{j+3}) x_j x_{j+1}\Big)\Big]. \tag{9.14}$$

Используя формулы (3.23), (9.10)–(9.11) и (9.14) находим представление (9.6) функции $\omega_j^D(t)$ при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$. Теорема доказана. ■

Лемма 9.2. *Если* $0 < u < v < w < z$, *то*

$$(u + v)wz - (w + z)uv > 0. \tag{9.15}$$

Доказательство вытекает из тождества $(u+v)wz - (w+z)uv = uw(z - v) + vz(w - u)$, т.к. благодаря условию леммы, слагаемые в его правой части положительны. ■

Теорема 9.2. *Непрерывно дифференцируемый координатный сплайн* ω_j^D, $j \in \mathbb{Z}$, *генерируемый вектор-функцией* $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, 1/t)^T$, *положителен на интервале* (x_j, x_{j+3}), *возрастает на промежутке* (x_j, x_{j+1}), *убывает на промежутке* (x_{j+2}, x_{j+3}), *является вогнутой функцией на упомянутых промежутках и является выпуклой функцией на промежутке* (x_{j+1}, x_{j+2}).

Доказательство. Положительность функции ω_j^D на промежутках $(x_j, x_{j+1}]$ и $[x_{j+2}, x_{j+3})$ вытекает из соотношений (9.5) и (9.7) соответственно. Дифференцированием этих соотношений устанавливаем ее возрастание на первом из промежутков и убывание на втором из них; вычисляя вторую производную убеждаемся в том, что на обеих промежутках функция ω_j^D вогнута. Рассматривая представление (9.6) функции $\omega_j^D(t)$ на промежутке (x_{j+1}, x_{j+2}), найдем вторую производную:

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega_j^D(t) = -\frac{C}{t^3}\Big((x_j + x_{j+1}) x_{j+2} x_{j+3} + (x_{j+2} + x_{j+3}) x_j x_{j+1}\Big); \tag{9.16}$$

где

$$C \stackrel{\text{def}}{=} (x_{j+1} - x_j)(x_{j+3} - x_{j+2})(x_{j+1}x_{j+2})^2 \times$$

$$\times [(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})^2 (x_{j+3} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+2})]^{-1}/2.$$

Очевидно, что константа C положительна. Используя неравенство (9.15) при $u = x_j$, $v = x_{j+1}$, $w = x_{j+2}$, $z = x_{j+3}$, видим, что внешняя скобка в (9.16) также положительна. Теперь из (9.16) находим $\frac{d^2}{dt^2}\omega_j^D(t) < 0$ при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$; таким образом, на промежутке (x_{j+1}, x_{j+2}) функция $\omega_j^D(t)$ выпукла. Учитывая ее непрерывную дифференцируемость на $(0, \beta)$ и установленную выше положительность на промежутках $(x_j, x_{j+1}]$ и $[x_{j+2}, x_{j+3})$, видим, что $\omega_j^D(x_{j+1}) > 0$ и $\omega_j^D(x_{j+2}) > 0$; отсюда следует положительность функции $\omega_j^D(t)$ на промежутке $[x_{j+1}, x_{j+2}]$.

Теорема доказана. ∎

7. АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ ЭРМИТОВА ТИПА

Для сплайн-всплесковых разложений эрмитова типа получены достаточно простые формулы декомпозиции и реконструкции (см. [19,20,30,43]); однако, аппроксимационные свойства в ряде случаев не изучены. Оценки аппроксимации полиномиальными сплайнами широко известны; доказательства таких оценок обычно основаны на преобразовании подобия. Подходящее представление остатка аппроксимации (см. [34, 75, 76, 90, 91]) дает надежду получить эффективные оценки погрешности и в неполиномиальном случае. На основе такого представления в работе [34] удалось дать оценку остатка при аппроксимации сплайнами лагранжева типа.

В данном разделе найдены эффективные оценки остатка аппроксимации сплайнами эрмитова типа первой высоты, которые точны на компонентах генерирующей функции; константы, полученные в этих оценках, имеют простое явное представление.

7.1. О представлении остатка аппроксимации

Для удобства читателя сначала изложим схему представления остатка аппроксимации, данную в работе [34], применительно к изучаемой ситуации.

Рассмотрим линейно независимую систему вектор-столбцов $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\{0,1,2,3\}}$ пространства $\mathbb{R}^4$. Матрицу, составленную из этих столбцов, обозначим A: $A \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Введем линейное вещественное пространство $\mathcal{F}$ и рассмотрим вектор-столбцы с компонентами из пространства $\mathcal{F}$: $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ и $\omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$; предположим, что они связаны соотношением $A\omega = \varphi$.

Пусть $g \stackrel{\text{def}}{=} (g_0, g_1, g_2, g_3)^T$ — вектор-столбец, компонентами которого являются линейные функционалы в пространстве $\mathcal{F}$. Для элемента $u \in \mathcal{F}$ составим линейную комбинацию элементов $\{\omega_j\}_{j\in\{0,1,2,3\}}$: $\widetilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{3} \langle g_j, u\rangle \omega_j$.

При $m = 3$ теорема 1 из работы [34] принимает следующий вид.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$u - \widetilde{u} = \det A^{-1} \det \begin{pmatrix} A & \varphi \\ \langle g, u\rangle^T & u \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где через $\langle g, u\rangle$ *обозначен вектор-столбец из* $\mathbb{R}^4$*, а именно*

$$\langle g, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} (\langle g_0, u\rangle, \langle g_1, u\rangle, \langle g_2, u\rangle, \langle g_3, u\rangle)^T,$$

а второй сомножитель правой части формулы (1.1) — определитель матрицы пятого порядка, представленной в блочном виде.

7.2. Сплайны эрмитова типа

Напомним построение сплайнов эрмитова типа первой высоты (см. [1]). Рассматривается четырех-компонентная вектор-функция $\varphi(t)$ класса $C^1(\alpha, \beta)$ с линейно независимыми компонентами на любом подинтервале $(c, d) \subset (\alpha, \beta)$. Пусть X — сетка вида

$$X:\ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots;\ \text{пусть}\ \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to-\infty} x_j,\ \beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to+\infty} x_j, \tag{2.1}$$

Введем обозначения

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}} (x_j, x_{j+1}), \quad \varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_j), \quad \varphi'_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_j), \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1} - x_j.$$

Рассмотрим функции $\omega_j(t)$, $t \in G$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие аппроксимационным соотношениям

$$\sum_j (\varphi'_{j+1}\omega_{2j-1}(t) + \varphi_{j+1}\omega_{2j}(t)) = \varphi(t), \tag{2.2}$$

предполагая, что

$$\operatorname{supp}\omega_{2j-1} \subset [x_j, x_{j+2}], \qquad \operatorname{supp}\omega_{2j} \subset [x_j, x_{j+2}] \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

При фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ из (2.2)–(2.3) для $t \in (x_k, x_{k+1})$ получаем

$$\varphi'_k\omega_{2k-3}(t) + \varphi_k\omega_{2k-2}(t) + \varphi'_{k+1}\omega_{2k-1}(t) + \varphi_{k+1}\omega_{2k}(t) = \varphi(t). \tag{2.4}$$

(A) Предположим, что матрица

$$A_k \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi'_k, \varphi_k, \varphi'_{k+1}, \varphi_{k+1})$$

неособенная для любых $k \in \mathbb{Z}$ (условия выполнения этого предположения даны ниже: см.(4.4)–(4.5)).

В этом случае при $t \in (x_k, x_{k+1})$ из (2.4) находим

$$\omega_{2k-3}(t) = \det(\varphi(t), \varphi_k, \varphi'_{k+1}, \varphi_{k+1}) / \det A_k,$$

$$\omega_{2k-2}(t) = \det(\varphi'_k, \varphi(t), \varphi'_{k+1}, \varphi_{k+1}) / \det A_k,$$

$$\omega_{2k-1}(t) = \det(\varphi'_k, \varphi_k, \varphi(t), \varphi_{k+1}) / \det A_k,$$

$$\omega_{2k}(t) = \det(\varphi'_k, \varphi_k, \varphi'_{k+1}, \varphi(t)) / \det A_k;$$

отсюда (последовательно полагая $k = q,\ k = q+1$) легко выводим

$$\omega_{2q-1}(t) = \frac{\det(\varphi'_q, \varphi_q, \varphi(t), \varphi_{q+1})}{\det(\varphi'_q, \varphi_q, \varphi'_{q+1}, \varphi_{q+1})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_q, x_{q+1}), \tag{2.5}$$

$$\omega_{2q-1}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \varphi_{q+1}, \varphi'_{q+2}, \varphi_{q+2})}{\det(\varphi'_{q+1}, \varphi_{q+1}, \varphi'_{q+2}, \varphi_{q+2})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{q+1}, x_{q+2}), \tag{2.6}$$

$$\omega_{2q}(t) = \frac{\det(\varphi'_q, \varphi_q, \varphi'_{q+1}, \varphi(t))}{\det(\varphi'_q, \varphi_q, \varphi'_{q+1}, \varphi_{q+1})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_q, x_{q+1}), \tag{2.7}$$

$$\omega_{2q}(t) = \frac{\det(\varphi'_{q+1}, \varphi(t), \varphi'_{q+2}, \varphi_{q+2})}{\det(\varphi'_{q+1}, \varphi_{q+1}, \varphi'_{q+2}, \varphi_{q+2})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{q+1}, x_{q+2}) \tag{2.8}$$

для любого $q \in \mathbb{Z}$.

Справедливо следующее утверждение (см. [1]).

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ и пусть выполнено условие (A); тогда при любом $q \in \mathbb{Z}$ функции $\omega_{2q-1}(t)$ и $\omega_{2q}(t)$, задаваемые формулами (2.3) и (2.5)–(2.8), могут быть продолжены по непрерывности на весь интервал (α, β) до функций класса $C^1(\alpha, \beta)$. Кроме того, выполнены соотношения*

$$\omega_{2q-1}(x_q) = 0, \quad \omega_{2q-1}(x_{q+1}) = 0, \quad \omega_{2q-1}(x_{q+2}) = 0,$$

$$\omega'_{2q-1}(x_q) = 0, \quad \omega'_{2q-1}(x_{q+1}) = 1, \quad \omega'_{2q-1}(x_{q+2}) = 0,$$

$$\omega_{2q}(x_q) = 0, \quad \omega_{2q}(x_{q+1}) = 1, \quad \omega_{2q}(x_{q+2}) = 0,$$

$$\omega'_{2q}(x_q) = 0, \quad \omega'_{2q}(x_{q+1}) = 0, \quad \omega'_{2q}(x_{q+2}) = 0,$$

где использованы прежние обозначения для продолженных функций.

Замечание 1. Если компоненты $[\varphi(t)]_i$ вектора $\varphi(t)$ задаются равенствами $[\varphi(t)]_i = t^i$, то функции $\omega_{2q-1}(t)$ и $\omega_{2q}(t)$ представляют известный интерполяционный базис пространства кубических эрмитовых сплайнов.

Пространство $\mathbb{S}^1_\varphi(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_j c_j\omega_j \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1, j \in \mathbb{Z}\}$ называется *пространством сплайнов эрмитова типа (первой высоты)*. Ввиду свойства (A) функции ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, линейно независимые. Множество $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется *главным базисом пространства* $\mathbb{S}^1_\varphi(X)$.

7.3. Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $\psi(t)$ — пятикомпонентная вектор-функция (столбец) вещественного переменного t с компонентами из пространства $C^4(\alpha,\beta)$, а $y = (y_1, y_2, y_3)$ — трехкомпонентный вектор с вещественными компонентами. Введем обозначения $\psi_k^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(i)}(x_k)$ и рассмотрим определители

$$D_k(\psi;t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\psi_k, {\psi'}_k, \psi(t), \psi_{k+1}, {\psi'}_{k+1}),$$

$$W_k(\psi;y) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\psi_k, {\psi'}_k, \psi''(y_1), \psi'''(y_2), \psi^{IV}(y_3)).$$

Используя формулу Ньютона—Лейбница, а также свойства интеграла и определителя, находим

$$D_k(\psi;t) = \int_{x_k}^{t} d\xi \int_{t}^{x_{k+1}} \det(\psi_k, {\psi'}_k, \psi'(\xi), \psi'(\eta), {\psi'}_{k+1}) d\eta, \tag{3.1}$$

$$x_k \le \xi \le t \le \eta \le x_{k+1}. \tag{3.2}$$

Из (3.1)–(3.2) получаем

$$D_k(\psi;t) = \int_{x_k}^{t} d\xi \int_{t}^{x_{k+1}} \det\Big(\psi_k, {\psi'}_k, \int_{x_k}^{\xi} \psi''(\zeta)d\zeta, \int_{\xi}^{\eta} \psi''(\theta)d\theta, \int_{\eta}^{x_{k+1}} \psi''(p)dp\Big) d\eta =$$
$$= \int_{x_k}^{t} d\xi \int_{t}^{x_{k+1}} d\eta \int_{x_k}^{\xi} d\zeta \int_{\xi}^{\eta} d\theta \int_{\eta}^{x_{k+1}} \det(\psi_k, {\psi'}_k, \psi''(\zeta), \psi''(\theta), \psi''(p)) dp. \tag{3.3}$$

Ясно, что выполнены неравенства

$$x_k \le \zeta \le \xi \le t \le \eta \le p \le x_{k+1}. \tag{3.4}$$

Применяя похожие рассуждения, выводим

$$D_k(\psi;t) = \int_{x_k}^{t} d\xi \int_{t}^{x_{k+1}} d\eta \int_{x_k}^{\xi} d\zeta \int_{\xi}^{\eta} d\theta \int_{\eta}^{x_{k+1}} \det\Big(\psi_k, {\psi'}_k, \psi''(\zeta),$$
$$\int_{\xi}^{\theta} \psi'''(q)dq, \int_{\theta}^{p} \psi'''(r)dr\Big) dp = \int_{x_k}^{t} d\xi \int_{t}^{x_{k+1}} d\eta \int_{x_k}^{\xi} d\zeta$$

$$\int_{\xi}^{\eta} d\theta \int_{\eta}^{x_{k+1}} dp \int_{\xi}^{\theta} dq \int_{\theta}^{p} \det(\psi_k, \psi'_k, \psi''(\zeta), \psi'''(q), \psi'''(r))dr; \tag{3.5}$$

совершенно очевидно, что

$$\xi \le q \le \theta \le r \le p. \tag{3.6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Определитель $D_k(\psi; t)$ может быть представлен в виде*

$$D_k(\psi; t) = \int_{x_k}^{t} d\xi \int_{t}^{x_{k+1}} d\eta \int_{x_k}^{\xi} d\zeta \int_{\xi}^{\eta} d\theta \int_{\eta}^{x_{k+1}} dp$$

$$\int_{\xi}^{\theta} dq \int_{q}^{r} \det(\psi_k, \psi'_k, \psi''(\zeta), \psi'''(q), \psi^{IV}(\rho))d\rho; \tag{3.7}$$

причем во всех фигурирующих здесь интегралах нижний предел не больше верхнего.

Доказательство. По формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$\psi'''(r) = \psi'''(q) + \int_{q}^{r} \psi^{IV}(\rho)d\rho.$$

Подстановка этой формулы в соотношение (3.5) приводит к равенству (3.7). Тот факт, что во всех интегралах равенства (3.7) нижний предел не больше верхнего следует из неравенств (3.4) и (3.6). ■

Следствие 1. *Определитель $D_k(\psi; t)$ может быть получен из определителя $W_k(\psi; y)$ применением к последнему интегрального оператора с неотрицательным ядром*

$$D_k(\psi; t) = \int_{y \in \Pi_k^3} \mathcal{K}(t, y) W_k(\psi; y) dy_1 dy_2 dy_3, \tag{3.8}$$

где $\Pi_k^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{y = (y_1, y_2, y_3) \,|\, x_k \le y_j \le x_{k+1},\ j = 1, 2, 3\}$, а функция $\mathcal{K}(t, y)$ неотрицательна.

Рассмотрим вектор-функцию (столбец) $\overline{\psi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2, t^3, t^4)^T$ и вычислим определитель $D_k(\overline{\psi}; t)$; легко найдем

$$D_k(\overline{\psi}; t) = (t - x_k)^2 (x_{k+1} - x_k)^4 (x_{k+1} - t)^2. \tag{3.9}$$

Лемма 2. *Верно равенство*

$$\int_{y \in \Pi_k^3} \mathcal{K}(t, y) dy_1 dy_2 dy_3 = (t - x_k)^2 (x_{k+1} - x_k)^4 (x_{k+1} - t)^2 / 288. \tag{3.10}$$

Доказательство. В формуле (3.8) положим $\psi(t) = \overline{\psi}(t)$; учитывая, что $W_k(\overline{\psi}; y) = \prod_{j=1}^{4} j!$, получаем равенство (3.10). ∎

Обратимся к представлению определителя

$$\det A_k = \det(\varphi_k, \varphi'_k, \varphi_{k+1}, \varphi'_{k+1}).$$

Лемма 3. *Верно равенство*

$$\det A_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi \int_{x_k}^{\xi} d\eta \int_{\xi}^{x_{k+1}} d\zeta \int_{\eta}^{\zeta} \det(\varphi_k, \varphi'_k, \varphi''(\eta), \varphi'''(\theta)) d\theta, \qquad (3.11)$$

причем в фигурирующих здесь интегралах нижний предел не больше верхнего.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1 последовательно имеем

$$\det A_k = \det\Big(\varphi_k, \varphi'_k, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi'(\xi) d\xi, \varphi'_{k+1}\Big) =$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \det\Big(\varphi_k, \varphi'_k, \int_{x_k}^{\xi} \varphi''(\eta) d\eta, \int_{\xi}^{x_{k+1}} \varphi''(\zeta) d\zeta\Big) d\xi =$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi \int_{x_k}^{\xi} d\eta \int_{\xi}^{x_{k+1}} \det\big(\varphi_k, \varphi'_k, \varphi''(\eta), \varphi''(\zeta)\big) d\zeta;$$

замена $\varphi''(\zeta)$ на равную этому выражению сумму $\varphi''(\eta) + \int_{\eta}^{\zeta} \varphi'''(\theta) d\theta$ приводит к формуле (3.11). Тот факт, что нижний предел во всех этих интегралах не больше верхнего, очевиден. ∎

Введем обозначение $z \stackrel{\text{def}}{=} (z_1, z_2)$; пусть

$$\mathcal{W}_k(\varphi; z) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi_k, \varphi'_k, \varphi''(z_1), \varphi'''(z_2)).$$

Следствие 2. *Определитель* $\det A_k$ *получается из определителя* $\mathcal{W}_k(\varphi; z)$ *интегрированием с неотрицательным весом*

$$\det(\varphi_k, \varphi'_k, \varphi_{k+1}, \varphi'_{k+1}) = \int_{z \in \Pi_k^2} \mathcal{K}_2(z) \mathcal{W}_k(\varphi; z) dz_1 dz_2, \qquad (3.12)$$

где $\Pi_k^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{z = (z_1, z_2) \mid x_k \le z_1 \le x_{k+1}, x_k \le z_2 \le x_{k+1}\}$, *а* $\mathcal{K}_2(z)$ — *неотрицательная весовая функция, определяемая формулой (3.11).*

Лемма 4. *Верно соотношение*

$$\int_{z \in \Pi_k^2} \mathcal{K}_2(z) dz_1 dz_2 = (x_{k+1} - x_k)^4 / 12. \qquad (3.13)$$

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $\overline{\varphi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2, t^3)^T$ и в формуле (3.12) положим $\varphi(t) = \overline{\varphi}(t)$. Под интегралом в правой части упомянутой формулы окажется число 12, а в левой части получится выражение $(x_{k+1} - x_k)^4$. Соотношение (3.13) доказано. ∎

7.4. Оценка погрешности аппроксимации

Рассмотрим уклонение функции $u \in C^4(\alpha, \beta)$ на промежутке (x_k, x_{k+1}) от линейной комбинации

$$\widetilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} u'_k \omega_{2k-3}(t) + u_k \omega_{2k-2}(t) + u'_{k+1} \omega_{2k-1}(t) + u_{k+1} \omega_{2k}(t). \tag{4.1}$$

Согласно (1.1) имеем

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = \det A_k^{-1} \det \begin{pmatrix} \varphi'_k & \varphi_k & \varphi'_{k+1} & \varphi_{k+1} & \varphi(t) \\ u'_k & u_k & u'_{k+1} & u_k & u(t) \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где вторым сомножителем правой части является определитель матрицы, представленной в блочном (постолбцовом) виде. Вводя вектор-функцию

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ u(t) \end{pmatrix},$$

из (4.2) имеем

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = \det A_k^{-1} \det \begin{pmatrix} \psi'_k & \psi_k & \psi'_{k+1} & \psi_{k+1} & \psi(t) \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

Предположим, что выполнено условие

(B) вронскиан $W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''')(t)$ равномерно отделен от нуля:

$$|W(t)| \geq c > 0 \qquad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

При выполнении условия (B) по $\epsilon \in (0, c)$ найдется $h_0 = h_0(\epsilon) > 0$ так, что при $h \in (0, h_0)$ и $z = (z_1, z_2) \in \Pi_k^2$ справедливо неравенство

$$|\det(\varphi_k, {\varphi_k}', \varphi''(z_1), \varphi'''(z_2))| \geq c_\epsilon > 0, \tag{4.4}$$

где $c_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} c - \epsilon$.

Благодаря соотношению (3.11) и лемме 4 получаем

$$|\det A_k| \geq c_\epsilon (x_{k+1} - x_k)^4 / 12, \tag{4.5}$$

так что условие (A) выполнено.

Из следствия 1 и из леммы 2 выводим

$$|\det\big(\psi'_k \quad \psi_k \quad \psi'_{k+1} \quad \psi_{k+1} \quad \psi(t)\big)| \le$$
$$\le (t-x_k)^2(x_{k+1}-x_k)^4(x_{k+1}-t)^2 \sup_{y\in\Pi_k^3} |W_k(\psi,y)|/288. \qquad (4.6)$$

Теорема 3. *Если выполнено условие (4.4), то для $t \in (x_k, x_{k+1})$ справедливо неравенство*

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)| \le c_\epsilon^{-1}(t-x_k)^2(x_{k+1}-t)^2/24\times$$
$$\times \sup_{y\in\Pi_k^3}\left|\det\begin{pmatrix}\varphi_k & \varphi'_k & \varphi''(y_1) & \varphi'''(y_2) & \varphi^{IV}(y_3)\\ u_k & u'_k & u''(y_1) & u'''(y_2) & u^{IV}(y_3)\end{pmatrix}\right|. \qquad (4.7)$$

Доказательство. Оценивая по абсолютной величине соотношение (4.3) с использованием неравенств (4.5) и (4.6), приходим к формуле (4.7). ■

Следствие 3. *Для полиномиальных эрмитовых сплайнов второй высоты оценка (4.7) принимает вид*

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)| \le (t-x_k)^2(x_{k+1}-t)^2 \sup_{x_k\le\xi\le x_{k+1}} |u^{IV}(\xi)|/12 \quad \forall t\in(x_k,x_{k+1}) \qquad (4.8)$$

Доказательство. Полагая $\varphi(t) = (1, t, t^2, t^3)$, получаем

$$W_k(\psi,y) = \det\begin{pmatrix}\varphi_k & \varphi'_k & \varphi''(y_1) & \varphi'''(y_2) & \varphi^{IV}(y_3)\\ u_k & u'_k & u''(y_1) & u'''(y_2) & u^{IV}(y_3)\end{pmatrix} = 24u^{IV}(y_3);$$

кроме того, в неравенстве (4.4) в этом случае можно взять $c_\epsilon = 12$. Из формулы (4.2) теперь выводим неравенство (4.8). ■

8. СПЛАЙН-ВЭЙВЛЕТЫ ПРИ ОДНОКРАТНОМ ЛОКАЛЬНОМ УКРУПНЕНИИ СЕТКИ

Исследования в области обработки числовой информации ведут к созданию гибкого аппарата сплайн-вэйвлетных аппроксимаций с учетом свойств гладкости и скорости изменения числовых потоков. Для этого необходимы исследования сплайновых аппроксимации различных порядков на неравномерных сетках, исследования разложений со свойствами локальности в отдельных частях рассматриваемой области, а также нужны аппроксимации, пригодные для распараллеливания вычислений. В работах [21,36,82] рассмотрена структура сплайн-вэйвлетных разложений для аппроксимаций первого порядка при удалении группы последовательных узлов, а в работе [78] изучен эффект интерференции при удалении двух узлов с сохранением разделяющего их узла.

Цель данного раздела состоит в том, чтобы рассмотреть структуру сплайн-вэйвлетного разложения в случае однократного локального укрупнения неравномерной сетки (с удалением группы «нечетных» узлов), получить соответствующие алгоритмы декомпозиции/реконструкции и дать оценки величины вэйвлетного потока в случае, когда исходный поток представляет собой последовательность значений дважды непрерывно дифференцируемой функции.

8.1. Предварительные сведения

Как и разделе 1 на интервале (α, β) рассмотрим бесконечную сетку X и обозначим

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2}),\ j \in \mathbb{Z}, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (x_i, x_{i+1}). \tag{1.1}$$

Пусть $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — полная цепочка двумерных векторов.

Рассмотрим двухкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$, непрерывную на интервале (α, β). Предположим, что ее компоненты линейно независимы на любом интервале $(a', b') \subset G$.

Зададим функции $\omega_j(t)$, $t \in G$, $j \in \mathbb{Z}$, с помощью аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j\, \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in G, \quad \omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G \backslash S_j,\ j \in \mathbb{Z}; \tag{1.2}$$

из (1.2) находим функции $\omega_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, заданные на множестве G:

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \in G \backslash S_j, \end{cases} \tag{1.3}$$

Дальше рассматривается пространство $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ — линейная оболочка функций, указанных в фигурных скобках, а Cl_p — замыкание в топологии поточечной сходимости. Заметим, что ввиду предположений относительно вектор-функции $\varphi(t)$ функции $\omega_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, линейно независимы на множестве G и, следовательно, являются базисом пространства $\mathbb{S}$.

Пусть s и r — целые числа, и $s < r$. Из сетки X удалим группу узлов с нечетными номерами в количестве $r - s$, а именно, удалим узлы

$$x_{2s+1}, x_{2s+3}, x_{2s+5}, \ldots, x_{2r-1}, \tag{1.4}$$

так что укрупненная сетка имеет вид

$$\widetilde{X}: \ \ldots < \widetilde{x}_{-2} < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < \ldots,$$

где

$$\widetilde{x}_i = x_i \quad \text{при} \quad i \le 2s,$$

$$\widetilde{x}_{2s+i} = x_{2s+2i} \quad \text{при} \quad 1 \le i \le r - s,$$

$$\widetilde{x}_{s+r+i} = x_{2r+i} \quad \text{при} \quad 1 \le i.$$

Описанный переход от сетки X к сетке $\widetilde{X}$ путем удаления узлов (1.4) будем называть *локальным однократным* (s, r)*-укрупнением сетки* X.

Эквивалентная форма представления узлов новой сетки $\widetilde{X}$ такова

$$\widetilde{x}_i = x_i \quad \text{при} \quad i \le 2s, \tag{1.5}$$

$$\widetilde{x}_{i'} = x_{2i'-2s} \quad \text{при} \quad 2s + 1 \le i' \le s + r, \tag{1.6}$$

$$\widetilde{x}_{i''} = x_{r-s+i''} \quad \text{при} \quad s+r+1 \le i''. \tag{1.7}$$

Аналогично (1.1) положим

$$\widetilde{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}) \cup (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}),\ j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}).$$

Кроме того, введем обозначения

$$I_*^h \stackrel{\text{def}}{=} \{\ldots, 2s-4, 2s-3, 2s-2\}, \quad I_*^m \stackrel{\text{def}}{=} \{2s-1, \ldots, s+r-1\},$$

$$I_*^t \stackrel{\text{def}}{=} \{s+r, s+r+1, \ldots\}.$$

Очевидно, что

$$I_*^h \cup I_*^m \cup I_*^t = \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим цепочку векторов $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\ldots, \widetilde{\mathbf{a}}_{-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_0, \widetilde{\mathbf{a}}_1, \ldots\}$, предполагая, что выполнено условие

(A) *Цепочка векторов $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}$ полная и справедливы соотношения*

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_j \quad \textit{при} \quad j \in I_*^h, \tag{1.8}$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_{2j-2s+1} \quad \textit{при} \quad j \in I_*^m, \tag{1.9}$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_{j+r-s} \quad \textit{при} \quad j \in I_*^t. \tag{1.10}$$

В дальнейшем предполагается, что условие (A) выполнено. Переход от пары (X, A) к паре $(\widetilde{X}, \widetilde{A})$ будем называть *однократным локальным укрупнением.*

Построим систему функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, отыскивая ее из соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_j\, \widetilde{\omega}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widetilde{G}, \tag{1.11}$$

$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_j,\ j \in \mathbb{Z}$. Из (1.11) получаем

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_j)} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_j, \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_j. \end{cases} \tag{1.12}$$

Замечание 1. В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые функции сужены на множество G.

Введем пространство $\widetilde{\mathbb{S}} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Теорема 1. *При $t \in G$ верны следующие формулы:*

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_j(t) \quad \textit{при} \quad j \in I_*^h, \tag{1.13}$$

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_{r-s+j}(t) \quad \textit{при} \quad j \in I_*^t. \tag{1.14}$$

Доказательство. Заметив, что функция ω_j определяется тройкой векторов $\mathbf{a}_{j-1}$, $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_{j+1}$, а функция $\widetilde{\omega}_j$ определяется тройкой векторов $\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}$, $\widetilde{\mathbf{a}}_j$, $\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1}$ (см. формулы (1.3) и (1.12)), в силу формул (1.5)–(1.7) и условий (1.8), (1.10) получаем (1.13) и (1.14). Теорема доказана. ■

Теорема 2. *Если $i \le r - s - 1$, то при $t \in (\widetilde{x}_{2s+i}, \widetilde{x}_{2s+i+1})$ справедливы соотношения*

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) \equiv \frac{\det(\mathbf{a}_{2s+2i-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{2s+2i-1}, \mathbf{a}_{2s+2i+1})}, \tag{1.15}$$

а если $i \le r - s - 2$, то при $t \in (\widetilde{x}_{2s+i+1}, \widetilde{x}_{2s+i+2})$ верны соотношения

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) \equiv \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{2s+2i+3})}{\det(\mathbf{a}_{2s+2i+1}, \mathbf{a}_{2s+2i+3})}. \tag{1.16}$$

Доказательство. Из формулы (1.12) получаем

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i})} \quad \text{при } t \in (\widetilde{x}_{2s+i}.\widetilde{x}_{2s+i+1}), \tag{1.17}$$

Полагая в (1.9) $j = 2s + i - 1$ находим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i-1} = \mathbf{a}_{2s+2i-1} \qquad \text{при} \quad i \le r - s, \tag{1.18}$$

а полагая там $j = 2s + i$ выводим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i} = \mathbf{a}_{2s+2i+1} \qquad \text{при} \quad i \le r - s - 1, \tag{1.19}$$

Подставляя (1.18) и (1.19) в (1.17), получаем (1.15).

Для $\widetilde{\omega}_{2s+i}(t)$ при $t \in (\widetilde{x}_{2s+i+1}, \widetilde{x}_{2s+i+2})$ согласно (1.12) находим

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{\varphi(t), 2s+i+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i}, \widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i+1})};$$

здесь используем соотношение (1.19) и получаемую из (1.9) при $j = 2s + i + 1$ формулу

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i+1} = \mathbf{a}_{2s+2i+3} \qquad \text{при} \quad i \le r - s - 2.$$

В результате устанавливаем, что тождество (1.16) справедливо.

Теорема доказана. ■

8.2. Матрица вложения

Теорема 3. *При условии* (A) *справедливо включение*

$$\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для доказательства включения (2.1) будем удалять по одному узлы x_{2s+1}, x_{2s+3}, $\ldots$ x_{2r-1}. На каждом шаге получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно координатных сплайнов на укрупненной сетке, откуда выводим представление этих сплайнов в виде линейной комбинации координатных сплайнов на мелкой сетке. В результате находим представление сплайнов $\widetilde{\omega}_j$ в виде линейной комбинации сплайнов ω_i (детали доказательства можно восстановить после знакомства с работой [77]). ■

Рассмотрим пространство C_X, определяемое прямым произведением

$$C_X \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} C\langle x_i, x_{i+1}\rangle,$$

где $C\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ — линейное пространство функций, непрерывных на интервале (x_i, x_{i+1}) и имеющих конечные предельные значения на концах этого интервала.

Ясно, что $\omega_j \in C_X$, $j \in \mathbb{Z}$, и $\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S} \subset C_X$.

Пусть $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — система функционалов над C_X, биортогональная системе функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\langle g_i, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}$, со свойством $\operatorname{supp} g_j \subset [x_j, x_j + \varepsilon)$, $j \in \mathbb{Z}$; здесь $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число.[1]

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{P}$ с элементами

$$\mathfrak{p}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle, \quad i, j \in \mathbb{Z}; \tag{2.2}$$

вводя обозначения $g \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, g_{-1}, g_0, g_1, \ldots)^T$, $\widetilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \widetilde{\omega}_{-1}, \widetilde{\omega}_0, \widetilde{\omega}_1, \ldots)^T$, и используя символику матричного произведения, эту матрицу будем записывать в виде $\mathfrak{P} = g\widetilde{\omega}^T$.

[1] В некотором линейном пространстве U функций $u(t)$, $t \in [c, d]$, рассмотрим подпространство $U_{[\gamma,\delta)}$ функций, равных нулю на промежутке $[\gamma, \delta) \subset [c, d]$; для линейного функционала $g \in U^*$ запись supp $g \in [\gamma, \delta)$ эквивалентна тому, что этот функционал равен нулю на всех функциях подпространства $U_{[\gamma,\delta)}$: $\langle g, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U_{[\gamma,\delta)}$. Если при этом оказывается, что некоторое множество M не пересекается с $[\gamma, \delta)$, то пишем supp $g \cap M = \emptyset$.

Для удобства введем обозначение $\mathrm{supp}_+\widetilde{\omega}_i = [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+2})$ и рассмотрим три группы значений индекса j, а именно $I_H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\ldots, 2s-4, 2s-3, 2s-2\}$, $I_T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{2r, 2r+1, \ldots\}$ и $I_M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{2s-1, 2s, \ldots, 2r-1\}$. Очевидно, что $I_H \cup I_M \cup I_T = \mathbb{Z}$, $I_*^h = I_H$.

Если для рассматриваемых индексов $i, j \in \mathbb{Z}$ верно соотношение

(B_{ij})
$$\mathrm{supp} g_j \cap \mathrm{supp}_+\widetilde{\omega}_i = \emptyset,$$

то будем говорить, что справедливо условие (B_{ij}).

Лемма 1. *Для чисел (2.2) справедливы равенства*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad \forall i \in \mathbb{Z},\ j \in I_H. \tag{2.3}$$

Доказательство. Согласно соотношению (1.13) для $i, j \in I_H$ имеем $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i \rangle = \langle g_j, \omega_i \rangle = \delta_{i,j}$. При $j \in I_H$ и $i \in \{2s-1, 2s, \ldots, N-1\}$ выполнено условие (B_{ij}), и потому получаем соотношения (2.3).

Лемма доказана. ■

Лемма 2. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{j,i-s+r} \quad \textit{при} \quad \forall i \in \mathbb{Z},\ j \in I_T. \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. При $i \in \{\ldots, s+r-4, s+r-3, s+r-2\}$ благодаря тому, что выполнено условие (B_{ij}), имеем $\mathfrak{p}_{ij} = 0$.

2. Если $i \in \{s+r, s+r+1, \ldots\}$, то в соответствии с (1.14) получаем $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i \rangle = \langle g_j, \omega_{i-s+r} \rangle = \delta_{j,i-s+r}$.

3. Рассмотрим еще случай $i = s+r-1$. Если $j \neq 2r$, то выполнено условие (B_{ij}), и потому

$$\mathfrak{p}_{s+r-1,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_{s+r-1} \rangle = 0 \quad \text{при } j \in \mathbb{Z} \backslash \{2r\},$$

а для $\mathfrak{p}_{s+r-1,2r}$ имеем

$$\mathfrak{p}_{s+r-1,2r} = \langle g_{2r}, \widetilde{\omega}_{s+r-1} \rangle = \langle g_{2r}, \frac{\det(\varphi, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})} \rangle =$$

$$= \frac{\det(\mathbf{a}_{2r}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})} = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})} = 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{p}_{s+r-1,j} = 0 \quad$ при $j \in I_T$. Объединяя результаты, полученные для этих трех случаев, видим, что соотношения (2.4) доказаны. ■

Для вычисления $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i \rangle$ при $j \in I_M$ потребуется проанализировать расположение носителя функционала g_j при четных и при нечетных j. Поскольку $\mathrm{supp} g_j \subset [x_j, x_j + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, то достаточно рассмотреть расположение узлов x_j относительно множеств $\mathrm{supp}_+ \widetilde{\omega}_i$.

Прежде всего, заметим, что если $s \le q \le r$, то узел x_{2q} исходной сетки X сохраняется в укрупненной сетке $\widetilde{X}$ и в ней имеет номер $(2q-2s)/2+2s = s+q$, так что

$$x_{2q} = \widetilde{x}_{s+q} \quad \text{при} \quad s \le q \le r. \tag{2.5}$$

Узел x_{2q+1} с нечетным номером при $s \le q \le r-1$ находится между узлами $x_{2q} = \widetilde{x}_{s+q}$ и $x_{2q+2} = \widetilde{x}_{s+q+1}$:

$$x_{2q} = \widetilde{x}_{s+q} < x_{2q+1} < x_{2q+2} = \widetilde{x}_{s+q+1} \quad \text{при} \quad s \le q \le r-1. \tag{2.6}$$

В дальнейшем часто используется условие

$$s \le q \le r-1. \tag{2.7}$$

Рассмотрим функционалы с нечетным индексом g_{2q+1}.

Лемма 3. *При условии $s-1 \le q \le r-1$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{s+q\}, \tag{2.8}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = 1. \tag{2.9}$$

Доказательство. 1. Очевидно, что

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_i \rangle = 0 \quad \text{при} \quad i \in I_*^h \cup I_*^t$$

из-за выполнения условия $(B_{i,2q+1})$ для рассматриваемых i.

2. Пусть теперь $i \in I_*^m$. Рассмотрим здесь три подслучая.

2.1. Если $i \in \{2s, 2s+1, \ldots, s+r-2\}$, то

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_i \rangle = 0 \quad \text{при} \quad i \in I_*^m \backslash \{s+q-1, s+q\}, \tag{2.10}$$

ибо для рассматриваемых i выполнены условия $(B_{i,2q+1})$; действительно, в этом случае согласно (2.6) $\widetilde{x}_{s+q} < x_{2q+1} < \widetilde{x}_{s+q+1}$ и для нарушения упомянутого условия нужно, чтобы узел x_{2q+1} попал во множество $\mathrm{supp}_+ \widetilde{\omega}_j$, т.е. в промежуток $[\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+2})$. Последнее возможно лишь в двух случаях: либо $j = s+q-1$, либо $j = s+q$; таким образом, соотношение (2.10) установлено.

2.2. Пусть теперь $i = s + q - 1$. Поскольку $\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_{s+q-1}\rangle.$, то используя здесь представление (1.12), получаем

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \frac{\det(\varphi, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}.$$

Ввиду условия леммы $2s - 1 \le s + q \le r + s - 1$, так что $s + q \in I_*^m$, и в силу свойства (1.10) находим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q} = \mathbf{a}_{2q+1}; \tag{2.11}$$

теперь видно, что $\mathfrak{q}_{s+q-1,2q+1} = 0$. Таким образом, верно соотношение (2.8).

2.3. Рассмотрим последний случай: $i = s + q$. Рассматривая $\mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_{s+q}\rangle$ и снова используя представление (1.12), находим

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \varphi)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}\rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}.$$

Применяя здесь соотношение (2.11), приходим к равенству (2.9).

Лемма доказана. ■

Для завершения исследования в отношении случая $j \in I_M$ рассмотрим функционалы g_j с четным индексом $j = 2q$ при условии (2.7). Поскольку $\mathrm{supp} g_{2q} \subset [x_{2q}, x_{2q} + \varepsilon)\ \forall \varepsilon > 0$, то важно заметить, что в этом случае справедливы формулы (2.5). Обратимся к вычислению значений $\mathfrak{p}_{i,2q} = \langle g_{2q}, \widetilde{\omega}_i\rangle$.

Лемма 4. *При условии (2.7) имеют место соотношения*

$$\mathfrak{p}_{i,2q} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}\backslash\{s + q - 1, s + q\}, \tag{2.12}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \tag{2.13}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Очевидно, что значения $\mathfrak{p}_{i,2q}$ могут быть ненулевыми лишь при условии $\widetilde{x}_{s+q} \in \mathrm{supp}_+\widetilde{\omega}_i$ (оно эквивалентно условию $\widetilde{x}_{s+q} \in \widetilde{S}_j$); последнее равносильно соотношению $i \in \{s + q - 1, s + q\}$. Отсюда следуют соотношения (2.12).

Теперь рассмотрим значения индекса i, исключенные в (2.12).

1. Пусть $i = s + q - 1$. Поскольку выполнено соотношение (2.7), то $s + q - 1, s + q \in I_*^m$, и в силу (1.9) имеем

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1} = \mathbf{a}_{2q-1}, \qquad \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q} = \mathbf{a}_{2q+1}. \tag{2.15}$$

Используя формулу (1.12), получаем

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \langle g_{2q}, \widetilde{\omega}_{s+q-1}\rangle = \Big\langle g_{2q}, \frac{\det(\varphi, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}\Big\rangle;$$

Подставляя сюда соотношения (2.15), выводим формулу (2.13).

2. Пусть теперь $i = s+q$. По-прежнему справедливы соотношения (2.15). Из (1.12) имеем

$$\mathfrak{p}_{s+q,2q} = \langle g_{2q}, \widetilde{\omega}_{s+q}\rangle = \Big\langle g_{2q}, \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \varphi)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}\Big\rangle =$$

$$= \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}. \tag{2.16}$$

Используя здесь соотношения (2.15), из (2.16) выводим равенство (2.14).

Лемма доказана. ■

Объединение результатов лемм 1 — 4 показывает, что доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad \forall i \in \mathbb{Z},\ j \in I_H,$$

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{j,i-s+r} \quad \textit{при} \quad \forall i \in \mathbb{Z},\ j \in I_T;$$

остальные элементы вычисляются при $q \in \{s-1, s, \ldots, r-1\}$ по формулам

$$\mathfrak{p}_{i,2q} = \mathfrak{p}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}\backslash\{s+q-1, s+q\}, \tag{2.17}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = 0, \qquad \mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = 1; \tag{2.18}$$

при $q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ справедливы соотношения

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \qquad \mathfrak{p}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}. \tag{2.19}$$

Теорема 4, доказанная выше, была представлена в «построчной» формулировке, но в некоторых случаях нам удобнее использовать эквивалентную «постолбцовую» формулировку этой теоремы, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Элементы матрицы $\mathfrak{P}$ вычисляются по формулам*

$$\mathfrak{p}_{i',j} = \delta_{i',j} \quad \textit{при} \quad \forall j \in \mathbb{Z},\ i' \in I_*^h, \tag{2.20}$$

$$\mathfrak{p}_{i',j} = \delta_{i',j+s-r} \quad \textit{при} \quad \forall j \in \mathbb{Z},\ i' \in I_*^t; \tag{2.21}$$

остальные элементы вычисляются по формулам

$$\mathfrak{p}_{i',i} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}\backslash\{2(i'-s), 2(i'-s)+1, 2(i'-s)+2,\},$$

$$\mathfrak{p}_{i',2(i'-s)} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)-1}, \mathbf{a}_{2(i'-s)})}{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)-1}, \mathbf{a}_{2(i'-s)+1})} \quad \textit{при} \quad i' \in I_*^m\backslash\{2s-1\},$$

$$\mathfrak{p}_{2s-1,2s-2} = 0, \quad \mathfrak{p}_{r+s-1,2r} = 0, \quad \mathfrak{p}_{i',2(i'-s)+1} = 1 \quad \textit{при} \quad i' \in I_*^m,$$

$$\mathfrak{p}_{i',2(i'-s)+2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)+2}, \mathbf{a}_{2(i'-s)+3})}{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)+1}, \mathbf{a}_{2(i'-s)+3})} \quad \textit{при} \quad i' \in I_*^m\backslash\{s+r-1\}.$$

8.3. Матрица продолжения

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, биортогональную к системе $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j}$, со свойством

$$\mathrm{supp}\widetilde{g}_i \subset [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{supp}\widetilde{g}_{-1} \subset (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 + \varepsilon). \tag{3.1}$$

Используя соотношение

$$\langle \widetilde{g}_i, \varphi\rangle = \widetilde{\mathbf{a}}_i, \tag{3.2}$$

вычислим матрицу $\mathfrak{Q}$ размеров $\widetilde{N}+1 \times N+1$ с элементами $\mathfrak{q}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, \omega_j\rangle$; здесь $i, j \in \mathbb{Z}$; упомянутую матрицу будем записывать также в виде $\mathfrak{Q} = \widetilde{g}\omega^T$, где $\widetilde{g} = (\ldots, \widetilde{g}_{-1}, \widetilde{g}_0, \widetilde{g}_1, \ldots)^T$, $\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots)^T$.

Для ряда значений i и j справедливо равенство

$(C_{i,j})$

$$\mathrm{supp}\widetilde{g}_i \cap \mathrm{supp}_+\omega_j = \emptyset;$$

на него в дальнейшем будем ссылаться, как на соотношение $(C_{i,j})$.

Лемма 5. *Для всех $i \in \mathbb{Z}$ справедливы формулы*

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad j \in I_H, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \quad \textit{при} \quad j \in I_T. \tag{3.4}$$

Доказательство. Благодаря соотношению (1.13) имеем

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \langle \widetilde{g}_i, \omega_j\rangle = \langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \text{при} \quad j \in I_H,\ i \in \mathbb{Z};$$

таким образом, формула (3.3) доказана. Заметим теперь, что применяя формулу (1.14) в виде

$$\widetilde{\omega}_{j'}(t) \equiv \omega_{r-s+j'}(t) \quad \text{при} \quad s+r \le j',$$

и полагая в ней $j = r - s + j'$, найдем

$$\widetilde{\omega}_{j+s-r}(t) \equiv \omega_j(t) \quad \text{при} \quad 2r \le j.$$

Учитывая последнее соотношение, получим

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle = \langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_{j+s-r} \rangle = \delta_{i,j+s-r} \quad \text{при } 2r \le j, \ i \in \mathbb{Z}.$$

Последнее эквивалентно соотношению (3.4).

Лемма полностью доказана. ■

Лемма 6. *Если $2s \le 2q+1 \le 2r$, то для всех $i \in \mathbb{Z} \setminus \{s+q\}$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{i,2q} = 0; \tag{3.5}$$

кроме того

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}. \tag{3.6}$$

Доказательство. В условиях леммы имеем эквивалентности

$$2s-1 \le 2q \le 2r-1 \iff 2s \le 2q \le 2r-2 \iff s \le q \le r-1. \tag{3.7}$$

Положим

$$\varepsilon_{\widetilde{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{2s \le i \le 2r} (x_{i+1} - x_i).$$

Ясно, что для

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\widetilde{X}}) \tag{3.8}$$

верна эквивалентность

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap [\widetilde{x}_{s+q}, \widetilde{x}_{s+q+1}) \ne \emptyset \iff i = s+q. \tag{3.9}$$

Используя (2.5) и (3.7), имеем $\widetilde{x}_{s+q} = x_{2q}$, так что из (3.9) следует

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap \operatorname{supp}_+ \omega_{2q} \ne \emptyset \iff i = s+q.$$

Из (3.1) видно, что условие $C_{i,2q}$ выполнено для $i \in \mathbb{Z}$; соотношение (3.5) доказано.

Теперь найдем $\mathfrak{q}_{s+q,2q}$, используя (1.3) и (3.2):

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \langle \widetilde{g}_{s+q}, \omega_{2q} \rangle = \left\langle \widetilde{g}_{s+q}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \varphi)}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})} \right\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}. \qquad (3.10)$$

Ввиду соотношения (3.7) согласно (1.9) имеем $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q} = \mathbf{a}_{2q+1}$ и из (3.10) получаем (3.6). ■

Лемма 7. *Если выполнено соотношение (2.7), то справедливы равенства*

$$\mathfrak{q}_{i,2q+1} = 0 \quad \textit{при}\; i \in \mathbb{Z}\backslash\{s+q+1\}. \qquad (3.11)$$

При $q = s-1$ верны формулы

$$\mathfrak{q}_{i,2s-1} = 0 \quad \textit{при}\; i \in \mathbb{Z}\backslash\{2s-1, 2s\}. \qquad (3.12)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 6 при условиях (2.7) и (3.8) имеем эквивалентность

$$[x_{2(i-s)}, x_{2(i-s)} + \varepsilon) \cap [x_{2q+1}, x_{2q+3}) \neq \emptyset \iff 2(i-s) = 2q+2.$$

С учетом формулы (2.5) имеем $\widetilde{x}_i = x_{2(i-s)}$, так что предыдущую эквивалентность можно записать в виде

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap [x_{2q+1}, x_{2q+3}) \neq \emptyset \iff i = s+q+1,$$

что эквивалентно соотношению

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap \mathrm{supp}_+ \omega_{2q+1} \neq \emptyset \iff i = s+q+1.$$

Таким образом формула (3.11) доказана.

Перейдем к доказательству формулы (3.12). Очевидна эквивалентность

$$[x_i, x_i + \varepsilon) \cap [x_{2s-1}, x_{2s+1}) \neq \emptyset \iff i \in \{2s-1, 2s\}.$$

Теперь заметим, что из (1.5)–(1.6) вытекают равенства

$$\widetilde{x}_{2s-1} = x_{2s-1}, \qquad \widetilde{x}_{2s} = x_{2s},$$

и, следовательно, верна формула

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap [x_{2s-1}, x_{2s+1}) \neq \emptyset \iff i \in \{2s-1, 2s\}.$$

Отсюда видно, что соотношение (3.12) справедливо. ■

Лемма 8. *Верны соотношения*

$$\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+3}, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})} \quad \textit{при } s-1 \le q \le r-2, \tag{3.13}$$

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = 1, \quad \mathfrak{q}_{s+r,2r-1} = 0. \tag{3.14}$$

Доказательство. Найдем $\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1}$, используя (1.3) и (3.2):

$$\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1} = \langle \widetilde{g}_{s+q+1}, \omega_{2q+1} \rangle = \left\langle \widetilde{g}_{s+q+1}, \frac{\det(\varphi, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})} \right\rangle =$$

$$= \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})}. \tag{3.15}$$

Поскольку $2s-1 \le s+q \le r+s-1$, то согласно (1.9) находим $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q+1} = \mathbf{a}_{2q+3}$; из (3.15) получаем (3.13).

Теперь найдем $\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1}$. Используя формулу (1.3), имеем

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = \langle \widetilde{g}_{2s-1}, \omega_{2s-1} \rangle = \left\langle \widetilde{g}_{2s-1}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \varphi)}{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \mathbf{a}_{2s-1})} \right\rangle.$$

Применяя равенство (3.2), отсюда находим

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{2s-1})}{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \mathbf{a}_{2s-1})};$$

учитывая здесь, что в соответствии с (1.9) $\widetilde{\mathbf{a}}_{2s-1} = \mathbf{a}_{2s-1}$, приходим к первому из соотношений (3.14).

Рассмотрим случай $q = r-1$. Здесь $s+q+1 = s+r$, и ввиду (1.10) справедливы равенства $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q+1} = \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r} = \mathbf{a}_{2r}$. Замечая, что в этом случае $2q+2 = 2r$, из (3.15) выводим второе соотношение в (3.14).

Лемма доказана. ∎

Теорема 6. *Элементы матрицы $\mathfrak{Q}$ вычисляются по следующим формулам.*

1. Для всех $i \in \mathbb{Z}$ справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad j \in I_H, \tag{3.16}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \quad \textit{при} \quad j \in I_T. \tag{3.17}$$

2. Кроме того

$$\mathfrak{q}_{i,2q} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{s+q\}, \quad s \le q \le r-1, \tag{3.18}$$

$$\mathfrak{q}_{i,2s-1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{2s-1, 2s\}, \tag{3.19}$$

$$\mathfrak{q}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{s+q+1\} \text{ при } s \le q \le r-2, \tag{3.20}$$

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = 1, \qquad \mathfrak{q}_{i,2r-1} = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{3.21}$$

3. Наконец, справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})} \quad \text{при } s \le q \le r-1, \tag{3.22}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+3}, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})} \quad \text{при } s-1 \le q \le r-2, \tag{3.23}$$

Доказательство. Все три утверждения очевидным образом следуют из лемм 5, 6, 7, 8. ∎

Иногда удобнее использовать следующую эквивалентную формулировку теоремы 6.

Теорема 7. *Элементы матрицы $\mathfrak{Q}$ вычисляются по следующим формулам.*

1. Для всех $i \in \mathbb{Z}$ справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при} \quad j \in I_H, \tag{3.24}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \quad \text{при} \quad j \in I_T. \tag{3.25}$$

2. Кроме того

$$\mathfrak{q}_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{3.26}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q,j} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \backslash \{2q-1, 2q\} \quad \text{при} \quad s \le q \le r-1. \tag{3.27}$$

3. Наконец, справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}, \tag{3.28}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})} \quad \text{при } s \le q \le r-1. \tag{3.29}$$

Доказательство. Доказательство формул (3.24)–(3.29) получается из теоремы 6 простыми подстановками индексов; детали доказательства предлагается восстановить читателю. ∎

Теорема 8. *Справедливо соотношение $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I$, где I — единичная матрица.*

Доказательство этой теоремы вытекает из введенных выше представлениях матриц $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$. Поскольку $\widetilde{\omega} = \mathfrak{P}\omega$, то $\widetilde{\omega}^T = \omega^T\mathfrak{P}^T$; применяя к последнему соотношению вектор-столбец $\widetilde{g}$, имеем $\widetilde{g}\widetilde{\omega}^T = \widetilde{g}\omega^T\mathfrak{P}^T$. В левой части этого соотношения находится единичная матрица, ибо $\widetilde{g}_i\widetilde{\omega}_j = \delta_{ij}$, а в правой его части выражение $\widetilde{g}\omega^T$ представляет собой матрицу $\mathfrak{Q}$, как определено в начале данного пункта. Теорема доказана. ■

8.4. Вэйвлетное разложение

Рассмотрим оператор P проектирования пространства $\mathbb{S}$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}$, задаваемый формулой

$$Pu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle \widetilde{g}_j, u\rangle\, \widetilde{\omega}_j \quad \forall u \in \mathbb{S},$$

и введем оператор $Q = \mathcal{I} - P$, где $\mathcal{I}$ — тождественный в $\mathbb{S}$ оператор.

Пространством вэйвлетов (всплесков) называется пространство $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} Q\mathbb{S}$, а прямое разложение $\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dotplus \mathbb{W}$ — *сплайн-вэйвлетным разложением* пространства $\mathbb{S}$.

Проводя стандартные рассуждения получаем *формулы реконструкции* $c_j = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\mathfrak{p}_{i,j} + b_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$, и *формулы декомпозиции*

$$b_j = c_j - \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j'\in\mathbb{Z}} c_{j'}\mathfrak{q}_{i,j'}\mathfrak{p}_{i,j} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \qquad a_i = \sum_{j'\in\mathbb{Z}} c_{j'}\mathfrak{q}_{i,j'} \qquad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Введя вектор-столбцы

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T, \quad \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T, \quad \mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T,$$

находим $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\mathbf{c}$, $\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}$.

Вектор $\mathbf{a}$ называем *основной*, а вектор $\mathbf{b}$ — *вэйвлетной* составляющей исходного вектора (потока) $\mathbf{c}$.

Для вычисления оператора декомпозиции найдем произведение $\mathfrak{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$. Для элементов $\mathfrak{u}_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, квадратной матрицы $\mathfrak{U}$ размера $N+1$ имеем

$$\mathfrak{u}_{i,j} = \sum_{i'\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_{i',i}\mathfrak{q}_{i',j} = S^h_{i,j} + S^m_{i,j} + S^t_{i,j}, \tag{4.1}$$

где

$$S^h_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i'\in I^h_*} \mathfrak{p}_{i',i}\mathfrak{q}_{i',j}, \quad S^m_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i'\in I^m_*} \mathfrak{p}_{i',i}\mathfrak{q}_{i',j}, \quad S^t_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i'\in I^t_*} \mathfrak{p}_{i',i}\mathfrak{q}_{i',j}. \tag{4.2}$$

Лемма 9. *Верны равенства*

$$S_{i,j}^m = 0 \quad \textit{при} \quad i \in I_M, \quad j \in \mathbb{Z} \backslash I_M, \tag{4.3}$$

а для всех $j \in \mathbb{Z}$ *справедливы формулы*

$$S_{i,j}^h = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \in I_H, \qquad S_{i,j}^h = 0 \quad \textit{при} \quad i \notin I_H, \tag{4.4}$$

$$S_{i,j}^t = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \in I_T, \qquad S_{i,j}^t = 0 \quad \textit{при} \quad i \notin I_T. \tag{4.5}$$

Доказательство. Формулы (4.3) непосредственно вытекают из структуры перемножаемых матриц $\mathfrak{P}^T$ и $\mathfrak{Q}$.

Используя формулы (2.20), имеем $S_{i,j}^h = \sum_{i' \in I_*^h} \delta_{i',i} \mathfrak{q}_{i',j}$, так что

$$S_{i,j}^h = \mathfrak{q}_{i,j} \quad \text{при} \quad i \in I_*^h, \qquad S_{i,j}^h = 0 \quad \text{при} \quad i \notin I_*^h.$$

Принимая во внимание формулы (3.16) и равенство $I_*^h = I_H$, получаем получаем соотношение (4.4).

Аналогичным образом с помощью формул (2.21) находим $S_{i,j}^t = \sum_{i' \in I_*^t} \delta_{i',i-r+s} \mathfrak{q}_{i',j}$, откуда

$$S_{i,j}^t = \mathfrak{q}_{i-r+s,j} \quad \text{при} \quad i \in I_T, \qquad S_{i,j}^t = 0 \quad \text{при} \quad i \notin I_T.$$

Учитывая формулы (3.17), отсюда немедленно получаем соотношения (4.5).

Лемма доказана. ■

Лемма 10. *Для всех* $j \in I_M$ *справедливы формулы*

$$S_{2q,j}^m = \mathfrak{p}_{s+q,2q} \mathfrak{q}_{s+q,j} + \mathfrak{p}_{s+q-1,2q} \mathfrak{q}_{s+q-1,j} \tag{4.6}$$

$$\textit{при} \quad q \in \{s, \ldots, r-1\}, \tag{4.7}$$

$$S_{2q+1,j}^m = \mathfrak{q}_{s+q,j} \quad \textit{при} \quad q \in \{s-1, \ldots, r-1\}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что индекс i' в сумме $S_{i,j}^m$ лежит во множестве $I_*^m = \{2s-1, \ldots, s+r-1\}$. Применяя формулы (2.17) и (2.19) при $i = 2q$, получаем соотношения (4.6), где должны выполняться импликации $s+q \in I_*^m$ и $s+q-1 \in I_*^m$ одновременно, а они эквивалентны импликации $q \in \{s, \ldots, r-1\}$; таким образом, соотношения (4.6)–(4.7) доказаны.

Аналогичным образом благодаря формулам (2.18) при $i = 2q+1$ с учетом импликации $s+q \in I_*^m$ выводим соотношения (4.8).

Лемма полностью доказана. ■

Лемма 11. *Для*

$$q \in \{s+1, \dots, r-1\} \tag{4.9}$$

справедливы формулы

$$S^m_{2q,2q-3} = \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-3}, \tag{4.10}$$

$$S^m_{2q,2q-2} = \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-2}, \tag{4.11}$$

$$S^m_{2q,2q-1} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,2q-1}, \tag{4.12}$$

а для

$$q \in \{s, \dots, r-1\} \tag{4.13}$$

верны формулы

$$S^m_{2q,2q} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,2q}. \tag{4.14}$$

$$S^m_{2q,j} = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad j \in I_M \backslash \{2q-3, 2q-2, 2q-1, 2q\}, \tag{4.15}$$

и, наконец, верно равенство

$$S^m_{2s,2s-1} = \mathfrak{p}_{2s,2s}\mathfrak{q}_{2s,2s-1} + \mathfrak{p}_{2s-1,2s}\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Используя (4.6) при $j = 2q-3$, имеем

$$S^m_{2q,2q-3} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,2q-3} + \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-3}.$$

Согласно условию (4.9) число $j = 2q-3$ содержится во множестве I_M. В соответствии с формулами (3.20) и (3.23) имеем $\mathfrak{q}_{s+q,2q-3} = 0$, и потому справедливо соотношение (4.10).

Аналогичным образом из (4.6) при $j = 2q-2$ с учетом формул (3.18) и (3.22) найдем $\mathfrak{q}_{s+q,2q-2} = 0$, откуда получаем формулу (4.11).

Наконец, тем же путем из (4.6) при $j = 2q-1$ в силу формул (3.20) и (3.23) выводим равенство $\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-1} = 0$, и потому справедливо соотношение (4.12).

Теперь в (4.8) положим $j = 2q$; в этом случае при выполнении соотношения (4.13) с помощью формул (3.18) и (3.22) находим $\mathfrak{q}_{s+q-1,2q} = 0$; таким образом доказано равенство (4.14).

Соотношения (4.15) вытекают из (4.6) и теоремы 6.

Наконец, равенство (4.16) получается из (4.6) при $q = s$ и $j = 2s-1$.

Лемма доказана. ∎

Лемма 12. *Для* $q \in \{s+1, \dots, r-1\}$ *справедливы формулы*

$$S^m_{2q,2q-3} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{4.17}$$

$$S^m_{2q,2q-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{4.18}$$

$$S^m_{2q,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \tag{4.19}$$

а для $q \in \{s, \ldots, r-1\}$ *верны формулы*

$$S^m_{2q,2q} = 1, \tag{4.20}$$

$$S^m_{2q,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in I_M \backslash \{2q-3, 2q-2, 2q-1, 2q\}, \tag{4.21}$$

и, наконец, верно равенство

$$S^m_{2s,2s-1} = 0. \tag{4.22}$$

Доказательство. Применяя формулы (2.19), (3.22) и (3.23) в соотношениях (4.10)–(4.14), получим равенства (4.17)–(4.20).

Равенства (4.21) совпадают с ранее доказанными равенствами (4.15). Формула (4.22) получается из (4.16) использованием соотношений (2.13) и (2.14) при $q = s$, а также равенств (3.23) при $q = s-1$ и первого из соотношений (3.21).

Лемма доказана. ■

Теорема 9. *Элементы матрицы* $\mathfrak{U}$ *могут быть представлены в виде*

$$\mathfrak{u}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \in I_H \cup I_T \cup \{2s-1, 2s\},\ j \in \mathbb{Z}, \tag{4.23}$$

$$\mathfrak{u}_{i,j} = 0 \quad \textit{при} \quad i \in I_M,\ j \in \mathbb{Z} \backslash I_M, \tag{4.24}$$

При $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}$ *справедливы равенства*

$$\mathfrak{u}_{2q,2q-3} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{4.25}$$

$$\mathfrak{u}_{2q,2q-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{4.26}$$

$$\mathfrak{u}_{2q,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \qquad \mathfrak{u}_{2q,2q} = 1, \tag{4.27}$$

$$\mathfrak{u}_{2q,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in I_M \backslash \{2q-3, 2q-2, 2q-1, 2q\}. \tag{4.28}$$

Доказательство. Соотношения, перечисленные в данной теореме, установлены в леммах 9 и 12, а именно, для доказательства соотношений

(4.23)–(4.24) следует обратиться к полученным там формулам (4.3)–(4.5), (4.20), (4.22), а соотношения (4.25)–(4.28) вытекают из (4.17)–(4.21). ∎

Теорема 10. *При условии (4.13) верны соотношения*

$$\mathfrak{u}_{2q+1,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}, \tag{4.29}$$

$$\mathfrak{u}_{2q+1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}, \tag{4.30}$$

$$\mathfrak{u}_{2q+1,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in I_M \backslash \{2q-1, 2q\}. \tag{4.31}$$

Кроме того,

$$\mathfrak{u}_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j} \quad \forall j \in I_M. \tag{4.32}$$

Доказательство. При доказательстве используем леммы 9 — 12 и соотношение (4.1).

Прежде всего заметим, что при условии (4.13) числа $2q-1$ и $2q$ лежат во множестве I_M. Полагая в (4.8) $j = 2q-1$ и $j = 2q$, имеем

$$S^m_{2q+1,2q-1} = \mathfrak{q}_{s+q,2q-1}, \qquad S^m_{2q+1,2q} = \mathfrak{q}_{s+q,2q}. \tag{4.33}$$

Применяя в (4.33) формулы (3.22)–(3.23), выводим (4.29) и (4.30). Соотношения (4.31) следуют из (2.17), а формула (4.32) получается из (4.8) при $q = s-1$:

$$S^m_{2s-1,j} = \mathfrak{q}_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j};$$

последнее равенство справедливо благодаря соотношению (3.26).

Теорема доказана. ∎

Теорема 11. *Коммутатор* $\mathfrak{V} \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$ *матриц* $\mathfrak{Q}$ *и* $\mathfrak{P}^T$ *представляет собой матрицу с элементами* $\mathfrak{v}_{i,j}$*, ненулевые элементы которой вычисляются по формулам*

$$\mathfrak{v}_{2q,j} = -\mathfrak{u}_{2q,j} \quad \textit{при} \quad q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\},$$

$$j \in \{2q-3, 2q-2, 2q-1\}, \tag{4.34}$$

а при $q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ *справедливы соотношения*

$$\mathfrak{v}_{2q+1,j} = -\mathfrak{u}_{2q+1,j} \quad \textit{для} \quad j \in \{2q-1, 2q\}, \quad \mathfrak{v}_{2q+1,2q+1} = 1. \tag{4.35}$$

Остальные элементы матрицы $\mathfrak{V}$ *равны нулю.*

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 9 и 10. ∎

Теорема 12. *Ненулевые компоненты вэйвлетного потока* $b = (I - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q})c$ *имеют вид*

$$b_{2q-1} = -\mathfrak{u}_{\,2q-1,2q-3}c_{2q-3} - \mathfrak{u}_{\,2q-1,2q-2}c_{2q-2} + c_{2q-1}$$

$$\text{при} \quad q \in \{s+1, s+2, \ldots, r\}, \tag{4.36}$$

$$b_{2q} = -\mathfrak{u}_{\,2q,2q-3}c_{2q-3} - \mathfrak{u}_{\,2q,2q-2}c_{2q-2} - \mathfrak{u}_{\,2q,2q-1}c_{2q-1}$$

$$\text{при} \quad q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}. \tag{4.37}$$

Доказательство следует из представлений (4.34) и (4.35) элементов матрицы $\mathfrak{V}$ (см. теорему 11). ■

8.5. Интерференция при локальном укрупнении сетки

Лемма 13. *В матрице* $\mathfrak{V}$ *строки с номерами* $2q-1$ *и* $2q$ *пропорциональны, а именно строка с номером* $2q$ *получается из строки с номером* $2q-1$ *умножением на множитель*

$$\kappa_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}; \tag{5.1}$$

здесь $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}$.

Доказательство. Ввиду формул (4.34)–(4.35) достаточно доказать, что умножение вектора $\mathbf{u}_{2q-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{u}_{2q-1,2q-3}, \mathfrak{u}_{2q-1,2q-2}, -1)$ на число κ_q дает вектор $\mathbf{u}_{2q} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{u}_{2q,2q-3}, \mathfrak{u}_{2q,2q-2}, \mathfrak{u}_{2q,2q-1})$. Используя формулы (4.25)–(4.27) и (4.29)–(4.30), представим эти векторы в виде

$$\mathbf{u}_{2q-1} = \left(\frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, -1 \right), \tag{5.2}$$

$$\mathbf{u}_{2q} = \left(\frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \right.$$

$$\left. \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \right). \tag{5.3}$$

Теперь видно, что умножение (5.2) на множитель (5.1) даст вектор (5.3). ■

Теорема 13. *При $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}$ для компонент вэйвлетного потока справедливы равенства*

$$b_{2q} = \kappa_q b_{2q-1}, \tag{5.4}$$

где число κ_q не зависит от исходного потока c и определяется формулой (5.1).

Доказательство. Используя лемму 13 и формулы (4.36)–(4.37), получаем доказываемое утверждение. ■

Линейная зависимость между компонентами числового потока называется *интерференцией*, а пропорциональность соседних компонент с коэффициентом, не зависящим от исходного потока, называется *стоячей волной*.

Теорема 13 показывает, что порождение вэйвлетов первого порядка при однократном укрупнении сопровождается образованием системы стоячих волн, а размерность пространства вэйвлетов равна $r - s$; таким образом, эта размерность совпадает с числом удаляемых узлов (см. (1.4)).

8.6. Об аппроксимационных свойствах вэйвлетного потока

Предположим, что $\varphi \in C\,[a, b]$. Для непрерывности рассматриваемых сплайнов необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{a}_j = \varphi_{j+1}$; здесь $\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} = \varphi(x_j)$.

Пусть вектор-функция $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = (1, f(t))^T$, где $f \in C[a, b]$. В этом случае

$$\det(\varphi(t'), \varphi(t'')) = f(t'') - f(t'). \tag{6.1}$$

Обозначая $f_i \stackrel{\text{def}}{=} f(x_i)$, согласно формулам (4.29)–(4.30) и (6.1) имеем

$$\mathfrak{u}_{2q-1,2q-3} = \frac{f_{2q-1} - f_{2q}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}}, \qquad \mathfrak{u}_{2q-1,2q-2} = \frac{f_{2q} - f_{2q-2}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}}. \tag{6.2}$$

Таким образом, в случае непрерывных вэйвлетов из (4.36) с помощью (6.2) получаем

$$b_{2q-1} = \frac{f_{2q} - f_{2q-1}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}} \cdot c_{2q-3} - \frac{f_{2q} - f_{2q-2}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}} \cdot c_{2q-2} + c_{2q-1}. \tag{6.3}$$

Ввиду теоремы 13 компонента b_{2q} отличается от b_{2q-1} множителем κ_q, который в рассматриваемом случае (см. формулы (5.1) и (6.1)) может быть записан в виде

$$\kappa_q = \frac{f_{2q+2} - f_{2q+1}}{f_{2q+2} - f_{2q}}. \tag{6.4}$$

В случае, когда $\varphi(t) = (1, t)^T$ имеем $f(t) = t$, $f_i = x_i$, и формулы (6.3)–(6.4) принимают вид

$$b_{2q-1} = \frac{x_{2q} - x_{2q-1}}{x_{2q-1} - x_{2q-2}} \cdot c_{2q-3} - \frac{x_{2q} - x_{2q-2}}{x_{2q-1} - x_{2q-2}} \cdot c_{2q-2} + c_{2q-1}. \tag{6.5}$$

$$\kappa_q = \frac{x_{2q+2} - x_{2q+1}}{x_{2q+2} - x_{2q}}. \tag{6.6}$$

В случае равномерной сетки $x_j = jh$, $h > 0$, из (6.5)–(6.6) получаем

$$b_{2q-1} = c_{2q-3} - 2c_{2q-2} + c_{2q-1}. \tag{6.7}$$

$$\kappa_q = 1/2. \tag{6.8}$$

Предполагая, что источником исходного потока $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является функция $u \in C^2$, а именно $c_j = u(jh)$, из (6.7) имеем $b_{2q-1} = h^2 u''(\zeta)$, где ζ — некоторая точка интервала (x_{2q-3}, x_{2q-1}). Ввиду теоремы 13 согласно соотношениям (5.4) и (6.8) имеем $b_{2q} = \frac{1}{2} h^2 u''(\zeta)$.

9. СПЛАЙН-ВСПЛЕСКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В данном разделе строятся вложенные пространства сплайнов второго порядка и рассматривается сплайн-всплесковое разложение объемлющего пространства сплайнов. Координатные сплайны упомянутых пространств получаются из аппроксимационных соотношений, использующих полную цепочку векторов и генерирующую трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$. Согласованный выбор такой цепочки и упомянутой вектор-функции приводит к непрерывно дифференцируемым координатным сплайнам; сплайновые пространства, натянутые на такие сплайны, обладают свойством вложенности на вложенных сетках. Проекция объемлющего сплайнового пространства на вложенное строится с помощью системы функционалов, биортогональной к системе координатных сплайнов вложенного пространства.

9.1. Предварительные замечания

Всплесковое разложение исходного числового потока обычно проводится по следующей схеме. Каждому числу этого потока сопоставляется координатная функция некоторого линейного пространства, так что потоку сопоставляется сумма произведений упомянутых чисел на соответствующие координатные функции, и таким образом, поток отображается в некоторый элемент этого пространства. Затем этот элемент проектируется на вложенное пространство, причем коэффициенты разложения проекции по базису вложенного пространства позволяют сформировать так называемый основной поток. Всплесковым потоком в таком случае явится набор коэффициентов разложения остатка такого проектирования по базису объемлющего пространства. В данном разделе построения соответствуют изложенной схеме.

Сначала приводятся вспомогательные результаты, связанные с построением координатных неполиномиальных сплайнов второго порядка. Во втором пункте выводятся общие формулы для этих сплайнов при произвольной полной цепочке векторов и при достаточно произвольной генерирующей функции. В третьем пункте указанная цепочка векторов выбирается специальным образом. Четвертый пункт посвящен построению пространства сплайнов на укрупненной сетке. В пятом пункте утанавливается вложенность пространств сплайнов на вложенных сетках. В шестом пункте упомянутая вложенность пространств используется для построения сплайн-всплескового разложения.

9.2. Вспомогательные результаты

В этом пункте излагаются необходимые в дальнейшем определения и теоремы, установленные в работе [23].

Пусть $K_0 \geq 1$ — априори заданное число. На вещественной оси рассмотрим (конечный или бесконечный) интервал (α, β) и сетки X вида

$$X: \quad \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots,$$

со свойствами

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \to -\infty} x_j, \qquad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \to +\infty} x_j, \quad K_0^{-1} \leq \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \leq K_0.$$

Введем трехкомпонентную вектор-функцию (столбец) $\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^3$ класса $C^2[\alpha, \beta]$, для которой вронскиан компонент вектор-функции $\varphi(t)$ равномерно отделен от нуля:

$$|\det(\varphi(t), \varphi\,'(t), \varphi\,''(t))| \geq c > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана полная цепочка векторов $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, т. е. таких, что $\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Введем множества $M \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (x_j, x_{j+1})$ и $S_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=0,1,2 \in \mathbb{Z}} (x_{j+i}, x_{j+i+1})$ $\forall j \in Z$.

Координатные сплайны второго порядка лагранжева типа получаются из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_j \omega_j(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in M$$

при дополнительном условии

$$\omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in M \backslash S_j \quad \forall j \in \mathbb{Z};$$

отсюда при $t \in (x_k, x_{k+1})$ находим

$$\mathbf{a}_{k-2}\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}_{k-1}\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k\omega_k(t) = \varphi(t) \tag{2.1}$$

$$\forall t \in (x_k, x_{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

и в результате получаем

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \qquad \omega_{k-1}(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \varphi(t), \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)},$$

$$\omega_k(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, для каждого $j \in \mathbb{Z}$ определяются функции ω_j:

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} \qquad \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} \qquad \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})} \qquad \text{при } t \in (x_{j+2}, x_{j+3}).$$

Линейная оболочка $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \varphi)$ функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является пространством сплайнов второго порядка,

$$\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_j c_j \omega_j \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

По полной цепочке $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ построим цепочку $\{\mathbf{d}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, полагая

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Легко установить, что эта цепочка локально ортогональна цепочке векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.[2] Более того, справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j-3} \neq 0, \quad \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j-2} = \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j-1} = 0, \qquad \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j \neq 0 \quad j \in \mathbb{Z} \tag{2.4}$$

(первое и последнее соотношение являются следствием полноты цепочки, а второе и третье очевидны).

Умножая (2.1) на $\mathbf{d}_k^T$ слева, ввиду (2.4) находим

$$\omega_k(t) = \frac{\mathbf{d}_k^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k}. \tag{2.5}$$

[2] Напомним, что цепочка $\{\mathbf{d}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ ненулевых векторов пространства $\mathbb{R}^3$ называется локально ортогональной цепочке $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, если существует такая нумерация векторов, что $\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j-2} = \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j-1} = 0 \ \forall j \in \mathbb{Z}$.

Умножая (2.1) на $\mathbf{d}_{k-1}^T$ слева, имеем

$$\omega_{k-1}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_k}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}}\frac{\mathbf{d}_k^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_k^T\mathbf{a}_k}. \tag{2.6}$$

Наконец, умножим слева на $\mathbf{d}_{k-2}^T$ обе части соотношения (2.1); используя предыдущие формулы, получаем

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k-2}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-2}} - \frac{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-2}}\left(\frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_k}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}}\cdot\frac{\mathbf{d}_k^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_k^T\mathbf{a}_k}\right) - $$
$$-\frac{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-2}}\cdot\frac{\mathbf{d}_k^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_k^T\mathbf{a}_k}. \tag{2.7}$$

Заметим, что отыскание функций ω_j можно проводить в последовательности ω_{k-2}, ω_{k-1}, ω_k; при этом получаются другие формулы (хотя результат, конечно, тот же самый). Действительно, умножая обе части соотношения (2.1) на $\mathbf{d}_{k+1}^T$, находим

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}. \tag{2.8}$$

Умножая (2.1) на $\mathbf{d}_{k+2}^T$ слева, ввиду предыдущего имеем

$$\omega_{k-1}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k+2}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-2}}{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}}\frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}. \tag{2.9}$$

Наконец, умножим слева на $\mathbf{d}_{k+3}$ обе части соотношения (2.1); имеем

$$\omega_k(t) = \frac{\mathbf{d}_{k+3}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_k} - \frac{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_k}\left(\frac{\mathbf{d}_{k+2}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-2}}{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}}\frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}\right) - $$
$$-\frac{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k-2}}{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_k}\cdot\frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}. \tag{2.10}$$

Из (2.5)–(2.10) видно, что при $t \in (x_k, x_{k+1})$ можно использовать следующий вариант представления координатных сплайнов

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}, \tag{2.11}$$

$$\omega_{k-1}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_k}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}}\frac{\mathbf{d}_k^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_k^T\mathbf{a}_k}, \tag{2.12}$$

$$\omega_k(t) = \frac{\mathbf{d}_k^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k}. \tag{2.13}$$

Теорема 1. *Для функции ω_j справедливы представления*

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j} \qquad \textit{при} \ \ t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{2.14}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j} - \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j} \frac{\mathbf{d}_{j+1}^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}} \qquad \textit{при} \ \ t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{2.15}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+3}^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j} \qquad \textit{при} \ \ t \in (x_{j+2}, x_{j+3}). \tag{2.16}$$

Доказательство. Представления (2.14)–(2.16) очевидным образом вытекают из формул (2.11)–(2.13), где следует взять $k = j, j+1, j+2$. ■

Пусть f — линейный функционал над пространством $C^1(\alpha, \beta)$ (при этом пишем $(C^1)^*$), а u — функция из пространства $C^1(\alpha, \beta)$; значение функционала f на функции u будем обозначать $\langle f, u \rangle$.

Для линейного функционала f из сопряженного пространства $(C^1)^*$ будем писать $\mathrm{supp} f \subset [c, d]$, если значение $\langle f, u \rangle$ функционала f на функции $u \in C^1$ определяется значениями этой функции на интервале (c, d). Если $\mathrm{supp} f \subset [a_0 - \epsilon, a_0 + \epsilon]$ $\forall \epsilon > 0$, то пишем $\mathrm{supp} f = a_0$.

Теорема 2. *В рассматриваемых предположениях для того, чтобы система функционалов $\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ из $(C^1(\alpha, \beta))^*$ была биортогональна системе функций $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$,*

$$\langle g_i, \omega_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}, \tag{2.17}$$

необходимо, а если

$$\mathrm{supp}\ g_i \subset [x_i, x_{i+1}], \tag{2.18}$$

то и достаточно, чтобы

$$\langle g_i, \varphi \rangle = \mathbf{a}_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{2.19}$$

Доказательство следует из аппроксимационных соотношений (см. формулы (2.1)).

Замечание 1. В условиях когда вронскиан компонент вектор-функции $\varphi(t)$ равномерно отделен от нуля существование системы функционалов со свойствами (2.17)–(2.19) установлено в работе [50]; там же представлена реализация этой системы функционалов.

9.3. Пространство B_φ-сплайнов

Дальше цепочка векторов $\mathbf{a}_j$ выбирается специальным образом и при этом сплайны ω_j, полученные ранее, и упомянутая цепочка векторов снабжаются звездочкой * (см. ниже).

Пусть $\varphi_s \overset{\text{def}}{=} \varphi(x_s)$, $\varphi'_s \overset{\text{def}}{=} \varphi'(x_s)$, $\varphi''_s \overset{\text{def}}{=} \varphi''(x_s)$; рассмотрим символический определитель

$$\widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}) \overset{\text{def}}{=}$$
$$= -\det\begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \end{pmatrix}$$

и положим

$$\mathbf{a}^\star_j \overset{\text{def}}{=} \widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}).$$

Использование формулы Тейлора позволяет заключить, что при достаточно малом $h_X \overset{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}}(x_{j+1} - x_j)$ цепочка векторов $\{\mathbf{a}^\star_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ полная, т. е.

$$\det(\mathbf{a}^\star_{j-2}, \mathbf{a}^\star_{j-1}, \mathbf{a}^\star_j) \neq 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

В дальнейшем предполагается, что соотношения (3.1) выполнены.

Пусть трехкомпонентные вектор-столбцы $\mathbf{b}_s$ определены тождествами

$$\mathbf{b}_s^T\mathbf{x} \equiv \det(\varphi_s, \varphi'_s, \mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.2}$$

Очевидно, что

$$\mathbf{b}_s^T\mathbf{a}^\star_j = -\det\begin{pmatrix} \det(\varphi_s, \varphi'_s, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_s, \varphi'_s, \varphi'_{j+1}) \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что цепочка векторов $\{\mathbf{b}_s^T\}$ локально ортогональна (см. [28, 79]) цепочке векторов $\{\mathbf{a}^\star_j\}$, т. е.

$$\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}^\star_{j-2} = \mathbf{b}_j^T\mathbf{a}^\star_{j-1} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Ввиду полноты цепочки $\{\mathbf{a}^\star_j\}$ справедливы соотношения

$$\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}^\star_j \neq 0, \qquad \mathbf{b}_j^T\mathbf{a}^\star_{j-3} \neq 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

Положим

$$S_j \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{s=j,j+1,j+2} (x_s, x_{s+1}) \ \ \forall j \in \mathbb{Z}, \quad G \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (x_j, x_{j+1}),$$

и определим функции $\omega_j^\star$ для сетки X из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j^\star \omega_j^\star(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in G, \tag{3.5}$$

$$\omega_j^\star(t) = 0 \quad \forall t \in G \backslash S_j, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что при $t \in (x_i, x_{i+1})$ соотношение (3.5) можно переписать в виде

$$\mathbf{a}_{i-2}^\star\, \omega_{i-2}^\star(t) + \mathbf{a}_{i-1}^\star\, \omega_{i-1}^\star(t) + \mathbf{a}_i^\star\, \omega_i^\star(t) \equiv \varphi(t). \tag{3.7}$$

Система (3.7) однозначно разрешима относительно неизвестных $\omega_{i-2}^\star(t)$, $\omega_{i-1}^\star(t)$, $\omega_i^\star(t)$, рассматриваемых при каждом фиксированном $t \in (x_i, x_{i+1})$ для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Использование вектор-столбцов $\mathbf{b}_s$ с учетом свойств (3.4) позволяет дать компактное представление функций $\omega_j^\star$: заменяя в формулах (2.14)–(2.16) ω_j на $\omega_j^\star$ и $\mathbf{d}_s$ на $\mathbf{b}_s$, имеем

$$\omega_j^\star(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{b}_j^T \varphi(\mathrm{t})}{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^\star} & \text{при } \ t \in (x_j, x_{j+1}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{b}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^\star} - \dfrac{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^\star}{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^\star} \dfrac{\mathbf{b}_{j+1}^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^\star} & \text{при } \ t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{b}_{j+3}^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^\star} & \text{при } \ t \in (x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases} \tag{3.8}$$

Заметим, что функция $\omega_j^\star(t)$ может быть продолжена по непрерывности на интервал (α, β) так, что результат продолжения является непрерывно дифференцируемой функцией; будем считать, что упомянутое продолжение произведено и для него сохраняем прежнее обозхначение: $\omega_j^\star \in C^1(\alpha, \beta)$.

Введем бесконечномерное пространство $\mathbb{S}^\star$ сплайнов второго порядка соотношением

$$\mathbb{S}^\star = \mathbb{S}^\star(X, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl(\mathcal{L}\{\omega_j^\star \mid j \in \mathbb{Z}\}),$$

где $Cl(\mathcal{L}\{\ldots\})$ означает замыкание (в топологии поточечной сходимости) линейной оболочки функций, находящихся в фигурных скобках.

Если $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2)^T$, то $\mathbb{S}^\star(X, \varphi)$ оказывается пространством сплайнов второй степени с минимальным дефектом.

9.4. Пространство B_φ-сплайнов на укрупненной сетке

Для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \text{ при } j \le k, \text{ и } \widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \text{ при } j \ge k+1, \tag{4.1}$$

и рассмотрим новую сетку

$$\widetilde{X}: \quad \ldots < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots .$$

Для краткости в дальнейшем зависимость рассматриваемых объектов от k отмечаем не всегда.

Полагая $\widetilde{\varphi}_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\widetilde{x}_s)$, $\widetilde{\varphi}'_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(\widetilde{x}_s)$, $\widetilde{\varphi}''_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(\widetilde{x}_s)$, рассмотрим цепочку векторов

$$\widetilde{\mathbf{a}}^\star_j \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathbf{a}}(\widetilde{\varphi}_{j+1}, \widetilde{\varphi}'_{j+1}, \widetilde{\varphi}_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+2}), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

В дальнейшем предполагается, что цепочка векторов (4.2) полная.

Пусть

$$\widetilde{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=j,j+1,j+2} (\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_{s+1}) \ \ \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}).$$

Определим функции $\widetilde{\omega}^\star_j$ из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}^\star_j \widetilde{\omega}^\star_j(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in \widetilde{G},$$

$$\widetilde{\omega}^\star_i(t) = 0 \quad \forall t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_i.$$

Введем векторы $\widetilde{\mathbf{b}}_s$ по формулам

$$\widetilde{\mathbf{b}}_s^T \mathbf{x} \equiv \det(\widetilde{\varphi}_s, \widetilde{\varphi}'_s, \mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{4.3}$$

Легко проверить, что системы векторов $\{\widetilde{\mathbf{b}}_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ локально биортогональны:

$$\widetilde{\mathbf{b}}_s^T \widetilde{\mathbf{a}}_{s-2} = 0, \qquad \widetilde{\mathbf{b}}_s^T \widetilde{\mathbf{a}}_{s-1} = 0, \qquad \widetilde{\mathbf{b}}_s^T \widetilde{\mathbf{a}}_s \neq 0. \tag{4.4}$$

Аналогично формулам (3.8) для сетки $\widetilde{X}$ имеем

$$\widetilde{\omega}^\star_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{\mathbf{b}}_j^T \varphi(\mathrm{t})}{\widetilde{\mathbf{b}}_j^T \widetilde{\mathbf{a}}^\star_j} & \text{при } \ t \in (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}), \\[2ex] \dfrac{\widetilde{\mathbf{b}}_j^T \varphi(t)}{\widetilde{\mathbf{b}}_j^T \widetilde{\mathbf{a}}^\star_j} - \dfrac{\widetilde{\mathbf{b}}_j^T \widetilde{\mathbf{a}}^\star_{j+1}}{\widetilde{\mathbf{b}}_j^T \widetilde{\mathbf{a}}^\star_j} \dfrac{\widetilde{\mathbf{b}}_{j+1}^T \varphi(t)}{\widetilde{\mathbf{b}}_{j+1}^T \widetilde{\mathbf{a}}^\star_{j+1}} & \text{при } \ t \in (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}), \\[2ex] \dfrac{\widetilde{\mathbf{b}}_{j+3}^T \varphi(t)}{\widetilde{\mathbf{b}}_{j+3}^T \widetilde{\mathbf{a}}^\star_j} & \text{при } \ t \in (\widetilde{x}_{j+2}, \widetilde{x}_{j+3}). \end{cases} \tag{4.5}$$

Как и в предыдущем пункте, будем считать функции $\widetilde{\omega}^\star_j(t)$ продолженными по непрерывности на интервал (α, β).

9.5. Калибровочные соотношения

Учитывая соотношения

$$\widetilde{\varphi}_s = \varphi_s,\ \widetilde{\varphi}'_s = \varphi'_s \quad \text{при } s \le k \quad \text{и} \quad \widetilde{\varphi}_s = \varphi_{s+1},\ \widetilde{\varphi}'_s = \varphi'_{s+1} \quad \text{при } s \ge k+1, \tag{5.1}$$

по формулам (3.2) и (4.3) находим

$$\widetilde{\mathbf{b}}_s = \mathbf{b}_s, \quad \text{при } s \le k \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbf{b}}_s = \mathbf{b}_{s+1}, \quad \text{при } s \ge k+1. \tag{5.2}$$

Согласно соотношениям (4.2) и (5.1) имеем

$$\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-2} = \widehat{\mathbf{a}}(\widetilde{\varphi}_{k-1}, \widetilde{\varphi}'_{k-1}, \widetilde{\varphi}_k, \widetilde{\varphi}'_k) = \widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{k-1}, \varphi'_{k-1}, \varphi_k, \varphi'_k) = \mathbf{a}^\star_{k-2}.$$

и вообще

$$\widetilde{\mathbf{a}}^\star_j = \widehat{\mathbf{a}}(\widetilde{\varphi}_{j+1}, \widetilde{\varphi}'_{j+1}, \widetilde{\varphi}_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+2}) = \widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}) = \mathbf{a}^\star_j \qquad \forall j \le k-2. \tag{5.3}$$

Используя формулы (4.1), (5.2) и (5.3) в (4.5), видим, что при $j \le k-3$ в правой части представления (4.5) "волну" (т. е. знак $\widetilde{\ }$) можно отбросить; но в таком случае правая часть упомянутого представления совпадет с правой частью формулы (3.8), и потому

$$\widetilde{\omega}^\star_j(t) \equiv \omega^\star_j(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta) \quad \forall j \le k-3. \tag{5.4}$$

Теперь заметим, что в соответствии с формулами (4.2) и (5.1)

$$\widetilde{\mathbf{a}}^\star_k = \widehat{\mathbf{a}}(\widetilde{\varphi}_{k+1}, \widetilde{\varphi}'_{k+1}, \widetilde{\varphi}_{k+2}, \widetilde{\varphi}'_{k+2}) = \widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{k+2}, \varphi'_{k+2}, \varphi_{k+3}, \varphi'_{k+3}) = \mathbf{a}^\star_{k+1},$$

и вообще

$$\widetilde{\mathbf{a}}^\star_j = \widehat{\mathbf{a}}(\widetilde{\varphi}_{j+1}, \widetilde{\varphi}'_{j+1}, \widetilde{\varphi}_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+2}) = \widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+3}, \varphi'_{j+3}) = \mathbf{a}^\star_{j+1} \qquad \forall j \ge k. \tag{5.5}$$

Снова используя формулы (4.1), (5.2), а также формулу (5.5) в (4.4), видим, что при $j \ge k+1$ в правой части представления (4.4) можно отбросить "волну" (а именно, знак $\widetilde{\ }$), заменяя одновременно (в правой части) j на $j+1$; но в таком случае правая часть этого представления совпадет с правой частью формулы (3.8), в которой также заменен индекс j на $j+1$; отсюда делаем вывод, что

$$\widetilde{\omega}^\star_j(t) \equiv \omega^\star_{j+1}(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta) \quad \forall j \ge k+1. \tag{5.6}$$

Итак, из (5.4) и (5.6) следует, что для $j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1, k\}$ и $t \in (\alpha, \beta)$ сплайны $\widetilde{\omega}_j^\star$ совпадают с рассмотренными ранее сплайнами:

$$\widetilde{\omega}_j^\star(t) \equiv \omega_j^\star(t) \quad \forall j \le k-3; \qquad \widetilde{\omega}_j^\star(t) \equiv \omega_{j+1}^\star(t) \quad \forall j \ge k+1. \tag{5.7}$$

Теорема 3. *При $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы следующие тождества*

$$\widetilde{\omega}_{k-2}^\star(t) = \omega_{k-2}^\star(t) + \widetilde{a}_k \omega_{k-1}^\star(t), \tag{5.8}$$

$$\widetilde{\omega}_{k-1}^\star(t) = \widetilde{b}_k \omega_{k-1}^\star(t) + \widetilde{c}_k \omega_k^\star(t), \tag{5.9}$$

$$\widetilde{\omega}_k^\star(t) = \widetilde{d}_k \omega_k^\star(t) + \omega_{k+1}^\star(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta), \tag{5.10}$$

где $\widetilde{a}_k \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\mathbf{b}_{k+2}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star}{\mathbf{b}_{k+2}^T \mathbf{a}_{k-2}^\star}$, $\widetilde{b}_k \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star}{\mathbf{b}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star}$, $\widetilde{c}_k \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\mathbf{b}_{k+3}^T \mathbf{a}_k^\star}{\mathbf{b}_{k+3}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star}$, $\widetilde{d}_k \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\mathbf{b}_k^T \mathbf{a}_k^\star}{\mathbf{b}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^\star}$, *причем коэффициенты $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ определяются векторами φ_{k-1}, φ_k, φ_{k+1}, φ_{k+2}, φ'_{k-1}, φ'_k, φ'_{k+1}, φ'_{k+2}, а коэффициенты $\widetilde{c}_k$ и $\widetilde{d}_k$ определяются векторами φ_k, φ_{k+1}, φ_{k+2}, φ_{k+3}, φ'_k, φ'_{k+1}, φ'_{k+2}, φ'_{k+3}.*

Доказательство. Из тождеств (3.5) и (3.7) находим

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j^\star \omega_j^\star(t) \equiv \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_j^\star \widetilde{\omega}_j^\star(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta),$$

откуда, используя (3.5), выводим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^\star \widetilde{\omega}_{k-2}^\star(t) + \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star \widetilde{\omega}_{k-1}^\star(t) + \widetilde{\mathbf{a}}_k^\star \widetilde{\omega}_k^\star(t) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{a}_{k-2}^\star \omega_{k-2}^\star(t) + \mathbf{a}_{k-1}^\star \omega_{k-1}^\star(t) + \mathbf{a}_k^\star \omega_k^\star(t) + \mathbf{a}_{k+1}^\star \omega_{k+1}^\star(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta). \tag{5.11}$$

Поскольку цепочка векторов $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j^\star\}_{j\in\mathbb{Z}}$ полная, то из (5.11) функции $\widetilde{\omega}_j^\star(t)$ $j \in \{k-2, k-1, k\}$ представляются в виде линейной комбинации функций $\omega_i^\star(t)$ $i \in \{k-2, k-1, k, k+1\}$.

Теперь перейдем к доказательству соотношений (5.8)–(5.10), начиная с последнего.

1. Сначала заметим, что согласно (4.4) справедливы соотношения

$$\widetilde{\mathbf{b}}_k^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^\star = 0, \qquad \widetilde{\mathbf{b}}_k^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star = 0, \qquad \widetilde{\mathbf{b}}_k^T \widetilde{\mathbf{a}}_k^\star \ne 0, \tag{5.12}$$

и в соответствии с (5.3) верно равенство $\widetilde{\mathbf{b}}_k = \mathbf{b}_k$; ввиду свойства биортогональности (3.3) имеем

$$\widetilde{\mathbf{b}}_k^T \mathbf{a}_{k-2}^\star = 0, \qquad \widetilde{\mathbf{b}}_k^T \mathbf{a}_{k-1}^\star = 0. \tag{5.13}$$

Умножая (5.11) на $\widetilde{\mathbf{b}}_k^T$ слева и используя формулы (5.12) и (5.13), получим

$$\widetilde{\mathbf{b}}_k^T \widetilde{\mathbf{a}}_k^\star \widetilde{\omega}_k^\star(t) \equiv \widetilde{\mathbf{b}}_k^T \mathbf{a}_k^\star \omega_k^\star(t) + \widetilde{\mathbf{b}}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^\star \omega_{k+1}^\star(t). \tag{5.14}$$

Из (5.5) следует, что $\mathbf{a}_{k+1}^\star = \widetilde{\mathbf{a}}_k^\star$, и потому из (5.14)

$$\widetilde{\omega}_k^\star(t) \equiv \frac{\widetilde{\mathbf{b}}_k^T \mathbf{a}_k^\star}{\widetilde{\mathbf{b}}_k^T \widetilde{\mathbf{a}}_k^\star} \omega_k^\star(t) + \omega_{k+1}^\star(t). \tag{5.15}$$

Учитывая, что $\widetilde{\mathbf{b}}_k = \mathbf{b}_k$, $\widetilde{\mathbf{a}}_k^\star = \mathbf{a}_{k+1}^\star$, из (5.15) получаем (5.10).

2. Для доказательства соотношения (5.9) сначала установим, что функция $\widetilde{\omega}_{k-1}^\star(t)$ представляет собой линейную комбинацию функций $\omega_{k-1}^\star(t)$ и $\omega_k^\star(t)$. Для этого умножим соотношение (5.11) слева на $\widetilde{\mathbf{b}}_{k-1}^T$ и заметим, что согласно свойству (4.4) $\widetilde{\mathbf{b}}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^\star = 0$, а ввиду локальной биортогональности цепочек $\{\widetilde{\mathbf{b}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widetilde{\mathbf{a}}_i^\star\}_{i\in\mathbb{Z}}$ справедливо неравенство $\widetilde{\mathbf{b}}_j^T \widetilde{\mathbf{a}}_j^\star \neq 0$. Учитывая только что доказанное соотношение (5.10) и равенства (5.2), получаем

$$\widetilde{\omega}_{k-1}^\star(t) \equiv \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star}{\mathbf{b}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star} \omega_{k-1}^\star(t) - \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1}^\star}{\mathbf{b}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star} \cdot \frac{\mathbf{b}_k^T \mathbf{a}_k^\star}{\mathbf{b}_k^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k+1}^\star} \omega_k^\star(t)$$

Итак, обозначив коэффициент при $\omega_{k-1}^\star(t)$ за c', а коэффициент при $\omega_k^\star(t)$ за c'', получаем справедливое представление

$$\widetilde{\omega}_{k-1}^\star(t) \equiv c'\omega_{k-1}^\star(t) + c''\omega_k^\star(t). \tag{5.16}$$

Для доказательства соотношения (5.9) сначала возьмем $t \in (x_{k-1}, x_k)$. Поскольку $\mathrm{supp}\omega_k^\star = [x_k, x_{k+3}]$, то из (5.16) при указанном t из (5.16) получаем

$$\widetilde{\omega}_{k-1}^\star(t) \equiv c'\omega_{k-1}^\star(t). \tag{5.17}$$

Используя представления (3.8) и (4.3), перепишем тождество (5.17) в виде

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{k-1}^T \varphi(t) / \widetilde{\mathbf{b}}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star \equiv c' \mathbf{b}_{k-1}^T \varphi(t) / \mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star;$$

учитывая, что $\widetilde{\mathbf{b}}_{k-1} = \mathbf{b}_{k-1}$, получаем

$$c' = \mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star / \mathbf{b}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star. \tag{5.18}$$

Теперь рассмотрим соотношение (5.16) при $t \in (x_{k+2}, x_{k+3})$; учитывая, что $\mathrm{supp}\omega_{k-1} = [x_{k-1}, x_{k+2}]$, имеем

$$\widetilde{\omega}_{k-1}^\star(t) \equiv c''\omega_k^\star(t). \tag{5.19}$$

Благодаря представлениям (3.8) и (4.3) тождество (5.19) принимает вид

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{k+2}^T\varphi(t)/\widetilde{\mathbf{b}}_{k+2}^T\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star \equiv c''\mathbf{b}_{k+3}^T\varphi(t)/\mathbf{b}_{k+3}^T\mathbf{a}_k^\star;$$

благодаря соотношению $\widetilde{\mathbf{b}}_{k+2} = \mathbf{b}_{k+3}$, получаем

$$c'' = \mathbf{b}_{k+3}^T\mathbf{a}_k^\star/\mathbf{b}_{k+3}^T\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star. \tag{5.20}$$

Из формул (5.16), (5.18) и (5.20) получаем (5.9).

3. Для доказательства тождества (5.8) умножим соотношение (5.11) на $\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T$ слева. При этом имея в виду свойства локальной биортогональности, можем записать $\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star = 0$, $\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T\widetilde{\mathbf{a}}_k^\star = 0$; кроме того, $\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1} = \mathbf{b}_{k+2}$, так что снова используя только что упомянутое свойство, имеем $\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}\mathbf{a}_k^\star = \mathbf{b}_{k+2}\mathbf{a}_k^\star = 0$, $\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}^\star = \mathbf{b}_{k+2}\mathbf{a}_{k+1}^\star = 0$. Таким образом, умножение соотношения (5.11) на $\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T$ слева приводит к тождеству

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^\star\widetilde{\omega}_{k-2}^\star(t) \equiv \widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}^\star\omega_{k-2}^\star(t) + \widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-1}^\star\omega_{k-1}^\star(t),$$

откуда

$$\widetilde{\omega}_{k-2}^\star(t) \equiv \omega_{k-2}^\star(t) + \frac{\mathbf{b}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}^\star}{\mathbf{b}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-2}^\star}\omega_{k-1}^\star(t). \tag{5.21}$$

Формула (5.21) эквивалентна соотношению (5.8).

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить зависимость коэффициентов, фигурирующих в формулах (5.8)–(5.9) от перечисленных в теореме векторов $\varphi_{k-1}, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \varphi_{k+3}, \varphi'_{k-1}, \varphi'_k, \varphi'_{k+1}, \varphi'_{k+2}, \varphi'_{k+3}$. Однако, указанная в формулировке теоремы зависимость легко проверяется непосредственно: эта проверка предоставляется читателю.

Теорема доказана. ■

Следствие 1. *Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\varphi(t)$ задана лишь на отрезке $[x_{-1}, x_{N+1}]$, то формулы (5.8)–(5.10) справедливы при удалении $k+1$-го узла, где в качестве k может фигурировать любое из чисел множества $\{0, 1, \ldots, N-2\}$.*

Теорема 4. *При всех $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_i^\star(t) = \sum_j \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\omega_j^\star(t), \tag{5.22}$$

где для $i, j \in \mathbb{Z}$ числа $\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}$ отыскиваются по формулам:

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} = \delta_{i,j} \qquad \textit{при} \quad i \le k-3, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{5.23}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2} = 1, \;\; \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} = \widetilde{a}_k, \tag{5.24}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,j} = 0 \text{ при } j \notin \{k-2, k-1\}, \qquad \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} = \widetilde{b}_k, \tag{5.25}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \widetilde{c}_k, \qquad \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,j} = 0 \text{ при } j \notin \{k-1, k\}, \tag{5.26}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} = \widetilde{d}_k, \qquad \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k+1} = 1, \tag{5.27}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k,j} = 0 \qquad \text{при} \quad j \notin \{k, k+1\}, \tag{5.28}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} = \delta_{i,j-1} \qquad \text{при} \quad i \geq k+1, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{5.29}$$

где $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{b}_k$, $\widetilde{c}_k$, $\widetilde{d}_k$ *определены в теореме 3.*

Доказательство формул (5.22)–(5.29) легко следует из соотношений (3.1) и (3.5)–(3.8). ■

Положим

$$\widetilde{\mathbb{S}}^\star = \mathbb{S}^\star(\widetilde{X}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl(\mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j^\star \mid j \in \mathbb{Z}\}).$$

Из теоремы 4 очевидным образом вытекает

Следствие 2. *Справедливо вложение* $\widetilde{\mathbb{S}}^\star \subset \mathbb{S}^\star$.

Теорема 5. *Для того, чтобы система функционалов* $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *из* $(C^1(\alpha, \beta))^*$ *была биортогональна системе функций* $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$\langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}, \tag{5.30}$$

необходимо, а если $\operatorname{supp} \widetilde{g}_i \subset [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}]$, *то и достаточно, чтобы* $\langle \widetilde{g}_i, \varphi \rangle = \widetilde{\mathbf{a}}_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2, поэтому его не приводим.

В соответствии с замечанием 1 система функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ существует и может быть реализована в явном виде.

В дальнейшем через $\{g_i^\star\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widetilde{g}_i^\star\}_{i\in\mathbb{Z}}$ обозначаются системы функционалов, удовлетворяющие условиям $\operatorname{supp} g_i^\star \subset [x_i, x_{i+1}]$, $\langle g_i^\star, \varphi \rangle = \mathbf{a}_i^\star$ и $\operatorname{supp} \widetilde{g}_i^\star \subset [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}]$, $\langle \widetilde{g}_i^\star, \varphi \rangle = \widetilde{\mathbf{a}}_i^\star \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

9.6. Всплесковое разложение

Введем матрицу $\mathfrak{P}_k$ и вектор-столбцы $\omega^\star$, $\widetilde{\omega}^\star$ формулами

$$\mathfrak{P}_k = (\widetilde{\mathfrak{p}}_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}, \qquad \omega^\star \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \omega_{-1}^\star, \omega_0^\star, \omega_1^\star, \ldots)^T, \quad \widetilde{\omega}^\star \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \widetilde{\omega}_{-1}^\star, \widetilde{\omega}_0^\star, \widetilde{\omega}_1^\star, \ldots)^T.$$

Калибровочные соотношения (5.22)–(5.29) могут быть представлены в виде

$$\widetilde{\omega}^\star = \mathfrak{P}_k \omega^\star. \tag{6.1}$$

Матрица $\mathfrak{P}_k$ называется *матрицей реконструкции.*

Введем (бесконечную) матрицу продолжения $\mathfrak{Q}_k$ вида

$$\mathfrak{Q}_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{q}_{ij}) \qquad \mathfrak{q}_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i^\star, \omega_j \rangle, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \tag{6.2}$$

Введем вектор-столбцы, компонентами которых являются функционалы $\widetilde{g}_i^\star$, $i \in \mathbb{Z}$:

$$\widetilde{g}^\star \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\ldots, \widetilde{g}_{-1}^\star, \widetilde{g}_0^\star, \widetilde{g}_1^\star, \ldots)^T.$$

Теорема 6. *Матрицы $\mathfrak{Q}_k$ являются левыми обратными для матрицы $\mathfrak{P}_k^T$, т. е.*

$$\mathfrak{Q}_k \mathfrak{P}_k^T = I, \tag{6.3}$$

где I — единичная матрица с элементами $\delta_{i,j}$ ($\delta_{i,j}$ — символ Кронекера).

Доказательство. Транспонирование соотношения (6.1), приводит к равенству вектор-строк

$$(\widetilde{\omega}^\star)^T(t) = (\omega^\star)^T(t) \mathfrak{P}_k^T.$$

Умножим это равенство на вектор-столбец $\widetilde{g}^\star$ слева; ввиду свойства биортогональности (5.30) получаем единичную матрицу в левой части, а в правой части (согласно определению (6.2)) — матрицу $\mathfrak{Q}_k$, умноженную на матрицу $\mathfrak{P}_k^T$. ■

Рассмотрим оператор P_k проектирования пространства $\mathbb{S}^\star_{(\alpha,\beta)}(X, \varphi)$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}^\star_{(\alpha,\beta)}(\widetilde{X}_k, \varphi)$, задаваемый формулой

$$P_k u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_j \langle \widetilde{g}_j^\star, u \rangle \, \widetilde{\omega}_j^\star \qquad \forall u \in \mathbb{S}^\star(X, \varphi), \tag{6.4}$$

и введем оператор $Q_k = I - P_k$, где I — тождественный в $\mathbb{S}^\star(X, \varphi)$ оператор.

Пространством вэйвлетов (всплесков) называется пространство $\mathbb{W}_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} Q_k \mathbb{S}^\star(X, \varphi)$. Итак, получаем прямое разложение

$$\mathbb{S}^\star(X, \varphi) = \widetilde{\mathbb{S}}_k^\star(\widetilde{X}, \varphi) \dot{+} \mathbb{W}_k \tag{6.5}$$

— *сплайн-вэйвлетное разложение* пространства $\mathbb{S}^\star(X, \varphi)$.

Пусть $u \in \mathbb{S}^\star(X, \varphi)$; используя соотношения (6.4)–(6.5), получаем два представления элемента u

$$u = \sum_j c_j \omega_j^\star, \tag{6.6}$$

$$u = \sum_j a_i \widetilde{\omega}_i^\star + \sum_j b_j \omega_j^\star, \tag{6.7}$$

где
$$a_i \overset{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i^\star, u\rangle, \quad b_j,\ c_j\ \in \mathbb{R}^1. \tag{6.8}$$
Из (6.5)–(6.7) имеем $\sum_j c_j\omega_j^\star = \sum_i a_i \sum_j \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\omega_j^\star + \sum_j b_j\omega_j^\star$, откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j^\star\}$ получаем
$$c_j = \sum_i a_i\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + b_j. \tag{6.9}$$
Формулы (6.9) являются *формулами реконструкции.*

Используя представление (6.8), перепишем формулы (6.9) в виде $c_j = \sum_i\langle\widetilde{g}_i^\star, u\rangle\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + b_j$ и подставим сюда u из соотношения (6.6) (заменив в (3.2) индекс суммирования j на s): $c_j = \sum_i\sum_s c_s\mathfrak{q}_{is}\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + b_j$, где $\mathfrak{q}_{is} \overset{\text{def}}{=} \langle\widetilde{g}_i^\star, \omega_s\rangle$; отсюда
$$b_j = c_j - \sum_i\sum_s c_s\mathfrak{q}_{is}\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}. \tag{6.10}$$
Подставляя (6.6) в (6.8), имеем
$$a_j = \sum_s c_s\langle\mathfrak{q}_{js}, \omega_s^\star\rangle. \tag{6.11}$$
Формулы (6.10) и (6.11) представляют собой *формулы декомпозиции.*

Введем вектор-столбцы $\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T$, $\mathbf{b} \overset{\text{def}}{=} (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T$, $\mathbf{c} \overset{\text{def}}{=} (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T$ и перепишем формулы декомпозиции (6.10)–(6.11) в матричном виде
$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}_k^T\mathfrak{Q}_k\mathbf{c}, \qquad \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_k\mathbf{c}. \tag{6.12}$$
Применим к (6.12) матрицу $\mathfrak{Q}_k$ и воспользуемся тем, что эта матрица является левой обратной для матрцы $\mathfrak{P}_k$ (см. формулу (6.3)); в результате получаем $\mathfrak{Q}_k\mathbf{b} = \mathfrak{Q}_k\mathbf{c} - \mathfrak{Q}_k\mathfrak{P}_k^T\mathfrak{Q}_k\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Итак, вектор $\mathbf{b}$ содержится в ядре $\ker\mathfrak{Q}_k$ оператора $\mathfrak{Q}_k$: $\mathbf{b} \in \ker\mathfrak{Q}_k$.

В дальнейшем часто индекс k опускаем.

Рассмотрим пространство $\mathbb{L}$ всех числовых последовательностей, представленных вектор-столбцами, $l \overset{\text{def}}{=} (\ldots, l_{-1}, l_0, l_1, \ldots)^T$, и линейный оператор, определяемый матрицей $\mathfrak{Q}$ в нем (это определение корректно, ибо упомянутая матрица имеет конечное число ненулевых элементов в каждой строке). Ядро этого оператора представляет собой линейное пространство; обозначим его $\mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T,\ \mathfrak{Q}\mathbf{b} = 0\}$, т. е. $\mathcal{B} = \ker\mathfrak{Q}$, так что
$$\mathfrak{Q}\mathbf{b} = 0 \qquad \text{при } \mathbf{b} \in \mathcal{B}. \tag{6.13}$$
Рассмотрим еще два экземпляра пространства $\mathbb{L}$, обозначая их $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$: элементами пространства $\mathcal{A}$ являются вектор-столбцы $\mathbf{a} = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T$, а

элементами пространства $\mathcal{C}$ — вектор-столбцы $\mathbf{c} = (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T$. пусть $\mathcal{F}$ — прямое произведение пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$: $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, т. е.

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathbf{a} \in \mathcal{A},\ \mathbf{b} \in \mathcal{B} \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{D} :\ \mathcal{C} \mapsto \mathcal{F}, \quad \mathfrak{D} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \end{pmatrix},$$

для которого

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathfrak{D}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \end{pmatrix} \mathbf{c} \iff \begin{cases} \mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c} \\ \mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q})\mathbf{c} \end{cases};$$

этот оператор называется оператором *декомпозиции.*

Оператор $\mathfrak{R} :\ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{C}, \quad \mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T & I \end{pmatrix}$, для которого

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \iff \mathbf{c} = \mathfrak{P}^T \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

является оператором *реконструкции.*

Теорема 7. *Операторы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$ взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\mathfrak{R}\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{R}\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \end{pmatrix} = \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} + I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} = I.$$

С другой стороны с учетом свойства (6.13) имеем

$$\mathfrak{D}\mathfrak{R} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T & \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{P}^T - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T & I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathfrak{Q}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

что и требовалось установить. ■

10. СПЛАЙН-ВСПЛЕСКОВАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ НА ОТРЕЗКЕ

Сплайн-всплесковое представление обычно ассоциируется с представлением исходной числовой информации в виде двух (или более) числовых инфомационных потоков, позволяющих (в случае необходимости) практически полностью восстановить исходную информацию. Один из этих потоков называют основным, а остальные — уточняющими (всплесковыми). Некоторые вариации аппарата представления (в частности, выбор носителей функционалов биортогональной системы) приводят к различным вариантам сплайн-всплесков (см. [23]). Обычно алгоритм сплайн-всплескового разложения может быть представлен в виде ряда элементарных операций, каждая из которых ассоциируется с удалением узла исходной сетки. В связи с этим возникает вопрос, зависит ли результат от порядка элементарных операций узлов из заранее фиксированного множества операций (при сохранении остальных условий представления). В работе [28] установлена независимость сплайн-всплескового представления первого порядка от последовательности удаления соседних узлов исходной сетки, а в [99] получены условия упомянутой независимости для разложений второго порядка в случае бесконечной сетки.

Цель данного раздела состоит в исследовании условий независимости сплайн-всплескового представления второго порядка от последовательности элементарных операций в случае конечной сетки. Здесь рассматривается понятие k-локализованных на конечной сетке систем функционалов и выделяется множество операторов, в котором имеется лишь один левый обратный к оператору вложения сплайновых пространств.

10.1. Сплайны на отрезке

Для фиксированного натурального числа $N \geq 5$ из бесконечной сетки X выделим конечную сетку X_N,

$$X_N : x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N < x_{N+1}, \tag{1.1}$$

а из бесконечной цепочки трехмерных векторов $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}$ выделим конечную цепочку векторов $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{A}_N = \{\mathbf{a}_{-2}, \mathbf{a}_{-1}, \ldots, \mathbf{a}_{N-1}\}$.

Положим

$$a \stackrel{\text{def}}{=} x_0, \quad b \stackrel{\text{def}}{=} x_N, \quad I_s \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, s\},$$

$$J_s \stackrel{\text{def}}{=} \{-2, -1, 0, \ldots, s\}, \ s \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим сужение ранее рассмотренных (см. раздел 9) функций $\omega_i(t)$ и $\widetilde{\omega}_j(t)$ на отрезок $[a, b]$, сохраняя для них прежние обозначения; здесь $i \in J_{N-1}$, $j \in J_{N-2}$.

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$, $j \in J_{N-1}$, представляет собой конечномерное линейное пространство

$$\mathbb{S}_N = \mathbb{S}(X_N, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl(\mathcal{L}\{\omega_j \mid j \in J_{N-1}\}).$$

Ясно, что $\mathbb{S}_N \subset C^1[a, b]$. Из определения функций $\omega_j(t)$ вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Функция $u_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=-2}^{N-1} c_j \omega_j(t)$, $t \in [a, b]$, лежит в пространстве $\mathbb{S}_N$ и при фиксированном $t \in [a, b]$ полностью определяется значениями функции $\varphi(t)$, сеткой X_N, набором векторов $\{\varphi_j, \varphi'_j\}_{j \in \{-1, 0, \ldots, N+1\}}$ и набором коэффициентов $\{c_j\}_{j \in J_{N-1}}$.*

Предполагая, что $k \in \{0, 1, \ldots, N-2\}$, удалим узел x_{k+1} из сетки (1.1); в результате получим новую сетку

$$X_{N\{k+1\}}: \quad \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_N,$$

где узлы $\widetilde{x}_i$, $i = -1, 0, \ldots, N$, по-прежнему определяются формулами (9.4.1).

Пусть $\widetilde{\omega}(t)$ и $\omega(t)$ — конечномерные вектор-функции:

$$\widetilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_{-2}, \widetilde{\omega}_{-1}, \widetilde{\omega}_0, \ldots, \widetilde{\omega}_{N-2}), \quad \omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \ldots, \omega_{N-1}),$$

Ввиду теорем 9.1, 9.2 и следствия 9.1 при $k \in I_{N-2}$ калибровочные соотношения могут быть записаны в виде

$$\widetilde{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{N\{k+1\}} \omega(t), \qquad t \in [a, b], \tag{1.2}$$

где $\mathfrak{P}_{N\{k+1\}}$ — прямоугольная числовая матрица размеров $N+1 \times N+2$, называемая матрицей вложения:

$$
\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}} \stackrel{\text{def}}{=}
\begin{array}{l}
\\ -2 \\ \dots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ k+3 \\ \dots \\ N-2 \\ N-1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
\widetilde{-2} & \dots & \widetilde{k-3} & \widetilde{k-2} & \widetilde{k-1} & \widetilde{k} & \widetilde{k+1} & \dots & \widetilde{N-2}
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Таким образом, пространство

$$\mathbb{S}_{N\{k+1\}} = \mathbb{S}(X_{N\{k+1\}}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl(\mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j \mid j \in J_{N-2}\})$$

лежит в пространстве $\mathbb{S}_N$: $\mathbb{S}_{N\{k+1\}} \subset \mathbb{S}_N$.

10.2. Матрица продолжения

Продолжим систему функционалов $\widetilde{g}_s$ на объемлющее пространство $\mathbb{S}_N$.

Будем говорить, что система $\{f_s\}_{s\in J_{N-2}}$ линейных функционалов f_s над пространством $C^1[a,b]$ k-локализована на сетке X_N, если выполнено условие (B)

$$\text{supp} f_s \subset [x_s, x_{s+1}] \; \forall s \le k,$$

$$\text{supp} f_s \subset [x_{s+1}, x_{s+2}] \; \forall s \ge k+1, \quad s \in J_{N-2}.$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{G}^\star_k(X_N,\varphi)$ k-локализованных на сетке X_N систем $\widetilde{G}^\star \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{g}^\star_s\}_{s\in J_{N-2}}$ линейных функционалов $\widetilde{g}^\star_s$ над пространством $C^1[a,b]$ со свойством

$$\widetilde{\mathbf{a}}^\star_s = \langle \widetilde{g}^\star_s, \varphi\rangle \qquad \forall s \in J_{N-2}. \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Множество $\mathfrak{G}^\star_k(X_N,\varphi)$ не пусто; оно содержит систему функционалов, задаваемую формулами*

$$\langle \widetilde{g}^\circ_s, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\det\begin{pmatrix} \widetilde{u}_{s+1} & \widetilde{u}'_{s+1} \\ \det(\widetilde{\varphi}_{s+2}, \widetilde{\varphi}'_{s+2}, \widetilde{\varphi}_{s+1}) & \det(\widetilde{\varphi}_{s+2}, \widetilde{\varphi}'_{s+2}, \widetilde{\varphi}'_{s+1})\end{pmatrix};$$

здесь $u \in C^1[a,b]$, $\widetilde{u}_{s+1} \stackrel{\text{def}}{=} u(\widetilde{x}_{s+1})$, $\widetilde{u}'_{s+1} \stackrel{\text{def}}{=} u'(\widetilde{x}_{s+1}) \qquad \forall s \in J_{N-2}$.

Любая система функционалов $\{\widetilde{g}_s^\star\}_{s\in J_{N-2}}$ *из множества* $\mathfrak{G}_k^\star(X_N,\varphi)$ *является продолжением на* $C^1[a,b]$ *системы функционалов, биортогональной системе сплайнов* $\{\widetilde{\omega}_j^\star\}_{j\in J_{N-2}}$*:*

$$\langle\widetilde{g}_s^\star,\widetilde{\omega}_j^\star\rangle=\delta_{s,j}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Легко видеть, что условие (B) выполнено: поскольку

$$\mathrm{supp}\widetilde{g}_s^\circ=\widetilde{x}_s=\begin{cases}x_s \text{ при } s\le k\\ x_{s+1} \text{ при } s\ge k+1,\end{cases}$$

то

$$\mathrm{supp}\widetilde{g}_s^\circ\subset[x_s,x_{s+1}]\ \forall s\le k;\quad \mathrm{supp}\widetilde{g}_s^\circ\subset[x_{s+1},x_{s+2}]\ \forall s\ge k+1.$$

Проверим справедливость свойства (2.1) для функционалов $\widetilde{g}_s^\circ$. Применяя функционал $\widetilde{g}_s^\circ$ к компонентам вектора $\varphi(t)$ и используя определение (9.4.2) вектора $\widetilde{\mathbf{a}}_s^\circ$, убеждаемся в том, что $\langle\widetilde{g}_s^\circ,\varphi\rangle=\widetilde{\mathbf{a}}_s^\star$. Первая часть леммы доказана.

Перейдем к доказательству второй части леммы. По условию система $\{\widetilde{g}_s^\star\}_{s\in J_{N-2}}$ k-локализована на сетке X_N, так что

$$\mathrm{supp}\widetilde{g}_s^\star\subset[x_s,x_{s+1}]\ \forall s\le k,\quad \mathrm{supp}\widetilde{g}_s^\star\subset[x_{s+1},x_{s+2}]\ \forall s\ge k+1;$$

отсюда $\mathrm{supp}\widetilde{g}_s^\star\subset[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]\ \forall s\in J_{N-2}$. В соответствии с (9.4.5) из последнего соотношения следует, что

$$\langle\widetilde{g}_s^\star,\widetilde{\omega}_j^\star\rangle=0 \qquad \text{при } j\in J_{N-1}\backslash\{s-2,s-1,s\}. \tag{2.3}$$

Воспользуемся соотношениями (9.3.5)–(9.3.6) и применим функционал $\widetilde{g}_s^\star$; благодаря формулам (2.1) имеем

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{s-2}^\star\langle\widetilde{g}_s^\star,\widetilde{\omega}_{s-2}^\star\rangle+\widetilde{\mathbf{a}}_{s-1}^\star\langle\widetilde{g}_s^\star,\widetilde{\omega}_{s-1}^\star\rangle+\widetilde{\mathbf{a}}_s^\star\langle\widetilde{g}_s^\star,\widetilde{\omega}_s^\star\rangle=\widetilde{\mathbf{a}}_s^\star. \tag{2.4}$$

Используя линейную независимость векторов $\widetilde{\mathbf{a}}_{s-2}^\star$,$\widetilde{\mathbf{a}}_{s-1}^\star$, $\widetilde{\mathbf{a}}_s^\star$, из (2.4) получаем

$$\langle\widetilde{g}_s^\star,\widetilde{\omega}_{s-2}^\star\rangle=0,\quad \langle\widetilde{g}_s^\star,\widetilde{\omega}_{s-1}^\star\rangle=0,\quad \langle\widetilde{g}_s^\star,\widetilde{\omega}_{s-2}^\star\rangle=1. \tag{2.5}$$

Из (2.3) и (2.5) следует (2.2). ∎

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\stackrel{\text{def}}{=}(\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij})_{i\in J_{N-2},\,j\in J_{N-1}}$, где $\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}\langle\widetilde{g}_i^\star,\omega_j^\star\rangle$. Справедливо следующее утверждение

Теорема 2. *Если* $\{\widetilde{g}_s^\star\}_{s\in J_{N-2}}\in\mathfrak{G}_k^\star(X_N,\varphi)$*, то для чисел* $\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij}$*,* $i\in J_{N-2}$*,* $j\in J_{N-1}$*, верны соотношения*

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij}=\delta_{i,j}\quad \textit{при}\ \forall i\in J_{N-2},\ j\le k-3,$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij} = \delta_{i+1,j} \quad \textit{при}\, \forall i \in J_{N-2},\ j \geq k+2,$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{i,k-2} = 0 \quad \textit{при}\, (i \leq k-3) \vee (i \geq k+1),\ i \in J_{N-2}; \qquad \widetilde{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} = 1,$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} = \frac{\mathbf{b}_{k-2}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star}{\mathbf{b}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-2}^\star} - \frac{\mathbf{b}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star}{\mathbf{b}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-2}^\star} \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k-2} = \frac{\mathbf{b}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k+1}^\star}{\mathbf{b}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k-2}^\star},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{i,k-1} = 0 \quad \textit{при}\, (i \leq k-2) \vee (i \geq k+1),\ i \in J_{N-2};$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} = \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k-1} = \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1}^\star}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star} - \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k}^\star}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^\star} \frac{\mathbf{b}_{k}^T \mathbf{a}_{k+1}^\star}{\mathbf{b}_{k}^T \mathbf{a}_{k}^\star},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{i,k} = 0 \quad \textit{при}\, (i \leq k-1) \vee (i \geq k+1),\ i \in J_{N-2}; \qquad \widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k} = \frac{\mathbf{b}_{k}^T \mathbf{a}_{k+1}^\star}{\mathbf{b}_{k}^T \mathbf{a}_{k}^\star},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{i,k+1} = 0 \quad \forall i \in J_{N-2}.$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы сначала применяем k-локализованную систему функционалов $\{\widetilde{g}_s^\star\}_{s \in J_{N-2}}$ к сплайнам $\omega_j^\star$, определяемым соотношениями (9.2.14) – (9.2.16), а затем используем формулы (2.1). ■

Матрица $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$ имеет вид

$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}} \overset{\text{def}}{=} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} -2 & \dots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & N-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} \widetilde{-2} \\ \dots \\ \widetilde{k-3} \\ \widetilde{k-2} \\ \widetilde{k-1} \\ \widetilde{k} \\ \widetilde{k+1} \\ \widetilde{k+2} \\ \dots \\ \widetilde{N-2} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k-2} & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k-1} & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

10.3. Сплайн-всплесковое представление пространства $\mathbb{S}^\star_N$

Введем вектор-столбец, компонентами которого являются функционалы $\widetilde{g}^\star_i$, $i \in J_{N-2}$:

$$\widetilde{g}^\star \overset{\text{def}}{=} (\widetilde{g}^\star_{-2}, \widetilde{g}^\star_{-1}, \ldots, \widetilde{g}^\star_{N-2})^T. \tag{3.1}$$

Теорема 3. *Матрица $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$ является левой обратной для матрицы $\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}$, т. е.*

$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}} = I, \tag{3.2}$$

где I — квадратная матрица порядка $N+1$ с элементами $\delta_{i,j}$, $i, j \in J_{N-2}$.

Доказательство. Транспонирование соотношения (1.2), приводит к равенству вектор-строк

$$\widetilde{\omega}^T(t) = \omega^T(t)\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}.$$

Умножим это равенство на вектор-столбец $\widetilde{g}^\star$ слева; ввиду свойства биортогональности (2.2) получаем единичную матрицу в левой части, а в правой части (согласно определению (3.1)) — матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$, умноженную на матрицу $\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}$. ■

Рассмотрим оператор $P_{N\{k+1\}}$ проектирования пространства $\mathbb{S}^\star_N$ на подпространство $\mathbb{S}^\star_{N\{k+1\}}$, задаваемый формулой

$$P_{N\{k+1\}}u \overset{\text{def}}{=} \sum_{j\in J_{N-2}} \langle \widetilde{g}^\star_j, u\rangle\, \widetilde{\omega}^\star_j \qquad \forall u \in \mathbb{S}^\star(X_N, \varphi), \tag{3.3}$$

и введем оператор $Q_{N\{k+1\}} = \mathcal{I} - P_{N\{k+1\}}$, где $\mathcal{I}$ — тождественный в $\mathbb{S}^\star_N$ оператор.

С помощью проектирования (3.3) получаем прямое разложение *исходного пространства* $\mathbb{S}^\star_N$ на *основное пространство* $\mathbb{S}^\star_{N\{k+1\}}$ и *пространство вэйвлетов (всплесков)* $\mathbb{W}^\star_{N\{k+1\}}$:

$$\mathbb{S}^\star_N = \mathbb{S}^\star_{N\{k+1\}} \dotplus \mathbb{W}^\star_{N\{k+1\}}, \tag{3.4}$$

т. е. *сплайн-всплесковое представление* пространства $\mathbb{S}^\star_N$.

Пусть $u \in \mathbb{S}^\star_N$; используя соотношение (3.4), получаем два представления элемента u

$$u = \sum_{j\in J_{N-1}} c_j\omega^\star_j, \tag{3.5}$$

$$u = \widetilde{u} + w, \tag{3.6}$$

где

$$\widetilde{u} = \sum_{i\in J_{N-2}} a_i\widetilde{\omega}^\star_i, \quad w = \sum_{j\in J_{N-1}} b_j\omega^\star_j, \tag{3.7}$$

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i^\star, u\rangle, \quad b_j,\ c_j\ \in \mathbb{R}^1. \tag{3.8}$$

Из (9.5.22), (3.5)–(3.7) имеем

$$\sum_{j\in J_{N-1}} c_j\omega_j^\star = \sum_{i\in J_{N-2}} a_i \sum_{j\in J_{N-1}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\omega_j^\star + \sum_{j\in J_{N-1}} b_j\omega_j^\star,$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j^\star\}$ получаем *формулы реконструкции*

$$c_j = \sum_{i\in J_{N-2}} a_i\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + b_j \qquad j\in J_{N-1}. \tag{3.9}$$

Используя представление (3.8), перепишем формулы (3.9) в виде $c_j = \sum_i \langle \widetilde{g}_i^\star, u\rangle \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + b_j$ и подставим сюда u из соотношения (3.5) (заменив в (3.5) индекс суммирования j на s): $c_j = \sum_i\sum_s c_s\widetilde{\mathfrak{q}}_{is}\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + b_j$, где $\widetilde{\mathfrak{q}}_{is} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i^\star, \omega_s\rangle$; отсюда

$$b_j = c_j - \sum_{i\in J_{N-2}}\sum_{s\in J_{N-1}} c_s\widetilde{\mathfrak{q}}_{is}\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} \qquad j\in J_{N-1}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.5) в (3.8), получаем

$$a_i = \sum_{s\in J_{N-1}} c_s\widetilde{\mathfrak{q}}_{is} \qquad i\in J_{N-2}. \tag{3.11}$$

Представления (3.10)–(3.11) являются *формулами декомпозиции.*

Ввиду линейной независимости систем $\{\omega_j\}_{j\in J_{N-1}}$ и $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in J_{N-2}}$ вектор-столбцы
$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{-2}, a_{-1}, \ldots, a_{N-2})^T$, $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_{-2}, b_{-1}, \ldots, b_{N-1})^T$, $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{-2}, c_{-1}, \ldots, c_{N-1})^T$ определяются однозначно функциями u, $\widetilde{u}$, w (см. формулы (3.5)–(3.7)).

Введем линейные векторные пространства $\mathcal{A}_N = \{\mathbf{a}\}$, $\mathcal{B}_N = \{\mathbf{b}\}$, $\mathcal{C}_N = \{\mathbf{c}\}$, индуцируемые пространствами $\mathbb{S}^\star_{N\{k+1\}}$, $\mathbb{W}^\star_{N\{k+1\}}$, $\mathbb{S}^\star_N$ согласно формулам (3.5)–(3.7).

Перепишем формулы декомпозиции (3.10)–(3.11) в матричном виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{c}; \tag{3.12}$$

формулы реконструкции могут быть представлены в форме

$$\mathbf{c} = \mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Применим к (3.12) матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$ и воспользуемся тем, что эта матрица является левой обратной для матрицы $\mathfrak{P}_{N\{k+1\}}$ (см. формулу (3.2)); в результате получаем $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{b} = \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{c} - \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Итак, вектор $\mathbf{b}$ содержится в ядре $\ker \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$ оператора $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$, т. е. $\mathbf{b} \in \ker \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$.

С другой стороны, если некоторый вектор $\mathbf{b}^*$ лежит в $\ker \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$, то при $\mathbf{c} = \mathbf{b}^*$ из (3.12) получаем $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, и из (3.7) следует, что $u \in \mathbb{W}_{N\{k+1\}}$. Обозначая линейный изоморфизм, определяемый формулами (3.5), (3.7) и (3.12), знаком $\sim$, имеем

$$\mathcal{A}_N \sim \mathbb{S}^\star_{N\{k+1\}}, \quad \mathcal{B}_N \sim \mathbb{W}^\star_{N\{k+1\}} \sim \ker \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}, \quad \mathcal{C}_N \sim \mathbb{S}^\star_N.$$

10.4. Вариант сплайн-всплескового разложения

При удалении двух узлов ξ и η из сетки X_N получаем сетку $X_{N\{\xi,\eta\}}$. Нетрудно видеть, что пространство $\grave{\mathbb{S}}_N \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{S}(X_{N\{\xi,\eta\}}, \varphi)$ и его координатные сплайны не зависят от порядка удаления узлов, и потому матрица $\mathfrak{P}$ представления координатных сплайнов полученного пространства через координатные сплайны исходного $\mathbb{S}^\star_N$ (т. е. матрица вложения) также не зависит от упомянутого порядка. Другое дело — матрица продолжения. Поскольку продолжение линейных функционалов на объемлющее пространство неединственно, то, вообще говоря, матрица продолжения (и тем самым — вэйвлетное разложение) варьируется в зависимости от способа продолжения функционалов (см. [38]); однако, эта вариативность оказывается неудобной на практике. Наша задача состоит в том, чтобы определить условия, при которых упомянутая вариативность отсутствует.

Рассмотрим удаление узлов $\xi \stackrel{\text{def}}{=} x_{k+1}$ и $\eta \stackrel{\text{def}}{=} x_k$. Имеется два порядка удаления этих узлов: в первом случае удаляется узел x_{k+1}, а затем — узел x_k, а во втором случае сначала удаляется узел x_k, а затем — узел x_{k+1}. Возникает вопрос: в каких условиях такое изменение порядка удаления узлов приведет к одному и тому же всплесковому представлению? Здесь получен ответ на этот вопрос.

Заметим, что фигурирующие дальше матрицы вложения и продолжения строятся аналогично тому, как это было сделано в первом и во втором пунктах соответственно.

Из полученной ранее сетки $X_{N\{k+1\}}$ (см. (3.1)) удалим узел $\widetilde{x}_k$ (очевидно, что $\widetilde{x}_k = x_k$). После удаления этого узла получаем сетку

$$X_{N\{k,k+1\}}: \quad \widehat{x}_{-1} < \ldots < \widehat{x}_{N-1},$$

где

$$\widehat{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{x}_j = x_j \text{ при } j \le k-1, \quad \widehat{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{x}_{j+1} = x_{j+2} \text{ при } j \ge k.$$

Положим

$$\widehat{S}_{-2} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1), \quad \widehat{S}_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1) \cup (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2),$$

$$\widehat{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=j,j+1,j+2} (\widehat{x}_s, \widehat{x}_{s+1}) \ \ \forall j \in \{0, 1, \ldots, N-5\},$$

$$\widehat{S}_{N-4} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_{N-4}, \widehat{x}_{N-3}) \cup (\widehat{x}_{N-3}, \widehat{x}_{N-2}), \quad \widehat{S}_{N-3} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_{N-3}, \widehat{x}_{N-2}),$$

$$\widehat{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in I_{N-3}} (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}).$$

Кроме введенных ранее цепочек векторов $\{\mathbf{a}_j^\star\}_{j\in J_{N-1}}$, $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j^\star\}_{j\in J_{N-2}}$ рассмотрим еще цепочку $\{\widehat{\mathbf{a}}_j^{\,\star}\}_{j\in J_{N-3}}$, определяемую с помощью символического определителя

$$\widehat{\mathbf{a}}_j^{\,\star} \stackrel{\text{def}}{=} = -\det\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_{j+1} & \widehat{\varphi}\,'_{j+1} \\ \det(\widehat{\varphi}_{j+2}, \widehat{\varphi}\,'_{j+2}, \widehat{\varphi}_{j+1}) & \det(\widehat{\varphi}_{j+2}, \widehat{\varphi}\,'_{j+2}, \widehat{\varphi}\,'_{j+1}) \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\varphi}_{j+2} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\widehat{x}_{j+2})$, $\widehat{\varphi}\,'_{j+2} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(\widehat{x}_{j+2})$, а h_X считается столь малым, что рассматриваемые цепочки векторов полные, т. е.

$$\det(\mathbf{a}_{i-2}^\star, \mathbf{a}_{i-1}^\star, \mathbf{a}_i^\star) \neq 0 \quad \forall i \in I_{N-1}, \qquad \det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-2}^\star, \widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}^\star, \widetilde{\mathbf{a}}_j^\star) \neq 0 \quad \forall j \in I_{N-2},$$

$$\det(\widehat{\mathbf{a}}_{s-2}^{\,\star}, \widehat{\mathbf{a}}_{s-1}^{\,\star}, \widehat{\mathbf{a}}_s^{\,\star}) \neq 0 \quad \forall s \in I_{N-3}.$$

С использованием цепочки $\{\widehat{\mathbf{a}}_j^{\,\star}\}_{j\in J_{N-3}}$ построим систему функций $\{\widehat{\omega}_j^{\,\star}\}_{j\in J_{N-3}}$, отыскивая их из соотношений

$$\sum_{j\in J_{N-3}} \widehat{\mathbf{a}}_j^{\,\star}\, \widehat{\omega}_j^{\,\star}(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widehat{G}, \quad \widehat{\omega}_i^{\,\star}(t) \equiv 0 \ \forall t \in \widehat{G} \setminus \widehat{S}_i, \ i \in J_{N-3}.$$

Поскольку построение системы $\{\widehat{\omega}_j^{\,\star}\}_{j\in J_{N-3}}$ аналогично построению системы $\{\widetilde{\omega}_j^{\,\star}\}_{j\in J_{N-2}}$, то так же, как и выше для вектор-функции

$$\widehat{\omega}^{\,\star}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\omega}_j^{\,\star}(t))_{j\in J_{N-3}}$$

получаем соотношение

$$\widehat{\omega}^{\,\star}(t) = \mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}} \widetilde{\omega}^{\,\star}(t), \tag{4.1}$$

где

$$\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\mathfrak{p}}_{i,j})_{i\in J_{N-3}, j\in J_{N-2}}.$$

Теорема 4. *Элементы матрицы $\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}}$ вычисляются согласно формулам*

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{i,j} = \delta_{i,j} \qquad \textit{при} \quad i \le k-4, \qquad \forall j \in J_{N-2},$$

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-3} = 1, \ \ \widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-2} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^\star}{\widetilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-3}^\star},$$

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,j} = 0 \ \textit{при} \ j \in J_{N-2} \backslash \{k-3, k-2\}, \qquad \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}_{k-2}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^\star}{\widetilde{\mathbf{b}}_{k-2}^T \widehat{\mathbf{a}}_{k-2}^\star},$$

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}_{k+2}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star}{\widetilde{\mathbf{b}}_{k+2}^T \widehat{\mathbf{a}}_{k-2}^\star}, \qquad \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,j} = 0 \ \textit{при} \ j \in J_{N-2} \backslash \{k-2, k-1\},$$

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^\star}{\widetilde{\mathbf{b}}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k}^\star}, \qquad \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = 1,$$

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,j} = 0 \qquad \textit{при} \quad j \in J_{N-2} \backslash \{k-1, k\},$$

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{i,j} = \delta_{i,j-1} \qquad \textit{при} \quad i \geq k, \qquad \forall i \in J_{N-3}, \ j \in J_{N-2};$$

здесь вектор-столбцы $\widetilde{\mathbf{b}}_i$ *определяются из тождеств*

$$\widetilde{\mathbf{b}}_i^T \mathbf{x} \equiv \det(\widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\varphi}\,'_i, \mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad i \in \{k-2, k-1, k+1, k+2\}.$$

Эта теорема аналогична теореме 9.4, так что доказательство опускаем. Таким образом, матрица $\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}}$ имеет вид

$$\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{array}{c} \\ \widehat{-2} \\ \dots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \dots \\ \widehat{N-3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} \widetilde{-2} & \dots & \widetilde{k-4} & \widetilde{k-3} & \widetilde{k-2} & \widetilde{k-1} & \widetilde{k} & \widetilde{k+1} & \dots & \widetilde{N-2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2} & \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Аналогично тому, как это сделано в предыдущем пункте, построим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}}$, а именно, рассмотрим систему функционалов $\{\widehat{g}_s^\star\}_{s \in J_{N-3}} \in \mathfrak{G}_{k-1}^\star(X_{N\{k+1\}}, \varphi)$, биортогональную к системе $\{\widehat{\omega}_s^\star\}_{s \in J_{N-3}}$, и положим

$$\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\widehat{\mathfrak{q}}_{ij})_{i \in J_{N-3},\, j \in J_{N-2}},$$

где

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \widehat{g}_i^\star, \widetilde{\omega}_j^\star \rangle \quad \forall i \in J_{N-3} \ \forall j \in J_{N-2}.$$

Теорема 5. *В этом случае для чисел* $\widehat{\mathfrak{q}}_{ij}$ *верны соотношения*

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{ij} = \delta_{i,j} \quad \textit{при}\ i \in J_{N-3},\ j \le k-4,$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{ij} = \delta_{i+1,j} \quad \textit{при}\ i \in J_{N-3},\ j \ge k+1,$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{i,k-3} = 0 \quad \textit{при}\ \ i \in J_{N-3},\ (i \le k-4) \vee (i \ge k+1), \quad \mathfrak{q}_{k-3,k-3} = 1,$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-3}\widehat{\mathbf{a}}^\star_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-3}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-3}} - \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-3}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-3}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-3}}\,\frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widehat{\mathbf{a}}^\star_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-2}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-3}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{i,k-2} = 0 \quad \textit{при}\ \ i \in J_{N-3},\ (i \le k-3) \vee (i \ge k),$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widehat{\mathbf{a}}^\star_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-2}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-2}} - \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-2}}\,\frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-1}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{i,k-1} = 0 \quad \textit{при}\ \ i \in J_{N-3},\ (i \le k-2) \vee (i \ge k+1),$$

$$\mathfrak{q}_{k-1,k-1} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k}}{\mathbf{b}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}^\star_{k-1}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{i,k} = 0 \quad \forall\, i \in J_{N-3}, \qquad \mathfrak{q}_{k,k-1} = 0.$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 2; читатель легко его восстановит самостоятельно.

В результате получаем

$$\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ \widehat{-2} \\ \dots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \dots \\ \widehat{N-3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} \widetilde{-2} & \dots & \widetilde{k-4} & \widetilde{k-3} & \widetilde{k-2} & \widetilde{k-1} & \widetilde{k} & \widetilde{k+1} & \dots & \widetilde{N-2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3} & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3} & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Аналогично формуле (3.2) имеем

$$\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k,k+1\}} = I. \tag{4.2}$$

Рассмотрим произведение

$$\mathfrak{P}_N \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}}\mathfrak{P}_{N\{k+1\}}. \tag{4.3}$$

Согласно формулам (1.2), (4.1) и (4.3) находим

$$\widehat{\omega}^\star = \mathfrak{P}_N \omega^\star. \tag{4.4}$$

Теорема 6. *Для элементов $\mathfrak{p}_{ij}$ матрицы $\mathfrak{P}_N$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{k-3,k-2} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-2}, \quad \mathfrak{p}_{k-3,k-1} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-2}\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2},$$

$$\mathfrak{p}_{k-2,k-2} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2}, \quad \mathfrak{p}_{k-2,k} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1}\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k},$$

$$\mathfrak{p}_{k-2,k-1} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2}\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} + \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1}\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1},$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1}\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1}, \quad \mathfrak{p}_{k-1,k} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k},$$

$$\mathfrak{p}_{i,i} = 1 \quad \textit{при}\ \forall i \le k-3,\ i \in J_{N-3},$$

$$\mathfrak{p}_{i-2,i} = 1 \quad \textit{при}\ \forall i \ge k+1,\ i \in J_{N-3};$$

неперечисленные здесь элементы матрицы $\mathfrak{P}_N$ равны нулю.

Доказательство этой теоремы сводится перемножению матриц (см. формулу (4.3)).

Результат транспонирования матрицы $\mathfrak{P}_N$ имеет вид

$$\mathfrak{P}_N^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c|cccccccccc}
 & \widehat{-2} & \dots & \widehat{k-4} & \widehat{k-3} & \widehat{k-2} & \widehat{k-1} & \widehat{k} & \widehat{k+1} & \dots & \widehat{N-3} \\
\hline
-2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
k-4 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
k-3 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
k-2 & 0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k-3,k-2} & \mathfrak{p}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
k-1 & 0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k-3,k-1} & \mathfrak{p}_{k-2,k-1} & \mathfrak{p}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
k & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-2,k} & \mathfrak{p}_{k-1,k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
k+1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
k+2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
k+3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
N-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}.$$

Рассмотрим произведение $\mathfrak{Q}'$ матриц $\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}}$ и $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$:

$$\mathfrak{Q}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}}\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}. \tag{4.5}$$

Обозначая элементы матрицы $\mathfrak{Q}'$ через $\mathfrak{q}_{ij}$, имеем

$$\mathfrak{q}_{k-2,k-3} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3}, \quad \mathfrak{q}_{k-2,k-2} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2},$$

$$\mathfrak{q}_{k-1,k-3} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3}, \quad \mathfrak{q}_{k-1,k-2} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} + \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1}\widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2},$$

$$\mathfrak{q}_{k-1,k-1} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1}\widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1},$$

$$\mathfrak{q}_{i,i} = 1 \quad \forall i \le k-3,\ i \in J_{N-3}; \quad \mathfrak{q}_{i,i+2} = 1 \quad \forall i \ge k,\ i \in J_{N-3};$$

неперечисленные здесь элементы матрицы $\mathfrak{Q}'$ равны нулю.

Таким образом

$$\mathfrak{Q}' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ \widehat{-2} \\ \dots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \widehat{k+1} \\ \dots \\ \widehat{N-3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} -2 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & N-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathfrak{q}_{k-2,k-3} & \mathfrak{q}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathfrak{q}_{k-1,k-3} & \mathfrak{q}_{k-1,k-2} & \mathfrak{q}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \end{array}.$$

Используя свойства (3.2) и (4.2), получаем

$$\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}}\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k,k+1\}} = I,$$

так что из (4.3) и (4.5) имеем

$$\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{P}^T_N = I. \tag{4.6}$$

10.5. Изменение порядка элементарных операций

Теперь из сетки X_N удалим узлы в обратном порядке: сначала удалим узел x_k, а затем — узел x_{k+1}. После удаления узла x_k получаем сетку

$$X_{N\{k\}}: \quad \grave{\tilde{x}}_{-1} < \ldots < \grave{\tilde{x}}_{k-1} < \grave{\tilde{x}}_k < \grave{\tilde{x}}_{k+1} < \ldots < \grave{\tilde{x}}_{N-1} < \grave{\tilde{x}}_N,$$

где

$$\grave{\tilde{x}}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \quad \text{при} \quad j \le k-1, \qquad \grave{\tilde{x}}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \quad \text{при} \quad j \ge k,$$

$$j \in \{-1, 0, \ldots, N\}.$$

Аналогично предыдущему введем сокращенные обозначения

$$\grave{\tilde{\varphi}}_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(\grave{\tilde{x}}_s), \quad \grave{\tilde{\varphi}}'_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi'(\grave{\tilde{x}}_s), \quad \grave{\tilde{\varphi}}''_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi''(\grave{\tilde{x}}_s) \quad s \in \{-1, 0, \ldots, N\},$$

и определим вектор-столбец $\grave{\widetilde{\mathbf{a}}}^\star_j$, $j \in J_{N-2}$, с помощью символического определителя

$$\grave{\widetilde{\mathbf{a}}}^\star_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} = -\det \begin{pmatrix} \grave{\tilde{\varphi}}_{j+1} & \grave{\tilde{\varphi}}'_{j+1} \\ \det(\grave{\tilde{\varphi}}_{j+2}, \grave{\tilde{\varphi}}'_{j+2}, \grave{\tilde{\varphi}}_{j+1}) & \det(\grave{\tilde{\varphi}}_{j+2}, \grave{\tilde{\varphi}}'_{j+2}, \grave{\tilde{\varphi}}'_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

Дальше h_X считается столь малым, что все рассматриваемые цепочки векторов $\mathbf{a}^\star_j$, $\widetilde{\mathbf{a}}^\star_j$, $\widehat{\mathbf{a}}^\star_j$ и $\grave{\widetilde{\mathbf{a}}}^\star_j$ полные; в частности, предполагается, что выполнены соотношения

$$\det(\grave{\widetilde{\mathbf{a}}}^\star_{j-2}, \grave{\widetilde{\mathbf{a}}}^\star_{j-1}, \grave{\widetilde{\mathbf{a}}}^\star_j) \neq 0 \quad \forall j \in I_{N-2}.$$

Полагая

$$\grave{\widetilde{S}}_{-2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_0, \grave{\tilde{x}}_1), \quad \grave{\widetilde{S}}_{-1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_0, \grave{\tilde{x}}_1) \cup (\grave{\tilde{x}}_1, \grave{\tilde{x}}_2),$$

$$\grave{\widetilde{S}}_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{s=j,j+1,j+2} (\grave{\tilde{x}}_s, \grave{\tilde{x}}_{s+1}) \;\; \forall j \in \{0, 1, \ldots, N-4\},$$

$$\grave{\widetilde{S}}_{N-3} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_{N-3}, \grave{\tilde{x}}_{N-2}) \cup (\grave{\tilde{x}}_{N-2}, \grave{\tilde{x}}_{N-1}), \quad \grave{\widetilde{S}}_{N-2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_{N-2}, \grave{\tilde{x}}_{N-1}),$$

$$\grave{\widetilde{G}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{j \in I_{N-2}} (\grave{\tilde{x}}_j, \grave{\tilde{x}}_{j+1}),$$

определим функции $\grave{\tilde{\omega}}^\star_j$ для сетки $X_{N\{k+1\}}$ из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j \in J_{N-2}} \grave{\widetilde{\mathbf{a}}}^\star_j \grave{\tilde{\omega}}^\star_j(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in \grave{\widetilde{G}},$$

$$\grave{\tilde{\omega}}^\star_i(t) = 0 \quad \forall t \in \grave{\widetilde{G}} \setminus \grave{\widetilde{S}}_i, \quad i \in J_{N-2}.$$

Для вектор-функций $\omega^\star(t)$, $\widehat{\omega}^\star(t)$ и $\grave{\tilde{\omega}}^\star(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\grave{\tilde{\omega}}^\star_j(t))_{j \in J_{N-2}}$ получаем соотношения

$$\grave{\tilde{\omega}}^\star(t) = \mathfrak{P}_{N\{k\}} \omega^\star(t), \qquad \widehat{\omega}^\star(t) = \mathfrak{P}_{N\{k+1,k\}} \grave{\tilde{\omega}}^\star(t);$$

отсюда

$$\widehat{\omega}^\star(t) = \mathfrak{P}_{N\{k+1,k\}} \mathfrak{P}_{N\{k\}} \omega^\star(t). \tag{5.1}$$

Представления элементов матриц $\mathfrak{P}_{N\{k+1,k\}}$ и $\mathfrak{P}_{N\{k\}}$ могут быть выписаны аналогично тому, как это сделано в теоремах 2 и 8 для матриц $\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}}$ и $\mathfrak{P}_{N\{k+1\}}$; однако, конкретные их представления опустим, ибо в дальнейшем они не потребуются.

Ввиду однозначности представления векторов в координатных системах $\{\omega_i\}_{i\in J_{N-1}}$ и $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in J_{N-3}}$ из (4.4) и (5.1) получаем

$$\mathfrak{P}_N = \mathfrak{P}_{N\{k+1,k\}}\mathfrak{P}_{N\{k\}}. \tag{5.2}$$

Построим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k\}}$, а именно, рассмотрим систему функционалов $\{\grave{\widetilde{g}}{}^{\star}_s\}_{s\in J_{N-2}} \in \mathfrak{G}_{\{k-1\}}(X_N,\varphi)$, и положим

$$\mathfrak{Q}_{\{k\}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij}),$$

где

$$\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \grave{\widetilde{g}}{}^{\star}_i, \omega^{\star}_j\rangle \quad i\in J_{N-2},\ j\in J_{N-1}.$$

Аналогично теореме 2 можно получить представления элементов $\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij}$. В частности, справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Если* $\{\grave{\widetilde{g}}{}^{\star}_s\}_{s\in J_{N-2}} \in \mathfrak{G}^{\star}_{k-1}(X_N,\varphi)$, *то для чисел* $\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij}$ *(где* $i\in J_{N-2}, j\in J_{N-1}$*), верны соотношения*

$$\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij} = \delta_{ij} \quad \textit{при}\ i\le k-3\ \forall j\in J_{N-2},$$

$$\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij} = \delta_{i,j-1} \quad \textit{при}\ i\ge k\ \forall j\in J_{N-2},$$

$$\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,j} = 0 \quad \forall j\in\{k-3,k-2\}, \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,j} = 0 \quad \forall j\in\{k-3,k-2,k-1\}.$$

Итак,

$$\mathfrak{Q}_{N\{k\}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{array}{c} \\ \grave{\widetilde{-2}} \\ \grave{\widetilde{\dots}} \\ \grave{\widetilde{k-4}} \\ \grave{\widetilde{k-3}} \\ \grave{\widetilde{k-2}} \\ \grave{\widetilde{k-1}} \\ \grave{\widetilde{k}} \\ \grave{\widetilde{\dots}} \\ \grave{\widetilde{N-2}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} -2 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & \dots & N-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3} & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-3} & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2} & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Аналогичным образом построим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}$, а именно, рассмотрим систему функционалов $\{\grave{\widehat{g}}{}^{\star}_s\}_{s\in J_{N-3}} \in \mathfrak{G}_{\{k-1\}}(X_{N\{k\}},\varphi)$, и положим

$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij}),$$

где
$$\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \grave{\widehat{g}}{}^\star_i, \grave{\widetilde{\omega}}{}^\star_j \rangle \quad i \in J_{N-3}, j \in J_{N-2}.$$
Аналогично теореме 7 верно следующее утверждение.

Теорема 8. *Если* $\{\grave{\widehat{g}}{}^\star_s\}_{s \in J_{N-3}} \in \mathfrak{G}^\star_{k-1}(X_{N\{k\}}, \varphi)$, *то для чисел* $\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij}$ *верны соотношения*
$$\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij} = \delta_{ij} \quad \textit{при}\; i \le k-3, j \in J_{N-2};$$
$$\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij} = \delta_{i,j-1} \quad \textit{при}\; i \ge k, j \in J_{N-2};$$
$$\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,j} = 0 \quad \forall j \in J_{N-2} \backslash \{k-3, k-2\};$$
$$\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,j} = 0 \quad \forall j \in J_{N-2} \backslash \{k-3, k-2, k-1\}.$$

Матрица $\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}$ может быть представлена в форме
$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} \grave{\widetilde{-2}} & \ldots & \grave{\widetilde{k-4}} & \grave{\widetilde{k-3}} & \grave{\widetilde{k-2}} & \grave{\widetilde{k-1}} & \grave{\widetilde{k}} & \grave{\widetilde{k+1}} & \ldots & \grave{\widetilde{N-1}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \widehat{-2} \\ \ldots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \ldots \\ \widehat{N-3} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3} & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-3} & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2} & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Замечание 2. *Элементы матриц* $\mathfrak{Q}_{N\{k\}}$ *и* $\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}$, *неуказанные в теоремах 7 и 8, могут быть представлены формулами, аналогичными формулам, фигурирующим в теоремах 2 и 5, однако, эти представления в дальнейшем нам не понадобятся.*

Аналогично свойствам (3.2) и (4.2) имеем
$$\mathfrak{Q}_{N\{k\}} \mathfrak{P}^T_{N\{k\}} = I, \qquad \mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}} \mathfrak{P}^T_{N\{k+1,k\}} = I,$$
так что
$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}} \mathfrak{Q}_{N\{k\}} \mathfrak{P}^T_{N\{k\}} \mathfrak{P}^T_{N\{k+1,k\}} = I.$$
Для произведения $\mathfrak{Q}'' \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}} \mathfrak{Q}_{N\{k\}}$ из (5.2) теперь получаем
$$\mathfrak{Q}'' \mathfrak{P}^T_N = I. \tag{5.3}$$

Теорема 9. *Для элементов* $\grave{\mathfrak{q}}_{ij}$ *матрицы* $\mathfrak{Q}''$ *справедливы соотношения*
$$\grave{\mathfrak{q}}_{ij} = \delta_{ij} \quad \textit{при}\; i \le k-3 \; \forall j \in J_{N-1},$$

$$\grave{\mathfrak{q}}_{ij} = \delta_{i,j-1} \quad \textit{при } i \geq k \ \forall j \in J_{N-1},$$

$$\grave{\mathfrak{q}}_{k-2,j} = 0 \quad \forall j \in J_{N-1} \backslash \{k-3, k-2\},$$

$$\grave{\mathfrak{q}}_{k-1,j} = 0 \quad \forall j \in J_{N-1} \backslash \{k-3, k-2, k-1\},$$

$$\grave{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3} = \grave{\hat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3} + \grave{\hat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2} \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3},$$

$$\grave{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} = \grave{\hat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2} \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2},$$

$$\grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3} = \grave{\hat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-1} + \grave{\hat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2} \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3} + \grave{\hat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1} \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-3},$$

$$\grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} = \grave{\hat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2} \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2} + \grave{\hat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1} \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2},$$

$$\grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} = \grave{\hat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1} \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1}.$$

Доказательство сводится к перемножению матриц $\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}$ и $\mathfrak{Q}_{N\{k\}}$.

Таким образом, матрицу $\mathfrak{Q}''$ можно представить в виде

$$\mathfrak{Q}'' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ \widehat{-2} \\ \cdots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \widehat{k+1} \\ \cdots \\ \widehat{N-3} \end{array} \begin{array}{c} {\scriptstyle -2 \ \ldots \ k-4 \quad k-3 \quad k-2 \quad k-1 \quad k \quad k+1 \quad k+2 \quad k+3 \ \ldots \ N-1} \\ \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \grave{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3} & \grave{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3} & \grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} & \grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Рассматривая матрицы $\mathfrak{Q}'$ и $\mathfrak{Q}''$, замечаем, что они имеют одинаковую структуру.

Лемма 2. *В представлении*

$$\omega_i^\star(t) \equiv \sum_{j=i}^{i+3} \mathfrak{p}_{ij} \widehat{\omega}_j^\star(t) \tag{5.4}$$

коэффициент $\mathfrak{p}_{ii}$ *отличен от нуля.*

Доказательство. Предполагая противное и учитывая расположение носителей функций $\omega_i^\star$ и $\widehat{\omega}_j^\star$, приходим к выводу, что носитель правой части тождества (8.4) не содержит интервал $(\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+1})$ в то время, как носитель левой части его содержит. Полученное противоречие доказывает утверждение.

∎

Теорема 10. *Уравнение*

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_N^T = I, \tag{5.5}$$

рассматриваемое относительно неизвестной матрицы $\mathfrak{Q}$ *со структурой*

$$\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccc} -2 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & N-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} \widehat{-2} \\ \dots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \widehat{k+1} \\ \dots \\ \widehat{N-3} \\ , \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Из соотношения (5.5) находим уравнения для отыскания неизвестных $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathfrak{p}_{k-3,k-2} = 0, \quad \mathbf{B}\mathfrak{p}_{k-2,k-2} = 1,$$

$$\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathfrak{p}_{k-3,k-2} + \mathbf{E}\mathfrak{p}_{k-3,k-1} = 0,$$

$$\mathbf{D}\mathfrak{p}_{k-2,k-2} + \mathbf{E}\mathfrak{p}_{k-2,k-1} = 0, \quad \mathbf{E}\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = 1.$$

Принимая во внимание лемму 2, получаем

$$\mathbf{B} = 1/\mathfrak{p}_{k-2,k-2}, \quad \mathbf{A} = -\mathfrak{p}_{k-3,k-2}/\mathfrak{p}_{k-2,k-2}, \quad \mathbf{E} = 1/\mathfrak{p}_{k-1,k-1},$$

$$\mathbf{D} = -\mathfrak{p}_{k-2,k-1}/(\mathfrak{p}_{k-1,k-1}\mathfrak{p}_{k-2,k-2}),$$

$$\mathbf{C} = \mathfrak{p}_{k-3,k-2}\mathfrak{p}_{k-2,k-1}/(\mathfrak{p}_{k-1,k-1}\mathfrak{p}_{k-2,k-2}) - \mathfrak{p}_{k-3,k-1}/\mathfrak{p}_{k-1,k-1}.$$

Теорема доказана. ■

Следствие 1. *Рассматриваемое сплайн-всплесковое представление не зависит от порядка удаления узлов* x_k *и* x_{k+1} *сетки* X_N*.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим соотношения (4.6) и (5.3). Ввиду теоремы 8 имеем $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}'' = \mathfrak{Q}$. Заметим, что согласно (4.3) и (5.2)

$$\mathfrak{P}_{\{k,k+1\}}\mathfrak{P}_{\{k+1\}} = \mathfrak{P}_{\{k,k+1\}}\mathfrak{P}_{\{k+1\}} = \mathfrak{P}_N.$$

Следствие доказано. ■

11. НЕГЛАДКИЕ СПЛАЙН-ВЭЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Сплайн-вэйвлетные разложения применяются к последовательности вложенных пространств сплайнов (см. [50, 55] и приведенную там библиографию). Вложенность пространств гладких полиномиальных сплайнов на вложенных сетках хорошо известна (см., например, [40]), а для гладких неполиномиальных сплайнов вложенные пространства и их вэйвлетные разложения рассмотрены в работах [17, 26, 27]. Укрупнение сетки в этих разложениях можно проводить последовательным удалением узлов, удаляя по одному узлу, так что возникает вопрос о коммутативности соответствующих операций декомпозиции. Поскольку при одинаковых порядках аппроксимации (асимптотически оптимальных по N-поперечнику стандартных компактов) негладкие минимальные сплайны значительно проще гладких, то важно рассмотреть вложенность пространств негладких сплайнов и их вэйвлетные разложения. В работе [26] упомянутые разложения получены с использованием расширения цепочки векторов, которая локально ортогональна исходной цепочке, определяющей аппроксимационные соотношения; сейчас мы предлагаем более простой способ построения сплайн-вэйвлетных разложений.

Цель данного раздела состоит в том, чтобы дать простые способы построения цепочки вложенных пространств (вообще говоря, негладких неполиномиальных) сплайнов первого порядка при локальном укрупнении неравномерной сетки, дать их вэйвлетные (всплесковые) разложения и установить коммутативность операторов декомпозиции при изменении порядка удаления узлов сетки.

11.1. Предварительные обозначения

На интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X (см. раздел 1.1) и положим

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2}), \quad G = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (x_j, x_{j+1}).$$

Система векторов-столбцов $A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2$, для которой матрица $A_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)$ неособенная ($\forall j \in \mathbb{Z}$), называется *полной цепочкой* векторов; множество всех полных цепочек обозначим $\mathcal{A}$.

По двухкомпонентной вектор-функции $\varphi(t)$, $t \in G$, с линейно независимыми компонентами на любом интервале $(a, b) \subset G$, определим функции $\omega_j(t)$, $t \in G$, с помощью аппроксимационных соотношений[3]

$$\mathbf{a}_{i-1}\omega_{i-1}(t) + \mathbf{a}_i\omega_i(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_i, x_{i+1}) \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

$$\omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G\backslash S_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}; \tag{1.2}$$

таким образом, функции $\omega_j(t)$ определены на множестве G:

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1},\varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j)} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t),\mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \in G\backslash S_j. \end{cases}$$

Положим

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(X, A, \varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} Cl_p\ \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}},$$

где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ означает линейную оболочку множества элементов, заключенных в фигурные скобки, а Cl_p означает замыкание в топологии поточечной сходимости. Функции из пространства $\mathbb{S}$ называются (X, A, φ)-сплайнами.

Пусть вектор-столбцы $\mathbf{d}_i$ определяются тождеством

$$\mathbf{d}_i^T\mathbf{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

Лемма 1. Справедливы соотношения

$$\mathbf{d}_i^T\mathbf{a}_{i-2} \neq 0, \qquad \mathbf{d}_i^T\mathbf{a}_{i-1} = 0, \qquad \mathbf{d}_i^T\mathbf{a}_i \neq 0. \tag{1.4}$$

Доказательство легко получается применением $\mathbf{d}_i^T$ к векторам $\mathbf{a}_{i-2}$, $\mathbf{a}_{i-1}$, $\mathbf{a}_i$ и использованием тождества (1.3). ∎

Пусть $\varphi \in C^s(\alpha, \beta)$ для некоторого неотрицательного целого s; положим $\varphi_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(x_i)$, $\varphi_i^{(s)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi^{(s)}(x_i)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы $\omega_j^{(s)} \in C(\alpha, \beta)$ $\forall j \in \mathbb{Z}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathbf{d}_i^T\varphi_i^{(s)} = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

[3] Дальше рассматриваются бесконечные ряды вида $\sum_j c_j\omega_j^{\star}$, $c_j \in \mathbb{R}^1$, где суммирование по j распространено на все целые числа, $j \in \mathbb{Z}$. Заметим, что при каждом фиксированном $t \in (\alpha, \beta)$ такой ряд содержит конечное число ненулевых слагаемых; поэтому при любой последовательности $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ коэффициентов $c_j \in \mathbb{R}^1$ упомянутый ряд сходится (в смысле поточечной сходимости).

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в [27]. ■

Следствие 1. *Если* $\{\varphi_j^{(s)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *— полная цепочка, то при* $\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{j+1}^{(s)}$ *верны соотношения* $\omega_j^{(s)} \in C(\alpha,\beta)$.

Доказательство. В условиях следствия второе из соотношений в (1.4) принимает вид $\mathbf{d}_i^T \varphi_i^{(s)} = 0$, что совпадает с условием (1.5). ■

Предполагая, что векторы $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют полную цепочку, определим функции $\omega_j^\star$ (*координатные сплайны курантова типа*) из соотношений (1.1)–(1.2) при $\mathbf{a}_j^\star \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{j+1}$:

$$\omega_j^\star(t) = \begin{cases} \frac{\det(\varphi_j,\varphi(t))}{\det(\varphi_j,\varphi_{j+1})} \quad \text{при } t\in(x_j,x_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t),\varphi_{j+2})}{\det(\varphi_{j+1},\varphi_{j+2})} \quad \text{при } t\in(x_{j+1},x_{j+2}) \\ 0 \quad \text{при } t\notin(x_j,x_{j+2}). \end{cases} \tag{1.6}$$

Ввиду следствия 1 пространство $\mathbb{S}_\varphi^\star(X) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\,\mathcal{L}\{\omega_j^\star\}_{j\in\mathbb{Z}}$ состоит из непрерывных функций: $\mathbb{S}_\varphi^\star(X) \in C(\alpha,\beta)$.

11.2. Биортогональная система функционалов

Некоторые из рассматриваемых в этом пункте понятий и утверждений (а именно, леммы 2, 3 и теоремы 2, 3) ранее введены в работе [26].

Рассмотрим линейное пространство $C\langle c,d\rangle$, состоящее из функций $u(t)$ пространства $C(c,d)$, которые имеют конечные пределы $\lim_{t\to c+0} u(t)$ и $\lim_{t\to d-0} u(t)$. Введем также пространства

$$\mathbb{C}_X \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} C\langle x_i,x_{i+1}\rangle, \qquad \mathbb{C}_X^s \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)}\in\mathbb{C}_X, \quad \forall i=0,1,\ldots,S\}.$$

Символом $(\mathbb{C}_X^s)^*$ обозначается пространство, сопряженное к пространству $\mathbb{C}_X^s$. При $\varphi\in\mathbb{C}^s(\alpha,\beta)$ пространства $\mathbb{S}(X,\mathbf{A},\varphi)$ лежат в пространстве $\mathbb{C}_X^s$.

Для функционала $f\in(\mathbb{C}_X^s)^*$ будем писать $\mathrm{supp} f\subset[c,d]$, если значение $\langle f,u\rangle$ определяется значениями функции $u\in\mathbb{C}_X^s$ на интервале (c,d)[4].

[4]Рассмотрим в (α,β) два подмножества с непустым пересечением. Говорят, что для функционала f над некоторым пространством U функций u с областью определения Ω выполнено соотношение $\mathrm{supp} f\subset\mathcal{M}$, если его значение $\langle f,u\rangle$ на любой функции $u\in U$ определяется лишь значениями функции u на множестве $\Omega\bigcap\mathcal{M}$. Если под $\mathcal{M}$ можно подразумевать любую сколь угодно малую выколотую (возможно, одностороннюю) окрестность точки x (т.е. $(x-\varepsilon,x)$ или $(x,x+\varepsilon)$, где ε — любое положительное число), то говорят, что f является точечным функционалом, а если замыкание множества $\mathcal{M}$ содержится в интервале (α,β), то говорят, что f имеет компактный носитель в (α,β).

Сужением системы $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ на интервал (a,b) называется множество $\Omega_{(a,b)}$ функций ω_j, носители которых имеют непустое пересечение с (a,b),

$$\Omega_{(a,b)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\omega_j \mid \operatorname{supp}\omega_j \cap (a,b) \neq \emptyset,\ j \in \mathbb{Z}\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ полная. Тогда*

1) для любого интервала $(a,b) \subset (\alpha,\beta)$ сужение системы функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ на интервал (a,b) представляет собой линейно независимую систему функций на этом интервале,

2) для того, чтобы система функционалов $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $g_i \in (\mathbb{C}_X)^*$, с компактными носителями на (α,β) была биортогональна системе функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, так что

$$\langle g_i, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}, \tag{2.1}$$

необходимо, а если

$$\mathrm{supp} g_i \subset [x_i, x_{i+1}], \tag{2.2}$$

то и достаточно выполнение соотношений

$$\langle g_i, \varphi\rangle = \mathbf{a}_i \qquad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Используя предположенную линейную независимость компонент вектор-функции $\varphi(t)$ на любом подинтервале (a,b) интервала (α,β) и полноту цепочки $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ из (1.1)–(1.2) получаем первое утверждение доказываемой теоремы.

Докажем второе утверждение.

Необходимость. Применяя функционал g_i к обеим частям соотношения (1.1)–(1.2) и учитывая компактность носителя этого функционала в (α,β), а также равенство $\mathrm{supp}\omega_j = [x_j, x_{j+2}]$, приходим к выводу, что в левой части следует ограничиться рассмотрением конечного числа слагаемых:

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}^*} \mathbf{a}_{j'}\langle g_i, \omega_{j'}\rangle = \langle g_i, \varphi\rangle, \qquad \omega_j(t) \equiv 0 \qquad \forall t \notin S_j, \tag{2.4}$$

где $\mathbb{Z}^*$ — некоторое конечное подмножество в $\mathbb{Z}$. Теперь из (2.1) немедленно получаем (2.3).

Достаточность. Принимая во внимание соотношение (2.2), из (2.4) получаем

$$\mathbf{a}_{i-1}\langle g_i, \omega_{i-1}\rangle + \mathbf{a}_i\langle g_i, \omega_i\rangle = \langle g_i, \varphi\rangle,$$

что ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{a}_{i-1}$ и $\mathbf{a}_i$ с учетом соотношения (2.3) дает $\langle g_i, \omega_i\rangle = 1$, $\langle g_i, \omega_{i-1}\rangle = 0$. Осталось заметить, что равенство $\langle g_i, \omega_j\rangle = 0$ при $j \in \mathbb{Z}\backslash\{i-1, i\}$ легко получается из предположения (2.2) ■

Лемма 2. *Если*

$$\varphi \in C^1[\alpha, \beta], \tag{2.5}$$

а определитель Вронского $W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(t), \varphi'(t))$ *равномерно отделен от нуля,*

$$|W(t)| \geq c > 0 \qquad \forall t \in [\alpha, \beta], \tag{2.6}$$

то существует $h > 0$ *такое, что при* $\sup_{i\in\mathbb{Z}}(x_{i+1} - x_i) < h$ *цепочка векторов* $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *полная.*

Доказательство. Применим условия (2.5)–(2.6) к разложению функции $\varphi(t)$ по формуле Тейлора в точке x_j при $t = x_{j+1}$:

$$\det(\varphi_j, \varphi_{j+1}) = \det(\varphi_j, \varphi'_j)(x_{j+1} - x_j) + o(x_{j+1} - x_j);$$

имеем

$$|\det(\varphi_j, \varphi_{j+1})| \geq (|\det(\varphi_j, \varphi'_j)| - |o(1)|)(x_{j+1} - x_j).$$

Учитывая предположение (2.6) и принимая во внимание равномерную непрерывность функции $W(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ (из-за условия (2.5)), видим, что существует $h > 0$ такое, что при $x_{j+1} - x_j \leq h$

$$|\det(\varphi_j, \varphi_{j+1})| \geq \frac{c}{2}(x_{j+1} - x_j) \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Лемма доказана. ■

Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{B}$ над полем вещественных (или комплексных) чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{B}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{B}$. Значение функционала f на элементе $v \in \mathfrak{B}$ обозначается $\langle f, v\rangle$. Множество 2-компонентных векторов-столбцов $\mathbf{u}$ с компонентами $[\mathbf{u}]_i$, $i = 0, 1$, из пространства $\mathfrak{B}$ обозначим $\mathfrak{B}^2$. Будем рассматривать также 2-компонентные вектор-столбцы $\mathbf{f}$, компоненты $[\mathbf{f}]_j$ которых лежат в пространстве $\mathfrak{B}^*$, $j = 0, 1$; образуемое этими векторами линейное пространство обозначим $(\mathfrak{B}^*)^2$. Справедливо следующее утверждение (см. также [26]).

Лемма 3. *Пусть векторы* $\mathbf{f} \in (\mathfrak{B}^*)^2$ *и* $\mathbf{v} \in \mathfrak{B}^2$ *таковы, что матрица* $\mathbf{f}\mathbf{v}^T$ *— неособенная; пусть вектор* $\mathbf{u} \in \mathfrak{B}^2$ *удовлетворяет соотношению*

$$B\mathbf{u} = \mathbf{v}, \tag{2.7}$$

где B *— неособенная квадратная числовая матрица 2-го порядка. Тогда система из компонентов* $[\mathbf{l}]_r$ *вектора* $\mathbf{l} \stackrel{\text{def}}{=} B^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}$, $r = 0, 1$, *представляет* *собой систему функционалов, биортогональную к системе элементов* $[\mathbf{u}]_i$, $i = 0, 1$, *так что* $\mathbf{lu}^T = I$, *где* I — *единичная матрица 2-го порядка.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\mathbf{l}\,\mathbf{u}^T$; поскольку из (2.7) следует соотношение $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{v}$, то из определения вектора $\mathbf{l}$ находим

$$\mathbf{l}\,\mathbf{u}^T = B^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}\mathbf{u}^T = B^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}(B^{-1}\mathbf{v})^T =$$

$$= B^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}\mathbf{v}^T(B^{-1})^T = I,$$

где I — единичная матрица 2-го порядка. Лемма доказана. ■

Замечание. Очевидно, что $\mathbf{l}\,\mathbf{v}^T = B^T$; *действительно,*

$$\mathbf{l}\,\mathbf{v}^T = B^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}\mathbf{v}^T = B^T.$$

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in \mathbb{C}^s_X$, $A \in \mathcal{A}$, *и для каждого фиксированного* $i \in \mathbb{Z}$ *определен вектор-столбец* $\mathbf{f}_i$, *компонентами которого служат функционалы* $[\mathbf{f}_i]_j \in (\mathbb{C}^s_X)^*$, $j = 0, 1$, *такие, что* $\mathrm{supp}[\mathbf{f}_i]_j \subset [x_i, x_{i+1}]$. *Пусть матрицы* $\mathbf{f}_i\varphi^T$ *вида*

$$\mathbf{f}_i\varphi^T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle[\mathbf{f}_i]_0, [\varphi]_0\rangle & \langle[\mathbf{f}_i]_1, [\varphi]_0\rangle \\ \langle[\mathbf{f}_i]_0, [\varphi]_1\rangle & \langle[\mathbf{f}_i]_1, [\varphi]_1\rangle \end{pmatrix},$$

$i \in \mathbb{Z}$, *неособенные. Тогда при каждом фиксированном* $r \in \{0, 1\}$ *система* $\{g^{(i)}_{\langle r\rangle}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *функционалов* $g^{(i)}_{\langle r\rangle} \in (\mathbb{C}^s_X)^*$, *определяемых равенствами*

$$g^{(i)}_{\langle r\rangle} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left[A^T_{i-r+1}\left(\mathbf{f}_{i-r+1}\varphi^T\right)^{-1}\mathbf{f}_{i-r+1}\right]_r \qquad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

представляет собой продолжение на $\mathbb{C}^s_X$ *системы функционалов, биортогональной системе минимальных* $(X, \mathbf{A}, \varphi)$*-сплайнов* $\{\omega_{i'}\}_{i'\in\mathbb{Z}}$, *и*

$$\langle g^{(i)}_{\langle r\rangle}, \omega_{i'}\rangle = \delta_{i,i'}\ \forall i, i' \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{supp} g^{(i)}_{\langle r\rangle} \subset [x_{i-r+1}, x_{i-r+2}]\ \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Зафиксируем число $i \in \mathbb{Z}$ и используем лемму 3 для фиксированного $r \in \{0, 1\}$, а именно, положим

$$\mathfrak{B} = C^s\langle x_{i-r+1}, x_{i-r+2}\rangle, \quad B = A_{i-r+1}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_{i-r+1}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{v} = \varphi, \quad l_r = g^{(i)}_{\langle r\rangle}, \quad u_j = \omega_{i-r+j}, \quad j = 0, 1. \tag{2.11}$$

Проверим условия леммы. Матрица $\mathbf{f}\mathbf{v}^T$ — неособенная, ибо ввиду формул (2.10)–(2.11) $\mathbf{f}\mathbf{v}^T = \mathbf{f}_{i-r+1}\varphi^T$, а матрица $\mathbf{f}_{i-r+1}\varphi^T$ неособенная по условию теоремы. Условие (2.7) выполнено, т.к. согласно упомянутым формулам и тождеству (1.2) оно представляет собой аппроксимационное соотношение, записанное на промежутке (x_{i-r+1}, x_{i-r+2}):

$$\mathbf{a}_{i-r}\omega_{i-r}(t) + \mathbf{a}_{i-r+1}\omega_{i-r+1}(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in (x_{i-r+1}, x_{i-r+2}) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Итак, $\langle l_r, u_j\rangle = \delta_{r,j}$, $j = 0, 1$, что благодаря (2.10)–(2.11) может быть переписано в виде $\langle g^{(i)}_{\langle r\rangle}, \omega_{i-r+j}\rangle = \delta_{r,j}$, $j = 0, 1$; делая здесь замену индекса j на j' по формуле $j' = i - r + j$, находим

$$\langle g^{(i)}_{\langle r\rangle}, \omega_{j'}\rangle = \delta_{r,j'-i+r} = \delta_{j',i}, \quad j' \in \{i-r, i-r+1\}. \tag{2.12}$$

Заметим, что ввиду предположения $r \in \{0, 1\}$ число i содержится в множестве $\{i-r, i-r+1\}$, так что среди соотношений (2.12) существует одно (и только одно), правая часть которого равна единице; правые части остальных соотношений — нули.

Осталось рассмотреть случай, когда $j' \notin \{i-r, i-r+1\}$. В этом случае носитель функции $\omega_{j'}$ не пересекается с интервалом (x_{i-r+1}, x_{i-r+2}), и поэтому

$$\langle g^{(i)}_{\langle r\rangle}, \omega_{j'}\rangle = 0 \quad \text{при} \quad j' \notin \{i-r, i-r+1\}. \tag{2.13}$$

Только что установленные соотношения (2.12)–(2.13) доказывают первую из формул (2.9); вторая формула в (2.9) очевидным образом следует из (2.8). ■

При $\varphi \in \mathbb{C}^1_X$ рассмотрим матрицу $\mathcal{W}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(t), \varphi'(t))$ и определитель Вронского $W(t) = \det \mathcal{W}(t)$ $\forall t \in (\alpha, \beta)\backslash X$.

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in \mathbb{C}^1_X$, $A \in \mathcal{A}$, и*

$$W(x_i + 0) \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Тогда при каждом фиксированном $\sigma \in \{0, 1\}$ функционалы $g_{i\langle\sigma\rangle}$, определяемые равенствами

$$g_{i\langle\sigma\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} g^{(i)}_{\langle 1-\sigma\rangle}, \tag{2.15}$$

обладают свойством

$$\langle g_{i\langle\sigma\rangle}, \omega_{i'}\rangle = \delta_{i,i'} \qquad \forall i, i' \in \mathbb{Z}, \tag{2.16}$$

и являются точечными функционалами; при этом

$$\operatorname{supp} g_{i\langle\sigma\rangle} \subset [x_{i+\sigma}, x_{i+\sigma} + \varepsilon] \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.17}$$

Доказательство. Проверим условия теоремы 3. В рассматриваемом случае $s = 1$; очевидны соотношения $[\mathbf{f}_i]_j \in (\mathbb{C}^1_X)^*$ и $\operatorname{supp}[\mathbf{f}_i]_j \subset [x_i, x_{i+1}]$, $j = 0, 1$. Установим, что матрица $\mathbf{f}_i\varphi^T$ — неособенная. С учетом условия $\varphi \in \mathbb{C}^1_X$ имеем

$$\mathbf{f}_i\varphi^T = \begin{pmatrix} [\varphi]_0(x_i+0) & [\varphi]_1(x_i+0) \\ [\varphi]'_0(x_i+0) & [\varphi]'_1(x_i+0) \end{pmatrix},$$

откуда выводим $\mathbf{f}_i\varphi^T = [\mathcal{W}(x_i+0)]^T$. Используя предположение (2.14), получаем $\det\, \mathbf{f}_i\varphi^T \neq 0$. Из (2.9) с учетом обозначения (2.15) находим (2.16) и (2.17). Теорема доказана. ■

Рассмотрим важный частный случай полиномиальных сплайнов первой степени, а именно, положим $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t)^T$. При $u \in C^1(\alpha, \beta)$ имеем $\langle [\mathbf{f}_i]_j, u\rangle = u^{(j)}(x_i+0)$, $j = 0, 1$, так что

$$\langle [\mathbf{f}_i]_0, u\rangle = u(x_i+0), \qquad \langle [\mathbf{f}_i]_1, u\rangle = u'(x_i+0);$$

таким образом

$$\mathbf{f}_i\varphi^T = \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_{i+1}\varphi^T = \begin{pmatrix} 1 & x_{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$(\mathbf{f}_i\varphi^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{f}_{i+1}\varphi^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Из (2.8) при $r = 0$ получаем

$$g^{(i)}_{\langle 0\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \Big[A^T_{i+1}\Big(\mathbf{f}_{i+1}\varphi^T\Big)^{-1}\mathbf{f}_{i+1}\Big]_0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{2.19}$$

а благодаря (2.18) находим

$$A^T_{i+1}\Big(\mathbf{f}_{i+1}\varphi^T\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 \\ [\mathbf{a}_{i+1}]_0 & [\mathbf{a}_{i+1}]_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x_{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_i]_0 \\ [\mathbf{a}_{i+1}]_0 & [\mathbf{a}_{i+1}]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_{i+1}]_0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

По формуле (2.19) с помощью (2.20) выводим

$$\langle g^{(i)}_{\langle 0\rangle}, u\rangle = \left\langle \left[\begin{pmatrix} [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_i]_0 \\ [\mathbf{a}_{i+1}]_0 & [\mathbf{a}_{i+1}]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_{i+1}]_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [f_{i+1}]_0 \\ [f_{i+1}]_1 \end{pmatrix}\right]_0, u \right\rangle =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_i]_0 \\ [\mathbf{a}_{i+1}]_0 & [\mathbf{a}_{i+1}]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_{i+1}]_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_{i+1}+0) \\ u'(x_{i+1}+0) \end{pmatrix} \right]_0 .$$

Итак,

$$\langle g^{(i)}_{\langle 0\rangle}, u\rangle = [\mathbf{a}_i]_0 u(x_{i+1}+0) + ([\mathbf{a}_i]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_i]_0)u'(x_{i+1}+0). \qquad (2.21)$$

Аналогичным образом при $r = 1$ из (2.8) получаем

$$g^{(i)}_{\langle 1\rangle} \overset{\text{def}}{=} \left[A_i^T \left(\mathbf{f}_i \varphi^T \right)^{-1} \mathbf{f}_i \right]_1 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}, \qquad (2.22)$$

а благодаря (2.18) находим

$$A_i^T \left(\mathbf{f}_i \varphi^T \right)^{-1} = \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{i-1}]_0 & [\mathbf{a}_{i-1}]_1 \\ [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{i-1}]_0 & [\mathbf{a}_{i-1}]_1 - x_i[\mathbf{a}_{i-1}]_0 \\ [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_i[\mathbf{a}_i]_0 \end{pmatrix}. \qquad (2.23)$$

По формуле (2.22) с помощью (2.23) находим

$$\langle g^{(i)}_{\langle 1\rangle}, u\rangle = \left\langle \left[\begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{i-1}]_0 & [\mathbf{a}_{i-1}]_1 - x_i[\mathbf{a}_{i-1}]_0 \\ [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_i[\mathbf{a}_i]_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [f_i]_0 \\ [f_i]_1 \end{pmatrix} \right]_1, u \right\rangle =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{i-1}]_0 & [\mathbf{a}_{i-1}]_1 - x_i[\mathbf{a}_{i-1}]_0 \\ [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_i[\mathbf{a}_i]_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_i+0) \\ u'(x_i+0) \end{pmatrix} \right]_1 ;$$

Итак,

$$\langle g^{(i)}_{\langle 1\rangle}, u\rangle = [\mathbf{a}_i]_0 u(x_i+0) + ([\mathbf{a}_i]_1 - x_i[\mathbf{a}_i]_0)u'(x_i+0). \qquad (2.24)$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 5. *В случае, когда $\varphi(t) = (1,t)^T$, системы точечных функционалов $\{g^{(i)}_{\langle 0\rangle}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{g^{(i)}_{\langle 1\rangle}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, определяемые формулами (2.21) и (2.24) соответственно, являются различными продолжениями системы функционалов, биортогональной системе сплайнов $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$:*

$$\langle g^{(i)}_{\langle 0\rangle}, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}, \qquad \mathrm{supp} g^{(i)}_{\langle 0\rangle} \subset [x_{i+1}, x_{i+1}+\varepsilon],$$

$$\langle g^{(i)}_{\langle 1\rangle}, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}, \qquad \mathrm{supp} g^{(i)}_{\langle 1\rangle} \subset [x_i, x_i+\varepsilon],$$

где ε — произвольное положительное число.

Доказательство этого утверждения следует из формул (2.21) и (2.24). ■

Следствие 2. *Система функционалов $g_i^\star$, определяемая соотношением $\langle g_i^\star, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{i+1})$ $\forall u \in C(\alpha,\beta)$, биортогональна системе функций $\{\omega_j^\star\}$ и обладает свойством*

$$\langle g_i^\star, \varphi\rangle = \varphi_{i+1}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Биортогональность следует из соотношения (1.6), а формула (2.25) вытекает из определения функционала g_i^*.■

11.3. Укрупнение сетки и калибровочные соотношения

Здесь рассмотрим условия вложенности пространства сплайнов на укрупненной сетке в аналогичное пространство сплайнов на исходной сетке.

Для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \text{ при } j \le k, \text{ и } \widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \text{ при } j \ge k+1, \quad \xi \stackrel{\text{def}}{=} x_{k+1},$$

и рассмотрим новую сетку

$$X_{\{k+1\}}: \quad \ldots < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots. \tag{3.1}$$

Обозначим $\widetilde{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1})$, $\widetilde{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}) \cup (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2})$. Пусть $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, — полная цепочка двумерных векторов, а вектор-функция $\varphi(t)$ определена на множестве $\widetilde{G}$. Как и прежде, из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_{j'} \widetilde{\omega}_{j'}(t) = \varphi(t), \qquad \widetilde{\omega}_j(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_j \tag{3.2}$$

определим функции $\widetilde{\omega}_j(t)$:

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_j)} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_j, \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } \forall t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_j. \end{cases}$$

Линейная оболочка $\mathbb{S}(X_{\{k+1\}}, \widetilde{A}, \varphi)$ функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является пространством сплайнов первого порядка,

$$\widetilde{\mathbb{S}}_{k+1} = \mathbb{S}(X_{\{k+1\}}, \widetilde{A}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Предположим, что выполнено условие

(B) Справедливы тождества

$$\mathbf{a}_j\omega_j(t) \equiv \widetilde{\mathbf{a}}_j\widetilde{\omega}_j(t) \qquad \forall t \in (\alpha,\beta), \quad j \le k-2, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{a}_{j+1}\omega_{j+1}(t) \equiv \widetilde{\mathbf{a}}_j\widetilde{\omega}_j(t) \qquad \forall t \in (\alpha,\beta), \quad j \ge k+1. \tag{3.4}$$

Теорема 6. *Если выполнено условие (B), то пространство $\mathbb{S}(X_{\{k+1\}}, \widetilde{A},\varphi)$ содержится в пространстве $\mathbb{S}(X,A,\varphi)$.*

Доказательство. Из соотношений (1.1)–(1.2) и (3.2) находим

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_{j'}\widetilde{\omega}_{j'}(t) \equiv \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j\omega_j(t) \qquad \forall t \in (\alpha,\beta)\backslash X,$$

откуда после сокращения одинаковых (в силу предположения (B)) слагаемых выводим

$$\sum_{j'=k-1,k} \widetilde{\mathbf{a}}_{j'}\widetilde{\omega}_{j'}(t) \equiv \sum_{j=k-1,k,k+1} \mathbf{a}_j\omega_j(t) \qquad \forall t \in (\alpha,\beta)\backslash X. \tag{3.5}$$

Ввиду полноты системы векторов $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ отсюда получаем представление функций $\widetilde{\omega}_{k-1}(t)$ и $\widetilde{\omega}_k(t)$ в виде линейной комбинации функций $\omega_{k-1}(t)$, $\omega_k(t)$, $\omega_{k+1}(t)$. ■

Теорема 7. *При условии (B) справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_{k-1}(t) = \mathfrak{p}_{k-1,k-1}\omega_{k-1}(t) + \mathfrak{p}_{k-1,k}\omega_k(t), \tag{3.6}$$

$$\widetilde{\omega}_k(t) = \mathfrak{p}_{k,k}\omega_k(t) + \mathfrak{p}_{k,k+1}\omega_{k+1}(t) \qquad \forall t \in (\alpha,\beta)\backslash X, \tag{3.7}$$

где

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_j,\ \widetilde{\mathbf{a}}_k)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1},\ \widetilde{\mathbf{a}}_k)} \quad \textit{при} \quad j = k-1, k,$$

$$\mathfrak{p}_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \mathbf{a}_j)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1},\ \widetilde{\mathbf{a}}_k)} \quad \textit{при} \quad j = k, k+1.$$

Доказательство. По теореме Крамера из системы уравнений (3.5), рассматриваемой относительно неизвестных $\widetilde{\omega}_{k-1}$ и $\widetilde{\omega}_k$ имеем

$$\widetilde{\omega}_{k-1} = \mathfrak{p}_{k-1,k-1}\omega_{k-1} + \mathfrak{p}_{k-1,k}\omega_k + \mathfrak{p}_{k-1,k+1}\omega_{k+1}, \tag{3.8}$$

$$\widetilde{\omega}_k = \mathfrak{p}_{k,k-1}\omega_{k-1} + \mathfrak{p}_{k,k}\omega_k + \mathfrak{p}_{k,k+1}\omega_{k+1}, \tag{3.9}$$

где $\mathfrak{p}_{k-1,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_j,\widetilde{\mathbf{a}}_k)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1},\widetilde{\mathbf{a}}_k)}$, $\mathfrak{p}_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\det(\mathbf{a}_j,\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1},\widetilde{\mathbf{a}}_k)}$, $j = k-1, k, k+1$.

Ввиду предположенной линейной независимости функций $[\varphi]_0(t)$, $[\varphi]_1(t)$ на любом подинтервале интервала (α, β) вектор-функция $\varphi(t)$ не может быть тождественным нулем ни на каком подобном подинтервале; поэтому в рассматриваемых условиях справедливы равенства

$$\det(\mathbf{a}_{k+1},\ \widetilde{\mathbf{a}}_k) = 0, \qquad \det(\mathbf{a}_{k-1},\ \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}) = 0, \tag{3.10}$$

ибо в противном случае, носитель правой части хотя бы одного из соотношений (3.8)–(3.9) оказался бы шире носителя функции в левой части, что невозможно. ■

Следствие 3. *При выполнении условия (B) справедливы соотношения*

$$\mathbf{a}_{k-1} = \widetilde{c}_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \qquad \mathbf{a}_{k+1} = \widetilde{c}_{k+1}\widetilde{\mathbf{a}}_k, \tag{3.11}$$

где $\widetilde{c}_{k-1}$ и $\widetilde{c}_{k+1}$ — некоторые отличные от нуля константы.

Доказательство легко получается, если принять во внимание установленные выше соотношения (3.10) и полноту цепочек A и $\widetilde{A}$. ■

Введем условие

(B') С ненулевыми константами $\widetilde{c}_j$ справедливы соотношения

$$\widetilde{c}_j\omega_j(t) \equiv \widetilde{\omega}_j(t), \qquad \mathbf{a}_j = \widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j \qquad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad j \le k-2, \tag{3.12}$$

$$\widetilde{c}_{j+1}\omega_{j+1}(t) \equiv \widetilde{\omega}_j(t), \qquad \mathbf{a}_{j+1} = \widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_j \qquad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad j \ge k+1. \tag{3.13}$$

Теорема 8. *Условия (B) и (B') эквивалентны.*

Доказательство. Совершенно очевидно, что из условия (B') следует условие (B). Покажем теперь, что из условия (B) вытекает условие (B'). Рассмотрим сначала соотношения (3.3). Найдем точку $t_0 \in (\alpha, \beta)$, в которой функция ω_j отлична от нуля и положим $\widetilde{c}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\omega}_j(t_0)/\omega_j(t_0)$. Из (3.3) следует, что $\mathbf{a}_j = \widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j$; снова используя (3.3), теперь имеем $\widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j\omega_j(t) \equiv \widetilde{\mathbf{a}}_j\widetilde{\omega}_j(t)$, так что $\omega_j(t) \equiv \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_j$, что и требовалось. Итак эквивалентность (3.3) и (3.12) установлена.

Эквивалентность (3.4) и (3.13) устанавливается аналогично. ■

Теорема 9. *Для выполнения условия (B) необходимо и достаточно, чтобы с некоторыми ненулевыми константами $\widetilde{c}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, были верны соотношения*

$$\mathbf{a}_j = \widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j \qquad \text{при} \quad j \le k-1, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{a}_{j+1} = \widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_j \qquad \text{при} \quad j \ge k. \tag{3.15}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $j \leq k-2$. В этом случае $(x_j, x_{j+1}) = (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1})$, $\quad (x_{j+1}, x_{j+2}) = (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2})$; по определению функции $\omega_j(t)$ при $t \in (x_j, x_{j+1})$ имеем

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} = \frac{\det(\widetilde{c}_{j-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{c}_{j-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j)} = \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_j,$$

а при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ получаем

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} = \frac{\det(\varphi(t), \widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j, \widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} = \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_j.$$

Таким образом, справедливы соотношения (3.12).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $j \geq k+1$; здесь требуется установить первое из соотношений (3.13). В этом случае $(x_{j+1}, x_{j+2}) = (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1})$, $(x_{j+2}, x_{j+3}) = (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2})$. По определению функции $\omega_j(t)$ при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ имеем

$$\omega_{j+1}(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_j, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} = \frac{\det(\widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_j)} = \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_{j+1},$$

а при $t \in (x_{j+2}, x_{j+3})$ получаем

$$\omega_{j+1}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+2})}{\det(\mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})} = \frac{\det(\varphi(t), \widetilde{c}_{j+2}\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_j, \widetilde{c}_{j+2}\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} = \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_{j+1};$$

Справедливость соотношений (3.13) доказана.

Необходимость. Если выполнено условие (B), то согласно следствию 3 и теореме 9 справедливы соотношения (3.11)–(3.13), так что равенства (3.14)–(3.15) выполнены.

Теорема доказана. ■

Зафиксируем цепочку $\widetilde{A} \in \mathcal{A}$ и рассмотрим цепочку A в зависимости от вектора $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}$, так что $A = A(\mathbf{a})$. При $A(\mathbf{a}) \in \mathcal{A}$ положим $\mathbb{S}(\mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} (X, A(\mathbf{a}), \varphi)$.

Следствие 4. *Если выполнены соотношения (3.14)–(3.15) и* $\widetilde{A}$, $A(\mathbf{a}) \in \mathcal{A}$, *то* $\widetilde{\mathbb{S}}_{k+1} \subset \mathbb{S}(\mathbf{a})$.

Введем вектор-функции (столбцы)

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \omega_{-1}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \ldots)^T,$$

$$\widetilde{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \widetilde{\omega}_{-1}(t), \widetilde{\omega}_0(t), \widetilde{\omega}_1(t), \ldots)^T.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 10. *При условии* (B) *справедливо соотношение*

$$\widetilde{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{(k+1)}\omega(t), \tag{3.16}$$

где $\mathfrak{P}_{(k+1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ *— бесконечная матрица с элементами* $\mathfrak{p}_{i,j}$, *определяемыми равенствами*

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \widetilde{c}_i\delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \le k-2,\ j\in\mathbb{Z}, \tag{3.17}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \widetilde{c}_{i+1}\delta_{i+1,j} \quad \textit{при} \quad i \ge k+1,\ j\in\mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j\in\mathbb{Z}\backslash\{k-1,k\}, \tag{3.19}$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = \widetilde{c}_{k-1}, \quad \mathfrak{p}_{k-1,k} = \widetilde{c}_{k-1}\frac{\det(\mathbf{a}_k,\ \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1},\ \mathbf{a}_{k+1})}, \tag{3.20}$$

$$\mathfrak{p}_{k,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j\in\mathbb{Z}\backslash\{k,k+1\}, \tag{3.21}$$

$$\mathfrak{p}_{k,k} = \widetilde{c}_{k+1}\frac{\det(\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1},\ \mathbf{a}_{k+1})}, \quad \mathfrak{p}_{k,k+1} = \widetilde{c}_{k+1}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Соотношение (3.17) является следствием формулы (3.12), а (3.18) получается из тождества (3.13). Из формул (3.6)–(3.7) и (3.11) очевидным образом выводим соотношения (3.19) и (3.20), а также соотношения (3.21)–(3.22). Ввиду предположения (B) и предположения о полноте цепочки $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ (см. выше формулы (3.14)–(3.15)) определитель $\det(\mathbf{a}_{k-1},\ \mathbf{a}_{k+1})$ отличен от нуля. ∎

Матрицу $\mathfrak{P}_{(k+1)}$ называем *матрицей вложения.*

11.4. Некоторые свойства биортогональной системы

Пусть система функционалов $\{\widetilde{g}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\widetilde{g}_i\in(\mathbb{C}_X)^*$, с компактными носителями на (α,β) биортогональна системе функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, так что

$$\langle\widetilde{g}_i,\widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i,j\in\mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Согласно пункту 2) теоремы 2 имеем

$$\langle\widetilde{g}_i,\varphi\rangle = \mathbf{a}_i \quad \forall i\in\mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (B')*.Тогда справедливы соотношения*

$$\langle\widetilde{g}_i,\omega_s\rangle = \delta_{i,s}/\widetilde{c}_s \qquad \textit{при} \quad s\le k-2,\ i\in\mathbb{Z}, \tag{4.3}$$

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{s+1}\rangle = \delta_{i,s}/\widetilde{c}_{s+1} \qquad \textit{при} \quad s \geq k+1,\ i \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Используя формулы (3.12)–(3.13), имеем

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_s\rangle = \langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_s\rangle/\widetilde{c}_s \qquad \text{при} \quad s \leq k-2,\ i \in \mathbb{Z},$$

откуда, учитывая свойство биортогональности, получаем соотношение (4.3). Для $s \geq k+1$ находим

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{s+1}\rangle = \langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_s\rangle/\widetilde{c}_{s+1} \qquad \text{при} \quad s \geq k+1,\ i \in \mathbb{Z},$$

что доказывает соотношение (4.4). ■

Лемма 5. *Пусть*

$$\mathrm{supp}\widetilde{g}_i \subset [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon] \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{k-1}\rangle = 0 \qquad \textit{при} \quad i \leq k-2, \tag{4.6}$$

$$\langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k-1}\rangle = 1/\widetilde{c}_{k-1}, \tag{4.7}$$

$$\langle \widetilde{g}_k, \omega_{k-1}\rangle = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \tag{4.8}$$

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{k-1}\rangle = 0 \qquad \textit{при} \quad i \geq k+1. \tag{4.9}$$

Доказательство. Учитывая расположение носителя функционала $\widetilde{g}_i$ (см. (4.5)) и функции ω_{k-1}, легко получаем равенства (4.6) и (4.9). Применим $\widetilde{g}_{k-1}$ к обеим частям соотношения (1.1), записанного для $i = k-1$; заметим, что согласно условию $\mathrm{supp}\widetilde{g}_{k-1} \subset [\widetilde{x}_{k-1}, \widetilde{x}_{k-1} + \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0$. В результате получаем

$$\mathbf{a}_{k-2}\langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k-2}\rangle + \mathbf{a}_{k-1}\langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k-1}\rangle = \langle \widetilde{g}_{k-1}, \varphi\rangle;$$

отсюда, имея ввиду (4.2), по теореме Крамера выводим соотношение

$$\langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k-1}\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1})};$$

используя здесь (3.11), получаем (4.7). Аналогичным образом, к соотношению (1.1), записанному для $i = k$, применим функционал $\widetilde{g}_k$ (по условию $\mathrm{supp}\,\widetilde{g}_k \subset [\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_k + \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0$):

$$\mathbf{a}_{k-1}\langle \widetilde{g}_k, \omega_{k-1}\rangle + \mathbf{a}_k\langle \widetilde{g}_k, \omega_k\rangle = \langle \widetilde{g}_k, \varphi\rangle; \tag{4.10}$$

отсюда согласно формулам (4.2) получаем соотношение

$$\langle \widetilde{g}_k, \omega_{k-1} \rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_k, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}.$$

Для вывода формулы (4.8) осталось воспользоваться равенствами (3.11). ∎

Лемма 6. *Пусть выполнено предположение (4.5). Тогда*

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_k \rangle = 0 \qquad \textit{при} \quad i \le k-1, \tag{4.11}$$

$$\langle \widetilde{g}_k, \omega_k \rangle = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \tag{4.12}$$

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_k \rangle = 0 \qquad \textit{при} \quad i \ge k+1. \tag{4.13}$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве предыдущей леммы, воспользуемся информацией о расположении носителя функционала $\widetilde{g}_i$ и функции ω_k; в результате получаем соотношения (4.11) и (4.13). Формула (4.12) устанавливается отысканием неизвестного $\langle \widetilde{g}_k, \omega_k \rangle$ из системы (4.10) и использованием формул (4.2) и (3.11). ∎

Лемма 7. *В условиях (4.5) верны соотношения*

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{k+1} \rangle = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Учитывая расположение носителей функционала $\widetilde{g}_i$ и функции ω_{k+1}, видим, что

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{k+1} \rangle = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{k, k+1\}.$$

Обратимся к случаям $i \in \{k, k+1\}$. Сначала рассмотрим действие функционала $\widetilde{g}_k$ на функцию ω_{k+1}. По условию $\operatorname{supp}\widetilde{g}_k \subset (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_k + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, так что $\operatorname{supp}\widetilde{g}_k \subset (x_k, x_{k+1})$; теперь ясно, что $\langle \widetilde{g}_k, \omega_{k+1} \rangle = 0$. При $i = k+1$ согласно предположению (4.5) имеем $\operatorname{supp}\widetilde{g}_{k+1} \subset (\widetilde{x}_{k+1}, \widetilde{x}_{k+2}) = (x_{k+2}, x_{k+3})$, так что следует рассмотреть соотношение (1.1) при $i = k+2$ и применить к нему функционал $\widetilde{g}_{k+1}$:

$$\mathbf{a}_{k+1} \langle \widetilde{g}_{k+1}, \omega_{k+1} \rangle + \mathbf{a}_{k+2} \langle \widetilde{g}_{k+1}, \omega_{k+2} \rangle = \langle \widetilde{g}_{k+1}, \varphi \rangle; \tag{4.15}$$

из соотношения (4.15) имеем $\langle \widetilde{g}_{k+1}, \omega_{k+1} \rangle = \det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2}) / \det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2})$. Ввиду соотношений (3.13) векторы $\widetilde{\mathbf{a}}_{k+1}$ и $\mathbf{a}_{k+2}$ коллинеарны, и потому $\langle \widetilde{g}_{k+1}, \omega_{k+2} \rangle = 0$.

Лемма доказана. ∎

Замечание. *Для построения функционалов $\widetilde{g}_i$ со свойством (4.5) достаточно воспользоваться теоремой 4, заменяя в ней X на $\widetilde{X}$ и полагая $\widetilde{g}_i \stackrel{\text{def}}{=} g_{i\langle 0\rangle}$.*

Введем обозначения $\mathfrak{q}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle$, $\mathfrak{Q}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$. Матрица $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ называется *матрицей продолжения.*

Теорема 11. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j}/\widetilde{c}_j \qquad \text{при } j \le k-1 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{4.16}$$

$$\mathfrak{q}_{k,j} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}\backslash\{k-1,k\}, \tag{4.17}$$

$$\mathfrak{q}_{k,k-1} = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \tag{4.18}$$

$$\mathfrak{q}_{k,k} = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \tag{4.19}$$

$$\mathfrak{q}_{i,k+1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{4.20}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i+1,j}/\widetilde{c}_j \qquad \text{при } j \ge k+2 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{4.21}$$

Доказательство. Формулы (4.16)–(4.21) непосредственно вытекают из лемм 4 — 7, доказанных выше. ■

Теорема 12. *Матрица $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T_{(k+1)}$*

$$\mathfrak{Q}_{(k+1)} \mathfrak{P}^T_{(k+1)} = \mathfrak{I}, \tag{4.22}$$

где $\mathfrak{I}$ — единичная матрица.

Доказательство. Транспонируем (3.16) и к результату применим одностолбцовую матрицу $\widetilde{g}$, элементами которой являются функционалы $\widetilde{g}_i$, $\widetilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \widetilde{g}_{-1}, \widetilde{g}_0, \widetilde{g}_1, \ldots)^T$:

$$\widetilde{g}\widetilde{\omega}^T = \widetilde{g}\omega^T \mathfrak{P}^T_{(k+1)}.$$

С учетом свойства биортогональности систем $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ получаем соотношение (4.22). ■

11.5. Вэйвлетное разложение

Предположим, что верно включение $\widetilde{\mathbb{S}}_k \subset \mathbb{S}$. Рассмотрим оператор $P_{(k+1)}$ проектирования пространства $\mathbb{S}$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}_{k+1}$, определяемый соотношением

$$P_{(k+1)} u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \langle \widetilde{g}_j, u \rangle \, \widetilde{\omega}_j \qquad \forall u \in \mathbb{S}, \tag{5.1}$$

и введем оператор $Q_{(k+1)} = I - P_{(k+1)}$, где I — тождественный оператор в $\mathbb{S}$.

Пространство $\mathbb{W}_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{(k+1)}\mathbb{S}$ тоже будем называть *пространством вэйвлетов (всплесков)*. С помощью проектирования (5.1) получаем прямое разложение

$$\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}}_{k+1} \dotplus \mathbb{W}_{k+1}, \tag{5.2}$$

— *сплайн-вейвлетное разложение* пространства $\mathbb{S}$.

Рассматривая два представления элемента $u \in \mathbb{S}$

$$u = \sum_j c_j \omega_j, \qquad u = \sum_j a_i \widetilde{\omega}_i + \sum_j b_j \omega_j,$$

выводим *формулу реконструкции*:

$$c = \mathfrak{P}^T_{(k+1)} a + b, \tag{5.3}$$

где $a \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T$, $b \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T$, $c \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T$. Применяя к ней матрицу $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ и используя свойство (4.22), приходим к *формулам декомпозиции*:

$$a = \mathfrak{Q}_{(k+1)} c, \qquad b = c - \mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)} c. \tag{5.4}$$

Теорема 13. *Для вэйвлетного разложения (5.2) формулы реконструкции имеют вид*

$$c_j = \widetilde{c}_j a_j + b_j \qquad \text{при} \quad j \le k-1, \tag{5.5}$$

$$c_k = \widetilde{c}_{k-1} \frac{\det(\mathbf{a}_k,\ \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1},\ \mathbf{a}_{k+1})} a_{k-1} + \widetilde{c}_{k+1} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1},\ \mathbf{a}_{k+1})} a_k + b_k, \tag{5.6}$$

$$c_j = \widetilde{c}_j a_{j-1} + b_j \qquad \text{при} \quad j \ge k+1. \tag{5.7}$$

Доказательство. Применяя формулы (3.17)–(3.22) в покомпонентном представлении соотношения (5.3), приходим к формулам (5.5)–(5.7). ∎

Лемма 8. *Для элементов* $[\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,j}$ *матрицы* $\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}$ *справедливы соотношения*

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k+1,k-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)},$$

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k+1,k} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)},$$

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k+1,k+1} = 0, \quad [\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,j} = 0 \quad \text{при}\ i \ne j,$$

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,i} = 1 \quad \textit{при}\ i \neq k+1.$$

Доказательство. Поскольку $[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,j}$ — элемент произведения $\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}$, полученный при "умножении" i-й строки матрицы $\mathfrak{P}^T_{(k+1)}$ на j-й столбец матрицы $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$, то

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,j} = \delta_{i,j} \qquad \text{при} \quad i \in \mathbb{Z}\backslash\{k, k+1\},\ j \in \mathbb{Z}.$$

Для элементов k-й строки упомянутой матрицы имеем

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,j} = 0 \qquad \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-1, k\};$$

очевидно также, что

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,k-1} = \mathfrak{p}_{k-1,k}/\widetilde{c}_{k-1} + \mathfrak{p}_{k,k}\mathfrak{q}_{k,k-1}.$$

Используя здесь формулы (3.20), (3.22) и (4.18), видим, что $[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,k-1} = 0$. Теперь находим $[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,k} = \mathfrak{p}_{k,k}\mathfrak{q}_{k,k-1}$; благодаря соотношениям (3.22) и (4.19) отсюда получаем $[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,k} = 1$. Обращаясь к $k+1$-й строке матрицы $\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}$, видим, что

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k+1,j} = 0 \qquad \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-1, k\}.$$

Итак, третья, четвертая и пятая формулы доказываемой леммы установлены. Первая и вторая формулы следуют из соотношений (4.18) и (4.19). Лемма доказана. ■

Теорема 14. *Для вэйвлетного разложения (5.2) формулы декомпозиции могут быть записаны в виде*

$$a_j = c_j/\widetilde{c}_j \qquad \textit{при} \quad j \le k-1,$$

$$a_k = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}}\Big(\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)c_{k-1} + \det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})c_k\Big)/\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k),$$

$$a_j = c_{j+1}/\widetilde{c}_{j+1} \qquad \textit{при} \quad j \ge k+1,$$

$$b_j = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}\backslash\{k+1\},$$

$$b_{k+1} = c_{k+1} - \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}c_{k-1} - \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}c_k.$$

Доказательство очевидным образом следует из формул (5.4) и леммы 8. ■

11.6. Операторы декомпозиции и реконструкции

Рассмотрим пространство $\mathcal{F}$ всех числовых последовательностей, представленных вектор-столбцами, $f \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots)^T$, и линейный оператор, определяемый матрицей $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ в $\mathcal{F}$ (это определение корректно, ибо упомянутая матрица имеет конечное число ненулевых элементов в каждой строке). Ядро этого оператора представляет собой линейное пространство; обозначим его $\mathcal{B}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T,\ \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b} = 0\}$, т.е. $\mathcal{B}_{(k+1)} = \ker \mathfrak{Q}_{(k+1)}$, так что

$$\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b} = 0 \qquad \text{при } \mathbf{b} \in \mathcal{B}_{(k+1)}. \tag{6.1}$$

Теорема 15. *Множество вэйвлетных составляющих совпадает с пространством* $\mathcal{B}_{(k+1)}$.

Доказательство. Ко второму из соотношений (5.4) применим матрицу $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ и воспользуемся теоремой 12: ввиду формулы (4.22) получаем

$$\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b} = \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{c} - \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{c} = 0.$$

Итак, вектор $\mathbf{b}$ содержится в ядре $\ker \mathfrak{Q}_{(k+1)}$ оператора $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{B}_{(k+1)}$. Достаточно очевидно обратное: любой вектор из $\ker \mathfrak{Q}_{(k+1)}$ может рассматриваться как вэйвлетная составляющая некоторого вектора из $\mathcal{C}$. Действительно, если $\mathbf{b}$ — произвольный вектор из $\mathcal{B}_{(k+1)}$, то полагая $\mathbf{c} = \mathbf{b}$, видим, что соотношения (5.4) выполнены, и при этом $\mathbf{a} = 0$. ■

Рассмотрим еще два экземпляра пространства $\mathcal{F}$, обозначая их $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$: элементами пространства $\mathcal{A}$ являются вектор-столбцы $\mathbf{a} = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T$, а элементами пространства $\mathcal{C}$ — вектор-столбцы $\mathbf{c} = (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T$. Пусть $\mathcal{E}$ — прямое произведение пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_{(k+1)}$: $\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \times \mathcal{B}_{(k+1)}$, т.е.

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \;\middle|\; \mathbf{a} \in \mathcal{A},\ \mathbf{b} \in \mathcal{B}_{(k+1)} \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{D}_{(k+1)} :\ \mathcal{C} \mapsto \mathcal{E}, \quad \mathfrak{D}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix}.$$

Для него

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathfrak{D}_{(k+1)}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix} \mathbf{c} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{c} \\ \mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)})\mathbf{c} \end{cases}.$$

Оператор $\mathfrak{D}_{(k+1)}$ называется оператором *декомпозиции.*

Введем оператор $\mathfrak{R}_{(k+1)}: \mathcal{E} \mapsto \mathcal{C}, \quad \mathfrak{R}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I \end{pmatrix}$, так что

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R}_{(k+1)} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \iff \mathbf{c} = \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Оператор $\mathfrak{R}_{(k+1)}$ называется оператором *реконструкции.*

Теорема 16. *Операторы $\mathfrak{D}_{(k+1)}$ и $\mathfrak{R}_{(k+1)}$ взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\mathfrak{R}_{(k+1)}\mathfrak{D}_{(k+1)}$:

$$\mathfrak{R}_{(k+1)}\mathfrak{D}_{(k+1)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} + I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} = I.$$

С другой стороны с учетом свойства (6.1) имеем

$$\mathfrak{D}_{(k+1)}\mathfrak{R}_{(k+1)} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} & \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ \mathfrak{P}^T_{(k+1)} - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

что и требовалось установить. ■

Здесь дадим другие представления операторов декомпозиции и реконструкции, предварительно отобразив прямую сумму в арифметическое пространство. При таком отображении будет существенна нумерация координатных осей (или, что то же самое — нумерация координатных ортов); она различна при различных k.

Предположим, что $\mathcal{B}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \ker \mathfrak{Q}_{(k+1)}$ — одномерное пространство: $\mathcal{B}_{(k+1)} = \{c\mathbf{b}_* \mid \forall c \in \mathbb{R}^1\}$, где $\mathbf{b}_*$ — единичный вектор-столбец.

Обозначим $\{\mathbf{f}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ систему единичных ортов (вектор-столбцов) пространства $\mathcal{F}$, а через $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ систему единичных вектор-столбцов в пространстве $\mathcal{A}$,

$$\begin{array}{rcccccccc} & & \ldots & i-2 & i-1 & i & i+1 & i+2 & \ldots \\ (\mathbf{f}^{(i)})^T \stackrel{\text{def}}{=} & \big(& \ldots & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & \ldots \big), \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & \dots & i-2 & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & \\ (\mathbf{e}^{(i)})^T & \stackrel{\text{def}}{=} & \big(\dots & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & \dots\big). \end{array}$$

Рассмотрим линейный изоморфизм $I_{(k+1)}$ пространств $\mathcal{E} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}_{(k+1)}$ и $\mathcal{F}$, $I_{(k+1)}: \ \mathcal{E} \mapsto \mathcal{F}$, определяемый формулами

$$I_{(k+1)}\mathbf{e}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{f}^{(i)} & \text{при } i \le k \\ \mathbf{f}^{(i+1)} & \text{при } i \ge k+1, \end{cases} \qquad I_{(k+1)}\mathbf{b}_* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}^{(k+1)}.$$

Очевидно, что

$$I^{-1}_{(k+1)}\mathbf{f}^{(j)} = \begin{cases} \mathbf{e}^{(j)} & \text{при } j \le k \\ \mathbf{e}^{(j-1)} & \text{при } j \ge k+2, \end{cases} \qquad I^{-1}_{(k+1)}\mathbf{f}^{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_*.$$

Введем вектор-столбец $\mathbf{f}$ равенством

$$\begin{array}{cccccccccc} & & \dots & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots \\ \mathbf{f}^T & \stackrel{\text{def}}{=} & \big(\dots & a_{k-2}, & a_{k-1}, & a_k, & b_{k+1}, & a_{k+1}, & a_{k+3}, & \dots\big), \end{array}$$

Используя обозначения $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)^T$, $\mathbf{b} = b_k\mathbf{b}_*$, имеем

$$I_{(k+1)}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \mathbf{f}, \qquad I^{-1}_{(k+1)}\mathbf{f} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}.$$

Дадим представление операторов декомпозиции и реконструкции с использованием изоморфизма $I_{(k+1)}$. Для оператора декомпозиции

$$\mathfrak{D}_{(k+1)}: \ \mathcal{C} \mapsto \mathcal{E}, \quad \mathfrak{D}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix}\mathbf{c} \iff \begin{cases} \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{c} \\ \mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)})\mathbf{c}. \end{cases}$$

Полагая $\mathbb{D}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} I_{(k+1)}\mathfrak{D}_{(k+1)}$ и применяя изоморфизм $I_{(k+1)}$ к обеим частям равенства

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \mathfrak{D}_{(k+1)}\mathbf{c},$$

получаем отображение

$$\mathbb{D}_{(k+1)}: \mathcal{C} \mapsto \mathcal{F}, \qquad \mathbf{f} = \mathbb{D}_{(k+1)}\mathbf{c} \qquad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}, \quad \mathbf{f} \in \mathcal{F}.$$

Для оператора реконструкции имеем

$$\mathfrak{R}_{(k+1)} : \ \mathcal{E} \mapsto \mathcal{C}, \quad \mathfrak{R}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I \end{pmatrix};$$

таким образом

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R}_{(k+1)} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

Рассмотрим оператор $\mathbb{R}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{R}_{(k+1)} I^{-1}_{k+1}$; если воспользоваться формулой $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = I^{-1}_{(k+1)}\mathbf{f}$, то придем к соотношениям

$$\mathbb{R}_{(k+1)} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{C}, \qquad \mathbf{c} = \mathbb{R}_{(k+1)}\mathbf{f} \qquad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \quad \mathbf{c} \in \mathcal{C}.$$

11.7. Коммутативность операторов декомпозиции

В данном пункте показано, что операторы декомпозиции коммутативны в рассматриваемом негладком случае.

Имеется два порядка удаления узлов и два соответствующих результирующих вэйвлетных разложения: в первом случае удаляется узел x_{k+1}, а затем — узел x_k, а во втором случае сначала удаляется узел x_k, а затем — узел x_{k+1}. Возникает вопрос: приведет ли такое изменение порядка удаления узлов к одному и тому же вэйвлетному разложению? В этом пункте дается положительный ответ на этот вопрос.

Заметим, что фигурирующие дальше матрицы вложения и продолжения строятся аналогично тому, как это было сделано в третьем и четвертом пунктах соответственно.

Из полученной ранее сетки $X_{\{k+1\}}$ (см. (3.1)) удалим узел $\widetilde{x}_k$ (очевидно, что $\widetilde{x}_k = x_k$). После удаления этого узла получаем сетку

$$X_{\{k,k+1\}} : \quad \ldots \widehat{x}_{k-1} < \widehat{x}_k < \widehat{x}_{k+1} < \ldots, \tag{7.1}$$

где

$$\widehat{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{x}_j = x_j \text{ при } j \le k-1, \quad \widehat{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{x}_{j+1} = x_{j+2} \text{ при } j \ge k, \ j \in \mathbb{Z}.$$

Положим

$$\widehat{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}) \cup (\widehat{x}_{j+1}, \widehat{x}_{j+2}), \ j \in \mathbb{Z}, \widehat{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}).$$

Пусть заданы три полных цепочки двумерных векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widehat{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ со свойствами

$$\mathbf{a}_j = \widetilde{\mathbf{a}}_j \quad \text{при} \quad j \le k-1, \qquad \mathbf{a}_{j+1} = \widetilde{\mathbf{a}}_j \quad \text{при} \quad j \ge k,\ j \in \mathbb{Z}, \tag{7.2}$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \widehat{\mathbf{a}}_j \quad \text{при} \quad j \le k-2, \qquad \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1} = \widehat{\mathbf{a}}_j \quad \text{при} \quad j \ge k-1,\ j \in \mathbb{Z}. \tag{7.3}$$

С использованием этих цепочек построим три системы функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, отыскивая их из соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j\, \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in G, \qquad \omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G \backslash S_j,$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_j\, \widetilde{\omega}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widetilde{G}, \qquad \widetilde{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_j,$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathbf{a}}_j\, \widehat{\omega}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widehat{G}, \qquad \widehat{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widehat{G} \backslash \widehat{S}_j$$

соответственно.

Благодаря предположениям (7.2)–(7.3) выполнено условие (B), и потому для вектор-функций

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \widetilde{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \widehat{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\omega}_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$$

получаем соотношения

$$\widetilde{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{(k+1)}\omega(t), \qquad \widehat{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{(k+1,k)}\widetilde{\omega}(t),$$

где

$$\mathfrak{P}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j}^{(k+1)})_{i,j\in\mathbb{Z}}, \qquad \mathfrak{P}_{(k+1,k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j}^{(k+1,k)})_{i,j\in\mathbb{Z}},$$

$$\mathfrak{p}_{i,j}^{(k+1)} = \delta_{i,j} \quad \text{при } j \le k-1,$$
$$\mathfrak{p}_{i,j}^{(k+1)} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } j \ge k+1,$$
$$\mathfrak{p}_{i,k}^{(k+1)} = 0 \quad \text{при } i \in \mathbb{Z}\backslash\{k-1, k\},$$

$$\mathfrak{p}_{i,j}^{(k+1,k)} = \delta_{i,j} \quad \text{при } j \le k-2,$$
$$\mathfrak{p}_{i,j}^{(k+1,k)} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } j \ge k,$$
$$\mathfrak{p}_{i,k-1}^{(k+1,k)} = 0 \quad \text{при } i \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\}.$$

Обозначим произведение этих матриц $\mathcal{P}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{P}_{(k+1,k)}\mathfrak{P}_{(k+1)}$. Элементы $[\mathcal{P}_1^T]_{i,j}$ транспонированной матрицы $\mathcal{P}_1^T$ таковы

$$[\mathcal{P}_1^T]_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \le k-2,$$

$$[\mathcal{P}_1^T]_{i,j} = \delta_{i,j+2} \quad \text{при } i \ge k+1,$$

$$[\mathcal{P}_1^T]_{i,j} = 0 \quad \text{при } i \in \{k-1, k\},\ j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},$$

$$[\mathcal{P}_1^T]_{k-1,k-2} = \mathfrak{p}_{k-2,k-1}^{(k+1,k)}, \quad [\mathcal{P}_1^T]_{k-1,k-1} = \mathfrak{p}_{k-1,k-1}^{(k+1,k)},$$

$$[\mathcal{P}_1^T]_{k,k-2} = \mathfrak{p}_{k-1,k}^{(k+1)}\mathfrak{p}_{k-2,k-1}^{(k+1,k)}, \quad [\mathcal{P}_1^T]_{k,k-1} = \mathfrak{p}_{k-1,k}^{(k+1)}\mathfrak{p}_{k-1,k-1}^{(k+1,k)} + \mathfrak{p}_{k,k}^{(k+1)}.$$

Теперь из сетки X удалим узлы в обратном порядке: сначала удалим узел x_k, а затем — узел x_{k+1}. После удаления узла x_k получаем сетку

$$X_{\{k\}}: \quad \ldots < \grave{\tilde{x}}_{k-2} < \grave{\tilde{x}}_{k-1} < \grave{\tilde{x}}_k < \grave{\tilde{x}}_{k+1} < \grave{\tilde{x}}_{k+2} < \ldots,$$

где

$$\grave{\tilde{x}}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \quad \text{при} \quad j \le k-1, \qquad \grave{\tilde{x}}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \quad \text{при} \quad j \ge k, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Дополнительно введем обозначения

$$\grave{\tilde{S}}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_j, \grave{\tilde{x}}_{j+1}) \cup (\grave{\tilde{x}}_{j+1}, \grave{\tilde{x}}_{j+2}), \quad j \in \mathbb{Z}, \qquad \grave{\tilde{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (\grave{\tilde{x}}_j, \grave{\tilde{x}}_{j+1}).$$

Следующим удаляемым узлом является узел x_{k+1} (очевидно, что $x_{k+1} = \grave{\tilde{x}}_k$). В результате получается сетка $X_{\{k,k+1\}}$ (см. формулу (7.1)).

Зададим полную цепочку векторов $\{\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ со свойством

$$\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j = \mathbf{a}_j \quad \text{при} \quad j \le k-1, \qquad \grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j = \mathbf{a}_{j+1} \quad \text{при} \quad j \ge k. \tag{7.4}$$

Очевидно, что

$$\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j = \grave{\hat{\mathbf{a}}}_j \quad \text{при} \quad j \le k-2, \qquad \grave{\tilde{\mathbf{a}}}_{j+1} = \grave{\hat{\mathbf{a}}}_j \quad \text{при} \quad j \ge k-1.$$

С использованием этой цепочки построим систему функций $\{\grave{\tilde{\omega}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, отыскивая их из соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j \grave{\tilde{\omega}}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \grave{\tilde{G}}, \qquad \grave{\tilde{\omega}}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \grave{\tilde{G}}\backslash\grave{\tilde{S}}_j.$$

Ввиду предположений (7.2)–(7.4) выполнено условие (B), и потому для вектор-функций $\omega(t)$, $\widehat{\omega}_j(t)$ и $\grave{\tilde{\omega}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{\omega}}_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$ получаем соотношения

$$\grave{\tilde{\omega}}(t) = \mathfrak{P}_{(k)}\omega(t), \qquad \widehat{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{(k,k+1)}\grave{\tilde{\omega}}(t),$$

где

$$\mathfrak{P}_{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}^{(k)}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}, \qquad \mathfrak{P}_{(k,k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}^{(k,k+1)}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}},$$

$$\mathfrak{p}^{(k)}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } j \le k-2,\ i \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{p}^{(k)}_{i,j} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } j \ge k,\ i \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{p}^{(k)}_{i,k-1} = 0 \quad \text{при } i \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},$$

$$\mathfrak{p}^{(k,k+1)}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } j \le k-2,\ i \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{p}^{(k,k+1)}_{i,j} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } j \ge k,\ i \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{p}^{(k,k+1)}_{i,k-1} = 0 \quad \text{при } i \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\}.$$

Для элементов матрицы, полученной транспонированием их произведения $\mathcal{P}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{P}_{(k,k+1)}\mathfrak{P}_{(k)}$, имеем

$$[\mathcal{P}^T_2]_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \le k-2,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{P}^T_2]_{i,j} = \delta_{i,j+2} \quad \text{при } i \ge k+1,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{P}^T_2]_{i,j} = 0 \quad \text{при } i \in \{k-1, k\},\ j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},$$

$$[\mathcal{P}^T_2]_{k-1,k-2} = \mathfrak{p}^{(k)}_{k-2,k-1} + \mathfrak{p}^{(k)}_{k-1,k-1}\mathfrak{p}^{(k,k+1)}_{k-2,k-1},$$

$$[\mathcal{P}^T_2]_{k-1,k-1} = \mathfrak{p}^{(k)}_{k-1,k-1}\mathfrak{p}^{(k,k+1)}_{k-1,k-1},$$

$$[\mathcal{P}^T_2]_{k,k-2} = \mathfrak{p}^{(k,k+1)}_{k-2,k-1}, \quad [\mathcal{P}^T_2]_{k,k-1} = \mathfrak{p}^{(k,k+1)}_{k-1,k-1}.$$

Ввиду линейной независимости функций ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство $\mathcal{P}^T_1 = \mathcal{P}^T_2$; оно эквивалентно равенству

$$\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k+1,k)} = \mathfrak{P}^T_{(k)}\mathfrak{P}^T_{(k,k+1)}. \tag{7.5}$$

Рассмотрим матрицы продолжения, соответствующие удаляемым узлам сетки X.

Матрица $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ определяется формулами (4.16)–(4.21), где ввиду предположений (7.2) следует взять $\widetilde{c}_j = 1$; при этом справедливо равенство (см. (4.22))

$$\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} = \mathfrak{I}. \tag{7.6}$$

Аналогичным образом, матрица продолжения $\mathfrak{Q}_{(k+1,k)}$, соответствующая процессу удаления узла $\widetilde{x}_k$ из сетки $X_{\{k+1\}}$, может быть представлена своими элементами:

$$\mathfrak{q}_{i,j}^{(k+1,k)} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \le k-2,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{q}_{i,j}^{(k+1,k)} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } i \ge k,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{q}_{k-1,j}^{(k+1,k)} = 0 \quad \text{при } \ j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\};$$

при этом верно соотношение

$$\mathfrak{Q}_{(k+1,k)}\mathfrak{P}^T_{(k+1,k)} = \mathfrak{I}. \tag{7.7}$$

Элементы матрицы $\mathcal{Q}_1 \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}_{(k+1,k)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ имеют вид

$$[\mathcal{Q}_1]_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \le k-2,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{Q}_1]_{i,j} = \delta_{i+2,j} \quad \text{при } i \ge k,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{Q}_1]_{k-1,j} = 0 \quad \text{при } \ j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},$$

$$[\mathcal{Q}_1]_{k-1,k-2} = \mathfrak{q}_{k-1,k-2}^{(k+1,k)}, \quad [\mathcal{Q}_1]_{k-1,k-1} = \mathfrak{q}_{k-1,k-1}^{(k+1,k)}.$$

Матрица продолжения $\mathfrak{Q}_{(k)} = (\mathfrak{q}_{i,j}^{(k)})$, соответствующая удалению узла x_k из исходной сетки X, получается из матрицы $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ заменой $k+1$ на k, так что

$$\mathfrak{q}_{i,j}^{(k)} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \le k-2\ j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{q}_{i,j}^{(k)} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } i \ge k\ j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{q}_{k-1,j}^{(k)} = 0 \quad \text{при } j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\}.$$

Как и прежде, имеем

$$\mathfrak{Q}_{(k)}\mathfrak{P}^T_{(k)} = \mathfrak{I}. \tag{7.8}$$

Заметим, что теперь узел x_{k+1} удаляется из исходной сетки X после удаления узла x_k; в сетке $X_{\{k\}}$ этот узел имеет номер k, так что $x_{k+1} = \grave{\widetilde{x}}_k$. Таким образом, элементы матрицы продолжения $\mathfrak{Q}_{(k,k+1)} = (\mathfrak{q}_{i,j}^{(k,k+1)})$ имеют вид

$$\mathfrak{q}_{i,j}^{(k,k+1)} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \le k-2\ j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{q}_{i,j}^{(k,k+1)} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } i \ge k\ j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{q}_{k-1,j}^{(k,k+1)} = 0 \quad \text{при } \ j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\};$$

в силу предыдущего

$$\mathfrak{Q}_{(k,k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k,k+1)} = \mathfrak{I}. \tag{7.9}$$

Произведение матриц $\mathcal{Q}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}_{(k,k+1)}\mathfrak{Q}_{(k)}$ может быть задано соотношениями

$$[\mathcal{Q}_2]_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \le k-2,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{Q}_2]_{i,j} = \delta_{i+2,j} \quad \text{при } i \ge k,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{Q}_2]_{k-1,j} = 0 \quad \text{при } \ j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},$$

$$[\mathcal{Q}_2]_{k-1,k-2} = \mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{k-1,k-2} + \mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{k-1,k}\mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{k-1,k-2},$$

$$[\mathcal{Q}_1]_{k-1,k-1} = \mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{k-1,k-1}\mathfrak{q}^{(k)}_{k-1,k-1}.$$

Умножая слева соотношение (7.5) на матрицу $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ и используя (7.6), получаем $\mathfrak{P}^T_{(k+1,k)} = \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k)}\mathfrak{P}^T_{(k,k+1)}$. Умножение последнего соотношения слева на матрицу $\mathfrak{Q}_{(k+1,k)}$ с учетом равенства (7.7) дает $\mathfrak{I} = \mathfrak{Q}_{(k+1,k)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k)}\mathfrak{P}^T_{(k,k+1)}$; это означает, что матрица $\mathcal{Q}_1$ является левой обратной к матрице $\mathcal{P}_1^T$: $\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_1^T = \mathfrak{I}$.

Аналогичным образом из соотношения (7.5) с помощью (7.8) и (7.9) выводим

$\mathfrak{Q}_{(k,k+1)}\mathfrak{Q}_{(k)}\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k+1,k)} = \mathfrak{I}$, так что $\mathcal{Q}_2\mathcal{P}_2 = \mathcal{Q}_1\mathcal{P}_1$.

Лемма 9. *Пусть дана матрица $\mathcal{P}^T$ с элементами*

$$[\mathcal{P}^T]_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \le k-2,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{P}^T]_{i,j} = \delta_{i,j+2} \quad \text{при } i \ge k+1,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{P}^T]_{i,j} = 0 \quad \text{при } i \in \{k-1, k\},\ j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},$$

$$[\mathcal{P}^T]_{k-1,k-2} = a, \quad [\mathcal{P}^T]_{k-1,k-1} = b, \quad [\mathcal{P}^T]_{k,k-2} = c, \quad [\mathcal{P}^T]_{k,k-1} = d.$$

где a, b, c и d — некоторые числа, причем $b \ne 0$. Среди множества левых обратных матриц к матрице $\mathcal{P}^T$ существует и единственна левая обратная матрица $\mathcal{Q}$ с элементами вида

$$[\mathcal{Q}]_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \le k-2,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{Q}]_{i,j} = \delta_{i+2,j} \quad \text{при } i \ge k,\ j \in \mathbb{Z},$$

$$[\mathcal{Q}]_{k-1,j} = 0 \quad \text{при } \ j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},$$

$$[\mathcal{Q}]_{k-1,k-2} = x, \qquad [\mathcal{Q}]_{k-1,k-1} = y.$$

Доказательство. Ясно, что для выполнения равенства $\mathcal{Q}\mathcal{P}^T = \mathfrak{I}$ необходимо и достаточно, чтобы $x + ay = 0, \quad by = 1$; отсюда x и y определяются однозначно. ■

Теорема 17. *Справедливо соотношение* $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$.

Доказательство. Заметим, что структура матриц $\mathcal{Q}_i$, $i = 1, 2$, совпадает с указанной в лемме 9 структурой матрицы $\mathcal{Q}$. Для доказательства осталось положить $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ и воспользоваться упомянутой леммой. ■

Следствие 5. *Рассматриваемое сплайн-вэйвлетное разложение не зависит от порядка удаления узлов сетки.*

12. СТРУКТУРА ОПЕРАТОРОВ ГНЕЗДОВОГО СПЛАЙН-ВЭЙВЛЕТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

В работах (см. [29, 96]) рассматривались негладкие сплайн-вэйвлетные разложения первого порядка, получаемые последовательным удалением узлов. Это позволяло упростить (по сравнению с гладкими разложениями) формулы для вычисления упомянутых разложений с сохранением свойств адаптивности (приспособляемости) к обрабатываемому потоку. Там же была установлена независимость вэйвлетного разложения от порядка удаления узлов. Однако, при численной реализации в машинной арифметике с плавающей точкой последовательное удаление большого количества узлов приводит к быстрому нарастанию ошибок округления, и потому такой подход оправдан лишь при вычислениях в реальном масштабе времени, когда запаздывание не допустимо.

В данном разделе рассматривается ситуация, когда возможно запаздывание при обработке поступающего числового потока; в этом случае актуально одновременное удаление групп последовательных узлов (называемых здесь гнездами). В этом разделе рассматриваются условия вложенности (вообще говоря, разрывных и неполиномиальных) сплайновых пространств, получающихся при удалении группы узлов (гнезд), дается их вэйвлетное разложение, строятся матрицы вложения и продолжения, а также соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции; рассматриваются операторы разложения и восстановления в пространствах конечных последовательностей (потоков). Изложение ведется для одного гнезда, но в заключении показано, как распространить полученные результаты на множество гнезд; последнее важно для параллельной обработки числовых потоков.

12.1. Предварительные сведения

Пусть m и N — натуральные числа. Рассмотрим сетку

$$X_N : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N = b, \qquad (1.1)$$

и обозначим

$$J_m \overset{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, m\}, \ J'_m \overset{\text{def}}{=} \{-1, 0, 1, \ldots, m\},$$

$$S_j \overset{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2}), \ j \in J'_{N-1},$$

$$G \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=0}^{N-1} (x_i, x_{i+1}), \ a \overset{\text{def}}{=} x_0, \ b \overset{\text{def}}{=} x_N. \tag{1.2}$$

Пусть $A_N \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i \in J'_{N-1}}$ — полная цепочка двумерных векторов.

По двухкомпонентной вектор-функции $\varphi(t)$, $t \in G$, с линейно независимыми компонентами на любом интервале $(a', b') \subset G$, определим функции $\omega_j(t)$, $t \in G_N$, $j \in J'_{N-1}$, с помощью аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j \in J'_{N-1}} \mathbf{a}_j \, \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in G, \tag{1.3}$$

$$\omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G \backslash S_j, \ j \in J'_{N-1}; \tag{1.4}$$

таким образом, функции $\omega_j(t)$, $j \in J'_{N-1}$, определены на множестве G следующим образом:

$$\omega_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_0)}{\det(\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0)} & \text{при } t \in (x_0, x_1), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x_0, x_1], \end{cases} \tag{1.5}$$

для $j \in J_{N-2}$

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x_j, x_{j+2}], \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\omega_{N-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{N-2}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1})} & \text{при } t \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x_{N-1}, x_N], \end{cases} \tag{1.7}$$

Дальше рассматривается пространство

$$\mathbb{S}_N \overset{\text{def}}{=} Cl_p \, \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j \in J'_{N-1}},$$

где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ — линейная оболочка функций, указанных в фигурных скобках, а Cl_p — замыкание в топологии поточечной сходимости. Заметим, что ввиду предположений относительно вектор-функции $\varphi(t)$ функции $\omega_j(t)$, $j \in J'_{N-1}$, линейно независимы на множестве G и, следовательно, являются базисом пространства $\mathbb{S}_N$; поэтому

$$\dim \mathbb{S}_N = N + 1. \tag{1.8}$$

12.2. Удаление совокупности последовательных узлов (удаление гнезда)

Пусть s, k, N — целые числа, удовлетворяющие условию $0 \le s + 1 < k \le N - 2$. Рассмотрим сетку

$$X_{N\{\Gamma\}}: \quad x^*_0 < x^*_1 < \ldots < x^*_{N-s-3} < x^*_{N-s-2}, \tag{2.1}$$

где

$$\Gamma = \Gamma(k, s) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_{k-s}, x_{k-s+1}, \ldots, x_k, x_{k+1}\},$$

$$x^*_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \text{ при } j \le k - s - 1, \tag{2.2}$$

$$x^*_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+s+2} \text{ при } j \ge k - s, \;\; j \in J_{N-s-2}. \tag{2.3}$$

Множество Γ удаляемых узлов называется *гнездом*.

Положим

$$S^*_j \stackrel{\text{def}}{=} (x^*_j, x^*_{j+1}) \cup (x^*_{j+1}, x^*_{j+2}), \; j \in J\,'_{N-s-4}, \tag{2.4}$$

$$G^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in J_{N-s-3}} (x^*_j, x^*_{j+1}). \tag{2.5}$$

Пусть задана полная цепочка двумерных векторов $\{\mathbf{a}^*_j\}_{j \in J'_{N-s-3}}$.

Для сетки (2.1)–(2.3) построим систему функций $\{\omega^*_j\}_{j \in J'_{N-s-3}}$, отыскивая ее из соотношений

$$\sum_{j \in J'_{N-s-3}} \mathbf{a}^*_j \, \omega^*_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in G^*, \tag{2.6}$$

$$\omega^*_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G^* \backslash S^*_j, \; j \in J\,'_{N-s-3}. \tag{2.7}$$

В результате получаем

$$\omega^*_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}^*_0)}{\det(\mathbf{a}^*_{-1}, \mathbf{a}^*_0)} & \text{при } t \in (x^*_0, x^*_1), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x^*_0, x^*_1], \end{cases} \tag{2.8}$$

для $j \in J_{N-s-4}$

$$\omega_j^*(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}^*, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}^*, \mathbf{a}_j^*)} & \text{при } t \in (x_j^*, x_{j+1}^*), \\ \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}^*)}{\det(\mathbf{a}_j^*, \mathbf{a}_{j+1}^*)} & \text{при } t \in (x_{j+1}^*, x_{j+2}^*), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x_j^*, x_{j+2}^*], \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\omega_{N-s-3}^*(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{N-s-4}^*, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{N-s-4}^*, \mathbf{a}_{N-s-3}^*)} & \text{при } t \in (x_{N-s-3}^*, x_{N-s-2}^*), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x_{N-2}^*, x_{N-1}^*]. \end{cases} \tag{2.10}$$

Рассмотрим пространство

$$\mathbb{S}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}\{\omega_j^*\}_{j \in J'_{N-s-3}}. \tag{2.11}$$

Аналогично соотношению (1.8) для пространства, введенного формулой (2.11), имеем $\dim \mathbb{S}_{N\{\Gamma\}} = N - s - 1$.

Пусть выполнено условие

(B) при $\forall t \in G$, $j \in J'_{N-s-3}$ справедливы соотношения

$$\mathbf{a}_j^* \omega_j^*(t) = \mathbf{a}_j \omega_j(t) \quad \text{при} \quad j \le k - s - 3, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{a}_j^* \omega_j^*(t) = \mathbf{a}_{j+s+2} \omega_{j+s+2}(t) \quad \text{при} \quad j \ge k - s. \tag{2.13}$$

Теорема 1. *При условии (B) выполняются тождества*

$$\omega_{k-s-2}^*(t) \equiv \sum_{j=k-s-2}^{k+1} \mathfrak{p}_{k-s-2,j}\, \omega_j(t), \tag{2.14}$$

$$\omega_{k-s-1}^*(t) \equiv \sum_{j=k-s-2}^{k+1} \mathfrak{p}_{k-s-1,j}\, \omega_j(t), \tag{2.15}$$

где

$$\mathfrak{p}_{k-s-2,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{k-s-1}^*)}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}^*, \mathbf{a}_{k-s-1}^*)}, \tag{2.16}$$

$$\mathfrak{p}_{k-s-1,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}^*, \mathbf{a}_j)}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}^*, \mathbf{a}_{k-s-1}^*)}, \quad j = k - s - 2, \ldots, k + 1. \tag{2.17}$$

Доказательство. Из соотношений (1.3)–(1.7) и (2.4)–(2.10) с помощью условия (B) получаем тождество

$$\mathbf{a}_{k-s-2}^* \omega_{k-s-2}^*(t) + \mathbf{a}_{k-s-1}^* \omega_{k-s-1}^*(t) \equiv \sum_{j=k-s-2}^{k+1} \mathbf{a}_j \omega_j(t);$$

рассматривая последнее как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega^*_{k-s-2}(t)$ и $\omega^*_{k-s-1}(t)$ и принимая во внимание полноту цепочки $\{\mathbf{a}^*_j\}_{j\in J'_{N-s-3}}$, приходим к соотношениям (2.14)–(2.17). ■

Лемма 1. *Если цепочки A, A^* полные и выполнено условие (B), то с ненулевыми константами c^*_{k-s-1} и c^*_{k+1} справедливы соотношения*

$$\mathbf{a}_{k-s-2} = c^*_{k-s-2}\mathbf{a}^*_{k-s-2}, \qquad \mathbf{a}_{k+1} = c^*_{k+1}\mathbf{a}^*_{k-s-1}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Ввиду определения функции ω^*_{k-s-2} носитель левой части тождества (2.14) совпадает с отрезком $[x^*_{k-s-2}, x^*_{k-s}] = [x_{k-s-2}, x_{k+2}]$. Согласно предположению компоненты вектор-функции $\varphi(t)$ линейно независимы на интервалах вида $(a', b') \subset [a, b]$, а значит функции $\omega_j(t)$ не могут быть тождественным нулем на интервалах $(a', b') \subset \mathrm{supp}\omega_j$. Обращаясь к правой части тождества (2.14), видим, что необходимо выполнение равенства $\mathfrak{p}_{k-s-2,k+1} = 0$, ибо иначе носитель правой части не будет совпадать с носителем левой. Из (2.16) имеем $\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}^*_{k-s-1}) = 0$; последнее эквивалентно второму из доказываемых соотношений (2.18).

Для доказательства первого из соотношений (2.18) обратимся к тождеству (2.15). Носитель его левой части совпадает с отрезком $[x^*_{k-s-1}, x^*_{k-s+1}] = [x_{k-s-1}, x_{k+3}]$. Носитель правой части тождества (2.15) должен, очевидно, быть таким же; аналогично предыдущему приходим к выводу, что для этого необходимо выполнение равенства $\mathfrak{p}_{k-s-1,k-s-2} = 0$, так что из (2.17) имеем $\det(\mathbf{a}^*_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-2}) = 0$, а это эквивалентно первому из доказываемых соотношений (2.18).

Заметим, что рассматриваемые векторы (а следовательно, и константы c^*_{k-s-1} и c^*_{k-s-2}) отличны от нуля, поскольку по условию цепочки векторов $\{\mathbf{a}_j\}$ и $\{\mathbf{a}^*_j\}$ — полные. ■

Пусть $J'_{s,k,N} \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, 0, \ldots, k-s-2\} \cup \{k+1, k+2, \ldots, N-1\}$. Введем следующее условие

(C) с ненулевыми числами c^*_j, $j \in J'_{s,k,N}$, выполнены соотношения

$$\mathbf{a}_j = c^*_j \mathbf{a}^*_j \quad \text{при} \quad j \le k-s-2, \tag{2.19}$$

$$\mathbf{a}_{j+s+1} = c^*_{j+s+1}\mathbf{a}^*_{j-1} \quad \text{при} \quad j \ge k-s. \tag{2.20}$$

Теорема 2. *Для выполнения условия (B) необходимо и достаточно выполнение условия (C).*

Доказательство. Достаточность. Здесь считается, что выполнено условие (C); установим, что справедливо условие (B). Рассмотрим $j \le k-s-3$.

В этом случае $(x_j, x_{j+1}) = (x_j^*, x_{j+1}^*)$ и $(x_{j+1}, x_{j+2}) = (x_{j+1}^*, x_{j+2}^*)$. По определению функции $\omega_j(t)$ при $t \in (x_j, x_{j+1})$ имеем

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)}.$$

В соответствии с (2.9) и (2.19) получаем

$$\omega_j(t) = \frac{\det(c_{j-1}^* \mathbf{a}_{j-1}^*, \varphi(t))}{\det(c_{j-1}^* \mathbf{a}_{j-1}^*, c_j^* \mathbf{a}_j^*)} = \omega_j^*(t)/c_j^*.$$

При $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ находим

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} = \frac{\det(\varphi(t), c_{j+1}^* \mathbf{a}_{j+1}^*)}{\det(c_j^* \mathbf{a}_j^*, c_{j+1}^* \mathbf{a}_{j+1}^*)} = \omega_j^*(t)/c_j^*.$$

Таким образом, $c_j^* \omega_j(t) \equiv \omega_j^*(t)$, откуда умножением на (2.19) находим (2.12).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $j \geq k - s$; здесь требуется установить соотношение (2.13). В этом случае $(x_{j+s+2}, x_{j+s+3}) = (x_j^*, x_{j+1}^*)$, $(x_{j+s+3}, x_{j+s+4}) = (x_{j+1}^*, x_{j+2}^*)$. По определению функции $\omega_{j+s+2}(t)$ при $t \in (x_{j+s+2}, x_{j+s+3})$ имеем

$$\omega_{j+s+2}(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j+s+1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j+s+1}, \mathbf{a}_{j+s+2})} =$$

$$= \frac{\det(c_{j+s+1}^* \mathbf{a}_{j-1}^*, \varphi(t))}{\det(c_{j+s+1}^* \mathbf{a}_{j-1}^*, c_{j+s+2}^* \mathbf{a}_j^*)} = \omega_j^*(t)/c_{j+s+2}^*,$$

а при $t \in (x_{j+s+3}, x_{j+s+4})$ получаем

$$\omega_{j+s+2}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+s+3})}{\det(\mathbf{a}_{j+s+2}, \mathbf{a}_{j+s+3})} =$$

$$= \frac{\det(\varphi(t), c_{j+s+3}^* \mathbf{a}_{j+1}^*)}{\det(c_{j+s+2}^* \mathbf{a}_j^*, c_{j+s+3}^* \mathbf{a}_{j+1}^*)} = \omega_j^*(t)/c_{j+s+2}^*;$$

Полученное в результате тождество $c_{j+s+2}^* \omega_{j+s+2}(t) \equiv \omega_j^*(t)$ умножаем на вытекающее из (2.20) соотношение $\mathbf{a}_{j+s+2} = c_{j+s+2}^* \mathbf{a}_j^*$. Достаточность доказана.

Необходимость. Здесь считаем, что соотношения (B) выполнены. Обратимся к формулам (2.12). При $j \leq k - s - 3$ рассмотрим точку ξ_j, в которой $\omega_j(\xi_j) \neq 0$ и положим $c_j^* \stackrel{\text{def}}{=} \omega_j^*(\xi_j)/\omega_j(\xi_j)$. Очевидно, что $c_j^* \neq 0$ и выполнены соотношения $\mathbf{a}_j = c_j^* \mathbf{a}_j^*$ при $j \leq k - s - 3$. Учитывая лемму 1, убеждаемся в справедливости всех соотношений (2.19).

Обращаясь к соотношениям (2.13), поступаем аналогично предыдущему: при $j \geq k - s$ находим точку ξ'_j, в которой $\omega_{j+s+2}(\xi'_j) \neq 0$ и полагаем $c^*_{j+s+2} \stackrel{\text{def}}{=} \omega^*_j(\xi'_j)/\omega_{j+s+2}(\xi'_j)$. Снова $c^*_{j+s+2} \neq 0$, и выполнены соотношения $\mathbf{a}_{j+s+2} = c^*_{j+s+2}\mathbf{a}^*_j$ при $j \geq k-s$. Полагая $j' = j+s+1$, видим, что последнее соотношение эквивалентно соотношению $\mathbf{a}_{j'+1} = c^*_{j'+1}\mathbf{a}^*_{j'-s-1}$ при $j' \geq k+1$; учитывая лемму 1, убеждаемся теперь в справедливости всех соотношений (2.20).

Необходимость соотношений (2.19)–(2.20) установлена.

Теорема полностью доказана. ∎

Следствие 1. *Если выполнено условие* (C), *то при* $t \in G$ *с ненулевыми константами* c^*_j *справедливы тождества*

$$c^*_j\omega_j(t) \equiv \omega^*_j(t) \quad \text{при} \quad -1 \leq j \leq k-s-3, \tag{2.21}$$

$$c^*_{j+s+2}\omega_{j+s+2}(t) \equiv \omega^*_j(t) \quad \text{при} \quad k-s \leq j \leq N-s-3. \tag{2.22}$$

Доказательство этого следствия фактически получено при доказательстве теоремы 2. ∎

12.3. Вложенность пространств

Теорема 3. *Если выполнено условие* (C), *то пространство* $\mathbb{S}_{N\{\Gamma\}}$ *содержится в пространстве* $\mathbb{S}_N$.

Доказательство. Пользуясь теоремами 1 и 2, а также следствием 1, замечаем, что базис пространства $\mathbb{S}_{N\{\Gamma\}}$ представлен в виде линейной комбинации функций пространства $\mathbb{S}_N$; это доказывает утверждение. ∎

Лемма 2. *Если выполнено условие* (C), *то*

$$\mathfrak{p}_{k-s-2,j} = c^*_{k-s-2}\frac{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})}, \tag{3.1}$$

$$\mathfrak{p}_{k-s-1,j} = c^*_{k+1}\frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_j)}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})}, \tag{3.2}$$

где $j \in \{k-s-2, k-s-1, \ldots, k+1\}$.

Доказательство. Из (2.19) имеем $\mathbf{a}^*_{k-s-2} = \mathbf{a}_{k-s-2}/c^*_{k-s-2}$, а из (2.20) получаем $\mathbf{a}^*_{k-s-1} = \mathbf{a}_{k+1}/c^*_{k+1}$. Подставляя эти соотношения в формулы (2.16) и (2.17), выводим равенства (3.1) и (3.2) соответственно. ∎

Следствие 2. *Если выполнено условие* (C), *то*

$$\mathfrak{p}_{k-s-2,k-s-2} = c^*_{k-s-2}, \quad \mathfrak{p}_{k-s-2,k+1} = 0, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{p}_{k-s-1,k-s-2} = 0, \quad \mathfrak{p}_{k-s-1,k+1} = c^*_{k+1}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Использование формул (3.1) – (3.2) для $j = k - s - 2$ и для $j = k + 1$ приводит к соотношениям (3.3)–(3.4). ■

Введем вектор-функции (столбцы)

$$\omega_*(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega^*_{-1}(t), \omega^*_0(t), \dots, \omega^*_{N-s-3}(t))^T,$$

$$\omega(t) = (\omega_{-1}(t), \omega_0(t), \dots, \omega_{N-1}(t))^T.$$

Теорема 4. *Если выполнено условие* (C)*, то справедливы калибровочные соотношения*

$$\omega_* = \mathfrak{P}_{N\{\Gamma\}}\omega, \tag{3.5}$$

где результат транспонирования матрицы $\mathfrak{P}_{N\{\Gamma\}}$ *может быть представлен в виде*

$$\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}} =$$

$$= \begin{array}{l} \\ -1 \\ \dots \\ k-s-3 \\ k-s-2 \\ k-s-1 \\ k-s \\ \dots \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \dots \\ N-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} -1 & \dots & k-s-3 & k-s-2 & k-s-1 & k-s & \dots & N-s-3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} c^*_{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c^*_{k-s-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c^*_{k-s-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k-s-2,k-s-1} & \mathfrak{p}_{k-s-1,k-s-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k-s-2,k-s} & \mathfrak{p}_{k-s-1,k-s} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k-s-2,k} & \mathfrak{p}_{k-s-1,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c^*_{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c^*_{k+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c^*_{N-1} \end{pmatrix} \end{array}; \tag{3.6}$$

здесь числа $\mathfrak{p}_{k-s-2,j}$ *и* $\mathfrak{p}_{k-s-1,j}$ *даны формулами (3.1) и* (3.2), $j = k-s-1, k-s, \dots, k$.

Доказательство. Воспользуемся формулами (2.14)–(2.17) и (2.21)–(2.22). В результате получим соотношения (3.5)–(3.6). ■

12.4. Свойства биортогональной системы

Пусть система функционалов $\{g^*_i\}_{i \in {J'}_{N-s-3}}$, $g^*_i \in (\mathbb{C}_X)^*$, с компактными носителями на $[a, b]$ биортогональна системе функций $\{\omega^*_j\}_{j \in {J'}_{N-s-3}}$, так что

$$\langle g^*_i, \omega^*_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in {J'}_{N-s-3}. \tag{4.1}$$

Ввиду аппроксимационных соотношений (2.6) следствием биортогональности (4.1) являются равенства

$$\langle g_i^*, \varphi\rangle = \mathbf{a}_i^* \quad \forall i \in {J'}_{N-s-3}. \tag{4.2}$$

Лемма 3. *Пусть выполнено условие (C). Тогда при $i \in {J'}_{N-s-3}$ справедливы соотношения*

$$\langle g_i^*, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}/c_j^* \qquad \text{при} \quad -1 \le j \le k-s-3, \tag{4.3}$$

$$\langle g_i^*, \omega_{j+s+2}\rangle = \delta_{i,j}/c_{j+s+2} \qquad \text{при} \quad k-s \le j \le N-s-3. \tag{4.4}$$

Доказательство. Используя формулы (2.21), имеем

$$\langle g_i^*, \omega_j\rangle = \langle g_i^*, \omega_j^*\rangle/c_j^* \qquad \text{при} \quad -1 \le j \le k-s-3,$$

откуда, учитывая свойство биортогональности, получаем соотношение (4.3). Благодаря формулам (2.22) для $k-s \le j \le N-s-3$ находим

$$\langle g_i^*, \omega_{j+s+2}\rangle = \langle g_i^*, \omega_j^*\rangle/c_{j+s+2}^*,$$

что доказывает соотношение (4.4). ∎

Рассмотрим множество $\Pi_{k,N,s}$ пар (i,j):

$$\Pi_{k,N,s} \stackrel{\text{def}}{=} \{(i',j') \mid i' \in {J'}_{N-s-3}, j' \in J_{N-1}\} \backslash \{(k-s-2,k-s-2),$$
$$(k-s-1,k-s-2),(k-s-1,k-s-1)\}.$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 4, а кроме того*

$$\mathrm{supp} g_{-1}^* \subset [x_0^*, x_0^*+\varepsilon], \quad \mathrm{supp} g_i^* \subset [x_i^*, x_i^*+\varepsilon] \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall i \in J_{N-2}. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\langle g_i^*, \omega_j\rangle = 0 \qquad \text{при} \quad (i,j) \in \Pi_{k,N,s}, \tag{4.6}$$

$$\langle g_{k-s-2}^*, \omega_{k-s-2}\rangle = 1/c_{k-s-2}^*, \tag{4.7}$$

$$\langle g_{k-s-1}^*, \omega_{k-s-2}\rangle = \frac{1}{c_{k+1}^*}\frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k-s-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})}, \tag{4.8}$$

$$\langle g_{k-s-1}^*, \omega_{k-s-1}\rangle = \frac{1}{c_{k+1}^*}\frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Применяя свойство (4.5) и формулу (1.6) при $j = k-s-3$, $t \in (x_{k-s-2}, x_{k-s-1})$, имеем

$$\omega_{k-s-3}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{k-s-2})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-3}, \mathbf{a}_{k-s-2})},$$

так что учитывая расположение носителя функционала g^*_{k-s-2}, а также формулу (4.2), получаем

$$\langle g^*_{k-s-2}, \omega_{k-s-3} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}^*_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-2})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-3}, \mathbf{a}_{k-s-2})}.$$

Принимая во внимание соотношение (2.19), находим

$$\langle g^*_{k-s-2}, \omega_{k-s-3} \rangle = 0.$$

Остальные соотношения (4.6) справедливы из-за того, что носители рассматриваемых там функционалов g^*_i не пересекаются с носителями фигурирующих в них функций ω_j.

Рассматривая $\langle g^*_{k-s-2}, \omega_{k-s-2} \rangle$, воспользуемся верхней частью формулы (1.6) при $j = k-s-2$; аналогично предыдущему находим

$$\langle g^*_{k-s-2}, \omega_{k-s-2} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-3}, \mathbf{a}^*_{k-s-2},)}{\det(\mathbf{a}_{k-s-3}, \mathbf{a}_{k-s-2})}.$$

Применяя здесь соотношение (2.19), получаем (4.7). Переходя к отысканию $\langle g^*_{k-s-1}, \omega_{k-s-2} \rangle$, воспользуемся нижней частью формулы (1.6) при $j = k-s-2$; в результате выводим

$$\langle g^*_{k-s-1}, \omega_{k-s-2} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}^*_{k-s-1}, \mathbf{a}_{k-s-1},)}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})}. \tag{4.10}$$

Ввиду (2.20) имеем соотношение

$$\mathbf{a}_{k+1} = c^*_{k+1} \mathbf{a}^*_{k-s-1}, \tag{4.11}$$

подстановка которого в (4.10) приводит к формуле (4.8).

Наконец, доказательство (4.9) сводится к использованию верхней части формулы (1.6) при $j = k-s-1$, так что

$$\langle g^*_{k-s-1}, \omega_{k-s-1} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}^*_{k-s-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})};$$

применяя здесь (4.11), приходим к (4.9).

Лемма доказана. ■

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} = \{\mathfrak{q}_{i,j}\}$ размером $N-s-1 \times N+1$ с элементами

$$\mathfrak{q}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_i^*, \omega_j \rangle \quad \text{при} \quad i \in J'_{N-s-3},\ j \in J'_{N-1}. \tag{4.12}$$

В соответствии с леммами 3 и 4 эта матрица может быть представлена в виде

$$\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccc|}
 & -1 & \ldots & k-s-3 & k-s-2 & k-s-1 & k-s & \ldots & k+1 & k+2 & \ldots & N-1 \\
\hline
-1 & 1/c^*_{-1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
k-s-3 & 0 & \ldots & 1/c^*_{k-s-3} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
k-s-2 & 0 & \ldots & 0 & 1/c^*_{k-s-2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
k-s-1 & 0 & \ldots & 0 & \mathfrak{q}_{k-s-1,k-s-2} & \mathfrak{q}_{k-s-1,k-s-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
k-s & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1/c^*_{k+2} & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
N-s-3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1/c^*_{N-1}
\end{array}, \tag{4.13}$$

где (согласно формулам (4.8) и (4.9))

$$\mathfrak{q}_{k-s-1,k-s-2} = \frac{1}{c^*_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k-s-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})},$$

$$\mathfrak{q}_{k-s-1,k-s-1} = \frac{1}{c^*_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})}.$$

Матрица, представленная формулой (4.13), называется *матрицей продолжения.*

Теорема 5. *Матрица* $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ *является левой обратной к матрице* $\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}$*:*

$$\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}} = I_{N-s-1}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Введем вектор-столбец

$$g_* \stackrel{\text{def}}{=} (g^*_{-1}, g^*_0, \ldots, g^*_{N-s-3})^T.$$

Транспонируя (3.5), имеем

$$\omega_*^T = \omega^T \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}. \tag{4.15}$$

Умножая (4.15) слева на одностолбцовую матрицу g_*, получаем

$$g_* \omega_*^T = g_* \omega^T \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}. \tag{4.16}$$

Итак, слева в (4.16) находится единичная квадратная матрица $N-s-1$-го порядка (ввиду биортогональности систем $\{g_i^*\}_{i\in J'}$ и $\{\omega_j^*\}_{j\in J'}$), а произведение $g_*\omega^T$ представляет собой матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ (см. определение (4.12) для ее элементов). Формула (4.14) доказана. ■

Рассмотрим матрицы вида

$$\mathfrak{Q} =$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} -1 & \dots & k-s-3 & k-s-2 & k-s-1 & k-s & \dots & k+1 & k+2 & \dots & N-1 \end{array} \\
\begin{array}{l} -1 \\ \dots \\ k-s-3 \\ k-s-2 \\ k-s-1 \\ k-s \\ \dots \\ N-s-3 \end{array} &
\begin{pmatrix}
z_{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & z_{k-s-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & z_{k-s-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{k+2} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & z_{N-1}
\end{pmatrix},
\end{array} \tag{4.17}$$

где x, y, z_i — некоторые вещественные числа ($i \in \{-1, 0, \ldots, k-s-2\} \cup \{k+2, k+3, \ldots, N-1\}$), а столбцы (в количестве $s+2$) с номерами $k-s$, …, $k+1$ состоят из нулей.

Лемма 5. *Для матрицы $\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}$ существует единственная левая обратная матрица вида (4.17).*

Доказательство. Перемножая матрицы $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}$, получаем квадратную матрицу

$$\mathfrak{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}$$

порядка $N-s-1$; ее элементы $\mathfrak{u}_{ij}$, $i,j \in {J'}_{N-s-3}$, определяются формулами

$$\mathfrak{u}_{jj} \stackrel{\text{def}}{=} z_j c_j^*, \quad \mathfrak{u}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \text{при } i \neq j,\ i,j \in \{-1, 0, 1, \ldots, k-s-2\},$$

$$\mathfrak{u}_{jj} \stackrel{\text{def}}{=} z_{j+s+2} c^*_{j+s+2}, \quad \mathfrak{u}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$\text{при } i \neq j,\ i,j \in \{k-s, k-s+1, \ldots, N-s-3\},$$

$$\mathfrak{u}_{k-s-1,k-s-2} \stackrel{\text{def}}{=} x c^*_{j-s-2} + y \mathfrak{p}_{k-s-2,k-s-1},$$

$$\mathfrak{u}_{k-s-1,k-s-1} \stackrel{\text{def}}{=} y \mathfrak{p}_{k-s-1,k-s-1},$$

$$\mathfrak{u}_{k-s-1,j} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \text{при } j \in \{-1, 0, \ldots, N-s-3\} \backslash \{k-s-2, k-s-1\}.$$

Таким образом, из соотношения $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_{N\{\Gamma\}} = I_{N-s-1}$ неизвестные x, y, z_{-1}, z_0, …, z_{k-s-2} и z_{k+2}, z_{k+3}, …, z_{N-1} определяются однозначно (разрешимость соответствующих уравнений с упомянутыми неизвестными вытекает из существования обратной матрицы, установленного в теореме 5). ■

12.5. Реконструкция и декомпозиция

Рассмотрим оператор $P_{N\{\Gamma\}}$ проектирования пространства $\mathbb{S}_N$ на подпространство $\mathbb{S}_{N\{\Gamma\}}$, задаваемый формулой

$$P_{N\{\Gamma\}}u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\in J'_{N-s-3}} \langle g_j^*, u\rangle\, \omega_j^* \quad \forall u\in \mathbb{S}_N, \tag{5.1}$$

и введем оператор $Q_{N\{\Gamma\}} = \mathcal{I} - P_{N\{\Gamma\}}$, где $\mathcal{I}$ — тождественный в $\mathbb{S}_N$ оператор.

В рассматриваемом в данном разделе случае удаления гнезда *пространством вэйвлетов (всплесков)* называется пространство $\mathbb{W}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{N\{\Gamma\}}\mathbb{S}_N$. Итак, получаем прямое разложение

$$\mathbb{S}_N = \mathbb{S}_{N\{\Gamma\}} \dot{+} \mathbb{W}_{N\{\Gamma\}} \tag{5.2}$$

— *сплайн-вэйвлетное разложение* пространства $\mathbb{S}_N$.

Пусть $u\in\mathbb{S}_N$; используя соотношение (5.2), получаем два представления элемента u

$$u = \sum_{j\in J'_{N-1}} c_j\omega_j, \qquad u = \sum_{i\in J'_{N-s-3}} a_i\omega_i^* + \sum_{j\in J'_{N-1}} b_j\omega_j, \tag{5.3}$$

где

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_i^*, u\rangle, \quad b_j,\ c_j\ \in \mathbb{R}^1. \tag{5.4}$$

Из (4.8) и (5.3) имеем

$$\sum_{j\in J'_{N-1}} c_j\omega_j = \sum_{i\in J'_{N-s-3}} a_i \sum_{j\in J'_{N-1}} \mathfrak{p}_{i,j}\omega_j + \sum_{j\in J'_{N-1}} b_j\omega_j,$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j\}_{j\in J'_{N-1}}$ получаем *формулы реконструкции*

$$c_j = \sum_{i\in J'_{N-s-3}} a_i\mathfrak{p}_{i,j} + b_j \quad \forall j\in J'_{N-1}. \tag{5.5}$$

Используя представление (5.4), перепишем формулы (5.5) в виде

$$c_j = \sum_{i\in J'_{N-s-3}} \sum_{j'\in J'_{N-1}} c_{j'}\langle g_i^*, \omega_{j'}\rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \qquad \forall j\in J'_{N-1}.$$

Учитывая, что $\mathfrak{q}_{i,j'} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_i^*, \omega_{j'}\rangle$, отсюда имеем

$$b_j = c_j - \sum_{i\in J'_{N-s-3}} \sum_{j'\in J'_{N-1}} c_{j'}\mathfrak{q}_{i,j'}\mathfrak{p}_{i,j} \qquad \forall j\in J'_{N-1}. \tag{5.6}$$

Подставляя первое соотношение из (5.3) в (5.4), находим

$$a_i = \sum_{j'\in J'_{N-1}} c_{j'}\mathfrak{q}_{i,j'} \qquad \forall i \in J'_{N-s-3}. \tag{5.7}$$

Формулы (5.6) и (5.7) представляют собой *формулы декомпозиции.*

Введем вектор-столбцы

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{-1},\ldots,a_{N-s-3})^T, \quad \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_{-1},\ldots,b_{N-1})^T, \tag{5.8}$$

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{-1},\ldots,c_{N-1})^T \tag{5.9}$$

и, используя обозначения (5.8)–(5.9), перепишем формулы декомпозиции (5.6)–(5.7) в матричном виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{c}. \tag{5.10}$$

Вектор $\mathbf{a}$ называется *основной*, а вектор $\mathbf{b}$ — *вэйвлетной* составляющей исходного вектора (потока) $\mathbf{c}$.

12.6. О представлениях вэйвлетного разложения

При натуральном числе M, $M \geq 2$, введем обозначение

$$\mathcal{F}_M \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f} = (f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_{M-2}, f_{M-1})^T,$$
$$f_i \in \mathbb{R}^1,\ i = -1, 0, 1, \ldots, M-1\}.$$

Рассмотрим линейный оператор из пространства $\mathcal{C}_N \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_N$ в пространство $\mathcal{A}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{N-s-2}$, определяемый матрицей $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ в нем. Обозначим ядро этого оператора $\mathcal{B}_{N\{\Gamma\}}$,

$$\mathcal{B}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \in \mathcal{C}_N, \quad \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{b} = 0\}.$$

Ввиду соотношений (1.8) и (5.1) имеем $\dim \mathcal{B}_{N\{\Gamma\}} = s + 2$.

Теорема 6. *Множество вэйвлетных составляющих совпадает с пространством* $\mathcal{B}_{N\{\Gamma\}}$.

Доказательство. К первому из соотношений (5.10) применим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ и воспользуемся теоремой 5: ввиду формулы (4.14) получаем

$$\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{b} = \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{c} - \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{c} = 0.$$

Итак, вектор $\mathbf{b}$ содержится в ядре $\ker \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ оператора $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$. Обратно: любой вектор из $\ker \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ может рассматриваться как вэйвлетная составляющая некоторого вектора из $\mathcal{C}_N$. Действительно, если $\mathbf{b}$ — произвольный вектор из $\mathcal{B}_{N\{\Gamma\}}$, то полагая $\mathbf{c} = \mathbf{b}$, видим, что соотношения (5.10) выполнены, и при этом $\mathbf{a} = 0$. ■

Пусть $\mathcal{E}_{N\{\Gamma\}}$ — прямое произведение пространств $\mathcal{A}_{N\{\Gamma\}}$ и $\mathcal{B}_{N\{\Gamma\}}$: $\mathcal{E}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{N\{\Gamma\}} \times \mathcal{B}_{N\{\Gamma\}}$, так что

$$\mathcal{E}_{N\{\Gamma\}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathbf{a} \in \mathcal{A}_{N\{\Gamma\})},\ \mathbf{b} \in \mathcal{B}_{N\{\Gamma\}} \right\}.$$

Рассмотрим линейный оператор

$$\mathfrak{D}_{N\{\Gamma\}} :\ \mathcal{C}_N \mapsto \mathcal{E}_{N\{\Gamma\}}, \quad \mathfrak{D}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} \\ I_N - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} \end{pmatrix};$$

для него верна эквивалентность

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} \\ I_N - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} \end{pmatrix} \mathbf{c} \iff \begin{cases} \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{c} \\ \mathbf{b} = (I_N - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}})\mathbf{c} \end{cases};$$

этот оператор называется *оператором декомпозиции.*

Введем линейный оператор $\mathfrak{R}_{N\{\Gamma\}} :\ \mathcal{E}_{N\{\Gamma\}} \mapsto \mathcal{C}_N$, $\mathfrak{R}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}} \quad I_N)$; он удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R}_{N\{\Gamma\}} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}} & I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \iff \mathbf{c} = \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Оператор $\mathfrak{R}_{N\{\Gamma\}}$ называется *оператором реконструкции.*

Теорема 7. *Операторы $\mathfrak{D}_{N\{\Gamma\}}$ и $\mathfrak{R}_{N\{\Gamma\}}$ взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathcal{C}_N$ и $\mathcal{E}_{N\{\Gamma\}}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\mathfrak{R}_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{D}_{N\{\Gamma\}}$:

$$\mathfrak{R}_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{D}_{N\{\Gamma\}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}} & I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} \\ I_N - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} + I_N - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} = I_N.$$

С другой стороны с учетом теоремы 5 имеем

$$\mathfrak{D}_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{R}_{N\{\Gamma\}}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\\ I_N - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}} & I_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathbf{a} + \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{b}\\ \mathbf{b} - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix},$$

что и требовалось установить. ■

12.7. Матричное представление оператора декомпозиции

Здесь рассмотрим вэйвлетную составляющую, даваемую первой из формул (5.10). Произведение $\Pi_{N\{\Gamma\}}$ матриц $\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}$ и $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$:

$$\Pi_{N\{\Gamma\}} =$$

$$\begin{array}{c}
\\
-1\\ \dots\\ k-s-3\\ k-s-2\\ k-s-1\\ k-s\\ \dots\\ k\\ k+1\\ k+2\\ \dots\\ N-1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
-1\ldots k-s-3 & & k-s-2 & k-s-1 & k-s\ldots k+1 & & & k+2\ldots & & N-1
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0\ldots & 0 & r_{k-s-1,k-s-2} & r_{k-s-1,k-s-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0\ldots & 0 & r_{k-s,k-s-2} & r_{k-s,k-s-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0\ldots & 0 & r_{k,k-s-2} & r_{k,k-s-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0\ldots & 0 & r_{k+1,k-s-2} & r_{k+1,k-s-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}
\end{array},
\tag{7.1}$$

где

$$r_{i,k-s-2} = \mathfrak{p}_{k-s-2,i}/c^*_{k-s-2} + \mathfrak{p}_{k-s-1,i}\mathfrak{q}_{k-s-1,k-s-2}, \tag{7.2}$$

$$r_{i,k-s-1} = \mathfrak{p}_{k-s-1,i}\mathfrak{q}_{k-s-1,k-s-1}, \qquad i \in \{k-s-1, k-s, \ldots, k\}, \tag{7.3}$$

$$r_{k+1,k-s-2} = c^*_{k+1}\mathfrak{q}_{k-s-1,k-s-2}, \qquad r_{k+1,k-s-1} = c^*_{k+1}\mathfrak{q}_{k-s-1,k-s-1}. \tag{7.4}$$

Из соотношений (7.2)–(7.4) согласно формулам (3.1)–(3.4), (4.8)–(4.9) и (4.12) получаем

$$r_{i,k-s-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})} + \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_i)}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k-s-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})}, \tag{7.5}$$

$$r_{i,k-s-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_i)}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})} =$$

$$= \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_i)}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})}, \qquad i \in \{k-s-1, k-s, \ldots, k\}, \tag{7.6}$$

$$r_{k+1,k-s-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k-s-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})}, \qquad r_{k+1,k-s-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})}. \tag{7.7}$$

Из (7.5) и (7.6) при $i = k-s-1$ получаем

$$r_{k-s-1,k-s-2} = 0, \qquad r_{k-s-1,k-s-1} = 1; \tag{7.8}$$

кроме того, формулы (7.7) получаются из (7.5) – (7.6) при $i = k+1$. Итак, формулы (7.5)–(7.7) могут быть заменены объединением формул (7.8) и формул

$$r_{i,k-s-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})} + \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k-s-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k+1})} \times r_{i,k-s-1}, \tag{7.9}$$

$$r_{i,k-s-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_i)}{\det(\mathbf{a}_{k-s-2}, \mathbf{a}_{k-s-1})}, \qquad i \in \{k-s, \ldots, k, k+1\}, \tag{7.10}$$

Пусть p и q — натуральные числа. Через E_p обозначим квадратную единичную матрицу размера p, через O_p — нулевую квадратную матрицу размера p, а через O_p^q обозначим нулевую прямоугольную матрицу размера $p \times q$.

Благодаря формулам (7.8)–(7.10) матрицу $\Pi_{N\{\Gamma\}}$ можно представить в блочном виде

$$\Pi_{N\{\Gamma\}} = \begin{pmatrix} E_{k-s+1} & O_{k-s+1}^{s+2} & O_{k-s+1}^{N-k-2} \\ R_{s+2}^{k-s+1} & O_{s+2} & O_{s+2}^{N-k+2} \\ O_{N-k-2}^{k-s+1} & O_{N-k-2}^{s+2} & E_{N-k-2} \end{pmatrix}, \tag{7.11}$$

где матрица R_{s+2}^{k-s+1} дается формулой

$$R_{s+2}^{k-s+1} = \begin{array}{c} \\ k-s \\ \cdots \\ k \\ k+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -1 & \ldots & k-s-3 & k-s-2 & k-s-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & r_{k-s,k-s-2} & r_{k-s,k-s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & r_{k,k-s-2} & r_{k,k-s-1} \\ 0 & \ldots & 0 & r_{k+1,k-s-2} & r_{k+1,k-s-1} \end{pmatrix} \end{array}; \tag{7.12}$$

нумерация строк и столбцов в (7.12) соответствует их нумерации в матрице $\Pi_{N\{\Gamma\}}$ (см. формулу (7.1)).

Из (7.11) имеем

$$I - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}} = \begin{pmatrix} O_{k-s+1} & O^{s+2}_{k-s+1} & O^{N-k-2}_{k-s+1} \\ -R^{k-s+1}_{s+2} & I_{s+2} & O^{N-k+2}_{s+2} \\ O^{k-s+1}_{N-k-2} & O^{s+2}_{N-k-2} & O_{N-k-2} \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

так что ввиду равенства (7.13) и первого соотношения из (5.10) для вэйвлетной составляющей получаем

$$b_j = 0$$
$$\text{при} \quad j \in \{-1, 0, \ldots, k-s-1\} \cup \{k+2, k+3, \ldots, N-1\}, \tag{7.14}$$

$$b_j = c_j - r_{j,k-s-2}c_{k-s-2} - r_{j,k-s-1}c_{k-s-1}$$
$$\text{при} \quad j \in \{k-s, k-s+1, \ldots, k+1\}. \tag{7.15}$$

12.8. Сплайн-вэйвлетное разложение пространств непрерывных сплайнов

Предположим, что $\varphi \in C[a,b]$. Для непрерывности рассматриваемых сплайнов необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{a}_j = \varphi_{j+1}$; здесь $\varphi_j \overset{\text{def}}{=} = \varphi(x_j)$.

Не нарушая общности, считаем, что вектор-функция $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = (1, f(t))^T$, где $f \in C[a,b]$. В этом случае

$$\det(\varphi(t'), \varphi(t'')) = f(t'') - f(t'). \tag{8.1}$$

Обозначая $f_i \overset{\text{def}}{=} f(x_i)$ и используя (8.1), из (7.5)–(7.7) имеем

$$r_{i,k-s-2} = \frac{f_{k+2} - f_{i+1}}{f_{k+2} - f_{k-s-1}} + \frac{f_{k-s} - f_{k+2}}{f_{k+2} - f_{k-s-1}} \times r_{i,k-s-1}, \tag{8.2}$$

$$r_{i,k-s-1} = \frac{f_{i+1} - f_{k-s-1}}{f_{k-s} - f_{k-s-1}}, \qquad i \in \{k-s, \ldots, k, k+1\}, \tag{8.3}$$

Подставляя (8.3) в (8.2), имеем

$$r_{i,k-s-2} = \frac{f_{k+2} - f_{i+1}}{f_{k+2} - f_{k-s-1}} + \frac{f_{k-s} - f_{k+2}}{f_{k+2} - f_{k-s-1}} \times \frac{f_{i+1} - f_{k-s-1}}{f_{k-s} - f_{k-s-1}} =$$

$$= \frac{1}{(f_{k+2} - f_{k-s-1})(f_{k-s} - f_{k-s-1})} \times [(f_{k+2} - f_{i+1})(f_{k-s} - f_{k-s-1}) +$$

$$+(f_{k-s} - f_{k+2})(f_{i+1} - f_{k-s-1})].$$

Раскрывая скобки и производя элементарные преобразования, получаем

$$r_{i,k-s-1} = \frac{f_{k-s} - f_{i+1}}{f_{k-s} - f_{k-s-1}}. \tag{8.4}$$

Из (7.14) и (7.15) с помощью формул (8.3)–(8.4) находим

$$b_i = 0$$

$$\text{при} \quad i \in \{-1, 0, \ldots, k-s-1\} \cup \{k+2, k+3, \ldots, N-1\}, \tag{8.5}$$

$$b_i = c_i - \frac{f_{k-s} - f_{i+1}}{f_{k-s} - f_{k-s-1}} \times c_{k-s-2} - \frac{f_{i+1} - f_{k-s-1}}{f_{k-s} - f_{k-s-1}} \times c_{k-s-1}$$
$$\text{при} \quad i \in \{k-s, k-s+1, \ldots, k+1\}. \tag{8.6}$$

12.9. Сплайн-вэйвлетное разложение пространств непрерывных сплайнов первой степени на равномерной сетке

Полагая $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t)^T$ (т. е. беря $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} t$), из соотношений (8.5)–(8.6) находим

$$b_i = 0$$

$$\text{при} \quad i \in \{-1, 0, \ldots, k-s-1\} \cup \{k+2, k+3, \ldots, N-1\}, \tag{9.1}$$

$$b_i = c_i - \frac{x_{k-s} - x_{i+1}}{x_{k-s} - x_{k-s-1}} \times c_{k-s-2} - \frac{x_{i+1} - x_{k-s-1}}{x_{k-s} - x_{k-s-1}} \times c_{k-s-1}$$
$$\text{при} \quad i \in \{k-s, k-s+1, \ldots, k+1\}. \tag{9.2}$$

Полагая $h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{N}$ и $x_j \stackrel{\text{def}}{=} jh + a$, $j = 0, 1, \ldots, N$, из (9.1)–(9.2) находим

$$b_i = 0$$

$$\text{при} \quad i \in \{-1, 0, \ldots, k-s-1\} \cup \{k+2, k+3, \ldots, N-1\}, \tag{9.3}$$

$$b_i = c_i - (k-s-i-1) \times c_{k-s-2} + (k-s-i-2) \times c_{k-s-1}$$
$$\text{при} \quad i \in \{k-s, k-s+1, \ldots, k+1\}. \tag{9.4}$$

Вводя обозначения $j = i - p$, $p \stackrel{\text{def}}{=} k - s$ и $q \stackrel{\text{def}}{=} k + 1$, из (9.4) выводим

$$b_{j+p} = (j+1)(c_{p-2} - c_{p-1}) + c_{j+p} - c_{p-1}, \quad j = 0, 1, \ldots, q. \tag{9.5}$$

Учитывая, что систему функционалов $\{g_i\}$, $g_i \in (C[a,b])^*$, биортогональную к $\{\omega_j\}$ в рассматриваемом случае можно взять в виде $\langle g_i, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{i+1})$, $u \in C[a,b]$, положим

$$c_j \stackrel{\text{def}}{=} u_{j+1}, \tag{9.6}$$

где $u_{j+1} \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{j+1})$.

Пусть функция $u(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a,b]$. Подставляя (9.6) в (9.5) и используя формулу Лагранжа, находим

$$b_{j+p} = -(j+1)u'(\xi_p)h + u'(\xi_{j,p})(j+1)h = (j+1)h^2u''(\xi),$$

где $x_{p-1} < \xi_p < x_{p-1}$, $x_{p-2} < \xi_{j,p} < x_{j+p-1}$, $x_{p-2} < \xi < x_{j+p-1}$. Отсюда получаем оценку вэйвлетной составляющей

$$|b_{j+p}| \le (j+1)h^2\|u''\|_{C[a,b]}, \quad j = 0, 1, \ldots, q.$$

12.10. О совокупностях гнезд

Пусть выполнено условие

(C') Из сетки X удаляются гнезда узлов

$$\Gamma_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x_{k_i}, x_{k_i+1}, \ldots, x_{k_i+s_i+1}\}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, r\}, \tag{10.1}$$

так что получается сетка

$$\widetilde{X} \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \Gamma_i, \tag{10.2}$$

а из цепочки A удаляются множества векторов

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_{k_i-1}, \mathbf{a}_{k_i}, \ldots, \mathbf{a}_{k_i+s_i}\}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, r\}; \tag{10.3}$$

при этом полученная в результате естественно упорядоченная цепочка

$$\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus \bigcup_{i=1}^{r} A_i \tag{10.4}$$

является полной.

По сетке $\widetilde{X}$ и по цепочке $\widetilde{A}$ описанным выше стандартным способом построим систему функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j \in J'_{\widetilde{N}-1}}$, где

$$\widetilde{N} \stackrel{\text{def}}{=} N - \sum_{i=1}^{r}(s_i + 2). \tag{10.5}$$

В результате получаются представления функций $\widetilde{\omega}_i$ с помощью линейной комбинации функций ω_j, называемые калибровочными соотношениями. Введем функции

$$\psi(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} j - \sum_{l=1}^{i}(s_l+2) \quad \text{при} \quad j \in \{k_i+s_i+2, \dots, k_{i+1}-1\}, \tag{10.6}$$

$$\chi(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} k_i - \sum_{l=1}^{i-1}(s_l+2) - 1 \quad \text{при} \quad j \in \{k_i, \dots, k_i+s_i+1\}, \tag{10.7}$$

где сумма с верхним пределом меньше нижнего считается равной нулю. Обозначая $k_{r+1} \stackrel{\text{def}}{=} N$, $\omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{-1}, \omega_0, \dots, \omega_{N-1})^T$ и $\widetilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_{-1}, \omega_0, \dots, \widetilde{\omega}_{\widetilde{N}-1})^T$, запишем калибровочные соотношения в виде

$$\widetilde{\omega} = \mathfrak{P}\omega, \tag{10.8}$$

где элементы $\mathfrak{p}_{ij}$, $i \in J'_{\widetilde{N}-1}$, $j \in J'_{N-1}$, матрицы $\mathfrak{P}$ описываются следующим образом:

$$\mathfrak{p}_{jj} = 1 \quad \text{при} \quad j \in \{-1, 0, \dots, k_1-1\}, \tag{10.9}$$

$$\mathfrak{p}_{\psi(i,j),j} = 1 \quad \text{при} \quad j \in \{k_i+s_i+2, \dots, k_{i+1}-1\}, \tag{10.10}$$

$$\mathfrak{p}_{\chi(i,j),j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_{\chi(i,j)}\rangle,\ \mathfrak{p}_{\chi(i,j)+1,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_{\chi(i,j)+1}\rangle \tag{10.11}$$

$$\text{при } j \in \{k_i, \dots, k_i+s_i+1\}, \quad i \in \{1, \dots, r\}, \tag{10.12}$$

а все остальные элементы матрицы $\mathfrak{P}$ равны нулю.

Формулы (10.1)–(10.12) позволяютиспользовать совокупность гнезд.

Развернем формулы (10.8)–(10.12) при

$$k_1 = 2,\ k_2 = 8,\ k_3 = 11,\ k_4 = 13, \tag{10.13}$$

$$s_1 = 2,\ s_2 = 0,\ s_3 = -1,\ s_4 = 1. \tag{10.14}$$

В результате получим

$$\mathfrak{p}_{jj} = 1, \quad \text{при} \quad j \in \{-1, 0, 1\}, \tag{10.15}$$

$$\mathfrak{p}_{j,j+4} = 1 \quad \text{при} \quad j \in \{2, 3\}, \tag{10.16}$$

$$\mathfrak{p}_{4,10} = 1, \quad \mathfrak{p}_{5,12} = 1, \tag{10.17}$$

$$\mathfrak{p}_{j,j+10} = 1 \quad \text{при} \quad j \in \{6, 7, 8\}, \tag{10.18}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i \rangle, \quad \text{при} \;\; i \in \{1, 2\}, \;\; j \in \{2, 3, 4, 5\}, \tag{10.19}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i \rangle, \quad \text{при} \quad i \in \{3, 4\}, j \in \{8, 9\}, \tag{10.20}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i \rangle, \quad \text{при} \quad i \in \{4, 5\}, j \in \{11\}, \tag{10.21}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i \rangle, \quad \text{при} \quad i \in \{5, 6\}, j \in \{13, 14, 15\}. \tag{10.22}$$

Таким образом, в случае, описанном формулами (10.13)–(10.22), матрица $\mathfrak{P}^T$ имеет вид:

$$\mathfrak{P}^T =$$

$$= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccc}
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{X} & \mathbf{X} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}
\end{array} \right)
\end{array};$$

здесь символом $\mathbf{X}$ обозначены элементы матрицы, вычисляемые по формулам (10.19)–(10.22).

12.11. Заключительные замечания

Полученные здесь результаты распространяются на конечное множество гнезд. Пусть натуральные числа k_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, r$, удовлетворяют соотношениям

$$k_0 = 0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_r < N - 2, \quad s_l + 2 < k_l - k_{l-1}, \quad l = 1, 2, \ldots, r,$$

где $s_l \geq -1$ — некоторые целые числа.

Рассмотрим гнезда (т. е. множества узлов, удаляемых из основной сетки X)

$$\Gamma_q \stackrel{\text{def}}{=} \{x_{k_q - s_q}, x_{k_q - s_q + 1}, \ldots, x_{k_q + 1}\}, \qquad q = 1, 2, \ldots, r.$$

Весьма просто проверить, что полученные ранее результаты справедливы, если во всех утверждениях заменить гнездо Γ на совокупность гнезд $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$.

13. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В СПЛАЙН-ВЭЙВЛЕТНОМ РАЗЛОЖЕНИИ

Исследования в области вэйвлетных разложений числовых информационных потоков требуют разработки гибкого аппарата сплайн-вэйвлетных аппроксимаций с учетом свойств гладкости и скорости изменения упомянутых потоков. Для этого требуется использовать сплайновые аппроксимации различных порядков, неравномерные сетки, разложения со свойствами локализации в отдельных частях рассматриваемой области и применять гнездовые разложения для экономии вычислительных ресурсов с учетом возможностей параллельных вычислительных систем. Все эти аспекты нашли отражение в последних исследованиях (см. работы [21, 93]).

Цель данного раздела состоит в том, чтобы в случае двухгнездового сплайн-вэйвлетного разложения рассмотреть эффект интерференции в вэйвлетном потоке и исследовать случай двухгнездового сплайн-вэйвлетного разложения: оказывается, что в этом случае одна из вэйвлетных компонент может быть вычислена из другой компоненты умножением последней на некоторую константу (при передаче вэйвлетного потока по каналам связи это приводит к сокращению объема передачи вэйвлетного потока на одну треть. В данном разделе установлены аппроксимационные свойства вэйвлетной аппроксимации для гладких потоков, а именно, для потоков, порождаемых дважды непрерывно дифференцируемой функцией; оказывается, что рассматриваемый вэйвлетный поток имеет порядок малости, соответствующий порядку малости второго дифференциала упомянутой функции.

13.1. Предварительные сведения

Для удобства читателя повторим обозначения и определения, введенные в пункте 1 раздела 12.

Для любого натурального числа m введем обозначения

$$J_m \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, m\},\ J'_m \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, 0, 1, \ldots, m\}.$$

Пусть N — натуральное число. На отрезке $[a, b]$ рассмотрим сетку

$$X: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N = b, \tag{1.1}$$

и обозначим

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2}),\ j \in J'_{N-1}, \qquad G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=0}^{N-1} (x_i, x_{i+1}).$$

Система векторов $\{\mathbf{a}_i\}_{i \in J'_m}$ пространства $\mathbb{R}^2$ называется полной цепочкой векторов, если $\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ при $j \in J_m$.

Пусть $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i \in J'_{N-1}}$ — полная цепочка двумерных векторов.

По двухкомпонентной вектор-функции $\varphi(t)$, $t \in G$, с линейно независимыми компонентами на любом интервале $(a', b') \subset G$, определим функции $\omega_j(t)$, $t \in G_N$, $j \in J'_{N-1}$, с помощью аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j \in J'_{N-1}} \mathbf{a}_j\, \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in G, \quad \omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G \backslash S_j,\ j \in J'_{N-1};$$

таким образом, функции $\omega_j(t)$, $j \in J'_{N-1}$, определены на множестве G следующими формулами:

$$\omega_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_0)}{\det(\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0)} & \text{при } t \in (x_0, x_1), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x_0, x_1], \end{cases} \tag{1.2}$$

для $j \in J_{N-2}$

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x_j, x_{j+2}], \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\omega_{N-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{N-2}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1})} & \text{при } t \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 \quad \text{при } t \notin [x_{N-1}, x_N], \end{cases} \tag{1.4}$$

Дальше рассматривается пространство $\mathbb{S}_N \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j \in J'_{N-1}}$, где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ — линейная оболочка функций, указанных в фигурных скобках, а Cl_p — замыкание в топологии поточечной сходимости. Заметим, что ввиду предположений относительно вектор-функции $\varphi(t)$ функции $\omega_j(t)$, $j \in J'_{N-1}$, линейно независимы на множестве G и, следовательно, являются базисом пространства $\mathbb{S}_N$; отсюда имеем

$$\dim \mathbb{S}_N = N + 1. \tag{1.5}$$

Из сетки (1.1) удалим узлы x_{k-1} и x_{k+1}, так что укрупненная сетка имеет вид $\widetilde{X}\,:\, a=\widetilde{x}_0<\widetilde{x}_1<\widetilde{x}_2<\ldots<\widetilde{x}_{\widetilde{N}-1}<\widetilde{x}_{\widetilde{N}}=b$, где $\widetilde{N}=N-2$, а $\widetilde{x}_j=x_j$ при $0\le j\le k-2$, $\widetilde{x}_{k-1}=x_k$, $\widetilde{x}_j=x_{j+2}$ при $k\le j\le \widetilde{N}$.

Положим

$$\widetilde{S}_j\stackrel{\text{def}}{=}(\widetilde{x}_j,\widetilde{x}_{j+1})\cup(\widetilde{x}_{j+1},\widetilde{x}_{j+2}),\ j\in J_{N-4},\qquad \widetilde{G}\stackrel{\text{def}}{=}\bigcup_{j\in J_{N-3}}(\widetilde{x}_j,\widetilde{x}_{j+1}).$$

Кроме того, рассмотрим полную цепочку векторов $\widetilde{A}\stackrel{\text{def}}{=}\{\widetilde{\mathbf{a}}_{-1},\widetilde{\mathbf{a}}_0,\ldots,\widetilde{\mathbf{a}}_{\widetilde{N}-1}\}$, предполагая, что выполнено условие

(A) Справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbf{a}}_j=\mathbf{a}_j \text{ при } -1\le j\le k-2, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}=\mathbf{a}_{k-1},\\ \widetilde{\mathbf{a}}_j=\mathbf{a}_{j+2} \text{ при } k-1\le j\le \widetilde{N}-1.\end{gathered}\tag{1.6}$$

Рассмотрим два гнезда (определение см. в [21]) $\Gamma_1\stackrel{\text{def}}{=}\{x_{k-1}\}$ и $\Gamma_2\stackrel{\text{def}}{=}\{x_{k+1}\}$. Обозначим $\Gamma\stackrel{\text{def}}{=}\{\Gamma_1,\Gamma_2\}$.

Построим систему функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in J'_{N-3}}$, отыскивая ее из соотношений $\sum_{j\in J'_{N-3}}\widetilde{\mathbf{a}}_j\,\widetilde{\omega}_j(t)=\varphi(t)\quad\forall t\in\widetilde{G},\quad \widetilde{\omega}_j(t)\equiv 0\quad \forall t\in\widetilde{G}\backslash\widetilde{S}_j,\ j\in {J'}_{N-3}$. В результате получаем

$$\widetilde{\omega}_{-1}(t)=\begin{cases}\frac{\det(\varphi(t),\widetilde{\mathbf{a}}_0)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{-1},\widetilde{\mathbf{a}}_0)} & \text{при } t\in(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1),\\ 0 \quad \text{при } t\notin[\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1],\end{cases}\tag{1.7}$$

для $j\in J_{N-s-4}$

$$\widetilde{\omega}_j(t)=\begin{cases}\frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1},\varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1},\widetilde{\mathbf{a}}_j)} & \text{при } t\in(\widetilde{x}_j,\widetilde{x}_{j+1}),\\ \frac{\det(\varphi(t),\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_j,\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} & \text{при } t\in(\widetilde{x}_{j+1},\widetilde{x}_{j+2}),\\ 0 \quad \text{при } t\notin[\widetilde{x}_j,\widetilde{x}_{j+2}],\end{cases}\tag{1.8}$$

$$\widetilde{\omega}_{N-3}(t)=\begin{cases}\frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{N-4},\varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{N-4},\widetilde{\mathbf{a}}_{N-3})} & \text{при } t\in(\widetilde{x}_{N-3},\widetilde{x}_{N-2}),\\ 0 \quad \text{при } t\notin[\widetilde{x}_{N-2},\widetilde{x}_{N-1}].\end{cases}\tag{1.9}$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{S}_{N\{\Gamma\}}\stackrel{\text{def}}{=}Cl_p\,\mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in {J'}_{N-3}}$. Аналогично соотношению (1.5) имеем $\dim\mathbb{S}_{N\{\Gamma\}}=N-1$.

Заметим, что функция ω_s определяется тройкой векторов $\mathbf{a}_{s-1}$, $\mathbf{a}_s$, $\mathbf{a}_{s+1}$, а функция $\widetilde{\omega}_s$ определяется тройкой векторов $\widetilde{\mathbf{a}}_{s-1}$, $\widetilde{\mathbf{a}}_s$, $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+1}$, и потому справедлива

Теорема 1. *При условии (A) верны следующие формулы:*

$$\omega_s(t) \equiv \widetilde{\omega}_s(t) \quad \textit{при} \quad s \le k-4, \tag{1.10}$$

$$\omega_s(t) \equiv \widetilde{\omega}_{s+2}(t) \quad \textit{при} \quad s \ge k. \tag{1.11}$$

Доказательство вытекает из соотношений (1.2)–(1.4) и (1.7) — (1.9). ■

13.2. Матрица вложения

Используя формулы представления сплайнов $\omega_j, \widetilde{\omega}_j$ и теорему 1, приходим к калибровочным соотношениям

$$\widetilde{\omega}_j = \omega_j \quad \text{при} \quad -1 \le j \le k-4, \quad \widetilde{\omega}_{k-3} = p_{k-3,k-3}\omega_{k-3} + p_{k-3,k-2}\omega_{k-2},$$

$$\widetilde{\omega}_{k-2} = p_{k-2,k-2}\omega_{k-2} + p_{k-2,k-1}\omega_{k-1} + p_{k-2,k}\omega_k, \quad \widetilde{\omega}_{k-1} = p_{k-1,k}\omega_k + p_{k-1,k+1}\omega_{k+1},$$

$$\widetilde{\omega}_j = \omega_{j+2} \quad \text{при} \quad k \le j \le \widetilde{N}-1.$$

Пусть $\{g_i\}_{i\in J'_{N-1}}$ — система функционалов, биортогональная системе функций $\{\omega_j\}_{j\in J'_{N-1}}$, $\langle g_i, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}$, со свойством $\operatorname{supp} g_j \subset [x_j, x_j+\varepsilon)$, $j \in J_{N-1}$, $\operatorname{supp}\omega_{-1} \subset [x_0, x_0+\varepsilon)$; здесь $\varepsilon > 0$ — фиксированное число.[5]

Используя соотношение $\langle g_i, \varphi\rangle = \mathbf{a}_i$, получаем

$$\mathfrak{p}_{k-3,k-3} = \langle g_{k-3}, \widetilde{\omega}_{k-3}\rangle = \left\langle g_{k-3}, \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-4}, \varphi)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-4}, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-3})}\right\rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-4}, \mathbf{a}_{k-3})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-4}, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-3})} = 1,$$

$$\mathfrak{p}_{k-2,k-1} = \langle g_{k-1}, \widetilde{\omega}_{k-2}\rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-3}, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2})} = 1, \qquad \mathfrak{p}_{k-1,k+1} = \langle g_{k+1},$$

$$\widetilde{\omega}_{k-1}\rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1})} = 1.$$

Ввиду сказанного, результат транспонирования матрицы вложения $\mathfrak{P}_{N\{\Gamma\}}$ с элементами $\mathfrak{p}_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j\rangle$, $i \in \{-1, 0, \ldots, N-3\}$, $j \in \{-1, 0, \ldots, N-1\}$, имеет вид

[5] Достаточные условия существования такой системы даны в [1].

$$
\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}} = \begin{array}{r l}
 & \begin{array}{ccccccccccc} -1 & 0 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & \dots & N-4 & N-3 \end{array} \\
\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ \dots \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \dots \\ N-2 \\ N-1 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k-3,k-2} & \mathfrak{p}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-2,k} & \mathfrak{p}_{k-1,k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

С помощью формул (1.7)–(1.9) получаем

$$
\mathfrak{p}_{k-3,k-2} = \langle g_{k-2}, \widetilde{\omega}_{k-3} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-3}, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2})} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-1})}, \tag{2.1}
$$

$$
\mathfrak{p}_{k-2,k-2} = \langle g_{k-2}, \widetilde{\omega}_{k-2} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-1})}, \tag{2.2}
$$

$$
\mathfrak{p}_{k-2,k} = \langle g_{k}, \widetilde{\omega}_{k-2} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}, \tag{2.3}
$$

$$
\mathfrak{p}_{k-1,k} = \langle g_{k}, \widetilde{\omega}_{k-1} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}. \tag{2.4}
$$

Найденные в этом пункте соотношения показывают, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (A). Тогда справедливо представление $\widetilde{\omega} = \mathfrak{P}_{N\{\Gamma\}}\omega$, где элементы $\mathfrak{p}_{i,j}$ матрицы вложения $\mathfrak{P}_{N\{\Gamma\}}$ определяются формулами*

$$
\mathfrak{p}_{i,j} \overset{\mathrm{def}}{=} \delta_{i,j} \text{ при } -1 \le i \le N-3,\ -1 \le j \le k-2,\ \mathfrak{p}_{i,k-2} \overset{\mathrm{def}}{=} \delta_{i,k-1} \text{ при } -1 \le i \le N-3,
$$

$$
\mathfrak{p}_{i,j} \overset{\mathrm{def}}{=} \delta_{i,j-2} \text{ при } -1 \le i \le N-3, \quad k+2 \le j \le N-1,
$$

$$
\mathfrak{p}_{i,k-2} \overset{\mathrm{def}}{=} 0 \text{ при } i \in J'_{N-3}\{k-3,k-2\}, \quad \mathfrak{p}_{i,k} \overset{\mathrm{def}}{=} 0 \text{ при } i \in J'_{N-3}\{k-2,k-1\},
$$

а также формулами (2.1)–(2.4).

13.3. Матрица продолжения

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i \in J'_{\widetilde{N}-1}}$, биортогональную к системе $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j \in J'_{\widetilde{N}-1}}$, $\langle g_i, \widetilde{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j}$, со свойством

$$
\mathrm{supp}\widetilde{g}_i \subset [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad i \in J_{\widetilde{N}-1}, \quad \mathrm{supp}\widetilde{g}_{-1} \subset (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 + \varepsilon). \tag{3.1}
$$

Используя соотношение
$$\langle \widetilde{g}_i, \varphi \rangle = \widetilde{\mathbf{a}}_i, \tag{3.2}$$
вычислим матрицу продолжения $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ размеров $\widetilde{N}+1 \times N+1$ с элементами $\mathfrak{q}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle$; здесь $i \in J'_{\widetilde{N}-1}$, $j \in J'_{N-1}$.

Ввиду условия (A) из формул (1.2)–(1.4) и (3.2) последовательно получаем

$$\mathfrak{q}_{-1,-1} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_{-1}, \omega_{-1} \rangle = \Big\langle \widetilde{g}_{-1}, \frac{\det(\varphi, \mathbf{a}_0)}{\det(\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0)} \Big\rangle,$$

так что $\mathfrak{q}_{-1,-1} = \langle \widetilde{g}_{-1}, \widetilde{\omega}_{-1} \rangle = 1$. Точно так же выводим

$$\mathfrak{q}_{-1,0} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_{-1}, \omega_0 \rangle = \Big\langle \widetilde{g}_{-1}, \frac{\det(\mathbf{a}_0, \varphi)}{\det(\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0)} \Big\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_0, \widetilde{\mathbf{a}}_{-1})}{\det(\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0)} = 0.$$

Поскольку для $j = 1, 2, \dots, N-1$ имеем $[\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 + \varepsilon) \cap \operatorname{supp} \omega_j = \emptyset$, то $\mathfrak{q}_{-1,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_{-1}, \omega_j \rangle = 0$. Итак, $\mathfrak{q}_{-1,j} = \delta_{-1,j}$ для $j \in J'_{N-1}$.

Аналогично находим

$$\langle \widetilde{g}_0, \omega_{-1} \rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_0, \mathbf{a}_0)}{\det(\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0)} = 0, \qquad \langle \widetilde{g}_0, \omega_0 \rangle = \langle \widetilde{g}_0, \widetilde{\omega}_0 \rangle = 1.$$

Поскольку для $j = 1, 2, \dots, N-1$ имеем $[\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 + \varepsilon) \cap \operatorname{supp} \omega_j = \emptyset$, то $\langle \widetilde{g}_0, \omega_j \rangle = 0$. Таким образом, $\mathfrak{q}_{0,j} = \delta_{0,j}$ для $j \in J'_{N-1}$.

Дальше действуем аналогично. Благодаря соотношению $(x_1, x_1 + \varepsilon) \cap \operatorname{supp} \omega_{-1} = \emptyset$ имеем $\langle \widetilde{g}_1, \omega_{-1} \rangle = 0$ (можно здесь сослаться также и на равенство $\langle \widetilde{g}_1, \omega_{-1} \rangle = \langle \widetilde{g}_1, \widetilde{\omega}_{-1} \rangle = 0$); очевидно, что

$$\langle \widetilde{g}_1, \omega_0 \rangle = \langle \widetilde{g}_1, \widetilde{\omega}_0 \rangle = 0 \iff \Big\langle \widetilde{g}_1, \frac{\det(\varphi, \mathbf{a}_1)}{\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)} \Big\rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_1, \mathbf{a}_1)}{\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)} = 0;$$

$$\langle \widetilde{g}_1, \omega_1 \rangle = \Big\langle \widetilde{g}_1, \frac{\det(\mathbf{a}_0, \varphi)}{\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)} \Big\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_0, \widetilde{\mathbf{a}}_1)}{\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)} = 1.$$

Для остальных индексов $j = 2, 3, \dots, N-1$ имеем $\langle \widetilde{g}_1, \omega_j \rangle = 0$, ибо $(x_1, x_1 + \varepsilon) \cap \operatorname{supp} \omega_j = \emptyset$. Итак, $\mathfrak{q}_{1,j} = \delta_{1,j}$ для $j \in J'_{N-1}$. Используя аналогичные рассуждения, ввиду формул (1.10)–(1.11) находим

$$\mathfrak{q}_{j,s} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_s \rangle = \langle \widetilde{g}_j, \widetilde{\omega}_s \rangle = \delta_{j,s} \quad \text{при} \quad s \le k-4,$$

$$\mathfrak{q}_{j,s} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_s \rangle = \langle \widetilde{g}_j, \widetilde{\omega}_{s-2} \rangle = \delta_{j,s-2} \quad \text{при} \quad s \ge k+2.$$

Произведем подсчет значений $\widetilde{g}_j$ на функциях ω_s при $s \in \{k-3, k-2, k-1, k, k+1\}$. Учитывая взаимное расположение носителя $[x_s, x_{s+2}]$ функции ω_s и множества $(x_j, x_j+\varepsilon)$, и принимая во внимание свойство (3.1), имеем

$$\mathfrak{q}_{j,k-3} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k-3}\rangle = 0 \text{ при } j \le k-4, \quad \mathfrak{q}_{j,k-3} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k-3}\rangle = 0 \text{ при } j \ge k-1,$$

$$\mathfrak{q}_{j,k-2} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k-2}\rangle = 0 \text{ при } j \le k-3, \quad \mathfrak{q}_{j,k-2} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k-2}\rangle = 0 \text{ при } j \ge k-1;$$

точно так же получаем

$$\mathfrak{q}_{j,k-1} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k-1}\rangle = 0 \text{ при } j \le k-2, \qquad \mathfrak{q}_{j,k-1} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k-1}\rangle = 0 \text{ при } j \ge k,$$

$$\mathfrak{q}_{j,k} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k}\rangle = 0 \text{ при } j \le k-2, \qquad \mathfrak{q}_{j,k} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k}\rangle = 0 \text{ при } j \ge k,$$

$$\mathfrak{q}_{j,k+1} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k+1}\rangle = 0 \text{ при } j \le k-1, \quad \mathfrak{q}_{j,k+1} = \langle \widetilde{g}_j, \omega_{k+1}\rangle = 0 \text{ при } j \ge k+1.$$

Используя формулы (1.2)–(1.4), (1.6) и (3.2), выводим

$$\langle \widetilde{g}_{k-3}, \omega_{k-3}\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-4}, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-3})}{\det(\mathbf{a}_{k-4}, \mathbf{a}_{k-3})} = 1, \quad \langle \widetilde{g}_{k-2}, \omega_{k-3}\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k-2})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})},$$

$$\langle \widetilde{g}_{k-2}, \omega_{k-2}\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}.$$

Аналогично предыдущему находим

$$\langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k-1}\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k})}, \quad \langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k}\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k})},$$

$$\langle \widetilde{g}_{k}, \omega_{k+1}\rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k}, \mathbf{a}_{k+2})}{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2})} = 0.$$

В результате получаем

$$\mathfrak{q}_{k-3,k-3} = 1, \qquad \mathfrak{q}_{k-2,k-3} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k-2})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{q}_{k-2,k-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}, \quad \mathfrak{q}_{k-1,k-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k})}, \tag{3.4}$$

$$\mathfrak{q}_{k-1,k} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k})}, \qquad \mathfrak{q}_{k,k+1} = 0. \tag{3.5}$$

Итак, установлена

Теорема 3. *Элементы матрицы продолжения $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ могут быть найдены из соотношений*

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \text{ при } -1 \le i \le k-3,\ j \in J'_{N-1},\ \mathfrak{q}_{k-2,j} = 0 \text{ при } j \in J'_{N-1} \setminus \{k-3, k-2\},$$

$\mathfrak{q}_{k-1,j}=0$ *при* $j\in J'_{N-1}\backslash\{k-1,k\}$, $\quad \mathfrak{q}_{i,j}=\delta_{i,j-1}$ *при* $k\le i\le N-3,\ j\in J'_{N-1}$, *которые следует дополнить соотношениями (3.3)–(3.5).*

Благодаря теореме 3 матрица продолжения $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ может быть представлена в виде

$$\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}=$$

$$\begin{array}{c|cccccccccccccc}
 & -1 & 0 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & N-2 & N-1 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
k-4 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k-3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k-2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathfrak{q}_{k-2,k-3} & \mathfrak{q}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{q}_{k-1,k-1} & \mathfrak{q}_{k-1,k} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
N-4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
N-3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{array}.$$

13.4. Об односторонней обратимости матриц $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ и $\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}$

Обозначая $\mathfrak{i}_{s,l}$ элементы произведения $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}$, получаем

$$\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}=$$

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & -1 & 0 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & \dots & N-4 & N-3 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
k-4 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k-3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k-2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathfrak{i}_{k-2,k-3} & \mathfrak{i}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathfrak{i}_{k-1,k-2} & \mathfrak{i}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
N-4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
N-3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{array},$$

где

$$\mathfrak{i}_{k-2,k-3}=\mathfrak{q}_{k-2,k-3}+\mathfrak{q}_{k-2,k-2}\mathfrak{p}_{k-3,k-2}, \qquad \mathfrak{i}_{k-1,k-1}=\mathfrak{q}_{k-1,k}\mathfrak{p}_{k-1,k},$$

$$\mathfrak{i}_{k-1,k-2}=\mathfrak{q}_{k-1,k-1}+\mathfrak{q}_{k-1,k}\mathfrak{p}_{k-2,k}, \qquad \mathfrak{i}_{k-2,k-2}=\mathfrak{q}_{k-2,k-2}\mathfrak{p}_{k-2,k-2}.$$

Теорема 4. *Справедливо соотношение* $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}=I$, *где* I *— единичная квадратная матрица порядка* $N-1$.

Доказательство. Используя формулы (2.1)–(2.4) и (3.3)– (3.5), находим

$$\mathfrak{i}_{k-2,k-3} = 0, \quad \mathfrak{i}_{k-2,k-2} = 1, \quad \mathfrak{i}_{k-1,k-2} = 0, \quad \mathfrak{i}_{k-1,k-1} = 1.$$

Теорема доказана. ∎

13.5. Сплайн-вэйвлетное разложение

Рассмотрим проектирование пространства $\mathbb{S}_N$ на подпространство $\mathbb{S}_{N\{\Gamma\}}$ с помощью оператора $P_{N\{\Gamma\}}$, задаваемого формулой

$$P_{N\{\Gamma\}}u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{j\in J'_{N-s-3}} \langle \widetilde{g}_j, u\rangle\, \widetilde{\omega}_j \quad \forall u \in \mathbb{S}_N,$$

и введем оператор $Q_{N\{\Gamma\}} = \mathcal{I} - P_{N\{\Gamma\}}$, где $\mathcal{I}$ — тождественный в $\mathbb{S}_N$ оператор. В результате получаем сплайн-вэйвлетное разложение пространства $\mathbb{S}_N$:

$$\mathbb{S}_N = \mathbb{S}_{N\{\Gamma\}} \dot{+} \mathbb{W}_{N\{\Gamma\}}, \tag{5.1}$$

где $\mathbb{W}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} Q_{N\{\Gamma\}}\mathbb{S}_N$ — пространство вэйвлетов (всплесков).

Пусть $u \in \mathbb{S}_N$; благодаря соотношению (5.1), получаем два представления элемента u

$$u = \sum_{j\in J'_{N-1}} c_j\omega_j, \qquad u = \sum_{i\in J'_{N-s-3}} a_i\widetilde{\omega}_i + \sum_{j\in J'_{N-1}} b_j\omega_j;$$

здесь $a_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, u\rangle$, $\quad b_j, \;\; c_j \;\; \in \mathbb{R}^1$. Ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j\}_{j\in J'_{N-1}}$ получаем *формулы реконструкции*

$$c_j = \sum_{i\in J'_{N-3}} a_i\mathfrak{p}_{i,j} + b_j \quad \forall j \in J'_{N-1},$$

и формулы декомпозиции

$$b_j = c_j - \sum_{i\in J'_{N-3}} \sum_{j'\in J'_{N-1}} c_{j'}\mathfrak{q}_{i,j'}\mathfrak{p}_{i,j} \qquad \forall j \in J'_{N-1}. \tag{5.2}$$

$$a_i = \sum_{j'\in J'_{N-1}} c_{j'}\mathfrak{q}_{i,j'} \qquad \forall i \in J'_{N-3}. \tag{5.3}$$

Вводя вектор-столбцы $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{-1}, \ldots, a_{N-s-3})^T$, $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_{-1}, \ldots, b_{N-1})^T$, $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{-1}, \ldots, c_{N-1})^T$, перепишем формулы декомпозиции (5.2)–(5.3) в матричном виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathbf{c}.$$

Вектор $\mathbf{a}$ называется *основной*, а вектор $\mathbf{b}$ — *вэйвлетной* составляющей исходного вектора (потока) $\mathbf{c}$.

13.6. Интерференция в вэйвлетном потоке

Для вычисления коэффициентов в формулах декомпозиции (5.2)–(5.3) найдем произведение $\mathfrak{U}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$. Для элементов $\mathfrak{u}_{j,s}$, $j, s \in J_{N-1}$, квадратной матрицы $\mathfrak{U}_{N\{\Gamma\}}$ размера $N+1$ имеем

$$\mathfrak{u}_{j,s} = \delta_{j,s} \quad \text{при } s \le k-4 \text{ и при } s \ge k+2,$$

$$\mathfrak{u}_{j,k-3} = 0 \text{ при } j \le k-4 \;\text{ и при } j \ge k+1,$$

$$\mathfrak{u}_{k-3,k-3} = 1, \qquad \mathfrak{u}_{j,k-2} = 0 \quad \text{при } j \le k-3 \;\text{ и при } j \ge k+1,$$

и дальше получаем

$$\mathfrak{u}_{k-1,k-3} = \mathfrak{q}_{k-2,k-3}, \qquad \mathfrak{u}_{k-1,k-2} = \mathfrak{q}_{k-2,k-2}, \tag{6.1}$$

$$\mathfrak{u}_{k+1,k-1} = \mathfrak{q}_{k-1,k-1}, \qquad \mathfrak{u}_{k+1,k} = \mathfrak{q}_{k-1,k}, \tag{6.2}$$

$$\mathfrak{u}_{j,k-1} = 0 \text{ при } j \le k-1 \;\text{ и при } j \ge k+3,$$

$$\mathfrak{u}_{j,k} = 0 \text{ при } j \le k-1 \;\text{ и при } j \ge k+2.$$

Кроме того, находим

$$\mathfrak{u}_{k-2,k-3} = \mathfrak{p}_{k-3,k-2} + \mathfrak{p}_{k-2,k-2}\mathfrak{q}_{k-2,k-3}, \tag{6.3}$$

$$\mathfrak{u}_{k-2,k-2} = \mathfrak{p}_{k-2,k-2}\mathfrak{q}_{k-2,k-2}, \tag{6.4}$$

$$\mathfrak{u}_{k,k-3} = \mathfrak{p}_{k-2,k}\mathfrak{q}_{k-2,k-3}, \quad \mathfrak{u}_{k,k-2} = \mathfrak{p}_{k-2,k}\mathfrak{q}_{k-2,k-2}, \tag{6.5}$$

$$\mathfrak{u}_{k,k-1} = \mathfrak{p}_{k-1,k}\mathfrak{q}_{k-1,k-1}, \quad \mathfrak{u}_{k,k} = \mathfrak{p}_{k-1,k}\mathfrak{q}_{k-1,k}. \tag{6.6}$$

Использование формул (2.1)–(2.4), (3.3)–(3.5) в соотношениях (6.3)–(6.6) дает

$$\mathfrak{u}_{k-1,k-2} = 0, \quad \mathfrak{u}_{k-2,k-2} = 1, \qquad \mathfrak{u}_{k,k} = 1, \tag{6.7}$$

$$\mathfrak{u}_{k,k-3} = \frac{\det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})} \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k-2})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}, \tag{6.8}$$

$$\mathfrak{u}_{k,k-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})} \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}, \tag{6.9}$$

$$\mathfrak{u}_{k,k-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}, \tag{6.10}$$

а из (3.3)–(3.5) и (6.1)–(6.2) имеем

$$\mathfrak{u}_{k-1,k-3} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k-2})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}, \quad \mathfrak{u}_{k-1,k-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}, \tag{6.11}$$

$$\mathfrak{u}_{k+1,k-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \quad \mathfrak{u}_{k+1,k} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}. \tag{6.12}$$

Замечание 1. *Полагая*

$$A(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}, \tag{6.13}$$

соотношениям (6.8)–(6.10) можно придать форму

$$\mathfrak{u}_{k,k-3} = A(k) \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k-2})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}, \tag{6.14}$$

$$\mathfrak{u}_{k,k-2} = A(k) \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2})}, \qquad \mathfrak{u}_{k,k-1} = -A(k). \tag{6.15}$$

Принимая во внимание формулы (6.1)–(6.15), получаем

$$\mathfrak{U}_{N\{\Gamma\}} =$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ -1 \\ 0 \\ \cdots \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ k+3 \\ \cdots \\ N-2 \\ N-1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc}
-1 & 0 & \ldots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \ldots & N-2 & N-1
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \mathfrak{u}_{k-1,k-3} & \mathfrak{u}_{k-1,k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \mathfrak{u}_{k,k-3} & \mathfrak{u}_{k,k-2} & \mathfrak{u}_{k,k-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{u}_{k+1,k-1} & \mathfrak{u}_{k+1,k} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

где невыписанные элементы матрицы вычисляются по формулам (6.1)–(6.6) (см. также формулы (6.8)–(6.15)).

Теорема 5. *Коммутатор* $\mathfrak{V}_{N\{\Gamma\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}} - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ *матриц* $\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}}$ *и* $\mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}$ *представляет собой квадратную матрицу порядка* $N+1$ *с элементами* $\mathfrak{v}_{i,j}$, *равными нулю для всех пар индексов* (i,j), $i,j \in J'_{N-1}$, *за исключением элементов* $\mathfrak{v}_{k-1,k-1} = \mathfrak{v}_{k+1,k+1} = 1$, *а также элементов с индексами* $(i,j) \in \{(k-1,k-3),(k-1,k-2),$ $(k,k-3),(k,k-2),(k,k-1),(k+1,k-1),(k+1,k)$*; последние определяются формулами вида* $\mathfrak{v}_{i,j} = -\mathfrak{u}_{i,j}$ *с использованием соотношений (6.1)–(6.6).*

Доказательство. Применяя теорему 4 и представление матрицы $\mathfrak{U}_{N\{\Gamma\}}$, имеем

$$\mathfrak{V}_{N\{\Gamma\}} = I - \mathfrak{U}_{N\{\Gamma\}} =$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ -1 \\ 0 \\ \cdots \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ k+3 \\ \cdots \\ N-2 \\ N-1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc}
-1 & 0 & \ldots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \ldots & N-2 & N-1
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & -\mathfrak{u}_{k-1,k-3} & -\mathfrak{u}_{k-1,k-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & -\mathfrak{u}_{k,k-3} & -\mathfrak{u}_{k,k-2} & -\mathfrak{u}_{k,k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -\mathfrak{u}_{k+1,k-1} & -\mathfrak{u}_{k+1,k} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Теорема доказана. ■

Следствие 1. *Компоненты вэйвлетной составляющей*

$$b = (I - \mathfrak{P}^T_{N\{\Gamma\}}\mathfrak{Q}_{N\{\Gamma\}})c$$

имеют вид

$$b_j = 0 \quad \textit{при} \quad j \in {J'}_{N-1} \backslash \{k-1, k, k+1\},$$

$$b_{k-1} = -\mathfrak{u}_{\,k-1,k-3}c_{k-3} - \mathfrak{u}_{\,k-1,k-2}c_{k-2} + c_{k-1}, \tag{6.16}$$

$$b_k = -\mathfrak{u}_{\,k,k-3}c_{k-3} - \mathfrak{u}_{\,k,k-2}c_{k-2} - \mathfrak{u}_{\,k,k-1}c_{k-1}, \tag{6.17}$$

$$b_{k+1} = -\mathfrak{u}_{\,k+1,k-1}c_{k-1} - \mathfrak{u}_{\,k+1,k}c_k + c_{k+1}. \tag{6.18}$$

Согласно формулам (6.1), (6.5)–(6.6) соотношения (6.16)–(6.18) можно переписать в виде

$$b_{k-1} = -\mathfrak{q}_{\,k-2,k-3}c_{k-3} - \mathfrak{q}_{\,k-2,k-2}c_{k-2} + c_{k-1}, \tag{6.19}$$

$$b_k = -\mathfrak{p}_{\,k-2,k}\mathfrak{q}_{\,k-2,k-3}c_{k-3} -$$

$$-\mathfrak{p}_{\,k-2,k}\mathfrak{q}_{\,k-2,k-2}c_{k-2} - \mathfrak{p}_{\,k-1,k}\mathfrak{q}_{\,k-1,k-1}c_{k-1}. \tag{6.20}$$

Умножая (6.19) на $\mathfrak{p}_{\,k-2,k}$ и вычитая из (6.20), находим

$$b_k - \mathfrak{p}_{\,k-2,k}b_{k-1} = -(\mathfrak{p}_{\,k-2,k} + \mathfrak{p}_{\,k-1,k}\mathfrak{q}_{\,k-1,k-1})c_{k-1}.$$

Круглые скобки в правой части последнего выражения равны нулю; для того, чтобы в этом убедиться, воспользуемся формулами (2.3) – (2.4) и (3.4):

$$\mathfrak{p}_{\,k-2,k} + \mathfrak{p}_{\,k-1,k}\mathfrak{q}_{\,k-1,k-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})} + \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}\frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)} = 0. \tag{6.21}$$

Таким образом, для любого исходного потока справедливо соотношение

$$b_k - \mathfrak{p}_{\,k-2,k}b_{k-1} = 0. \tag{6.22}$$

Соотношение (6.22) означает, что коэффициент $\mathfrak{p}_{\,k-2,k}$ позволяет всегда восстановить значение b_k по значению b_{k-1}.

Свойство вида (6.22) будем называть *результатом интерференции в вэйвлетном потоке* (или просто *интерференцией вэйвлетов*).

Легко убедиться, что матрица перехода от вектора $\mathbf{c}' \stackrel{\text{def}}{=} (c_{k-3}, c_{k-2}, c_{k-1}, c_k, c_{k+1})^T$ к вектору $\mathbf{b}' \stackrel{\text{def}}{=} (b_{k-1}, b_k, b_{k+1})^T$,

$$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} -\mathfrak{q}_{\,k-2,k-3}\mathfrak{q}_{\,k-2,k-2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathfrak{p}_{\,k-2,k}\mathfrak{q}_{\,k-2,k-3} & -\mathfrak{p}_{\,k-2,k}\mathfrak{q}_{\,k-2,k-2} & -\mathfrak{p}_{\,k-1,k}\mathfrak{q}_{\,k-1,k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathfrak{q}_{\,k-1,k-1} & -\mathfrak{q}_{\,k-1,k} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{c}'$$

имеет второй ранг, поскольку (с учетом соотношения (6.21)) она элементарными преобразованиями приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{q}_{\,k-2,k-3} & \mathfrak{q}_{\,k-2,k-2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{q}_{\,k-1,k-1} & \mathfrak{q}_{\,k-1,k} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем минор

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \mathfrak{q}_{\,k-1,k-1} & \mathfrak{q}_{\,k-1,k} \end{vmatrix} = -\mathfrak{q}_{\,k-1,k} = -\frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}$$

заведомо отличен от нуля (ввиду полноты цепочки $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j \in J\,'_{\widetilde{N}-1}}$).

В случае, когда имеется две вэйвлетные компоненты, отличающиеся друг от друга множителем, не зависящим от исходного потока $\{c_j\}$, будем говорить, что *интерференция в вэйвлетном потоке порождает стоячую волну второго порядка.*

13.7. Об аппроксимационных свойствах вэйвлетов

Предположим, что $\varphi \in C[a,b]$. Для непрерывности рассматриваемых сплайнов необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{a}_j = \varphi_{j+1}$; здесь $\varphi_j \overset{\text{def}}{=} = \varphi(x_j)$.

Пусть вектор-функция $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = (1, f(t))^T$, где $f \in C[a,b]$. В этом случае

$$\det(\varphi(t'), \varphi(t'')) = f(t'') - f(t'). \tag{7.1}$$

Обозначая $f_i \overset{\text{def}}{=} f(x_i)$, согласно формулам (6.11) и (7.1) имеем

$$\mathfrak{u}_{k-1,k-3} = \frac{f_{k-1} - f_k}{f_{k-1} - f_{k-2}}, \qquad \mathfrak{u}_{k-1,k-2} = \frac{f_k - f_{k-2}}{f_{k-1} - f_{k-2}}. \tag{7.2}$$

Используя формулы (6.12), находим

$$\mathfrak{u}_{k+1,k-1} = \frac{f_{k+1} - f_{k+2}}{f_{k+1} - f_k}, \quad \mathfrak{u}_{k+1,k} = \frac{f_{k+2} - f_k}{f_{k+1} - f_k}, \tag{7.3}$$

а из (2.3) получаем

$$\mathfrak{p}_{k-2,k} = \frac{f_{k+2} - f_{k+1}}{f_{k+2} - f_k}. \tag{7.4}$$

Таким образом, в случае непрерывных вэйвлетов из (7.2) с помощью (6.16) получаем

$$b_{k-1} = \frac{f_k - f_{k-1}}{f_{k-1} - f_{k-2}} \cdot c_{k-3} - \frac{f_k - f_{k-2}}{f_{k-1} - f_{k-2}} \cdot c_{k-2} + c_{k-1}, \tag{7.5}$$

а из (6.22) с использованием (7.4) выводим

$$b_k = \frac{f_{k+2} - f_{k+1}}{f_{k+2} - f_k} \cdot b_{k-1}; \tag{7.6}$$

наконец, из (6.18) с помощью (7.3) находим

$$b_{k+1} = \frac{f_{k+2} - f_{k+1}}{f_{k+1} - f_k} \cdot c_{k-1} - \frac{f_{k+2} - f_k}{f_{k+1} - f_k} \cdot c_k + c_{k+1}, \tag{7.7}$$

Замечание 2. *Формула (7.7) получается из формулы (7.5) заменой k на $k+2$.*

Замечание 3. *Для исходных потоков $c_j \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ и $c_j \stackrel{\text{def}}{=} f_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ соответствующие вэйвлетные потоки оказываются равными нулю:*

$$b_{k-1} = b_k = b_{k+1} = 0.$$

В случае, когда $\varphi(t) = (1, t)^T$ имеем $f(t) = t$, $f_i = x_i$, и формулы (7.5)–(7.7) принимают вид

$$b_{k-1} = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} \cdot c_{k-3} - \frac{x_k - x_{k-2}}{x_{k-1} - x_{k-2}} \cdot c_{k-2} + c_{k-1}, \tag{7.8}$$

$$b_k = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \cdot b_{k-1}; \tag{7.9}$$

$$b_{k+1} = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \cdot c_{k-1} - \frac{x_{k+2} - x_k}{x_{k+1} - x_k} \cdot c_k + c_{k+1}, \tag{7.10}$$

Для равномерной сетки $x_j = jh$, $h > 0$, из (7.8)–(7.10) получаем

$$b_{k-1} = c_{k-3} - 2c_{k-2} + c_{k-1}, \tag{7.11}$$

$$b_k = \frac{1}{2} c_{k-3} - c_{k-2} + \frac{1}{2} c_{k-1}, \tag{7.12}$$

$$b_{k+1} = c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1}, \tag{7.13}$$

Предполагая, что источником исходного потока $\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ является функция $u \in C^2$, а именно $c_j = u(jh)$, из (7.11)–(7.13) выводим

$$b_k = u''(\xi) h^2, \quad b_k = \frac{1}{2} u''(\xi) h^2, \quad b_{k+1} = u''(\zeta) h^2,$$

где ξ, ζ — некоторые точки интервала (x_{k-3}, x_{k+1}).

Замечание 4. *Ввиду формулы (6.22) (см. также соотношения (7.8)–(7.9) и (7.11)–(7.12)) для использования вэйвлетных составляющих достаточно принять во внимание компоненты b_{k-1} и b_{k+1}.*

14. ВЭЙВЛЕТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НА ГРЕБЕНЧАТОЙ СТРУКТУРЕ

Исследования вэйвлетных разложений числовых информационных потоков ведут к созданию гибкого аппарата сплайн-вэйвлетных аппроксимаций с учетом свойств гладкости и скорости изменения потоков. Для этого требуется использовать сплайновые аппроксимации различных порядков, неравномерные сетки, разложения со свойствами локализации в отдельных частях рассматриваемой области и применять гнездовые разложения для экономии вычислительных ресурсов с учетом возможностей параллельных вычислительных систем. Указанные аспекты нашли отражение в последних исследованиях (см. работы [21, 76, 86]). В частности, рассматривался эффект стоячей волны в случае тесного расположения двух элементарных гнезд (см. [76]).

Цель данного раздела состоит в том, чтобы рассмотреть структуру сплайн-вэйвлетного разложения в случае тесного расположения элементарных гнезд на неравномерной сетке. В результате получены алгоритмы декомпозиции/реконструкции, рассмотрен эффект образования стоячих волн, и дана оценка величины вэйвлетного потока в случае, когда исходный поток представляет собой последовательность значений дважды непрерывно дифференцируемой функции на равномерной сетке.

14.1. Предварительные сведения

Для любого натурального числа m введем обозначения

$$J_m \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, m\},\ J\,'_m \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, 0, 1, \ldots, m\}.$$

Система векторов $\{\mathbf{a}_i\}_{i \in J\,'_m}$ пространства $\mathbb{R}^2$ называется полной цепочкой векторов, если $\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ при $j \in J_m$.

Пусть N — натуральное число. На отрезке $[a, b]$ рассмотрим сетку

$$X: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N = b, \tag{1.1}$$

и обозначим

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2}),\ j \in J_{N-2}, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in J_{N-1}} (x_i, x_{i+1}),$$

$$S_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, x_1), \qquad S_{N-1} \stackrel{\text{def}}{=} (x_{N-1}, x_N).$$

Пусть $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i \in {J'}_{N-1}}$ — полная цепочка двумерных векторов.

Рассмотрим двухкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$. Предположим, что ее компоненты линейно независимы на любом интервале $(a', b') \subset G$.

Как и в предыдущих разделах, зададим функции $\omega_j(t)$, $t \in G$, $j \in {J'}_{N-1}$, с помощью аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j \in J'_{N-1}} \mathbf{a}_j\, \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in G, \quad \omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G \backslash S_j,\ j \in {J'}_{N-1};$$

таким образом, функции $\omega_j(t)$, $j \in {J'}_{N-1}$, определены на множестве G. Напомним, что в результате получаются следующие формулы:

$$\omega_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_0)}{\det(\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0)} & \text{при } t \in (x_0, x_1), \\ 0 \quad \text{при } t \in G \backslash S_{-1}, \end{cases} \tag{1.2}$$

для $j \in J_{N-2}$

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \in G \backslash S_j, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\omega_{N-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{N-2}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1})} & \text{при } t \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 \quad \text{при } t \in G \backslash S_{N-1}, \end{cases} \tag{1.4}$$

Дальше рассматривается пространство $\mathbb{S}_N \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j \in {J'}_{N-1}}$, где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ — линейная оболочка функций, указанных в фигурных скобках, а Cl_p — замыкание в топологии поточечной сходимости. Заметим, что ввиду предположений относительно вектор-функции $\varphi(t)$ функции $\omega_j(t)$, $j \in {J'}_{N-1}$, линейно независимы на множестве G и, следовательно, являются базисом пространства $\mathbb{S}_N$; отсюда имеем $\dim \mathbb{S}_N = N + 1$.

Пусть s и r — натуральные числа, и $s < r$. Из сетки (1.1) удалим группу узлов с нечетными номерами в количестве $r - s$, а именно, удалим узлы

$$x_{2s+1}, x_{2s+3}, x_{2s+5}, \ldots, x_{2r-1}, \tag{1.5}$$

так что укрупненная сетка имеет вид

$$\widetilde{X}:\ a=\widetilde{x}_0<\widetilde{x}_1<\widetilde{x}_2<\ldots<\widetilde{x}_{\widetilde{N}-1}<\widetilde{x}_{\widetilde{N}}=b,$$

где $\widetilde{N}=N-r+s$, а

$$\widetilde{x}_i=x_i \quad \text{при} \quad 0\le i\le 2s,$$

$$\widetilde{x}_{2s+i}=x_{2s+2i} \quad \text{при} \quad 1\le i\le r-s,$$

$$\widetilde{x}_{s+r+i}=x_{2r+i} \quad \text{при} \quad 1\le i\le N-2r.$$

Каждый из удаленных узлов представляет собой элементарное (т.е. одноузловое) гнездо (см. (1.5)), причем каждая пара соседних гнезд разделена лишь одним узлом; такое расположение гнезд называем *тесным.*

Эквивалентная форма представления узлов новой сетки $\widetilde{X}$ такова

$$\widetilde{x}_i=x_i \quad \text{при} \quad 0\le i\le 2s, \tag{1.6}$$

$$\widetilde{x}_{i'}=x_{2i'-2s} \quad \text{при} \quad 2s+1\le i'\le s+r, \tag{1.7}$$

$$\widetilde{x}_{i''}=x_{r-s+i''} \quad \text{при} \quad s+r+1\le i''\le N-r+s. \tag{1.8}$$

Для сетки (1.6)–(1.8) положим

$$\widetilde{S}_j\overset{\mathrm{def}}{=}(\widetilde{x}_j,\widetilde{x}_{j+1})\cup(\widetilde{x}_{j+1},\widetilde{x}_{j+2}),\ j\in J_{\widetilde{N}-2},\quad \widetilde{G}\overset{\mathrm{def}}{=}\bigcup_{i\in J_{\widetilde{N}-1}}(\widetilde{x}_i,\widetilde{x}_{i+1}),$$

$$\widetilde{S}_{-1}\overset{\mathrm{def}}{=}(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1),\qquad \widetilde{S}_{\widetilde{N}-1}\overset{\mathrm{def}}{=}(\widetilde{x}_{\widetilde{N}-1},\widetilde{x}_{\widetilde{N}}).$$

Кроме того, введем обозначения

$$I^h_*\overset{\mathrm{def}}{=}\{-1,0,\ldots,2s-2\},\quad I^m_*\overset{\mathrm{def}}{=}\{2s-1,\ldots,s+r-1\},$$

$$I^t_*\overset{\mathrm{def}}{=}\{s+r,s+r+1,\ldots,\widetilde{N}-1\}.$$

Очевидно, что

$$I^h_*\cup I^m_*\cup I^t_*=J'_{\widetilde{N}-1}.$$

Рассмотрим цепочку векторов $\widetilde{A}\overset{\mathrm{def}}{=}\{\widetilde{\mathbf{a}}_{-1},\widetilde{\mathbf{a}}_0,\ldots,\widetilde{\mathbf{a}}_{\widetilde{N}-1}\}$, предполагая, что выполнено условие

(A) *Цепочка векторов* $\widetilde{A}\overset{\mathrm{def}}{=}\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}$ *полная и справедливы соотношения*

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j=\mathbf{a}_j \quad \text{\textit{при}} \quad j\in I^h_*, \tag{1.9}$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j=\mathbf{a}_{2j-2s+1} \quad \text{\textit{при}} \quad j\in I^m_*, \tag{1.10}$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_{j+r-s} \quad \textit{при} \quad j \in I^t_*. \tag{1.11}$$

В дальнейшем предполагается, что условие (A) выполнено.

Совокупность $\{X, A, \widetilde{X}, \widetilde{A}\}$ будем называть *двухинтервальной гребенчатой структурой.*

Построим систему функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in J'_{\widetilde{N}-1}}$, отыскивая ее из соотношений

$$\sum_{j\in J'_{\widetilde{N}-1}} \widetilde{\mathbf{a}}_j\, \widetilde{\omega}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widetilde{G},$$

$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widetilde{G}\backslash\widetilde{S}_j,\ j \in J\,'_{\widetilde{N}-1}$. В результате получаем

$$\widetilde{\omega}_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\varphi(t),\widetilde{\mathbf{a}}_0)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{-1},\widetilde{\mathbf{a}}_0)} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1), \\ 0 \quad \text{при } t \in \widetilde{G}\backslash\widetilde{S}_{-1}, \end{cases} \tag{1.12}$$

для $j \in J_{\widetilde{N}-2}$

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1},\varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1},\widetilde{\mathbf{a}}_j)} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t),\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_j,\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \in \widetilde{G}\backslash\widetilde{S}_j, \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\widetilde{\omega}_{\widetilde{N}-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{\widetilde{N}-2},\varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{\widetilde{N}-2},\widetilde{\mathbf{a}}_{\widetilde{N}-1})} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_{\widetilde{N}-1}, \widetilde{x}_{\widetilde{N}}), \\ 0 \quad \text{при } t \in \widetilde{G}\backslash\widetilde{S}_{\widetilde{N}-1}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Замечание 1. В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые функции сужены на множество G.

Введем пространство $\widetilde{\mathbb{S}} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\,\mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in J\,'_{\widetilde{N}-1}}$. Очевидно, что $\dim\widetilde{\mathbb{S}} = \widetilde{N}+1$.

Теорема 1. *При $t \in G$ верны следующие формулы:*

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_j(t) \quad \textit{при} \quad j \in I^h_*, \tag{1.15}$$

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_{r-s+j}(t) \quad \textit{при} \quad j \in I^t_*. \tag{1.16}$$

Доказательство. Заметив, что при $j = 1, 2, \ldots, N-2$ функция ω_j определяется тройкой векторов $\mathbf{a}_{j-1}$, $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_{j+1}$, а при $j = 1, 2, \ldots, \widetilde{N}-2$ функция $\widetilde{\omega}_j$ определяется тройкой векторов $\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}$, $\widetilde{\mathbf{a}}_j$, $\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1}$ (см. формулы (1.3) и (1.13)), в силу условий (1.9) и (1.11) получаем (1.15) и (1.16) за исключением $j = -1$ и

$j = \widetilde{N} - 1$ соответственно. Последние два случая получаются рассмотрением промежутков (x_0, x_1) и (x_{N-1}, x_N) с использованием формул (1.2), (1.12) и (1.4), (1.14). Теорема доказана. ■

Теорема 2. *Если* $0 \le i \le r-s-1$, *то при* $t \in (\widetilde{x}_{2s+i}, \widetilde{x}_{2s+i+1})$ *справедливы соотношения*

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) \equiv \frac{\det(\mathbf{a}_{2s+2i-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{2s+2i-1}, \mathbf{a}_{2s+2i+1})}, \tag{1.17}$$

а если $-1 \le i \le r-s-2$, *то при* $t \in (\widetilde{x}_{2s+i+1}, \widetilde{x}_{2s+i+2})$ *верны соотношения*

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) \equiv \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{2s+2i+3})}{\det(\mathbf{a}_{2s+2i+1}, \mathbf{a}_{2s+2i+3})}. \tag{1.18}$$

Доказательство. Из формулы (1.13) получаем

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i})} \quad \text{при } t \in (\widetilde{x}_{2s+i}.\widetilde{x}_{2s+i+1}), \tag{1.19}$$

Полагая в (1.10) $j = 2s + i - 1$ находим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i-1} = \mathbf{a}_{2s+2i-1} \qquad \text{при} \quad 0 \le i \le r-s, \tag{1.20}$$

а полагая там $j = 2s + i$ выводим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i} = \mathbf{a}_{2s+2i+1} \qquad \text{при} \quad -1 \le i \le r-s-1, \tag{1.21}$$

Подставляя (1.20) и (1.21) в (1.19), получаем (1.17).

Для $\widetilde{\omega}_{2s+i}(t)$ при $t \in (\widetilde{x}_{2s+i+1}.\widetilde{x}_{2s+i+2})$ согласно (1.13) находим

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{\varphi(t),2s+i+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i}, \widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i+1})};$$

здесь используем соотношение (1.21) и получаемую из (1.10) при $j = 2s+i+1$ формулу

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i+1} = \mathbf{a}_{2s+2i+3} \qquad \text{при} \quad -2 \le i \le r-s-2.$$

В результате получаем тождество (1.18).

Теорема доказана. ■

14.2. Матрица вложения

Теорема 3. *При условии* (A) *справедливо включение*

$$\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Доказательство включения (2.1) сводится к последовательному удалению узлов x_{2s+1}, x_{2s+3}, … x_{2r-1}. После каждого удаления получается система линейных алгебраических уравнений относительно координатных сплайнов на сетке, получающейся после очередного укрупнения. Из нее выводим представления этих сплайнов в виде линейной комбинации координатных сплайнов на мелкой сетке. В результате находим представление сплайнов $\widetilde{\omega}_j$ в виде линейной комбинации сплайнов ω_i. ■

Пусть (c, d) — некоторый интервал вещественной оси. Обозначим $C\langle c, d\rangle$ линейное пространство функций, непрерывных на (c, d) и имеющих конечные пределы на концах этого интервала. Введем линейное пространство функций, определяемое прямым произведением пространств $C\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, а именно

$$C_X \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{i=0}^{N-1} C\langle x_i, x_{i+1}\rangle.$$

Ясно, что $\omega_j \in C_X$, $j \in J'_{N-1}$ и

$$\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S} \subset C_X.$$

Как было сказано выше, ввиду предположений относительно функции $\varphi(t)$ система $\{\omega_j\}_{j\in J'_{N-1}}$ — линейно независимая система.

Пусть $\{g_i\}_{i\in J'_{N-1}}$ — система функционалов над C_X, биортогональная системе функций $\{\omega_j\}_{j\in J'_{N-1}}$, $\langle g_i, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}$, со свойством $\operatorname{supp} g_j \subset [x_j, x_j+\varepsilon)$, $j \in J_{N-1}$, supp $g_{-1} \subset [x_0, x_0+\varepsilon)$; здесь $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число.

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{P}$ с элементами

$$\mathfrak{p}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle, \quad i \in J'_{\widetilde{N}-1}, \quad j \in J'_{N-1}. \tag{2.2}$$

Для удобства введем обозначение $\operatorname{supp}_+\widetilde{\omega}_i = [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+2})$ и рассмотрим три группы значений индекса j, а именно $I_H \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, 0, 1, \dots, 2s-2\}$, $I_T \stackrel{\text{def}}{=} \{2r, 2r+1, \dots, N-1\}$ и $I_M \stackrel{\text{def}}{=} \{2s-1, 2s, \dots, 2r-1\}$. Очевидно, что $I_H \cup I_M \cup I_T = J'_{N-1}$, $I_*^h = I_H$.

В некоторых ситуациях будем утверждать, что для рассматриваемых индексов i, j выполнено соотношение

(B_{ij})

$$\operatorname{supp} g_j \cap \operatorname{supp}_+\widetilde{\omega}_i = \emptyset.$$

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j} \quad \text{при} \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1},\ j \in I_H. \tag{2.3}$$

Доказательство. Согласно соотношению (1.15) для $i, j \in I_H$ имеем $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle = \langle g_j, \omega_i\rangle = \delta_{i,j}$. При $j \in I_H$ и $i \in \{2s-1, 2s, \dots, N-1\}$ выполнено условие (B_{ij}), и потому получаем (2.3). Лемма доказана. ■

Лемма 2. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{j,i-s+r} \quad \textit{при} \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1},\ j \in I_T. \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. При $i \in \{-1, 0, 1, \dots, s+r-2\}$ благодаря тому, что выполнено условие (B_{ij}), имеем $\mathfrak{p}_{ij} = 0$.

2. Если $i \in \{s+r, s+r+1, \dots, \widetilde{N}-1\}$, то в соответствии с (1.16) получаем $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle = \langle g_j, \omega_{i-s+r}\rangle = \delta_{j,i-s+r}$.

3. Рассмотрим еще случай $i = s+r-1$. Если $j \neq 2r$, то выполнено условие (B_{ij}), и потому

$$\mathfrak{p}_{s+r-1,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_{s+r-1}\rangle = 0 \quad \text{при } j \in J'_{\widetilde{N}-1}\backslash\{2r\},$$

а для $\mathfrak{p}_{s+r-1,2r}$ имеем

$$\mathfrak{p}_{s+r-1,2r} = \langle g_{2r}, \widetilde{\omega}_{s+r-1}\rangle = \langle g_{2r}, \frac{\det(\varphi, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}\rangle =$$

$$= \frac{\det(\mathbf{a}_{2r}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})} = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})} = 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{p}_{s+r-1,j} = 0 \quad$ при $j \in I_T$. Объединяя результаты, полученные для этих трех случаев, видим, что соотношения (2.4) доказаны. ■

Для вычисления $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle$ при $j \in I_M$ потребуется проанализировать расположение носителя функционала g_j при четных и при нечетных j. Поскольку $\mathrm{supp} g_j \subset [x_j, x_j+\varepsilon)\ \forall \varepsilon > 0$, то достаточно рассмотреть расположение узлов x_j относительно множеств $\mathrm{supp}_+\widetilde{\omega}_i$.

Прежде всего, заметим, что если $s \le q \le r$, то узел x_{2q} исходной сетки X сохраняется в укрупненной сетке $\widetilde{X}$ и в ней имеет номер $(2q-2s)/2+2s = s+q$, так что

$$x_{2q} = \widetilde{x}_{s+q} \quad \text{при} \quad s \le q \le r. \tag{2.5}$$

Узел x_{2q+1} с нечетным номером при $s \le q \le r-1$ находится между узлами $x_{2q} = \widetilde{x}_{s+q}$ и $x_{2q+2} = \widetilde{x}_{s+q+1}$:

$$x_{2q} = \widetilde{x}_{s+q} < x_{2q+1} < x_{2q+2} = \widetilde{x}_{s+q+1} \quad \text{при} \quad s \le q \le r-1. \tag{2.6}$$

В дальнейшем часто используется условие

$$s \le q \le r-1. \tag{2.7}$$

Рассмотрим функционалы с нечетным индексом g_{2q+1}.

Лемма 3. *При условии $s-1 \le q \le r-1$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{s+q\}, \tag{2.8}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = 1. \tag{2.9}$$

Доказательство. 1. Очевидно, что

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_i \rangle = 0 \quad \text{при} \quad i \in I^h_* \cup I^t_*$$

из-за выполнения условия $(B_{i,2q+1})$ для рассматриваемых i.

2. Пусть теперь $i \in I^m_*$. Рассмотрим здесь три подслучая.

2.1. Если $i \in \{2s, 2s+1, \ldots, s+r-2\}$, то

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_i \rangle = 0 \quad \text{при} \quad i \in I^m_* \backslash \{s+q-1, s+q\}, \tag{2.10}$$

ибо для рассматриваемых i выполнены условия $(B_{i,2q+1})$; действительно, в этом случае согласно (2.6) $\widetilde{x}_{s+q} < x_{2q+1} < \widetilde{x}_{s+q+1}$ и для нарушения упомянутого условия нужно, чтобы узел x_{2q+1} попал во множество $\operatorname{supp}_+ \widetilde{\omega}_j$, т.е. в промежуток $[\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+2})$. Последнее возможно лишь в двух случаях: либо $j = s+q-1$, либо $j = s+q$; таким образом, соотношение (2.10) установлено.

2.2. Пусть теперь $i = s+q-1$. Поскольку $\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_{s+q-1} \rangle.$, то используя здесь представление (1.13), получаем

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \frac{\det(\varphi, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}.$$

Ввиду условия леммы $2s-1 \le s+q \le r+s-1$, так что $s+q \in I^m_*$, и в силу свойства (1.11) находим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q} = \mathbf{a}_{2q+1}; \tag{2.11}$$

теперь видно, что $\mathfrak{q}_{s+q-1,2q+1} = 0$. Таким образом, верно соотношение (2.8).

2.3. Рассмотрим последний случай: $i = s+q$. Рассматривая $\mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_{s+q} \rangle$ и снова используя представление (1.13), находим

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \varphi)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})} \rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}.$$

Применяя здесь соотношение (2.11), приходим к равенству (2.9).

Лемма доказана. ■

Для завершения исследования случая $j \in I_M$ рассмотрим функционалы g_j с четным индексом $j = 2q$ при условии (2.7). Поскольку $\operatorname{supp} g_{2q} \subset [x_{2q}, x_{2q}+\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, то важно заметить, что в этом случае справедливы формулы (2.5). Обратимся к вычислению значений $\mathfrak{p}_{i,2q} = \langle g_{2q}, \widetilde{\omega}_i \rangle$.

Лемма 4. *При условии (2.7) имеют место соотношения*

$$\mathfrak{p}_{i,2q} = 0 \quad \forall i \in {J'}_{\widetilde{N}-1} \backslash \{s+q-1, s+q\}, \tag{2.12}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \tag{2.13}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Очевидно, что значения $\mathfrak{p}_{i,2q}$ могут быть ненулевыми лишь при условии $\widetilde{x}_{s+q} \in \operatorname{supp}_+ \widetilde{\omega}_i$ (оно эквивалентно условию $\widetilde{x}_{s+q} \in [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+2})$); последнее равносильно соотношению $i \in \{s+q-1, s+q\}$. Отсюда следуют соотношения (2.12).

Теперь рассмотрим значения индекса i, исключенные в (2.12).

1. Пусть $i = s+q-1$. Поскольку выполнено соотношение (2.7), то $s+q-1, s+q \in I_*^m$, и в силу (1.10) имеем

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1} = \mathbf{a}_{2q-1}, \qquad \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q} = \mathbf{a}_{2q+1}. \tag{2.15}$$

Используя формулу (1.13), получаем

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \langle g_{2q}, \widetilde{\omega}_{s+q-1} \rangle = \Big\langle g_{2q}, \frac{\det(\varphi, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})} \Big\rangle;$$

Подставляя сюда соотношения (2.15), выводим формулу (2.13).

2. Пусть теперь $i = s+q$. По-прежнему справедливы соотношения (2.15). Из (1.13) имеем

$$\mathfrak{p}_{s+q,2q} = \langle g_{2q}, \widetilde{\omega}_{s+q} \rangle = \Big\langle g_{2q}, \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \varphi)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})} \Big\rangle =$$

$$= \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}. \tag{2.16}$$

Используя соотношение (2.15) в (2.16), выводим равенство (2.14).

Лемма доказана. ■

Объединение результатов лемм 1 — 4 показывает, что доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Элементы матрицы* $\mathfrak{P}$ *вычисляются по формулам*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j} \quad \text{при} \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1},\ j \in I_H,$$

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{j,i-s+r} \quad \text{при} \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1},\ j \in I_T;$$

остальные элементы вычисляются при $q \in \{s-1, s, \ldots, r-1\}$ *по формулам*

$$\mathfrak{p}_{i,2q} = \mathfrak{p}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1} \setminus \{s+q-1, s+q\}, \tag{2.17}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = 0, \qquad \mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = 1; \tag{2.18}$$

при $q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ *справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \qquad \mathfrak{p}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}. \tag{2.19}$$

Проиллюстрируем полученный результат в случае, когда $N = 16$, $s = 2$, $r = 6$. Матрица $\mathfrak{P}^T$ в этих условиях имеет вид

$$\mathfrak{P}^T = \begin{array}{c|cccccccccccc}
 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & 11 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 \\
11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array},$$

где символом X обозначены ненулевые элементы, определяемые формулами (2.19).

Теорема 4, доказанная выше, была представлена в «построчной» формулировке, но в некоторых случаях нам удобнее использовать эквивалентную «постолбцовую» формулировку этой теоремы, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Элементы матрицы* $\mathfrak{P}$ *вычисляются по формулам*

$$\mathfrak{p}_{i',j} = \delta_{i',j} \quad \textit{при} \quad \forall j \in J'_{N-1},\ i' \in I^h_*, \tag{2.20}$$

$$\mathfrak{p}_{i',j} = \delta_{i',j+s-r} \quad \textit{при} \quad \forall j \in J'_{N-1},\ i' \in I^t_*; \tag{2.21}$$

остальные элементы вычисляются по формулам

$$\mathfrak{p}_{i',i} = 0 \quad \forall i \in J'_{N-1} \backslash \{2(i'-s), 2(i'-s)+1, 2(i'-s)+2,\}, \tag{2.22}$$

$$\mathfrak{p}_{i',2(i'-s)} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)-1}, \mathbf{a}_{2(i'-s)})}{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)-1}, \mathbf{a}_{2(i'-s)+1})} \quad \textit{при} \quad i' \in I^m_* \backslash \{2s-1\}, \tag{2.23}$$

$$\mathfrak{p}_{2s-1,2s-2} = 0, \qquad \mathfrak{p}_{r+s-1,2r} = 0, \tag{2.24}$$

$$\mathfrak{p}_{i',2(i'-s)+1} = 1 \quad \textit{при} \quad i' \in I^m_*, \tag{2.25}$$

$$\mathfrak{p}_{i',2(i'-s)+2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)+2}, \mathbf{a}_{2(i'-s)+3})}{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)+1}, \mathbf{a}_{2(i'-s)+3})} \quad \textit{при} \quad i' \in I^m_* \backslash \{s+r-1\}. \tag{2.26}$$

Доказательство. Формулы (2.20) – (2.26) следуют из формул (2.17)–(2.19). ■

14.3. Матрица продолжения

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i \in J'_{\widetilde{N}-1}}$, биортогональную к системе $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j \in J'_{\widetilde{N}-1}}$, $\langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j}$, со свойством

$$\operatorname{supp} \widetilde{g}_i \subset [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i \in J_{\widetilde{N}-1}, \quad \operatorname{supp} \widetilde{g}_{-1} \subset (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 + \varepsilon). \tag{3.1}$$

Используя соотношение

$$\langle \widetilde{g}_i, \varphi \rangle = \widetilde{\mathbf{a}}_i, \tag{3.2}$$

вычислим матрицу $\mathfrak{Q}$ размеров $\widetilde{N}+1 \times N+1$ с элементами

$$\mathfrak{q}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle;$$

здесь $i \in J'_{\widetilde{N}-1}$, $j \in J'_{N-1}$.

Для ряда значений i и j справедлива формула

$(C_{i,j})$

$$\operatorname{supp} \widetilde{g}_i \cap \operatorname{supp}_+ \omega_j = \emptyset;$$

на него в дальнейшем будем ссылаться как на соотношение $(C_{i,j})$.

Лемма 5. *Для всех* $i \in J'_{\widetilde{N}-1}$ *справедливы равенства*

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad j \in I_H, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \quad \textit{при} \quad j \in I_T. \tag{3.4}$$

Доказательство. Благодаря соотношению (1.15) имеем

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle = \langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{при} \quad j \in I_H,\ i \in J'_{\widetilde{N}-1};$$

таким образом, формула (3.3) доказана. Заметим теперь, что применяя формулу (1.16) в виде

$$\widetilde{\omega}_{j'}(t) \equiv \omega_{r-s+j'}(t) \quad \text{при} \quad s + r \le j' \le \widetilde{N} - 1,$$

и полагая в ней $j = r - s + j'$, найдем

$$\widetilde{\omega}_{j+s-r}(t) \equiv \omega_j(t) \quad \text{при} \quad 2r \le j \le \widetilde{N} - 1 + r - s.$$

Учитывая последнее соотношение и принимая во внимание, что $\widetilde{N}-1+r-s = N - 1$, получим

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle = \langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_{j+s-r} \rangle = \delta_{i,j+s-r}$$
$$\text{при} \quad 2r \le j \le N - 1,\ i \in J'_{\widetilde{N}-1}.$$

Последнее эквивалентно соотношению (3.4).

Лемма полностью доказана. ■

Лемма 6. *Если $2s \le 2q + 1 \le 2r$, то для всех $i \in J'_{\widetilde{N}-1} \setminus \{s + q\}$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{i,2q} = 0; \tag{3.5}$$

кроме того

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}. \tag{3.6}$$

Доказательство. В условиях леммы имеем эквивалентности

$$2s - 1 \le 2q \le 2r - 1 \iff 2s \le 2q \le 2r - 2 \iff s \le q \le r - 1. \tag{3.7}$$

Положим $\varepsilon_{\widetilde{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in J_{\widetilde{N}-1}} (x_{i+1} - x_i)$. Ясно, что для

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\widetilde{X}}) \tag{3.8}$$

верна эквивалентность

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap [\widetilde{x}_{s+q}, \widetilde{x}_{s+q+1}) \ne \emptyset \iff i = s + q. \tag{3.9}$$

Используя (2.5) и (3.7), имеем $\widetilde{x}_{s+q} = x_{2q}$, так что из (3.1) и (3.9) следует

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap \operatorname{supp}_+ \omega_{2q} \ne \emptyset \iff i = s + q.$$

Таким образом, условие $C_{i,2q}$ выполнено для $i \in J'_{\widetilde{N}-1}$; соотношение (3.5) доказано.

Теперь найдем $\mathfrak{q}_{s+q,2q}$, используя (1.3) и (3.2):

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \langle \widetilde{g}_{s+q}, \omega_{2q} \rangle = \left\langle \widetilde{g}_{s+q}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \varphi)}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})} \right\rangle =$$

$$= \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}. \tag{3.10}$$

Ввиду соотношения (3.7) согласно (1.10) имеем $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q} = \mathbf{a}_{2q+1}$ и из (3.10) получаем (3.6). ■

Лемма 7. *Если выполнено соотношение (2.7), то справедливы равенства*

$$\mathfrak{q}_{i,2q+1} = 0 \quad \textit{при}\ i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{s+q+1\}. \tag{3.11}$$

При $q = s-1$ верны формулы

$$\mathfrak{q}_{i,2s-1} = 0 \quad \textit{при}\ i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{2s-1, 2s\}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 6 при условиях (2.7) и (3.8) имеем эквивалентность

$$[x_{2(i-s)}, x_{2(i-s)} + \varepsilon) \cap [x_{2q+1}, x_{2q+3}) \neq \emptyset \iff 2(i-s) = 2q+2.$$

С учетом формулы (2.5) имеем $\widetilde{x}_i = x_{2(i-s)}$, так что предыдущую эквивалентность можно записать в виде

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap [x_{2q+1}, x_{2q+3}) \neq \emptyset \iff i = s+q+1,$$

что эквивалентно соотношению

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap \operatorname{supp}_+ \omega_{2q+1} \neq \emptyset \iff i = s+q+1.$$

Таким образом формула (3.11) доказана.

Перейдем к доказательству формулы (3.12). Очевидна эквивалентность

$$[x_i, x_i + \varepsilon) \cap [x_{2s-1}, x_{2s+1}) \neq \emptyset \iff i \in \{2s-1, 2s\}.$$

Теперь заметим, что из (1.6)–(1.7) вытекают равенства

$$\widetilde{x}_{2s-1} = x_{2s-1}, \qquad \widetilde{x}_{2s} = x_{2s},$$

и, следовательно, верна формула

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap [x_{2s-1}, x_{2s+1}) \neq \emptyset \iff i \in \{2s-1, 2s\}.$$

Отсюда видно, что соотношение (3.12) справедливо. ∎

Лемма 8. *Верны соотношения*

$$\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+3}, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})} \quad \textit{при}\ s-1 \leq q \leq r-2, \tag{3.13}$$

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = 1, \quad \mathfrak{q}_{s+r,2r-1} = 0. \tag{3.14}$$

Доказательство. Найдем $\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1}$, используя (1.3) и (3.2):

$$\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1} = \langle \widetilde{g}_{s+q+1}, \omega_{2q+1} \rangle = \left\langle \widetilde{g}_{s+q+1}, \frac{\det(\varphi, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})} \right\rangle =$$

$$= \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})}. \tag{3.15}$$

Поскольку $2s-1 \leq s+q \leq r+s-1$, то согласно (1.10) находим $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q+1} = \mathbf{a}_{2q+3}$; из (3.15) получаем (3.13).

Теперь найдем $\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1}$. Используя формулу (1.3), имеем

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = \langle \widetilde{g}_{2s-1}, \omega_{2s-1} \rangle = \left\langle \widetilde{g}_{2s-1}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \varphi)}{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \mathbf{a}_{2s-1})} \right\rangle.$$

Применяя равенство (3.2), отсюда находим

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{2s-1})}{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \mathbf{a}_{2s-1})};$$

учитывая здесь, что в соответствии с (1.10) $\widetilde{\mathbf{a}}_{2s-1} = \mathbf{a}_{2s-1}$, приходим к с первому из соотношений (3.14).

Рассмотрим случай $q = r-1$. Здесь $s+q+1 = s+r$ и ввиду (1.11) справедливы равенства $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q+1} = \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r} = \mathbf{a}_{2r}$. Замечая, что в этом случае $2q+2 = 2r$, из (3.15) выводим второе соотношение в (3.14). Лемма доказана. ∎

Теорема 6. *Элементы матрицы $\mathfrak{Q}$ вычисляются по следующим формулам.*

1. Для всех $i \in J'_{\widetilde{N}-1}$ справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad j \in I_H, \tag{3.16}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \quad \textit{при} \quad j \in I_T. \tag{3.17}$$

2. Кроме того

$$\mathfrak{q}_{i,2q} = 0 \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{s+q\}, \quad s \le q \le r-1, \tag{3.18}$$

$$\mathfrak{q}_{i,2s-1} = 0 \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{2s-1, 2s\}. \tag{3.19}$$

$$\mathfrak{q}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{s+q+1\} \ \textit{при}\ s \le q \le r-2, \tag{3.20}$$

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = 1, \qquad \mathfrak{q}_{i,2r-1} = 0 \qquad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1}. \tag{3.21}$$

3. Наконец, справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})} \quad \textit{при}\ s \le q \le r-1, \tag{3.22}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+3}, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})} \quad \textit{при}\ s-1 \le q \le r-2, \tag{3.23}$$

Доказательство. Формулы (3.16)–(3.23) очевидным образом следуют из лемм 5, 6, 7, 8. ∎

Представим структуру матрицы $\mathfrak{Q}$ в случае, когда $N = 16$, $s = 2$, $r = 6$. Матрица $\mathfrak{P}^T$ в этих условиях имеет вид

$$\mathfrak{Q} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} \\
\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array},$$

где символом Y обозначены ненулевые элементы, определяемые формулами (3.23), а символом Z обозначены ненулевые элементы, определяемые формулами (3.22).

Иногда удобнее использовать теорему 7, в которой дана эквивалентная формулировка теоремы 6.

Теорема 7. *Элементы матрицы $\mathfrak{Q}$ вычисляются по следующим формулам.*

1. Для всех $i \in J'_{\widetilde{N}-1}$ справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при} \quad j \in I_H, \tag{3.24}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \quad \text{при} \quad j \in I_T. \tag{3.25}$$

2. Кроме того

$$\mathfrak{q}_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j} \quad \forall j \in J'_{N-1}, \tag{3.26}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q,j} = 0 \quad \forall j \in J'_{N-1} \backslash \{2q-1, 2q\} \quad \text{при} \quad s \le q \le r-1. \tag{3.27}$$

3. Наконец, справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}, \tag{3.28}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})} \quad \text{при } s \le q \le r-1. \tag{3.29}$$

Доказательство. Доказательство формул (3.24)–(3.29) получается из теоремы 6 простыми подстановками индексов; детали доказательства предлагается восстановить читателю. ∎

14.4. Об односторонней обратимости матриц $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{P}^T$

Аналогично случаям гнезд и интерференции (см. разделы 12 и 13) ив рассматриваемом случае получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Справедливо соотношение*

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I, \tag{4.1}$$

где I — единичная квадратная матрица порядка $\widetilde{N}+1$.

Доказательство формулы (4.1) проводится по схеме, изложенной в разделах 12 и 13.

Обозначая $\mathfrak{i}_{s,l}$ элементы произведения $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T$, проиллюстрируем теорему 6 на примере, а именно, положим, как и прежде, $N = 16$, $s = 2$, $r = 6$. В этом случае имеем

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{i}_{4,3} & \mathfrak{i}_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{i}_{5,4} & \mathfrak{i}_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{i}_{6,5} & \mathfrak{i}_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{i}_{7,6} & \mathfrak{i}_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

где

$$\mathfrak{i}_{4,3} = \mathfrak{q}_{4,3} + \mathfrak{q}_{4,4}\mathfrak{p}_{3,4}, \qquad \mathfrak{i}_{4,4} = \mathfrak{q}_{4,4}\mathfrak{p}_{4,4}, \tag{4.2}$$

$$\mathfrak{i}_{5,4} = \mathfrak{q}_{5,5} + \mathfrak{q}_{5,6}\mathfrak{p}_{4,6}, \qquad \mathfrak{i}_{5,5} = \mathfrak{q}_{5,6}\mathfrak{p}_{5,6}, \tag{4.3}$$

$$\mathfrak{i}_{6,5} = \mathfrak{q}_{6,7} + \mathfrak{q}_{6,8}\mathfrak{p}_{5,8}, \qquad \mathfrak{i}_{6,6} = \mathfrak{q}_{6,8}\mathfrak{p}_{6,8}, \tag{4.4}$$

$$\mathfrak{i}_{7,6} = \mathfrak{q}_{7,9} + \mathfrak{q}_{7,10}\mathfrak{p}_{6,10}, \qquad \mathfrak{i}_{7,7} = \mathfrak{q}_{7,10}\mathfrak{p}_{7,10}. \tag{4.5}$$

Применяя формулы (2.23), получаем

$$\mathfrak{p}_{3,4} = \frac{\det(\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)}{\det(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5)}, \quad \mathfrak{p}_{4,4} = \frac{\det(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5)}, \tag{4.6}$$

$$\mathfrak{p}_{4,6} = \frac{\det(\mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7)}{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7)}, \quad \mathfrak{p}_{5,6} = \frac{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6)}{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7)}, \tag{4.7}$$

$$\mathfrak{p}_{5,8} = \frac{\det(\mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9)}{\det(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_9)}, \quad \mathfrak{p}_{6,8} = \frac{\det(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8)}{\det(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_9)}, \tag{4.8}$$

$$\mathfrak{p}_{6,10} = \frac{\det(\mathbf{a}_{10}, \mathbf{a}_{11})}{\det(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{11})}, \quad \mathfrak{p}_{7,10} = \frac{\det(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{10})}{\det(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{11})}. \tag{4.9}$$

Используя формулы (3.15), находим

$$\mathfrak{q}_{4,3} = \frac{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}, \quad \mathfrak{q}_{5,5} = \frac{\det(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_6)}{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6)}, \tag{4.10}$$

$$\mathfrak{q}_{6,7} = \frac{\det(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_8)}{\det(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8)}, \quad \mathfrak{q}_{7,9} = \frac{\det(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{10})}{\det(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{10})}, \tag{4.11}$$

а применяя формулы (3.10), выводим

$$\mathfrak{q}_{4,4} = \frac{\det(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5)}{\det(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}, \quad \mathfrak{q}_{5,6} = \frac{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7)}{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6)}, \tag{4.12}$$

$$\mathfrak{q}_{6,8} = \frac{\det(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_9)}{\det(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8)}, \quad \mathfrak{q}_{7,10} = \frac{\det(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{11})}{\det(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{10})}. \tag{4.13}$$

Подставляя соотношения (4.6)–(4.13) в формулы (4.2)–(4.5), приходим к равенствам $\mathfrak{i}_{i,j} = \delta_{i,j}$; таким образом, в рассматриваемом иллюстративном примере непосредственным подсчетом убеждаемся, что произведение $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T$ — единичная матрица размера 13×13.

14.5. Вэйвлетное разложение

Рассмотрим оператор P проектирования пространства $\mathbb{S}$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}$, задаваемый формулой

$$Pu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in J'_{\widetilde{N}-1}} \langle \widetilde{g}_j, u \rangle \, \widetilde{\omega}_j \quad \forall u \in \mathbb{S}, \tag{5.1}$$

и введем оператор $Q = \mathcal{I} - P$, где $\mathcal{I}$ — тождественный в $\mathbb{S}$ оператор.

Пространством вэйвлетов (всплесков) называется пространство $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} Q\mathbb{S}$. Итак, получаем прямое разложение

$$\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dotplus \mathbb{W} \tag{5.2}$$

— *сплайн-вэйвлетное разложение* пространства $\mathbb{S}$.

Пусть $u \in \mathbb{S}$; используя соотношения (5.1)–(5.2), получаем два представления элемента u

$$u = \sum_{j \in J'_{N-1}} c_j \omega_j, \qquad u = \sum_{i \in J'_{\widetilde{N}-1}} a_i \widetilde{\omega}_i + \sum_{j \in J'_{N-1}} b_j \omega_j, \tag{5.3}$$

где

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, u \rangle, \quad b_j, \ c_j \ \in \mathbb{R}^1. \tag{5.4}$$

Из (2.2) и (5.3) имеем

$$\sum_{j \in J'_{N-1}} c_j \omega_j = \sum_{i \in J'_{\widetilde{N}-1}} a_i \sum_{j \in J'_{N-1}} \mathfrak{p}_{i,j} \omega_j + \sum_{j \in J'_{N-1}} b_j \omega_j,$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j\}_{j\in J'_{N-1}}$ получаем *формулы реконструкции*

$$c_j = \sum_{i\in J'_{\widetilde{N}-1}} a_i \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \quad \forall j \in J'_{N-1}. \tag{5.5}$$

Используя представление (5.4), перепишем формулы (5.5) в виде

$$c_j = \sum_{i\in J'_{\widetilde{N}-1}} \sum_{j'\in J'_{N-1}} c_{j'} \langle \widetilde{g}_i, \omega_{j'} \rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \qquad \forall j \in J'_{N-1}.$$

Учитывая, что $\mathfrak{q}_{i,j'} = \langle \widetilde{g}_i, \omega_{j'} \rangle$, отсюда имеем

$$b_j = c_j - \sum_{i\in J'_{\widetilde{N}-1}} \sum_{j'\in J'_{N-1}} c_{j'} \mathfrak{q}_{i,j'} \mathfrak{p}_{i,j} \qquad \forall j \in J'_{N-1}. \tag{5.6}$$

Подставляя первое соотношение из (5.3) в (5.4), находим

$$a_i = \sum_{j'\in J'_{N-1}} c_{j'} \mathfrak{q}_{i,j'} \qquad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1}. \tag{5.7}$$

Формулы (5.6) и (5.7) представляют собой *формулы декомпозиции.*

Введем вектор-столбцы

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{-1}, \ldots, a_{\widetilde{N}-1})^T, \quad \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_{-1}, \ldots, b_{N-1})^T,$$

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{-1}, \ldots, c_{N-1})^T$$

и перепишем формулы декомпозиции (5.6)–(5.7) в матричном виде $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \mathbf{c}, \qquad \mathbf{a} = \mathfrak{Q} \mathbf{c}$.

Вектор $\mathbf{a}$ называется *основным потоком*, а вектор $\mathbf{b}$ — *вэйвлетным потоком* при сплайн-вэйвлетном разложении *исходного потока* $\mathbf{c}$.

14.6. Основной и вэйвлетный потоки

Для вычисления оператора декомпозиции найдем произведение $\mathfrak{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}$. Для элементов $\mathfrak{u}_{i,j}$, $i, j \in J'_{N-1}$, квадратной матрицы $\mathfrak{U}$ размера $N+1$ имеем

$$\mathfrak{u}_{i,j} = \sum_{i'\in J'_{\widetilde{N}-1}} \mathfrak{p}_{i',i} \mathfrak{q}_{i',j} = S^h_{i,j} + S^m_{i,j} + S^t_{i,j}, \tag{6.1}$$

где

$$S^h_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i'\in I^h_*} \mathfrak{p}_{i',i}\mathfrak{q}_{i',j}, \quad S^m_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i'\in I^m_*} \mathfrak{p}_{i',i}\mathfrak{q}_{i',j}, \quad S^t_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i'\in I^t_*} \mathfrak{p}_{i',i}\mathfrak{q}_{i',j}. \tag{6.2}$$

Лемма 9. *Верны равенства*

$$S^m_{i,j} = 0 \quad \textit{при} \quad i \in I_M, \quad j \in J'_{N-1}\backslash I_M. \tag{6.3}$$

Для всех $j \in J'_{N-1}$ справедливы формулы

$$S^h_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \in I_H, \qquad S^h_{i,j} = 0 \quad \textit{при} \quad i \notin I_H, \tag{6.4}$$

$$S^t_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \in I_T, \qquad S^t_{i,j} = 0 \quad \textit{при} \quad i \notin I_T. \tag{6.5}$$

Доказательство. Формулы (6.3) непосредственно вытекают из структуры перемножаемых матриц $\mathfrak{P}^T$ и $\mathfrak{Q}$ (см. формулы (6.1)–(6.2)).

Используя формулы (2.20), имеем $S^h_{i,j} = \sum_{i'\in I^h_*} \delta_{i',i}\mathfrak{q}_{i',j}$, так что

$$S^h_{i,j} = \mathfrak{q}_{i,j} \quad \text{при} \quad i \in I^h_*, \qquad S^h_{i,j} = 0 \quad \text{при} \quad i \notin I^h_*.$$

Принимая во внимание формулы (3.16) и равенство $I^h_* = I_H$, получаем получаем соотношение (6.4).

Аналогичным образом с помощью формул (2.21) находим $S^t_{i,j} = \sum_{i'\in I^t_*} \delta_{i',i-r+s}\mathfrak{q}_{i',j}$, откуда

$$S^t_{i,j} = \mathfrak{q}_{i-r+s,j} \quad \text{при} \quad i \in I_T, \qquad S^t_{i,j} = 0 \quad \text{при} \quad i \notin I_T.$$

Учитывая формулы (3.17), отсюда немедленно получаем соотношения (6.5).

Лемма доказана. ■

Лемма 10. *Для всех $j \in I_M$ справедливы формулы*

$$S^m_{2q,j} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,j} + \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,j} \tag{6.6}$$

$$\textit{при} \quad q \in \{s, \dots, r-1\}, \tag{6.7}$$

$$S^m_{2q+1,j} = \mathfrak{q}_{s+q,j} \quad \textit{при} \quad q \in \{s-1, \dots, r-1\}. \tag{6.8}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что индекс i' в сумме $S^m_{i,j}$ лежит во множестве $I^m_* = \{2s-1, \dots, s+r-1\}$. Применяя формулы (2.17) и (2.19) при $i = 2q$, получаем соотношения (6.6), где должны выполняться импликации $s+q \in I_*^m$ и $s+q-1 \in I_*^m$ одновременно, а они эквивалентны импликации $q \in \{s,\ldots,r-1\}$; таким образом, соотношения (6.6)–(6.7) доказаны.

Аналогичным образом благодаря формулам (2.18) при $i = 2q+1$ с учетом импликации $s+q \in I_*^m$ выводим соотношения (6.8).

Лемма полностью доказана. ∎

Лемма 11. *Для*

$$q \in \{s+1,\ldots,r-1\} \tag{6.9}$$

справедливы формулы

$$S^m_{2q,2q-3} = \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-3}, \tag{6.10}$$

$$S^m_{2q,2q-2} = \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-2}, \tag{6.11}$$

$$S^m_{2q,2q-1} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,2q-1}, \tag{6.12}$$

а для

$$q \in \{s,\ldots,r-1\} \tag{6.13}$$

верны формулы

$$S^m_{2q,2q} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,2q}. \tag{6.14}$$

$$S^m_{2q,j} = 0 \quad \text{при} \quad j \in I_M \setminus \{2q-3, 2q-2, 2q-1, 2q\}, \tag{6.15}$$

и, наконец, верно равенство

$$S^m_{2s,2s-1} = \mathfrak{p}_{2s,2s}\mathfrak{q}_{2s,2s-1} + \mathfrak{p}_{2s-1,2s}\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1}. \tag{6.16}$$

Доказательство. Используя (6.6) при $j = 2q-3$, имеем

$$S^m_{2q,2q-3} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,2q-3} + \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-3}.$$

Согласно условию (6.9) число $j = 2q-3$ содержится во множестве I_M. В соответствии с формулами (3.20) и (3.23) имеем $\mathfrak{q}_{s+q,2q-3} = 0$, и потому справедливо соотношение (6.10).

Аналогичным образом из (6.6) при $j = 2q-2$ с учетом формул (3.18) и (3.22) найдем $\mathfrak{q}_{s+q,2q-2} = 0$, откуда получаем формулу (6.11).

Наконец, тем же путем из (6.6) при $j = 2q - 1$ в силу формул (3.20) и (3.23) выводим равенство $\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-1} = 0$, и потому справедливо соотношение (6.12).

Теперь в (6.8) положим $j = 2q$; в этом случае при выполнении соотношения (6.13) с помощью формул (3.18) и (3.22) находим $\mathfrak{q}_{s+q-1,2q} = 0$; таким образом доказано равенство (6.14).

Соотношения (6.15) вытекают из (6.6) и теоремы 6.

Наконец, равенство (6.16) получается из (6.6) при $q = s$ и $j = 2s - 1$.

Лемма доказана. ∎

Лемма 12. *Для* $q \in \{s+1, \ldots, r-1\}$ *справедливы формулы*

$$S^m_{2q,2q-3} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{6.17}$$

$$S^m_{2q,2q-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{6.18}$$

$$S^m_{2q,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \tag{6.19}$$

а для $q \in \{s, \ldots, r-1\}$ *верны формулы*

$$S^m_{2q,2q} = 1, \tag{6.20}$$

$$S^m_{2q,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in I_M \backslash \{2q-3, 2q-2, 2q-1, 2q\}, \tag{6.21}$$

и, наконец, верно равенство

$$S^m_{2s,2s-1} = 0. \tag{6.22}$$

Доказательство. Применяя формулы (2.19), (3.22) и (3.23) в соотношениях (6.10)–(6.14), получим равенства (6.17)–(6.20).

Равенства (6.21) совпадают с ранее доказанными равенствами (6.15). Формула (6.22) получается из (6.16) использованием соотношений (2.13) и (2.14) при $q = s$, а также равенств (3.23) при $q = s - 1$ и первого из соотношений (3.21).

Лемма доказана. ∎

Теорема 9. *Элементы матрицы* $\mathfrak{U}$ *могут быть представлены в виде*

$$\mathfrak{u}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при} \quad i \in I_H \cup I_T \cup \{2s-1, 2s\},\ j \in {J'}_{N-1}, \tag{6.23}$$

$$\mathfrak{u}_{i,j} = 0 \quad \text{при} \quad i \in I_M,\ j \in {J'}_{N-1} \backslash I_M, \tag{6.24}$$

При $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}$ *справедливы равенства*

$$\mathfrak{u}_{2q,2q-3} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{6.25}$$

$$\mathfrak{u}_{2q,2q-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{6.26}$$

$$\mathfrak{u}_{2q,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \qquad \mathfrak{u}_{2q,2q} = 1, \tag{6.27}$$

$$\mathfrak{u}_{2q,j} = 0 \quad \text{при} \quad j \in I_M \backslash \{2q-3, 2q-2, 2q-1, 2q\}. \tag{6.28}$$

Доказательство. Соотношения, перечисленные в данной теореме установлены в леммах 9 и 12: для доказательства соотношений (6.23)–(6.24) следует обратиться к полученным там формулам (6.3)–(6.5), (6.20), (6.22), а соотношения (6.25)–(6.28) вытекают из (6.17)–(6.21). ■

Теорема 10. *При условии (6.13) верны соотношения*

$$\mathfrak{u}_{2q+1,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}, \tag{6.29}$$

$$\mathfrak{u}_{2q+1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}, \tag{6.30}$$

$$\mathfrak{u}_{2q+1,j} = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad j \in I_M \backslash \{2q-1, 2q\}. \tag{6.31}$$

Кроме того,

$$\mathfrak{u}_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j} \quad \forall j \in I_M. \tag{6.32}$$

Доказательство. При доказательстве используем леммы 9 — 12 и соотношения (6.1)–(6.2).

Прежде всего заметим, что при условии (6.13) числа $2q-1$ и $2q$ лежат во множестве I_M. Полагая в (6.8) $j = 2q-1$ и $j = 2q$, имеем

$$S^m_{2q+1,2q-1} = \mathfrak{q}_{s+q,2q-1}, \qquad S^m_{2q+1,2q} = \mathfrak{q}_{s+q,2q}. \tag{6.33}$$

Применяя в (6.33) формулы (3.22)–(3.23), выводим (6.29) и (6.30). Соотношения (6.31) следуют из (2.17), а формула (6.32) получается из (6.8) при $q = s-1$:

$$S^m_{2s-1,j} = \mathfrak{q}_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j};$$

последнее равенство справедливо благодаря соотношению (3.26). Теорема доказана. ∎

Для наглядности представим матрицу $\mathfrak{U}$ в случае, когда $N = 16$, $s = 2$, $r = 6$. Имеем

$$\mathfrak{U} =$$

$$= \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} \\
\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{u}_{5,3} & \mathfrak{u}_{5,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{u}_{6,3} & \mathfrak{u}_{6,4} & \mathfrak{u}_{6,5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{u}_{7,5} & \mathfrak{u}_{7,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{u}_{8,5} & \mathfrak{u}_{8,6} & \mathfrak{u}_{8,7} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{u}_{9,7} & \mathfrak{u}_{9,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{u}_{10,7} & \mathfrak{u}_{10,8} & \mathfrak{u}_{10,9} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{u}_{11,9} & \mathfrak{u}_{11,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array},$$

где невыписанные элементы матрицы вычисляются по формулам (6.17)–(6.19), (6.23)–(6.24).

Теорема 11. *Коммутатор $\mathfrak{V} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$ матриц $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{P}^T$ представляет собой квадратную матрицу порядка $N+1$ с элементами $\mathfrak{v}_{i,j}$, ненулевые элементы которой вычисляются по формулам*

$$\mathfrak{v}_{2q,j} = -\mathfrak{u}_{2q,j} \quad \textit{при} \quad q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\},$$

$$j \in \{2q-3, 2q-2, 2q-1\}, \tag{6.34}$$

а при $q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ — по формулам

$$\mathfrak{v}_{2q+1,j} = -\mathfrak{u}_{2q+1,j} \quad \textit{для} \quad j \in \{2q-1, 2q\}, \quad \mathfrak{v}_{2q+1,2q+1} = 1. \tag{6.35}$$

Остальные элементы матрицы $\mathfrak{V}$ равны нулю.

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 9 и 10. ∎

Обращаясь к случаю $N = 16$, $s = 2$, $r = 6$, для матрицы $\mathfrak{V}$ имеем представление

$$
\mathfrak{V} = \begin{array}{r} \\ -1\\ 0\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8\\ 9\\ 10\\ 11\\ 12\\ 13\\ 14\\ 15 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{v}_{5,3} & \mathfrak{v}_{5,4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{v}_{6,3} & \mathfrak{v}_{6,4} & \mathfrak{v}_{6,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{v}_{7,5} & \mathfrak{v}_{7,6} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{v}_{8,5} & \mathfrak{v}_{8,6} & \mathfrak{v}_{8,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{v}_{9,7} & \mathfrak{v}_{9,8} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{v}_{10,7} & \mathfrak{v}_{10,8} & \mathfrak{v}_{10,9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{v}_{11,9} & \mathfrak{v}_{11,10} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array},
$$

Теорема 12. *Ненулевые компоненты вэйвлетного потока*

$$b = (I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q})c$$

имеют вид

$$b_{2q-1} = -\mathfrak{u}_{\,2q-1,2q-3} c_{2q-3} - \mathfrak{u}_{\,2q-1,2q-2} c_{2q-2} + c_{2q-1} \quad \text{при} \quad q \in \{s+1, s+2, \ldots, r\}, \tag{6.36}$$

$$b_{2q} = -\mathfrak{u}_{\,2q,2q-3} c_{2q-3} - \mathfrak{u}_{\,2q,2q-2} c_{2q-2} - \mathfrak{u}_{\,2q,2q-1} c_{2q-1} \quad \text{при} \quad q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}. \tag{6.37}$$

Доказательство вытекает из представления (6.34) и (6.35) элементов матрицы $\mathfrak{V}$, установленные в теореме 11. ■

14.7. Интерференция на гребенчатой структуре

Лемма 13. *В матрице $\mathfrak{V}$ строки с номерами $2q-1$ и $2q$ пропорциональны, а именно строка с номером $2q$ получается из строки с номером $2q-1$ умножением на множитель*

$$\kappa_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}; \tag{7.1}$$

здесь $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}$.

Доказательство. Ввиду формул (6.34) — (6.35) достаточно доказать, что умножение вектора $\mathbf{u}_{2q-1} \stackrel{\text{def}}{=} (u_{2q-1,2q-3}, u_{2q-1,2q-2}, -1)$ на число κ_q дает вектор $\mathbf{u}_{2q} \stackrel{\text{def}}{=} (u_{2q,2q-3}, u_{2q,2q-2}, u_{2q,2q-1})$. Используя формулы (6.25)–(6.27) и (6.29)–(6.30), представим эти векторы в виде

$$\mathbf{u}_{2q-1} = \left(\frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, -1\right), \tag{7.2}$$

$$\mathbf{u}_{2q} = \left(\frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \right.$$

$$\left. \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}\right). \tag{7.3}$$

Теперь видно, что умножение (7.2) на множитель κ_q даст вектор (7.3). ■

Теорема 13. *При $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}$ для компонент вэйвлетного потока справедливы равенства*

$$b_{2q} = \kappa_q b_{2q-1}, \tag{7.4}$$

где κ_q от исходного потока с не зависит и определяется формулой (7.1).

Доказательство. Используя лемму 13 и формулы (6.36)–(6.37), получаем соотношение (7.4). ■

В рассматриваемом случае конечной сетки линейная зависимость между компонентами числового потока также называется *интерференцией*, а пропорциональность соседних компонент с коэффициентом, не зависящим от исходного потока, называется *стоячей волной*.

Теорема 13 показывает, что порождение вэйвлетов первого порядка на двухинтервальной гребенчатой структуре $\{X, A, \widetilde{X}, \widetilde{A}\}$ сопровождается образованием системы стоячих волн; таким образом, размерность пространства вэйвлетных потоков совпадает с числом удаляемых узлов (т.е. с числом $r-s$, см. (1.5)).

14.8. Об аппроксимационных свойствах вэйвлетного потока

Предположим, что $\varphi \in C[a,b]$. Для непрерывности рассматриваемых сплайнов необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{a}_j = \varphi_{j+1}$; здесь $\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} = \varphi(x_j)$.

Пусть вектор-функция $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = (1, f(t))^T$, где $f \in C[a,b]$. В этом случае

$$\det(\varphi(t'), \varphi(t'')) = f(t'') - f(t'). \tag{8.1}$$

Обозначая $f_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(x_i)$, согласно формулам (6.29)–(6.30) и (8.1) имеем

$$\mathfrak{u}_{2q-1,2q-3} = \frac{f_{2q-1} - f_{2q}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}}, \qquad \mathfrak{u}_{2q-1,2q-2} = \frac{f_{2q} - f_{2q-2}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}}. \tag{8.2}$$

Таким образом, в случае непрерывных вэйвлетов из (6.36) с помощью (8.2) получаем

$$b_{2q-1} = \frac{f_{2q} - f_{2q-1}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}} \cdot c_{2q-3} - \frac{f_{2q} - f_{2q-2}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}} \cdot c_{2q-2} + c_{2q-1}. \tag{8.3}$$

Ввиду теоремы 13 компонента b_{2q} отличается от b_{2q-1} множителем κ_q, который в рассматриваемом случае (см. формулы (7.1) и (8.1)) может быть записан в виде

$$\kappa_q = \frac{f_{2q+2} - f_{2q+1}}{f_{2q+2} - f_{2q}}. \tag{8.4}$$

В случае, когда $\varphi(t) = (1, t)^T$ имеем $f(t) = t$, $f_i = x_i$, и формулы (8.3)–(8.4) принимают вид

$$b_{2q-1} = \frac{x_{2q} - x_{2q-1}}{x_{2q-1} - x_{2q-2}} \cdot c_{2q-3} - \frac{x_{2q} - x_{2q-2}}{x_{2q-1} - x_{2q-2}} \cdot c_{2q-2} + c_{2q-1}. \tag{8.5}$$

$$\kappa_q = \frac{x_{2q+2} - x_{2q+1}}{x_{2q+2} - x_{2q}}. \tag{8.6}$$

В случае равномерной сетки $x_j = jh$, $h > 0$, из (8.5)–(8.6) получаем

$$b_{2q-1} = c_{2q-3} - 2c_{2q-2} + c_{2q-1}. \tag{8.7}$$

$$\kappa_q = 1/2. \tag{8.8}$$

Предполагая, что источником исходного потока $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является функция $u \in C^2$, а именно $c_j = u(jh)$, из (8.7) имеем $b_{2q-1} = h^2 u''(\zeta)$, где ζ — некоторая точка интервала (x_{2q-3}, x_{2q-1}). Ввиду теоремы 13 согласно соотношениям (7.4) и (8.8) имеем $b_{2q} = \frac{1}{2} h^2 u''(\zeta)$.

15. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС ВСПЛЕСКОВЫХ ПОТОКОВ

Широкое использование вэйвлетных разложений является мощным стимулом их постоянного совершенствования. Вэйвлетные разложения, предложенные в [15] и называемые сплайн-всплесками (spline-wavelets), в отличие от классических вэйвлетов (см. [46, 51]) не требуют предварительного (часто весьма трудоемкого) построения вэйвлетного базиса и основываются на аппроксимационных соотношениях, что позволяет получить асимптотически оптимальные (по порядку N-поперечника) сплайн-всплесковые аппроксимации. В результате легко получаются разложения на неравномерных (конечных или бесконечных) сетках для различных топологических структур числовых потоков (см. [16, 70]). При компьютерной реализации рассматриваемого подхода важно знать базис дискретных всплесков; однако в этом направлении не было результатов.

Цель данного раздела состоит в том, чтобы получить ортогональный (в евклидовом пространстве) базис дискретных всплlесков в случае ранее рассмотренной (см. [31, 78, 87]) гребенчатой структуры сплайн-всплескового разложения и оценить время вычислений при реализации этого разложения на параллельной вычислительной системе (ПВС) с учетом влияния коммуникационной среды.

Данный раздел содержит восемь пунктов. Первые четыре пункта посвящены построению сплайн-всплескового разложения первого порядка, в пятом пункте построен ортогональный базис пространства дискретных всплесковых потоков, а в шестом пункте даны непрерывные базисные всплески. Седьмой пункт посвящен трудоемкости (т. е. времени вычислений) реализации основного потока на последовательной и параллельной вычислительных системах с учетом влияния коммуникационной среды, а восьмой пункт содержит аналогичное исследование для численной реализации всплескового потока.

15.1. Предварительные сведения

15.1.1. *Пространство сплайнов первого порядка*

Для удобства читателя напомним основные обозначения и определения, введенные в пункте 1 раздела 14.

Пусть $N \in \mathbb{N}$. На отрезке $[a, b]$ рассмотриваем конечную сетку

$$X: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N = b, \tag{1.1}$$

и обозначаем

$$J_m \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, m\}, \; J'_m \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, 0, 1, \ldots, m\}, \; m \in \mathbb{N}.$$

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2}), \; j \in J_{N-2}, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in J_{N-1}} (x_i, x_{i+1}),$$

$$S_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, x_1), \qquad S_{N-1} \stackrel{\text{def}}{=} (x_{N-1}, x_N).$$

$A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i \in J'_{N-1}}$ — полная цепочка двумерных векторов; $\varphi(t)$ двухкомпонентная вектор-функция с непрерывными на отрезке $[a, b]$ компонентами, которые линейно независимы на любом интервале $(a', b') \subset G$.

Функции $\omega_j(t)$, $t \in G$, $j \in J'_{N-1}$, задаются с помощью аппроксимационных соотношений и, таким образом, определяются на множестве G следующими формулами:

$$\omega_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_0)}{\det(\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0)} & \text{при } t \in (x_0, x_1), \\ 0 \quad \text{при } t \in G \backslash S_{-1}, \end{cases} \tag{1.2}$$

для $j \in J_{N-2}$

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \in G \backslash S_j, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\omega_{N-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{N-2}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1})} & \text{при } t \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 \quad \text{при } t \in G \backslash S_{N-1}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Дальше рассматривается пространство сплайнов первого порядка

$$\mathbb{S}_N = \mathbb{S}_N(X, A, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \, \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j \in J'_{N-1}},$$

$\dim \mathbb{S}_N = N + 1$.

Замечание 1. *Как известно (см. [38], с.205), для того, чтобы функции $\omega_j(t)$, $j \in {J'}_{N-1}$, можно было продолжить по непрерывности на узлы сетки X необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{a}_i = \varphi(x_{i+1})$ $\forall i \in {J'}_{N-1}$.*

15.1.2. *Непрерывные сплайны первой степени*

Рассмотрим случай

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix}1, & t\end{pmatrix}^T \qquad \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^* \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_{j+1}). \tag{1.5}$$

Получаемые из (1.2)–(1.4) функции обозначаем $\omega_j^*(t)$, так что

$$\omega_{-1}^*(t) = \begin{cases} \frac{x_1 - t}{x_1 - x_0} & \text{при } t \in (x_0, x_1), \\ 0 & \text{при } t \in G \backslash S_{-1}, \end{cases}$$

для $j \in J_{N-2}$

$$\omega_j^*(t) = \begin{cases} \frac{t - x_j}{x_{j+1} - x_j} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \frac{x_{j+2} - t}{x_{j+2} - x_{j+1}} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 & \text{при } t \in G \backslash S_j, \end{cases}$$

$$\omega_{N-1}^*(t) = \begin{cases} \frac{t - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} & \text{при } t \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 & \text{при } t \in G \backslash S_{N-1}. \end{cases}$$

В дальнейшем иногда требуется равномерная сетка

$$\overline{X}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j \mid x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \ldots, N\},$$

где N — натуральное число, $N \geq 5$. В случае равномерной сетки $\overline{X}_h$ рассматриваемые объекты будем снабжать чертой сверху. Для равномерной сетки $\overline{X}_h$ имеем $\overline{\omega}_j(t) = \omega(t/h - j)\chi_{[a,b]}$, $j = -1, 0, 1, \ldots, N-1$, где $\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} x$ при $x \in (0, 1]$, $\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2 - x$ при $x \in (1, 2]$, $\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ при $x \notin (0, 2]$, а $\chi_{[a,b]}$ — характеристическая функция отрезка $[a, b]$.

15.2. Двухинтервальная гребенчатая структура

Пусть s и r — натуральные числа, и $s < r < \lfloor N/2 \rfloor$. Из сетки (1.1) удалим узлы

$$x_{2s+1}, x_{2s+3}, x_{2s+5}, \ldots, x_{2r-1}, \tag{2.1}$$

и рассмотрим укрупненную сетку

$$\widetilde{X}:\ a=\widetilde{x}_0<\widetilde{x}_1<\widetilde{x}_2<\ldots<\widetilde{x}_{\widetilde{N}-1}<\widetilde{x}_{\widetilde{N}}=b,$$

где $\widetilde{N}=N-r+s$,

$$\widetilde{x}_i=x_i \quad \text{при} \quad 0\le i\le 2s,$$

$$\widetilde{x}_{i'}=x_{2i'-2s} \quad \text{при} \quad 2s+1\le i'\le s+r,$$

$$\widetilde{x}_{i''}=x_{r-s+i''} \quad \text{при} \quad s+r+1\le i''\le N-r+s.$$

Положим

$$\widetilde{S}_j\stackrel{\text{def}}{=}(\widetilde{x}_j,\widetilde{x}_{j+1})\cup(\widetilde{x}_{j+1},\widetilde{x}_{j+2}),\ j\in J_{\widetilde{N}-2},\quad \widetilde{G}\stackrel{\text{def}}{=}\bigcup_{i\in J_{\widetilde{N}-1}}(\widetilde{x}_i,\widetilde{x}_{i+1}),$$

$$\widetilde{S}_{-1}\stackrel{\text{def}}{=}(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1),\qquad \widetilde{S}_{\widetilde{N}-1}\stackrel{\text{def}}{=}(\widetilde{x}_{\widetilde{N}-1},\widetilde{x}_{\widetilde{N}}).$$

и введем обозначения

$$I_*^h\stackrel{\text{def}}{=}\{-1,0,\ldots,2s-2\},\quad I_*^m\stackrel{\text{def}}{=}\{2s-1,\ldots,s+r-1\},$$

$$I_*^t\stackrel{\text{def}}{=}\{s+r,s+r+1,\ldots,\widetilde{N}-1\}.$$

Очевидно, что

$$I_*^h\cup I_*^m\cup I_*^t=J'_{\widetilde{N}-1}.$$

Рассмотрим цепочку векторов $\widetilde{A}\stackrel{\text{def}}{=}\{\widetilde{\mathbf{a}}_{-1},\widetilde{\mathbf{a}}_0,\ldots,\widetilde{\mathbf{a}}_{\widetilde{N}-1}\}$, для которой выполнено условие

(A) *Цепочка векторов* $\widetilde{A}\stackrel{\text{def}}{=}\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}$ *полная и справедливы соотношения*

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j=\mathbf{a}_j \quad \text{при} \quad j\in I_*^h,\qquad \widetilde{\mathbf{a}}_j=\mathbf{a}_{2j-2s+1} \quad \text{при} \quad j\in I_*^m,$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j=\mathbf{a}_{j+r-s} \quad \text{при} \quad j\in I_*^t.$$

Читатель помнит, что совокупность $\{X,A,\widetilde{X},\widetilde{A}\}$ называется двухинтервальной гребенчатой структурой (см. [31]).

Система функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in J'_{\widetilde{N}-1}}$, полученных из соотношений

$$\sum_{j\in J'_{\widetilde{N}-1}}\widetilde{\mathbf{a}}_j\,\widetilde{\omega}_j(t)=\varphi(t)\quad \forall t\in\widetilde{G},$$

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_j,\ j \in J\,'_{\widetilde{N}-1},$$

имеет вид, указанный в пункте 1 раздела 14.

Замечание 2. В дальнейшем предполагается, что все рассматриваемые функции сужены на множество G.

Введем пространство $\widetilde{\mathbb{S}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} Cl_p\,\mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j\}_{j \in J\,'_{\widetilde{N}-1}}$. Очевидно, что $\dim \widetilde{\mathbb{S}} = \widetilde{N} + 1$.

Из теорем 1, 2 и 3 раздела 14 вытекают следующие утверждения.

Теорема 1. *При $t \in G$ верны формулы:*

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_j(t) \quad \textit{при} \quad j \in I_*^h, \qquad \widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_{r-s+j}(t) \quad \textit{при} \quad j \in I_*^t.$$

Теорема 2. *Если $0 \le i \le r-s-1$, то при $t \in (\widetilde{x}_{2s+i}, \widetilde{x}_{2s+i+1})$ справедливы соотношения*

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) \equiv \frac{\det(\mathbf{a}_{2s+2i-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{2s+2i-1}, \mathbf{a}_{2s+2i+1})},$$

а если $-1 \le i \le r-s-2$, то при $t \in (\widetilde{x}_{2s+i+1}, \widetilde{x}_{2s+i+2})$ верны соотношения

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) \equiv \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{2s+2i+3})}{\det(\mathbf{a}_{2s+2i+1}, \mathbf{a}_{2s+2i+3})}.$$

Теорема 3. *При условии (A) справедливо включение $\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S}$.*

15.3. Матрица вложения

15.3.1. *Пространство C_X и матрица вложения*

Пусть (c,d) — некоторый интервал вещественной оси. Обозначим $C\langle c,d\rangle$ линейное пространство функций, непрерывных на (c,d) и имеющих конечные пределы на концах этого интервала. Введем линейное пространство функций, определяемое прямым произведением пространств $C\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, а именно

$$C_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigotimes_{i=0}^{N-1} C\langle x_i, x_{i+1}\rangle.$$

Ясно, что $\omega_j \in C_X$, $j \in J\,'_{N-1}$ и $\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S} \subset C_X$.

Пусть $\{g_i\}_{i \in J\,'_{N-1}}$ — реализация системы линейных функционалов над C_X, биортогональной системе функций $\{\omega_j\}_{j \in J\,'_{N-1}}$, $\langle g_i, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}$, со свойством

$\operatorname{supp} g_j \subset [x_j, x_j+\varepsilon)$, $j \in J_{N-1}$, $\operatorname{supp}\, g_{-1} \subset [x_0, x_0+\varepsilon)$; здесь $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число (существование таких реализаций установлено в [15]).

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{P}$ с элементами

$$\mathfrak{p}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_j, \widetilde{\omega}_i \rangle, \quad i \in J'_{\widetilde{N}-1}, \quad j \in J'_{N-1}. \tag{3.1}$$

Для удобства введем обозначение $\operatorname{supp}_+ \widetilde{\omega}_i = [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+2})$ и рассмотрим три группы значений индекса j, а именно $I_H \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, 0, 1, \ldots, 2s-2\}$, $I_T \stackrel{\text{def}}{=} \{2r, 2r+1, \ldots, N-1\}$ и $I_M \stackrel{\text{def}}{=} \{2s-1, 2s, \ldots, 2r-1\}$. Очевидно, что $I_H \cup I_M \cup I_T = J'_{N-1}$, $I^h_* = I_H$.

Теорема 4. *Элементы матрицы $\mathfrak{P}$ вычисляются по формулам*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1},\ j \in \{-1, 0, 1, \ldots, 2s-1\}, \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{j,i-s+r} \quad \textit{при} \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1},\ j \in I_T; \tag{3.3}$$

остальные элементы вычисляются при $q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ по формулам

$$\mathfrak{p}_{i,2q} = \mathfrak{p}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{s+q-1, s+q\}, \tag{3.4}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = 0, \qquad \mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = 1, \tag{3.5}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})},\ \mathfrak{p}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}. \tag{3.6}$$

Эта теорема лишь обозначениями отличается от теремы 5 предыдущего раздела (см. также [31]).

В соответствии с формулой (3.2) имеем

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j} \quad \forall \in J'_{\widetilde{N}-1},\ j \in \ \{-1, 0, \ldots, 2s-1\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow [\mathfrak{P}^T \mathbf{a}]_j = a_j \quad \forall j \in \ \{-1, 0, \ldots, 2s-1\}. \tag{3.7}$$

Из формул (3.3) получаем

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{j,i-s+r} \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1},\ j \in I_T = \{2r, 2r+1, \ldots, N-1\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow [\mathfrak{P}^T \mathbf{a}]_j = a_{j+s-r} \quad \forall j \in \{2r, 2r+1, \ldots, N-1\}. \tag{3.8}$$

Используя формулы (3.4) — (3.5), для $q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ выводим

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = 0\ \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{s+q-1, s+q\},\ \mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = 0,\ \mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = 1,$$

$$\Longrightarrow [\mathfrak{P}^T \mathbf{a}]_{2q+1} = a_{s+q} \quad \forall q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}. \tag{3.9}$$

Из (3.4) и (3.6) при $q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ находим

$$\mathfrak{p}_{i,2q} = 0 \; \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{s+q-1, s+q\},$$

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \; \mathfrak{p}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}$$

так что

$$[\mathfrak{P}^T \mathbf{a}]_{2q} = \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\, a_{s+q-1} + \mathfrak{p}_{s+q,2q}\, a_{s+q} \quad q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\},$$

а значит

$$[\mathfrak{P}^T \mathbf{a}]_{2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}\, a_{s+q-1} + \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}\, a_{s+q}, \tag{3.10}$$

$$\forall q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}.$$

15.3.2. *Матрица вложения для сплайнов первой степени*

Снабдим символом «звездочка» матрицу $\mathfrak{P}$ и ее элементы в случае сплайнов первой степени, рассмотренных в пункте 15.1.2.

Теорема 5. *Элементы матрицы $\mathfrak{P}^*$ вычисляются по формулам*

$$\mathfrak{p}^*_{ij} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1}, \; j \in \{-1, 0, 1, \ldots, 2s-1\},$$

$$\mathfrak{p}^*_{ij} = \delta_{j,i-s+r} \quad \textit{при} \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1}, \; j \in I_T;$$

остальные элементы вычисляются при $q \in \{s, \ldots, r-1\}$ по формулам

$$\mathfrak{p}^*_{i,2q} = \mathfrak{p}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in J'_{\widetilde{N}-1} \backslash \{s+q-1, s+q\},$$

$$\mathfrak{p}^*_{s+q-1,2q+1} = 0, \qquad \mathfrak{p}^*_{s+q,2q+1} = 1;$$

$$\mathfrak{p}^*_{s+q-1,2q} = \frac{x_{2q+2} - x_{2q+1}}{x_{2q+2} - x_{2q}}, \qquad \mathfrak{p}^*_{s+q,2q} = \frac{x_{2q+1} - x_{2q}}{x_{2q+2} - x_{2q}}. \tag{3.11}$$

Доказательство легко получается из соотношений (3.7)–(3.10) с использованием формулы (1.5).

В случае равномерной сетки $\overline{X}_h$ формулы (3.11) упрощаются: $\overline{\mathfrak{p}}_{s+q-1,2q} = \overline{\mathfrak{p}}_{s+q,2q} = 1/2$.

15.4. Матрица продолжения

15.4.1. *Матрица продолжения для сплайновых пространств первого порядка*

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in J'_{\widetilde{N}-1}}$, биортогональную системе $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in J'_{\widetilde{N}-1}}$, $\langle\widetilde{g}_i,\widetilde{\omega}_j\rangle=\delta_{i,j}$, со свойством

$$\mathrm{supp}\widetilde{g}_i\subset[\widetilde{x}_i,\widetilde{x}_i+\varepsilon)\quad\forall\varepsilon>0,\quad i\in J_{\widetilde{N}-1},\quad \mathrm{supp}\widetilde{g}_{-1}\subset(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_0+\varepsilon).$$

Используя соотношение $\langle\widetilde{g}_i,\varphi\rangle=\widetilde{\mathbf{a}}_i$, вычислим матрицу $\mathfrak{Q}$ размеров $\widetilde{N}+1\times N+1$ с элементами $\mathfrak{q}_{i,j}\overset{\mathrm{def}}{=}\langle\widetilde{g}_i,\omega_j\rangle$; здесь $i\in J'_{\widetilde{N}-1}$, $j\in J'_{N-1}$.

Справедливо доказано следующее утверждение (см. [31]).

Теорема 6. *Элементы матрицы $\mathfrak{Q}$ вычисляются по следующим формулам.*

1. Для всех $i\in J'_{\widetilde{N}-1}$ справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{i,j}=\delta_{i,j}\quad\textit{при}\quad j\in I_H,\qquad \mathfrak{q}_{i,j}=\delta_{i,j+s-r}\quad\textit{при}\quad j\in I_T.$$

2. Кроме того

$$\mathfrak{q}_{2s-1,j}=\delta_{2s-1,j}\quad\forall j\in J'_{N-1},$$

$$\mathfrak{q}_{s+q,j}=0\quad\forall j\in J'_{N-1}\backslash\{2q-1,2q\}\quad\textit{при}\quad s\le q\le r-1.$$

3. Наконец, справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q}=\frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1},\mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1},\mathbf{a}_{2q})}\ne0,\tag{4.1}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q-1}=\frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1},\mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1},\mathbf{a}_{2q})}\ne0\quad\textit{при}\ s\le q\le r-1.\tag{4.2}$$

Заметим, что неравенства нулю выражений (4.1) и (4.2) следуют из условия (A).

15.4.2. *Матрица продолжения для сплайнов первой степени*

Обращаясь к сплайнам первой степени, получим следующее утверждение.

Теорема 7. *Элементы матрицы $\mathfrak{Q}^*$ вычисляются по формулам:*

1. Для всех $i\in J'_{\widetilde{N}-1}$ справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}^*_{i,j}=\delta_{i,j}\quad\textit{при}\quad j\in I_H,\tag{4.4}$$

$$\mathfrak{q}^*_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \quad \text{при} \quad j \in I_T. \tag{4.5}$$

2. Кроме того

$$\mathfrak{q}^*_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j} \quad \forall j \in J'_{N-1}, \tag{4.6}$$

$$\mathfrak{q}^*_{s+q,j} = 0 \quad \forall j \in J'_{N-1} \backslash \{2q-1, 2q\} \quad \text{при} \quad s \le q \le r-1. \tag{4.7}$$

3. Наконец, справедливы соотношения

$$\mathfrak{q}^*_{s+q,2q} = \frac{x_{2q+2} - x_{2q}}{x_{2q+1} - x_{2q}}, \tag{4.8}$$

$$\mathfrak{q}^*_{s+q,2q-1} = \frac{x_{2q+1} - x_{2q+2}}{x_{2q+1} - x_{2q}} \quad \text{при } s \le q \le r-1. \tag{4.9}$$

Доказательство. Формулы (4.4)–(4.7) вытекают непосредственно из теоремы 6, а формулы (4.8)–(4.9) получаются из соотношений (4.1)–(4.2) использованием формулы (1.5). ■

В случае равномерной сетки $\overline{X}_h$ формулы (4.8)–(4.9) упрощаются: $\overline{\mathfrak{q}}_{s+q,2q} = 2$, $\overline{\mathfrak{q}}_{s+q,2q-1} = -1$.

15.5. Всплесковое разложение потоков

15.5.1. *Оператор проектирования*

Рассмотрим оператор P проектирования пространства $\mathbb{S}$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}$, задаваемый формулой

$$Pu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in J'_{\widetilde{N}-1}} \langle \widetilde{g}_j, u \rangle \, \widetilde{\omega}_j \quad \forall u \in \mathbb{S}, \tag{5.1}$$

и введем оператор $Q = \mathcal{I} - P$, где $\mathcal{I}$ — тождественный в $\mathbb{S}$ оператор. В результате получаем прямое разложение (см. [38], с. 198)

$$\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dotplus \mathbb{W} \tag{5.2}$$

— *сплайн-всплесковое разложение первого порядка* для пространства $\mathbb{S}$, где $\widetilde{\mathbb{S}}$ — *основное пространство*, а $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} Q\mathbb{S}$ — *всплесковое пространство.*

Пусть $u \in \mathbb{S}$; используя соотношения (5.1)–(5.2), находим $u = \widetilde{u} + w$, где

$$u = \sum_{j \in J'_{N-1}} c_j \omega_j, \quad \widetilde{u} = \sum_{i \in J'_{\widetilde{N}-1}} a_i \widetilde{\omega}_i, \quad w = \sum_{j \in J'_{N-1}} b_j \omega_j, \tag{5.3}$$

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, u\rangle, \quad b_j,\ c_j\ \in \mathbb{R}^1.$$

Вводя основной поток $\mathbf{a}$, всплесковый поток $\mathbf{b}$ и исходный поток $\mathbf{c}$,

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{-1}, \ldots, a_{\widetilde{N}-1})^T, \quad \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_{-1}, \ldots, b_{N-1})^T, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{-1}, \ldots, c_{N-1})^T, \tag{5.5}$$

запишем формулы декомпозиции в виде (см. также [38])

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \tag{5.6}$$

$$\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}. \tag{5.7}$$

Вектор $\mathbf{a}$, вычисляемый по фомуле (5.7), называется *основным потоком*, а вектор $\mathbf{b}$ (см. формулу (5.6)) — *всплесковым потоком* в сплайн-всплесковом разложении первого порядка *исходного потока* $\mathbf{c}$.

15.5.2. *Ортогональный базис пространства всплесковых потоков первого порядка*

Рассмотрим пространство $\mathcal{C}$ исходных потоков, отождествляя его с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{N+1}$, в котором введено стандартное скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N+1} x_i y_i \qquad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N+1},$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{N+1}).$$

Пусть $\mathcal{A}$ — $\widetilde{N}+1$-мерное пространство основных потоков $\mathbf{a}$, а $\mathcal{B}$ — пространство всевозможных всплесковых потоков $\mathbf{b}$. Учитывая, что каждая из систем $\{\omega_j\}_{j \in J'_{N-1}}$ и $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j \in J'_{\widetilde{N}-1}}$ состоит из линейно независимых элементов, а потоки $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ связаны с представлением (5.2) с помощью формул (5.3)–(5.5), видим, что пространства $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ линейно изоморфны пространствам $\widetilde{\mathbb{S}}$, $\mathbb{W}$, $\mathbb{S}$ соответственно:

$$\mathcal{A} \sim \widetilde{\mathbb{S}}, \qquad \mathcal{B} \sim \mathbb{W}, \qquad \mathcal{C} \sim \mathbb{S}, \tag{5.8}$$

так что $\mathcal{C} = \mathcal{A} \dotplus \mathcal{B}$.

Теорема 8. *Пространство* $\mathcal{B}$ *всевозможных всплесковых потоков* $\mathbf{b}$ *совпадает с ядром оператора* $\mathfrak{Q}$:

$$\mathcal{B} = \ker \mathfrak{Q}. \tag{5.9}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5 из раздела 11 (см. также [32, 84]).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Для рассматриваемого сплайн-всплескового разложения первого порядка всплесковое пространство потоков* $\mathcal{B}$ *можно представить в виде*

$$\mathcal{B} = \Big\{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = \sum_{q=s+1}^{r} \alpha_q \mathbf{b}_q \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R}^1,\ i = s+1, s+2, \ldots, r\Big\}, \tag{5.10}$$

где при $q = s+1, \ldots, r-1$ *вектор* $\mathbf{b}_q$ *определяется символическим определителем*

$$\mathbf{b}_q \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{2q-1} & \mathbf{e}_{2q} \\ \det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q}) & \det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1}) \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

а при $q = r$ *— равенством*

$$\mathbf{b}_r = \mathbf{e}_{2r-1}. \tag{5.12}$$

Доказательство. Учитывая структуру матрицы $\mathfrak{Q}$, имеем

$$\ker \mathfrak{Q} = \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = \sum_{q=s+1}^{r-1} \alpha_q \big(\mathfrak{q}_{s+q,2q}\mathbf{e}_{2q-1} - \mathfrak{q}_{s+q,2q-1}\mathbf{e}_{2q}\big) + \alpha_r \mathbf{e}_{2r-1}$$

$$\forall \alpha_q \in \mathbb{R}^1,\ q = s+1, \ldots, r-1\}.$$

Подставляя сюда соотношения (4.1)–(4.2) и учитывая произвольность чисел α_i (благодаря чему можно отбросить появляющиеся знаменатели), находим

$$\ker \mathfrak{Q} = \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = \sum_{q=s+1}^{r-1} \alpha_q \big(\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})\big)\mathbf{e}_{2q-1} -$$

$$- \det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})\mathbf{e}_{2q}\big) + \alpha_r \mathbf{e}_{2r-1} \quad \forall \alpha_q \in \mathbb{R}^1,\ q = s+1, \ldots, r\};$$

учитывая (5.11), приходим к соотношению (5.10). Формула (5.12) очевидна. ■

Определение 1. *Систему векторов* $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,2,\ldots,M}$ *пространства* $\mathbb{R}^K$ *называем системой нулевой кратности, если*

$$[\mathbf{v}_i]_s [\mathbf{v}_j]_s = 0 \quad \forall s \in \{1, 2, \ldots, K\} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, M\},\ i \neq j.$$

Легко видеть, что система векторов нулевой кратности пространства $\mathbb{R}^K$ состоит из взаимно ортогональных векторов.

Теорема 10. *Система $\{\mathbf{b}_l\}_{l=s+1\ldots,r}$ является системой нулевой кратности. Эта система служит ортогональным базисом пространства всплесковых потоков $\mathcal{B}$.*

Теорема 10 фактически вытекает из теоремы 9.

В дальнейшем нам понадобится система векторов $\{\widetilde{\mathbf{b}}_l\}_{l=s+1,\ldots,r}$ вида

$$\widetilde{\mathbf{b}}_q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_{2q-1} + \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}\mathbf{e}_{2q} \quad q \in \{s+1, \ldots, r-1\}, \quad \widetilde{\mathbf{b}}_r = \mathbf{e}_{2r-1}. \tag{5.13}$$

Следствие 1. *Система $\{\widetilde{\mathbf{b}}_l\}_{l=s+1\ldots,r}$ — система нулевой кратности; она также является ортогональным базисом всплескового пространства $\mathcal{B}$.*

15.5.3. *Ортогональный базис в случае всплесковых потоков первой степени*

В условиях (1.5) рассматриваемые объекты, как и прежде, снабдим «звездочкой»; соответствующие потоки назовем *потоками первой степени.* Справедливо следующее утверждение.

Теорема 11. *В условиях (1.5) пространство всплесковых потоков $\mathcal{B}^*$ имеет вид*

$$\mathcal{B}^* = \Big\{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = \sum_{q=s+1}^{r} \alpha_q \mathbf{b}_q^* \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R}^1,\ i = s+1, s+2, \ldots, r\Big\}, \tag{5.14}$$

где при $q = s+1, \ldots, r-1$ векторы $\mathbf{b}_q^*$ определяются формулами

$$\mathbf{b}_q^* \stackrel{\text{def}}{=} (x_{2q+2} - x_{2q})\mathbf{e}_{2q-1} + (x_{2q+2} - x_{2q+1})\mathbf{e}_{2q}, \tag{5.15}$$

а при $q = r$ — формулами

$$\mathbf{b}_r^* = \mathbf{e}_{2r-1}. \tag{5.16}$$

Доказательство формул (5.14)–(5.16) получается применением формулы (1.5) в соотношении (5.11). ∎

Из (5.15)–(5.16) следует, что система векторов $\{\widetilde{\mathbf{b}}_q^*\}$ вида

$$\widetilde{\mathbf{b}}_q^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_{2q-1} + \frac{x_{2q+2} - x_{2q+1}}{x_{2q+2} - x_{2q}}\mathbf{e}_{2q} \quad \forall q \in \{s+1 \ldots, r-1\}, \quad \widetilde{\mathbf{b}}_r^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_{2r-1}$$

также является ортогональным базисом всплесковых потоков первой степени.

В случае равномерной сетки $\overline{X}_h$ в качестве базиса пространства всплесковых потоков можно взять совокупность векторов

$$\overline{\mathbf{b}}_q \overset{\text{def}}{=} \mathbf{e}_{2q-1} + \mathbf{e}_{2q}/2, \quad q \in \{s+1\dots, r-1\}, \qquad \overline{\mathbf{b}}_r = \mathbf{e}_{2r-1}.$$

15.6. Базис всплесков

15.6.1. *Представления базисных всплесков*

Ввиду упомянутого выше линейного изоморфизма (5.8) образ базиса пространства $\mathcal{B}$ является базисом пространства $\mathbb{W}$. Обозначая биекцию, порождающую этот изоморфизм, через ψ,

$$\psi: \quad \mathcal{B} \mapsto \mathbb{W},$$

найдем базисные всплески $w_q \overset{\text{def}}{=} \psi(\mathbf{b}_q)$.

Теорема 12. *Базисные всплески $w_q(t)$ имеют вид*

$$w_q(t) = \det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})\omega_{2q-1}(t) + \det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})\omega_{2q}(t), \tag{6.1}$$

$$q = s+1, \dots, r-1;$$

$$w_r(t) = \omega_{2r-1}(t). \tag{6.2}$$

Доказательство. Используя третью из формул (5.3), находим

$$w_q(t) = \sum_{j \in J'_{N-1}} [\mathbf{b}_q]_j \omega_j(t). \tag{6.3}$$

Согласно соотношению (5.11) при $q = s+1, \dots, r-1$ лишь две компоненты вектора $\mathbf{b}_q$ отличны от нуля:

$$[\mathbf{b}_q]_{2q-1} = \det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1}), \quad [\mathbf{b}_q]_{2q} = -\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q}). \tag{6.4}$$

Подставляя (6.4) в (6.3) находим соотношения (6.1) При $q = r$ из формулы (5.21) получаем соотношение (6.2). ∎

Теорема 13. *Базисным всплескам $w_q(t)$, $q = s+1, \dots, r-1$, можно придать вид*

$$w_q(t) = \begin{cases} \det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1}) \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-2}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{2q-2}, \mathbf{a}_{2q-1})} & \text{при } t \in (x_{2q-1}, x_{2q}), \\ \det(\varphi(t), \mathbf{a}_{2q+1}) & \text{при } t \in (x_{2q}, x_{2q+2}), \\ 0 & \text{при } t \notin (x_{2q-1}, x_{2q+2}). \end{cases} \tag{6.5}$$

Доказательство. Согласно соотношению (1.3) имеем

$$\omega_{2q-1}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-2},\varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{2q-2},\mathbf{a}_{2q-1})} \quad \text{при } t \in (x_{2q-1}, x_{2q}), \\ \frac{\det(\varphi(t),\mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1},\mathbf{a}_{2q})} \quad \text{при } t \in (x_{2q}, x_{2q+1}), \\ 0 \quad \text{при } t \notin (x_{2q-1}, x_{2q+1}), \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\omega_{2q}(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1},\varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{2q-1},\mathbf{a}_{2q})} \quad \text{при } t \in (x_{2q}, x_{2q+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t),\mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q},\mathbf{a}_{2q+1})} \quad \text{при } t \in (x_{2q+1}, x_{2q+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \notin (x_{2q}, x_{2q+2}), \end{cases} \tag{6.7}$$

Рассмотрим соотношение (6.1) при $q = s+1, \ldots, r-1$ для каждого из промежутков (x_{2q-1}, x_{2q}), (x_{2q}, x_{2q+1}) и (x_{2q+1}, x_{2q+2}).

1. Пусть $t \in (x_{2q-1}, x_{2q})$; тогда из (6.1) и (6.6) — (6.7) получим

$$w_q(t) = \det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1}) \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-2}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{2q-2}, \mathbf{a}_{2q-1})} \quad \forall t \in (x_{2q-1}, x_{2q}). \tag{6.8}$$

2. При $t \in (x_{2q}, x_{2q+1})$ из (6.1) и (6.6) — (6.7) находим

$$w_q(t) = [\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})]^{-1} [\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1}) \det(\varphi(t), \mathbf{a}_{2q}) +$$
$$+ \det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1}) \det(\mathbf{a}_{2q-1}, \varphi(t))]. \tag{6.9}$$

Для двумерных векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$ справедливо соотношение

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \det(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + \det(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \det(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{6.10}$$

Воспользуемся соотношением (6.10) в (6.9), полагая $\mathbf{x} = \mathbf{a}_{2q-1}$, $\mathbf{y} = \mathbf{a}_{2q}$, $\mathbf{z} = \mathbf{a}_{2q+1}$, $\mathbf{u} = \varphi(t)$; тогда во вторых квадратных скобках формулы (6.9) вместо суммы получим произведение $\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q}) \det(\varphi(t), \mathbf{a}_{2q+1})$; поэтому из (6.9) найдем

$$w_q(t) = \det(\varphi(t), \mathbf{a}_{2q+1}) \qquad \forall t \in (x_{2q}, x_{2q+1}). \tag{6.11}$$

3. Пусть $t \in (x_{2q+1}, x_{2q+2})$; тогда из (6.1) и (6.6) — (6.7) вытекает формула

$$w_q(t) = \det(\varphi(t), \mathbf{a}_{2q+1}) \qquad \forall t \in (x_{2q+1}, x_{2q+2}). \tag{6.12}$$

Учитывая представления (6.8), (6.11)–(6.12), приходим к формуле (6.5). Теорема доказана. ■

Замечание 3. Легко проверить, что при условии $\mathbf{a}_i = \varphi(x_{i+1})$ $\forall i \in J'_{N-1}$, *базисные всплески* $w_q(t)$ *непрерывны.*

15.6.2. *Базис всплесков первой степени*

Рассмотрим непрерывные сплайны первой степени (см. подпункт 15.1.2) на сетке X. Отмечая, как и раньше, рассматриваемые в этом случае объекты "звездочкой получаем следующее утверждение.

Теорема 14. *Базисные всплески $w_q^*(t)$ имеют вид*

$$w_q^*(t) = (x_{2q+2} - x_{2q})\omega_{2q-1}^*(t) - (x_{2q+1} - x_{2q+2})\omega_{2q}^*(t), \tag{6.13}$$

$$q = s+1, \ldots, r-1;$$

$$w_r^*(t) = \omega_{2r-1}^*(t). \tag{6.14}$$

Доказательство. Применяя формулу (1.5) в соотношениях (6.1), получаем соотношение (6.13). Соотношение (6.14) непосредственно следует из (6.2). ■

При использовании равномерной сетки $\overline{X}_h$ базисные всплески $\overline{w}_q(t)$ могут быть представлены в виде

$$\overline{w}_q(t) = 2\overline{\omega}_{2q-1}(t) + \overline{\omega}_{2q}(t), \qquad q = s+1, \ldots, r-1;$$

$$\overline{w}_r(t) = \overline{\omega}_{2r-1}(t).$$

15.6.3. *О связи с понятием интерференции*

Из теорем 12 и 13 раздела 14 (см. также работы [37, 83]) вытекает следующее утверждение

Теорема 15. *При $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}$ для компонент всплескового потока справедливы равенства*

$$b_{2q} = \kappa_q b_{2q-1},$$

где константа κ_q от исходного потока $\mathbf{c}$ *не зависит и определяется формулой*

$$\kappa_q \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1}) / \det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1});$$

здесь $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}$.

Линейная зависимость между компонентами числового потока называется *интерференцией*, а пропорциональность соседних компонент с коэффициентом, не зависящим от исходного потока, называется *стоячей волной* (см. [37]).

Теорема 15 показывает, что порождение всплесков первого порядка на двухинтервальной гребенчатой структуре $\{X, A, \widetilde{X}, \widetilde{A}\}$ сопровождается образованием системы стоячих волн; таким образом, размерность пространства всплесковых потоков совпадает с числом удаляемых узлов (т. е. с числом $r-s$, см. (2.1)).

Этот результат полностью согласуется с полученным в данной работе представлением всплескового базиса (см. теорему 12).

15.7. Вычисление основного потока

15.7.1. *Постановка задачи*

Реализация алгоритма декомпозиции включает две задачи: отыскание основного потока и отыскание всплескового потока. Первая из этих задач, как правило, является более важной, чем вторая, поскольку в большинстве случаев именно основной поток дает представление о характере исходного потока; прежде всего займемся первой задачей.

Рассмотрим численную реализацию основного потока $\mathbf{a}$. Согласно теореме 6 из формулы (5.7) получаем

$$a_i = c_i \qquad \text{при} \quad i \in \{-1, 0, \ldots, 2s-1\}, \tag{7.1}$$

$$a_i = \mathfrak{q}_{i,2i-2s-1} c_{2i-2s-1} + \mathfrak{q}_{i,2i-2s} c_{2i-2s} \tag{7.2}$$

$$\text{при} \quad i \in \{2s, 2s+1, \ldots, s+r-1\}, \tag{7.3}$$

$$a_i = c_{i+r-s} \qquad \text{при} \quad i \in \{s+r, s+r+1, \ldots, \widetilde{N}-1\}. \tag{7.4}$$

Программирование формул (7.1) и (7.4) сопровождается операциями присваивания без сдвига индекса (в количестве $2s+1$ для формулы (7.1)), и присваиваниями со сдвигом индекса на величину $r-s$ (в количестве $\widetilde{N}-(s+r-1) = N-2r$ для формулы (7.4)).

Сложнее обстоит дело с формулами (7.2)–(7.3). Вычисление коэффициентов $\mathfrak{q}_{i,2i-2s-1}$ и $\mathfrak{q}_{i,2i-2s}$ требует вычисления определителей $\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})$, $\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})$ и $\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})$.

В соответствии с соотношениями (4.1)–(4.2) формулы (7.2)–(7.3) представим в виде

$$\begin{aligned} a_{s+q} = \big(&\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q}) c_{2q-1} + \\ &+ \det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1}) c_{2q}\big) / \det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q}), \end{aligned} \tag{7.5}$$

где $s \le q \le r-1$.

Количество формул (7.5) равно $r-s$; в каждой из них имеется 3 определителя второго порядка, вычисление каждого из которых в общем случае требует 2 мультипликативных операции и одну аддитивную; сборка формулы (7.5) потребует еще 2 мультипликативных и одну аддитивную операцию; итак, всего потребуется 8 мультипликативных и 4 аддитивных операции. Заметим, что вычисления во всех формулах можно проводить параллельно (конечно, возможно распараллеливание внутри каждой из формул, однако, этот случай рассматривать не будем).

В дальнейшем предполагается, что вычислительная система (ВС) работает синхронно (по тактам), измеряемое время дискретно и за единицу времени принимается время совершения одного такта (см. [39], с.30).

Будем считать, что рассматриваемые потоки состоят из чисел типа `real`; их представление обозначим f (структуру их представления конкретизировать не будем).

15.7.2. *Последовательные вычисления основного потока в сплайн-всплесковом разложении первого порядка*

Пусть функция $\mathtt{t}_d(f, p, q)$ дает количество единиц времени (натуральное число), необходимое для операции, производящей p присваиваний со сдвигом индекса на целое число позиций от 0 до $q-1$.

Иногда будем использовать предположение

(B) *Справедливо соотношение* $\mathtt{t}_d(f, p, q) = p\,q\,t_d$, *где* $t_d = t_d(f)$ — *натуральное число.*

На однопроцессорной вычислительной системе (ОВС) потребуется

а) $2s+1$ присваиваний без сдвига индекса с затратой времени $\mathtt{t}_d(f, 2s+1, 1)$,

б) $9(r-s)$ мультипликативных операций с затратой времени $9(r-s)t_m$, где $t_m = t_m(f)$ означает время, затрачиваемое ВС на одну мультипликативную операцию,

в) $4(r-s)$ аддитивных операций с затратой времени $4(r-s)t_a$, где $t_a = t_a(f)$ означает время, затрачиваемое ВС на одну аддитивную операцию,

г) $N-2r$ присваиваний со сдвигом индекса на $r-s$ с затратой времени $\mathtt{t}_d(f, N-2r, r-s+1)$.

В этом варианте общее время $t_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}}$, необходимое для получения основного потока $\mathbf{a}$ из исходного $\mathbf{c}$, дается формулой

$$t_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}} = \mathtt{t}_d(f, 2s+1, 1) + 9(r-s)t_m + 4(r-s)t_a + \\ + \mathtt{t}_d(f, N-2r, r-s+1). \tag{7.6}$$

Теорема 16. *Если выполнено условие (B), то для получения основного потока* $\mathbf{a}$ *из исходного* $\mathbf{c}$ *на однопроцессорной системе требуется* $t_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(B)}$

единиц времени, где

$$t_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(B)} = \big(2s+1+(N-2r)(r-s+1)\big)t_d+ \\ +9(r-s)t_m+4(r-s)t_a. \qquad (7.7)$$

Доказательство. Соотношение (7.7) вытекает из формулы (7.6). ∎

15.7.3. *Последовательные вычисления основного потока в сплайн-всплесковом разложении первой степени*

Основное отличие от предыдущего пункта состоит в том, что определители заменяются разностями соответствующих узлов сетки:

$$a_{s+q} = \big((x_{2q+1}-x_{2q+2})c_{2q-1}+(x_{2q+2}-x_{2q})c_{2q}\big)/(x_{2q+1}-x_{2q}), \qquad (7.8)$$

где $s \le q \le r-1$.

При каждом q в данном случае имеется 4 аддитивных операции и 3 мультипликативных операции; поэтому по сравнению с предыдущим пунктом изменяется число мультипликативых операций. Таким образом, общее время вычислений $t^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}}$ на ОВС в рассматриваемой ситуации равно

$$t^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}} = \mathtt{t}_d(f,2s+1,1)+3(r-s)t_m+ \\ +4(r-s)t_a+\mathtt{t}_d(f,N-2r,r-s+1). \qquad (7.9)$$

Теорема 17. *Если выполнено условие (B), то для получения основного потока $\mathbf{a}$ из исходного $\mathbf{c}$ в сплайн-всплесковом разложении первой степени на однопроцессорной системе требуется $t^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(B)}$ единиц времени, где*

$$t^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(B)} = \big(2s+1+(N-2r)(r-s+1)\big)t_d+ \\ +3(r-s)t_m+4(r-s)t_a. \qquad (7.10)$$

Доказательство формулы (7.10) легко получается из (7.9).

Теорема 18. *Если выполнено условие (B), то при равномерной исходной сетке для получения основного потока $\mathbf{a}$ из исходного $\mathbf{c}$ в сплайн-всплесковом разложении первой степени на однопроцессорной системе требуется $\overline{t}^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(B)}$ единиц времени, где*

$$\overline{t}^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(B)} = \big(2s+1+(N-2r)(r-s+1)\big)t_d+ \\ +(r-s)t_m+(r-s)t_a. \qquad (7.11)$$

Доказательство. В случае, когда исходная сетка равномерная, соотношения (7.8) принимают вид

$$a_{s+q} = -c_{\,2q-1} + 2c_{\,2q}, \tag{7.12}$$

где $s \le q \le r-1$. Таким образом, при каждом рассматриваемом q отпадают 3 аддитивных и 2 мультипликативных операции; теперь из (7.12) следует равенство (7.11). ∎

15.7.4. *Параллельные вычисления основного потока в сплайн-всплесковом разложении первого порядка*

Процесс распараллеливания достаточно многообразен и определяется возможностями оборудования и вариантами его использования; здесь представлен один из наиболее простых (с точки зрения автора) вариантов распараллеливания, хотя даже беглый взгляд на предлагаемый вариант позволяет предложить более эффективные (но и более сложные) варианты распараллеливания.

Рассмотрим параллельную вычислительную систему (ПВС), в которой число параллельных вычислительных модулей столь велико, что предлагаемая реализация алгоритма не зависит от дальнейшего увеличения их числа (концепция неограниченного параллелизма, см., например, [39], с. 30).

Предположим, что распределение $p\,q$ данных одинакового типа `real` с представлением f по p параллельным вычислительным модулям (ПВМ) (p, q — натуральные числа) проводится в соответствии с директивой ALIGN и занимает $\mathtt{T}_{AL}(f,p,q)$ единиц времени, распределяя на каждый ПВМ по q данных.

Замечание 4. Здесь под процессом, определяемым директивой ALIGN (см. также интерфейс DVM на с.145 в [39]), подразумевается процесс, состоящий в распределении имеющихся $p\,q$ переменных (инициализированных или нет) на p соответствующих ПВМ по q переменным с тем, чтобы действия с упомянутыми переменными проводились на одном ПВМ (без пересылок между ПВМ); способ определения упомянутого соответствия (автоматизированный анализ программы или какой-либо еще) включается в упомянутый процесс и не конкретизируется.

В некоторых случаях будем использовать предположение

(C) *Справедливо равенство* $\mathtt{T}_{AL}(f,p,q) = p\,q\,T_{AL}$, *где* $T_{AL} = T_{AL}(f)$ — *натуральное число.*

Предположим, что акт параллельного присваивания для простых переменных (типа `real`) занимает $T_b = T_b(f)$ единиц времени, $T_a = T_a(f)$ означает время, затрачиваемое ПВС на одну параллельную аддитивную операцию, а $T_m = T_m(f)$ — время, требуемое для одного параллельного умножения.

На такой ПВС

1) проведем распределение переменных (типа `real`) на $\widetilde{N}+1$ ПВМ следующими последовательными актами:

1а) переменные a_i, c_i отобразим на ПВМ с номером $i+2$, где $i = -1, 0, \ldots, s-1$ (см. формулы (7.1)): это займет $\mathtt{T}_{AL}(f, s+1, 2)$ единиц времени;

1б) переменные a_{s+q}, c_{2q-1}, c_{2q}, $[\mathbf{a}_{2q+1}]_i$, $[\mathbf{a}_{2q})]_i$, $[\mathbf{a}_{2q-1}]_i$ при $i = 1, 2$ отобразим на ПВМ с номером $q+2$ (в соответствии с директивой ALIGN); это займет $\mathtt{T}_{AL}(f, r-s, 9)$ единиц времени, $s \le q \le r-1$;

1в) переменные a_i, c_{i+r-s} отобразим на ПВМ с номером $i+2$, где $i = r+s, r+s+1, \ldots, \widetilde{N}-1$ (см. формулы (7.4)): это займет $\mathtt{T}_{AL}(f, N-2r, 2)$ единиц времени;

2) в формуле (7.5) за один акт параллельного умножения выполним 6 умножений для вычисления трех имеющихся в ней определителей, причем в этом акте выполним все эти умножения для всех $s \le q \le r-1$; это потребует T_m единиц времени;

3) в той же формуле (7.5) за один акт параллельного вычитания найдем все три определителя $\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})$, $\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q-1})$, $\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})$, $s \le q \le r-1$, за T_a единиц времени;

4) за один акт параллельного умножения найдем произведения $\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})c_{2q-1}$, $\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q-1})c_{2q}$, $s \le q \le r-1$; это потребует T_m единиц времени;

5) в формуле (7.5) за один акт параллельного сложения найдем значение скобки в числителе формулы (7.5), $s \le q \le r-1$, за T_a единиц времени;

6) наконец, в формуле (7.5) за один акт параллельного деления найдем значение правой части для всех $s \le q \le r-1$ за T_m единиц времени;

7) параллельное присваивание (7.1) — (7.4) потребует T_b единиц времени.

В этом варианте общее время $T_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}}$, необходимое для получения основного потока $\mathbf{a}$ из исходного $\mathbf{c}$, отыскивается с помощью формулы

$$T_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}} = \mathtt{T}_{AL}(f, s+1, 2) + \mathtt{T}_{AL}(f, r-s, 9) +$$
$$+ \mathtt{T}_{AL}(f, N-2r, 2) + 3T_m + 2T_a + T_b. \tag{7.13}$$

Замечание 5. Если оборудование позволяет модифицировать алгоритм таким образом, чтобы акты 1а) и 1в) проводились в период выполнения акта 1б), то при такой модификации формулу (7.13) следует заменить формулой $T_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}} = \mathtt{T}_{AL}(f, r-s, 9) + 3T_m + 2T_a + T_b$.

Из формулы (7.13) при условии (C) легко получается следующее утверждение.

Теорема 19. *Если выполнено условие (C), то для получения основного потока $\mathbf{a}$ из исходного $\mathbf{c}$ в сплайн-всплесковом разложении первого порядка на параллельной вычислительной системе требуется $T_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(C)}$ единиц времени, где*

$$T_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(C)} = \bigl(2N + 2 + 5r - 7s\bigr)T_{AL} + 3T_m + 2T_a + T_b. \tag{7.14}$$

Замечание 6. При рассмотрении формул (7.6), (7.9), (7.13) можно заметить наличие слагаемых, связанных с работой коммуникационной среды (см. слагаемые $\mathtt{t}_d(f, 2s+1, 1)$, $\mathtt{t}_d(f, N-2r, s-r+1)$, $\mathtt{T}_{AL}(f, s+1, 2)$, $\mathtt{T}_{AL}(f, r-s, 9)$, $\mathtt{T}_{AL}(f, N-2r, 2)$). Как известно, производительность ВС в основном определяется скоростью работы коммуникационной среды (особенно в случае ПВС).

Следствие 2. *Если учитывать работу коммуникационных сред (т. е. если $t_d T_{AL} \neq 0$), то условиях (B) и (C) при неограниченном параллелизме для вычисления основного потока справедливо соотношение*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{t_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(B)}}{T_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(C)}} = (r - s + 1)\cdot\frac{t_d}{2T_{AL}},$$

откуда видно, что асимптотика ускорения вычислений на ПВС (по отношению к скорости вычислений на ОВС) определяется временем работы коммуникационных сред. Если же пренебречь временем работы коммуникационных сред (т. е. считать, что $t_d = T_{AL} = 0$), то

$$\frac{t_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(B)}}{T_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(C)}} = \frac{(r-s)(9t_m + 4t_a)}{3T_m + 2T_a + T_b}.$$

В том и в другом случаях оказывается, что ускорение растет пропорционально росту числа удаляемых узлов.

15.7.5. *Упрощение ситуации при параллельном вычислении основного потока в сплайн-всплесковом разложении первой степени*

Из формулы (7.8) видно, что в рассматриваемом случае (по сравнению с подпунктом 15.7.4) нет необходимости осуществлять операции подпункта 2), однако все остальные операции сохраняются. Поэтому общее время вычислений, обозначаемое в данном случае $T^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}}$, оказывается равным

$$T^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}} = \mathtt{T}_{AL}(f, s+1, 2) + \mathtt{T}_{AL}(f, r-s, 9) +$$

$$+\mathtt{T}_{AL}(f, N-2r, 2) + 2T_m + 2T_a + T_b. \tag{7.15}$$

Если оборудование позволяет модифицировать алгоритм способом, упомянутым в замечании 5, то формулу (7.15) можно заменить формулой

$$T^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}} = \mathtt{T}_{AL}(f, r-s, 9) + 2T_m + 2T_a + T_b. \tag{7.16}$$

Теорема 20. *Если выполнено условие (C), то при получении на ПВС основного потока* $\mathbf{a}$ *из исходного* $\mathbf{c}$ *требуется* $T^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(C)}$ *единиц времени, где*

$$T^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c},(C)} = \big(2N + 2 + 5r - 7s\big)T_{AL} + 2T_m + 2T_a + T_b. \tag{7.17}$$

Для доказательства соотношения (7.17) достаточно применить условие (C) к формуле (7.15).

При выполнении упомянутого условия из (7.16) находим

$$T^*_{\mathbf{a}\Leftarrow\mathbf{c}} = 9(r-s)\mathtt{T}_{AL} + 2T_m + 2T_a + T_b.$$

15.8. Вычисление всплескового потока

15.8.1. *Применяемые формулы*

Из формул (5.6) следует, что

$$b_{2q-1} = c_{2q-1} - [\mathfrak{P}\mathbf{a}]_{2q-1} \qquad \forall q \in \{s+1, s+2, \ldots, r\}. \tag{8.1}$$

Принимая во внимание формулы (3.9), из (8.1) имеем

$$b_{2q-1} = c_{2q-1} - a_{s+q-1} \qquad \forall q \in \{s+1, s+2, \ldots, r\}. \tag{8.2}$$

Учитывая, что вектор $\mathbf{b}$ является элементом пространства $\mathcal{B}$, разложим его по базису $\{\widetilde{\mathbf{b}}_l\}_{l=s+1\ldots,r}$. Ввиду нулевой кратности этого базиса и учитывая, что нечетные компоненты его элементов равны 1 (см. формулы (5.13)), получаем

$$\mathbf{b} = \sum_{l\in\{s+1,s+2,\ldots,r\}} b_{2l-1}\widetilde{\mathbf{b}}_l. \tag{8.3}$$

Таким образом, из (5.13) и (8.3) следует, что для четных компонент вектора $\mathbf{b}$ справедливы формулы

$$b_{2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} b_{2q-1} \ \forall q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}. \tag{8.4}$$

Для вычислений по формуле (8.2) требуется $r - s$ аддитивных операций и такое же количество присваиваний со сдвигом индексов, а для вычислений по формуле (8.4) потребуется вычислить два определителя второго порядка, разделить их друг на друга и умножить результат на соответствующее число, полученное по формуле (8.2); подобные вычисления нужно провести $r-s-1$ раз.

В случае сплайн-всплескового разложения первой степени формулы (8.2) сохраняются, а формулы (8.4) упрощаются:

$$b_{2q} = \frac{x_{2q+2} - x_{2q+1}}{x_{2q+2} - x_{2q}} b_{2q-1} \quad \forall q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}. \tag{8.5}$$

Наконец, если сетка равномерная, то опять-таки формулы (8.2) сохраняются и дополняются формулами

$$b_{2q} = b_{2q-1}/2 \qquad \forall q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}. \tag{8.6}$$

15.8.2. *Последовательные вычисления всплескового потока в сплайн-всплесковом разложении первого порядка*

В дальнейшем используются предположения седьмого раздела в отношении ВС, на которых производятся вычисления.

Для реализации формул (8.2) на ОВС потребуется

а) $r - s$ аддитивных операций с затратой $(r - s)t_a$ единиц времени;

б) $r-s$ присваиваний со сдвигами в пределах от 1 до $r-s$, на что требуется $\mathtt{t}_d(f, r-s, r-s)$ единиц времени;

для вычислений по формулам (8.4) потребуется повторить $r - s - 1$ раз вычисление двух определителей второго порядка, для чего потребуется

в) $4(r - s - 1)$ мультипликативных операций и $2(r - s - 1)$ аддитивных операций; при этом будет истрачено $(r - s - 1)(4t_m + 2t_a)$ единиц времени.

Наконец, для завершения вычислений по формулам (8.4) потребуется осуществить деление полученных определителей и умножение вычисленного частного на ранее найденное число b_{2q-1}, т. е. требуется выполнить

г) $2(r - s - 1)$ мультипликативных операций с общим временем их исполнения $2(r - s - 1)t_m$;

д) операции присваивания результатов последних вычислений (см. предыдущий пункт г) потребуют $\mathtt{t}_d(f, r-s-1, r-s-1)$ единиц времени.

Итак, общее время вычислений всплескового потока на ОВМ равно

$$t_{\mathbf{b} \Leftarrow \mathbf{c}} = (3r - 3s - 2)t_a + 6(r - s - 1)t_m +$$

$$+\mathtt{t}_d(f, r-s, r-s) + \mathtt{t}_d(f, r-s-1, r-s-1). \tag{8.7}$$

Замечание 7. Если результаты вычисления определителей сохраняются на этапе построения основного потока, то можно уменьшить число операций, так как выполнять пункт в) нет необходимости; в этом случае имеем

$$t_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}} = (r-s-1)t_a + 4(r-s-1)t_m + \mathtt{t}_d(f, r-s, r-s) + \mathtt{t}_d(f, r-s-1, r-s-1).$$

Если рассматривается сплайн-всплесковое разложение первой степени, то для отыскания всплескового потока не потребуются умножения, сопровождавшие вычисление определителей, а остальные действия сохранятся (см. формулы (8.5)). В этом случае время $t^*_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}}$ может быть представлено формулой

$$t^*_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}} = (3r-3s-2)t_a + 2(r-s-1)t_m +$$
$$+\mathtt{t}_d(f, r-s, r-s) + \mathtt{t}_d(f, r-s-1, r-s-1). \tag{8.8}$$

Наконец, в случае равномерной сетки (см. формулу (8.6)) отпадают $2(r-s-1)$ аддитивных операций и $r-s-1$ мультипликативных, так что требуемое время $\bar{t}_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}}$ вычислений всплескового потока определяется по формуле

$$\bar{t}_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}} = (r-s)t_a + (r-s-1)t_m +$$
$$+\mathtt{t}_d(f, r-s, r-s) + \mathtt{t}_d(f, r-s-1, r-s-1). \tag{8.9}$$

Теорема 21. *Если выполнено условие (B), то для получения всплескового потока $\mathbf{a}$ из исходного $\mathbf{c}$ на ОВС требуется $t_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(B)}$ единиц времени, где*

$$t_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(B)} = (3r-3s-2)t_a + 6(r-s-1)t_m +$$
$$+\left[(r-s)^2 + (r-s-1)^2\right] t_d; \tag{8.10}$$

в тех же предположениях для сплайн-всплескового разложения первой степени требуется $t^*_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(B)}$ единиц времени, где

$$t^*_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(B)} = (3r-3s-2)t_a + 2(r-s-1)t_m +$$
$$+\left[(r-s)^2 + (r-s-1)^2\right] t_d; \tag{8.11}$$

наконец, если еще исходная сетка равномерная, то потребуется $\bar{t}_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(B)}$ единиц времени, где

$$\bar{t}_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(B)} = (r-s)t_a + (r-s-1)t_m +$$

$$+[(r-s)^2+(r-s-1)^2]\,t_d. \tag{8.12}$$

Доказательство. Используя условие (B), замечание 7 и формулы (8.8)–(8.9), элементарными преобразованиями находим соотношения (8.10)–(8.12). ∎

15.8.3. *Параллельные вычисления всплескового потока*

Для параллельных вычислений всплескового потока первого порядка на ПВС проведем несколько операций:

1) на параллельный вычислительный модуль (ПВМ) с номером q, $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r\}$, отобразим переменные a_{s+q-1}, b_{2q-1}, b_{2q}, c_{2q-1} (типа `real`); всего потребуется использовать $r-s$ вычислительных модулей и затратить $T_{AL}(f, r-s, 4)$ единиц времени,

2) параллельная аддитивная операция (8.2) потребует T_a единиц времени на упомянутых ПВМ,

3) параллельная операция присваивания в (8.2) потребует T_b единиц времени на тех же ПВМ,

4) на ПВМ с номером q, $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r\}$, отобразим компоненты двумерных векторов $\mathbf{a}_{2q-1}$, $\mathbf{a}_{2q}$, $\mathbf{a}_{2q+1}$, (6 чисел типа `real`); для этого используем те же $r-s$ вычислительных модулей и затратим $T_{AL}(f, r-s, 6)$ единиц времени,

5) для вычисления определителей в (8.4) потребуется 4 параллельных мультипликативных и 2 параллельных аддитивных операции (с использованием упомянутых модулей), что приведет к расходованию $4T_m + 2T_a$ единиц времени,

6) для завершения вычислений по формуле (8.4) еще потребуется две параллельных мультипликативных операции и одно параллельное присваивание: это потребует $2T_m + T_b$ единиц времени.

Суммируя все временны́е затраты, приходим к выводу, что для вычисления всплескового потока потребуется $T_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}}$ единиц времени, где

$$T_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}} = T_{AL}(f, r-s, 4) + T_{AL}(f, r-s, 6) + 3T_a + 6T_m + 2T_b. \tag{8.13}$$

Замечание 8. Если результаты вычисления определителей сохраняются на этапе построения основного потока, то число операций уменьшится, т.к. выполнять пункты 4) и 5) нет необходимости; в результате получим $T_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}} = T_{AL}(f, r-s, 4) + T_a + 2T_m + 2T_b$.

В частном случае сплайн-всплескового разложения первой степени пункты 4) и 5) заменяются пунктами

4*) на ВМ с номером q, $q \in \{s+1, s+2, \ldots, r\}$, отобразим числа x_{2q}, x_{2q+1}, x_{2q+2} (3 числа типа `real`); для этого используются прежние $r-s$ вычислительных модулей и затрачивается $T_{AL}(f, r-s, 3)$ единиц времени,

5*) вместо вычисления определителей в (8.4) потребуется вычислить 2 разности в (8.5), т. е. совершить 2 параллельных аддитивных операции (с использованием упомянутых модулей), что приведет к расходованию $2T_a$ единиц времени.

Таким образом, при сплайн-всплесковом разложении первой степени для вычисления всплескового потока потребуется всего $T^*_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}}$ единиц времени, где

$$T^*_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}} = T_{AL}(f, r-s, 4) + T_{AL}(f, r-s, 3) + 3T_a + 2T_m + 2T_b. \tag{8.14}$$

Если результаты вычисления разностей сохраняются на этапе построения основного потока, то число операций уменьшится, т.к. выполнять пункты 4*) и 5*) не требуется; в результате получим $T^*_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}} = T_{AL}(f, r-s, 4) + T_a + 2T_m + 2T_b$.

Наконец, вычисление всплескового потока при сплайн-всплесковом разложении первой степени на равномерной сетке позволяет заменить формулы (8.5) на формулы (8.6), так что отпадает необходимость в двух параллельных аддитивных операциях и одной параллельной мультипликативной; поэтому здесь нужно лишь $\overline{T}_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}}$ единиц времени, где

$$\overline{T}_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c}} = T_{AL}(f, r-s, 4) + T_{AL}(f, r-s, 3) + T_a + T_m + 2T_b. \tag{8.15}$$

Теорема 22. *Если выполнено условие (C), то для получения всплескового потока $\mathbf{a}$ из исходного $\mathbf{c}$ в сплайн-всплесковом разложении первого порядка на параллельной вычислительной системе требуется $T_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(C)}$ единиц времени, где*

$$T_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(C)} = 10(r-s)T_{AL} + 3T_a + 6T_m + 2T_b. \tag{8.16}$$

В тех же предположениях для сплайн-всплескового разложения первой степени требуется $T^*_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(C)}$ единиц времени, где

$$T^*_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(C)} = 7(r-s)T_{AL} + 3T_a + 2T_m + 2T_b. \tag{8.17}$$

Наконец, если дополнительно известно, что исходная сетка равномерная, то потребуется $\overline{T}_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(C)}$ единиц времени, где

$$\overline{T}_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},(C)} = 7(r-s)T_{AL} + T_a + T_m + 2T_b. \tag{8.18}$$

Доказательство. Легко видеть, что в условиях теоремы формулы (8.16)–(8.18) непосредственно следуют из соотношений (8.13)–(8.15). ■

Следствие 3. *Если учитывать работу коммуникационных сред (т. е. если $t_d T_{AL} \neq 0$), то в условиях (B) и (C) при неограниченном параллелизме в случае вычисления всплескового потока справедлива асимптотика*

$$\frac{t_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},\,(B)}}{T_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},\,(C)}} = (r-s)\frac{t_d}{5T_{AL}} + o(r-s) \quad \text{при} \quad r-s \to +\infty.$$

Если пренебречь временем работы коммуникационных сред (т. е. считать, что $t_d = T_{AL} = 0$), то упомянутая асимптотика примет вид

$$\frac{t_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},\,(B)}}{T_{\mathbf{b}\Leftarrow\mathbf{c},\,(C)}} = (r-s)\frac{6t_m + t_a}{6T_m + 3T_a + 2T_b} + o(r-s) \quad \text{при} \quad r-s \to +\infty.$$

Отсюда видно, что асимптотика ускорения прямо пропорциональна росту числа удаляемых узлов.

16. АДАПТИВНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАЙН-ВСПЛЕСКОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Адаптивные методы решения многих задач связаны с использованием больших потоков числовой информации, ассоциируемых с той или иной сеткой. В частности, для повышения точности решения задач математической физики используются адаптивные сетки (см., например, работы [44, 106] и приведенную там библиографию); их применение позволяет также сократить объем числовых информационных потоков. Другой подход к обработке информационных потоков представляют вэйвлетные разложения: они позволяют исходный (плотный) поток чисел разложить на основной (значительно менее плотный) поток и на уточняющий (вэйвлетный) поток; при этом можно использовать основной поток вместо исходного, сохраняя, однако, возможность полного восстановления исходного потока в случае необходимости (см. [46]). С введением регулярных способов построения сплайн-всплесков (сплайн-вэйвлетов), ассоциированных с неравномерными сетками (см. [13,38]), появляется возможность объединить оба подхода и использовать адаптивные сетки при сплайн-всплесковой обработке числовой информации. Некоторые варианты адаптивных сеток (с априорной фиксацией числа используемых узлов) предложены в [13, 84].

В данном разделе рассматривается алгоритм построения аппроксимации непрерывной функции с помощью сплайн-всплескового (вэйвлетного) разложения, ассоциированного с адаптивной неравномерной сеткой. Установлены условия, в которых этот алгоритм эффективнее сплайн-всплескового алгоритма на равномерной сетке при той же аппроксимации. Исследована устойчивость предложенного алгоритма в определенном классе вычислительных погрешностей.

16.1. Об основных результатах данного раздела

Пусть непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $u(t)$ представлена своими значениями $\{u(x_j)\}_{j=0,1,\dots,M+1}$ на сетке

$$X \overset{\text{def}}{=} \{x_j \mid x_j \overset{\text{def}}{=} a + j\tau, j = 0,1,\dots,M+1\},$$

где $M > 2$, $\tau \overset{\text{def}}{=} (b-a)/(M+1)$.

Предположим, что для первоначального исследования (или для обработки данных) можно ограничиться более крупной сеткой

$$\widehat{X}: \qquad a = \widehat{x}_0 < \widehat{x}_1 < \widehat{x}_2 < \ldots < \widehat{x}_K < \widehat{x}_{K+1} = b, \quad \widehat{X} \subset X,$$

такой, что кусочно-линейная аппроксимация $\widetilde{u}(t)$,

$$\widetilde{u}(t) \overset{\text{def}}{=} u(\widehat{x}_j) + \frac{u(\widehat{x}_{j+1}) - u(\widehat{x}_j)}{\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j}(t - \widehat{x}_j) \tag{1.1}$$

$$\forall t \in [\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}), \quad j \in \{0,1,\dots,K\}, \quad K < M$$

обладает свойством

$$|\widetilde{u}(t) - u(t)| \le \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b]. \tag{1.2}$$

Последовательность $\mathbf{c} \overset{\text{def}}{=} (c_0, c_1, \dots, c_{M+1})$ чисел $c_j \overset{\text{def}}{=} u(x_j)$ называется *исходным потоком*, а последвательность $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{K+1})$, $a_j \overset{\text{def}}{=} u(\widehat{x}_j)$ — *основным потоком.*

Кроме основного потока сплайн-всплесковое разложение порождает так называемый *всплесковый поток* $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{r+1})$, состоящий из малых чисел, которые позволяют полностью восстановить исходный поток (при этом $K + r + 2 = M$). В рассматриваемом случае для $u \in C^1[a,b]$ компоненты вектора $\mathbf{b}$ имеют порядок малости $O(\varepsilon)$, а для случая, когда $u \in C^2\,[a,b]$, — порядок $O(\varepsilon^2)$.

Можно по-разному выбирать сетку $\widehat{X}$, требуя выполнения соотношения (1.2): обычно стремятся уменьшить объем данных, необходимых для восстановления аппроксимации (1.1) в любой точке t отрезка $[a,b]$. Если сравнить случай, когда в качестве $\widehat{X}$ используется наилучшая[6] равномерная сетка $\overline{X}$ шага $h \overset{\text{def}}{=} (b-a)/(N+1)$,

$$\overline{X}: \quad a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_{N+1} = b,$$

$$\overline{x}_i = ih + a, \quad i \in \{0,1,\dots,N+1\}, \tag{1.3}$$

[6]Более точное описание см. ниже

со случаем, когда в качестве $\widehat{X}$ используется наилучшая неравномерная сетка $\widetilde{X}$,

$$\widetilde{X}: \quad a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_K < \widetilde{x}_{K+1} = b,$$

то оказывается, что отношение N/K при $\varepsilon \to +0$ имеет предел; в частности, если $u \in C^2[a,b]$, то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{N}{K} = L, \quad \text{где} \quad L = \frac{\max_{t\in[a,b]} \sqrt{|u''(t)|}}{\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{|u''(t)|}dt}.$$

Что касается объема требуемой памяти для случаев равномерной и неравномерной сеток, то при равномерной сетке требуется хранить вектор $\mathbf{a}$ из $N+2$ чисел $u(\overline{x}_0), u(\overline{x}_1), \ldots, u(\overline{x}_{N+1})$, а кроме того, нужно хранить числа a и b, т.е. всего $N+4$ числа (заметим, что N определяется числом компонент вектора $\mathbf{a}$; при этом узлы сетки хранить не нужно: они легко восстанавливаются простым алгоритмом (1.3)).

Хотя представляется более экономным в качестве $\widehat{X}$ использовать неравномерную сетку, при которой аппроксимация (1.1) удовлетворяет условию (1.2), однако, следует учесть, что в этом случае приходится сохранять, как вектор значений функции $u(t)$ в узлах $(u(\widetilde{x}_0), u(\widetilde{x}_1), \ldots, u(\widetilde{x}_{K+1}))$, так и вектор, состоящий из узлов сетки $(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{K+1})$, т.е. всего $2K+4$ чисел. Если $u \in C^1[a,b]$, $\widetilde{Q}'$ — количество сохраняемых чисел в случае упомянутой неравномерной сетки, а $\overline{Q}'$ — количество их в случае равномерной сетки, то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\widetilde{Q}'}{\overline{Q}'} = 2\frac{\frac{1}{(b-a)}\int_a^b |u'(t)|dt}{\max_{t\in[a,b]} |u'(t)|}.$$

Если же $u \in C^2[a,b]$, то при аналогичных обозначениях имеем $\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\widetilde{Q}''}{\overline{Q}''} = 1/L$.

16.2. Некоторые вспомогательные утверждения

16.2.1. *Сетка адаптивного типа*

Рассмотрим положительную функцию $f(t)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$ вещественной оси:

$$f \in C[a,b], \qquad f(t) \geq c > 0 \quad \forall t \in [a,b]. \tag{2.1}$$

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем сетку

$$\widetilde{X}(f,\varepsilon): \quad a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_K \leq \widetilde{x}_{K+1} = b \tag{2.2}$$

такую, что

$$\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)=\varepsilon \quad \forall s\in\{0,1,\ldots,K-1\} \tag{2.3}$$

$$\max_{t\in[\widetilde{x}_K,\widetilde{x}_{K+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{K+1}-\widetilde{x}_K)\le\varepsilon. \tag{2.4}$$

Сетку вида (2.2)–(2.4) будем называть *сеткой адаптивного типа для функции f.*

Установим следующее утверждение.

Лемма 1. *Если выполнены соотношения (2.1), то для любого*

$$\varepsilon\in(0,\varepsilon_*),\qquad \varepsilon_*\stackrel{\text{def}}{=}(b-a)\max_{t\in[a,b]} f(t), \tag{2.5}$$

существуют и единственны натуральное число $K=K(f,\varepsilon)$ и сетка

$$\widetilde{X}\stackrel{\text{def}}{=}\widetilde{X}(f,\varepsilon)=\{\widetilde{x}_i\}_{i\in\{0,1,\ldots,K,K+1\}},\quad \widetilde{x}_i=\widetilde{x}_i(f,\varepsilon),$$

такие, что выполнены свойства (2.3)–(2.4).

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

I. База индукции устанавливается следующим образом. Пусть переменная τ увеличивается от $a=\widetilde{x}_0$ до b; тогда ввиду предположений (2.1) функция $\phi_0(\tau)\stackrel{\text{def}}{=}\max_{t\in[\widetilde{x}_0,\tau]} f(t)(\tau-\widetilde{x}_0)$ является строго возрастающей и при изменении τ от $a=\widetilde{x}_0$ к b функция $\phi_0(\tau)$ возрастает от 0 до $\max_{t\in[a,b]} f(t)(b-a)$. Благодаря условию (2.5) существует единственная точка $\tau_1\in[a,b]$ такая, что $\max_{t\in[a,\tau_1]} f(t)(\tau_1-a)=\varepsilon$. Положим $\widetilde{x}_1\stackrel{\text{def}}{=}\tau_1$. База индукции установлена.

II. Предположим, что узлы $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, …, $\widetilde{x}_s$ сетки $\widetilde{X}$ определены. Если $\widetilde{x}_s=b$, то полагаем $K\stackrel{\text{def}}{=}s-1$: в этом случае построение сетки $\widetilde{X}(f,\varepsilon)$ завершено. В противном случае $\widetilde{x}_s<b$, и построение сетки продолжается. Рассмотрим функцию $\phi_s(\tau)\stackrel{\text{def}}{=}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\tau]} f(t)(\tau-\widetilde{x}_s)$; она является строго возрастающей: при изменении τ от $\widetilde{x}_s$ до b функция $\phi_s(\tau)$ возрастает 0 до $m_s\stackrel{\text{def}}{=}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,b]} f(t)(b-\widetilde{x}_s)$. Если $\varepsilon<m_s$, то найдется $\tau_{s+1}<b$ так, что $\phi_s(\tau_{s+1})=\varepsilon$, и тогда полагаем $\widetilde{x}_{s+1}=\tau_{s+1}$; если же $\varepsilon\ge m_s$, то полагаем $K\stackrel{\text{def}}{=}s-1$ и $\widetilde{x}_{s+1}=b$. Заметим, что

$$x_{s+1}-x_s=\frac{\varepsilon}{\max_{t\in[\widetilde{x}_s,x_{s+1}]} f(t)}\ge\frac{\varepsilon}{\|f\|_{C[a,b]}};$$

отсюда следует, что рассматриваемый процесс конечен.

Индукционный переход закончен.

Свойства (2.3)–(2.4) выполнены ввиду способа построения сетки $\widetilde{X}(f,\varepsilon)$.

∎

Введем множество

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon' \mid 0 < \varepsilon' < \varepsilon_0, \qquad \widetilde{x}_K(f,\varepsilon') \neq \widetilde{x}_{K+1}(f,\varepsilon')\}.$$

Очевидно, что множество E не пусто и имеет точку сгущения 0.

Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$\varepsilon \in E, \tag{2.6}$$

так что сетка $\widetilde{X}(f,\varepsilon)$ имеет вид

$$\widetilde{X}(f,\varepsilon): \quad a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_K < \widetilde{x}_{K+1} = b. \tag{2.7}$$

Лемма 2. *В условиях (2.1)–(2.7) целочисленная функция $K(f,\varepsilon)$ возрастает при $\varepsilon \to +0$, и справедливы соотношения*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_{s\in\{0,1,\ldots,K\}} (\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) = 0, \tag{2.8}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K(f,\varepsilon) = +\infty. \tag{2.9}$$

Доказательство. Возрастание величины $K(f,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ очевидно. Из соотношений (2.3)–(2.4) имеем

$$f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \le \varepsilon \quad \forall\, t \in (\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_{s+1}) \quad \forall s \in \{0,1,\ldots,K\},$$

а из (2.1) теперь получаем

$$c\,(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \le \varepsilon \qquad \forall s \in \{0,1,\ldots,K\};$$

отсюда следует (2.8). Ввиду очевидного неравенства

$$(K(f,\varepsilon)+1)\max_s(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \ge b - a$$

из (2.8) вытекает соотношение (2.9). ■

Суммируя (2.3)–(2.4), находим

$$K\varepsilon = \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{K} \max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \le (K+1)\varepsilon. \tag{2.10}$$

Лемма 3. *При условиях (2.1)–(2.7) справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} K(f,\varepsilon')\varepsilon' = \int_a^b f(t)dt \le (K(f,\varepsilon)+1)\varepsilon. \tag{2.11}$$

Доказательство. Вторая сумма в неравенстве (2.10) является верхней суммой Дарбу для интеграла $\int_a^b f(t)dt$, так что

$$\int_a^b f(t)dt \le \sum_{s=0}^{K} \max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s) \le (K+1)\varepsilon \tag{2.12}$$

и потому

$$K(f,\varepsilon)+1 \ge \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b f(t)dt. \tag{2.13}$$

Ясно также, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s) = \int_a^b f(t)dt; \tag{2.14}$$

из (2.12)–(2.14) с помощью левой части соотношения (2.10) получаем соотношение (2.11). ■

16.2.2. *Равномерная сетка*

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем числа

$$N = N(f,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \lceil (b-a)\max_{t\in[a,b]} f(t)/\varepsilon \rceil - 1, \tag{2.15}$$

и

$$h = h(f,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (b-a)/(N+1); \tag{2.16}$$

здесь при вещественном r выражение $\lceil r \rceil$ означает целое число k со свойством $0 \le k - r < 1$.

На отрезке $[a,b]$ рассмотрим равномерную сетку $\overline{X}(f,\varepsilon)$ шага h,

$$\overline{X}(f,\varepsilon): \quad a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_{N+1} = b, \tag{2.17}$$

где $\overline{x}_i = ih + a$, $i \in \{0,1,\ldots,N(f,\varepsilon)+1\}$.

Из (2.15) имеем

$$N+1 \ge (b-a)\max_{t\in[a,b]} f(t)/\varepsilon,$$

так что согласно (2.16) получаем

$$\max_{t\in[a,b]} f(t)h = \max_{t\in[a,b]} f(t)\frac{b-a}{N+1} \le \varepsilon; \tag{2.18}$$

таким образом, для рассматриваемой равномерной сетки выполнены соотношения:

$$\max_{t\in[\overline{x}_s,\overline{x}_{s+1}]} f(t)\,(\overline{x}_{s+1}-\overline{x}_s) \le \varepsilon, \quad s\in\{0,1,\ldots,N(f,\varepsilon)\}. \tag{2.19}$$

16.2.3. *О числе узлов*

Лемма 4. *При условиях (2.1)–(2.7), (2.15)–(2.19) справедливо неравенство*

$$\frac{\sum_{s=0}^{K}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)-\varepsilon}{(b-a)\max_{t\in[a,b]} f(t)} \le \frac{K(f,\varepsilon)}{N(f,\varepsilon)} \le$$
$$\le \frac{\sum_{s=0}^{K-1}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)}{(b-a)\max_{t\in[a,b]} f(t)-\varepsilon}. \tag{2.20}$$

Доказательство. Из (2.10) имеем

$$\sum_{s=0}^{K}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)-\varepsilon \le$$
$$\le K\varepsilon = \sum_{s=0}^{K-1}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s). \tag{2.21}$$

С помощью (2.5), (2.15)–(2.16) получаем

$$0 < (b-a)\max_{t\in[a,b]} f(t)-\varepsilon \le N\varepsilon \le (b-a)\max_{t\in[a,b]} f(t). \tag{2.22}$$

Теперь доказываемое соотношение (2.20) следует из (2.21)–(2.22). ■

Теорема 1. *В условиях леммы 4 справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{K(f,\varepsilon)}{N(f,\varepsilon)} = \frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt}{\max_{t\in[a,b]} f(t)}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Переходя к пределу в (2.20) при $\varepsilon\to+0$, получаем (2.23). ■

16.3. Об оценках аппроксимации интерполяционными кусочно-линейными сплайнами

Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a,b]$; как известно, ее модуль непрерывности

$$\omega_C(f,h) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{|\xi-\eta|\le h,\\ \xi,\eta\in[a,b]}} |f(\xi)-f(\eta)|$$

обладает свойствами

$$\lim_{h\to 0}\omega_C(f,h)=0, \qquad \omega_C(f,h)\le 2||f||_{C[a,b]},$$

а если $h'\le h$, то $\omega_C(f,h')\le\omega_C(f,h)$. Если же предположить, что $f\in Lip_L\,\alpha$, т.е. что

$$|f(\xi)-f(\eta)|\le L|\xi-\eta|^\alpha \qquad \forall \xi,\eta\in[a,b], \quad \alpha\in(0,1],$$

то $\omega_C(f,h)\le L\,h^\alpha$.

Рассмотрим сетку

$$\widehat{X}: \qquad a=\widehat{x}_0<\widehat{x}_1<\widehat{x}_2<\ldots<\widehat{x}_K<\widehat{x}_{K+1}=b, \tag{3.1}$$

и для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $u(t)$ построим кусочно линейную интерполяцию

$$\widetilde{u}(t)\stackrel{\text{def}}{=}u(\widehat{x}_j)+\frac{u(\widehat{x}_{j+1})-u(\widehat{x}_j)}{\widehat{x}_{j+1}-\widehat{x}_j}(t-\widehat{x}_j) \qquad \forall t\in[\widehat{x}_j,\widehat{x}_{j+1}), \tag{3.2}$$

$$j\in\{0,1,\ldots,K\}.$$

Лемма 5. *Если $u\in C^1[a,b]$, то справедливо неравенство*

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)|\le 2\max_{\xi\in[\widehat{x}_j,\widehat{x}_{j+1}]}|u'(\xi)|(\widehat{x}_{j+1}-\widehat{x}_j), \tag{3.3}$$

а если $u\in C^2[a,b]$, то

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)|\le \max_{\zeta\in[\widehat{x}_j,\widehat{x}_{j+1}]}|u''(\zeta)|(\widehat{x}_{j+1}-\widehat{x}_j)^2 \quad \forall t\in(\widehat{x}_j,\widehat{x}_{j+1}). \tag{3.4}$$

Доказательство. Из (3.2) имеем

$$u(t)-\widetilde{u}(t)=u(t)-u(\widehat{x}_j)-\frac{u(\widehat{x}_{j+1})-u(\widehat{x}_j)}{\widehat{x}_{j+1}-\widehat{x}_j}(t-\widehat{x}_j)\ \forall t\in(\widehat{x}_j,\widehat{x}_{j+1}). \tag{3.5}$$

Если $u \in C^1[a,b]$, то из (3.5) при $t \in (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1})$ получаем

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = u'(\xi)(t - \widehat{x}_j) - u'(\eta)(t - \widehat{x}_j), \tag{3.6}$$

где $\xi, \eta \in (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1})$; отсюда следует неравенство (3.3).

Наконец, если $u \in C^2[a,b]$, то при $t \in (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1})$ из (3.6) находим

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = u''(\zeta)(t - \widehat{x}_j)(\xi - \eta), \quad \xi, \eta \in (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}). \tag{3.7}$$

Отсюда вытекает неравенство (3.4). ∎

Лемма 6. *Для интерполяционного непрерывного сплайна первой степени, интерполирующего функцию $u \in C[a,b]$ на сетке $\widehat{X}$, справедливо неравенство*

$$\|u - \widetilde{u}\|_{C[a,b]} \leq 2\omega_C(u, \widehat{h}), \tag{3.8}$$

где $\widehat{h} = \max_{j \in \{0,1,\ldots,K\}} (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j)$; если известно, что $u \in Lip_L\, \alpha$, то

$$\|u - \widetilde{u}\|_{C[a,b]} \leq 2L\,\widehat{h}^{\alpha}. \tag{3.9}$$

Если $u \in C^1[a,b]$, то

$$\|u - \widetilde{u}\|_{C[a,b]} \leq \widehat{h}\,\omega_C\,(u', \widehat{h}), \tag{3.10}$$

а если $u' \in Lip_L\, \alpha$, то

$$\|u - \widetilde{u}\|_{C[a,b]} \leq L\,\widehat{h}^{\,1+\alpha}. \tag{3.11}$$

Наконец, если $u \in C^2[a,b]$, то

$$\|u - \widetilde{u}\|_{C[a,b]} \leq ||u''||_{C[a,b]}\,\widehat{h}^{\,2}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Из (3.5) при $t \in (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1})$ имеем

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leq |u(t) - \widetilde{u}(\widehat{x}_j)| + \left| \frac{u(\widehat{x}_{j+1}) - u(\widehat{x}_j)}{\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j} \right| \cdot |t - \widehat{x}_j| \leq$$

$$\leq |u(t) - \widetilde{u}(\widehat{x}_j)| + |u(\widehat{x}_{j+1}) - u(\widehat{x}_j)| \leq$$

$$\leq 2\omega_C(u, \widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j) \leq 2\omega_C(u, \widehat{h}), \tag{3.13}$$

где $\widehat{h} = \max_{j \in \{0,1,\ldots,K\}} (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j)$; таким образом соотношение (3.8) установлено. Если $u \in Lip_L\, \alpha$, то из (3.13) находим (3.9).

Если $u \in C^1[a,b]$, то при $t \in (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1})$ из (3.6) имеем

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| = |u'(\xi) - u'(\eta)|\,|t - \widehat{x}_j| \le \widehat{h}\,\omega_C\,(u', \widehat{h}), \tag{3.14}$$

а если $u' \in Lip_L\,\alpha$, то

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le L\,\widehat{h}^{\,1+\alpha}; \tag{3.15}$$

Из (3.14)–(3.15) получаем соотношения (3.10) и (3.11).

Наконец, если $u \in C^2[a,b]$, то из (3.7) получаем (3.12).

Лемма доказана. ■

16.4. О числе узлов при аппроксимации кусочно-линейными сплайнами

Теорема 2. *Пусть $u \in C^1[a,b]$ и выполнено условие*

$$|u'(t)| \ge c > 0 \qquad \forall t \in [a,b]. \tag{4.1}$$

Если при $\eta > 0$ сетка $\widehat{X}$ совпадает с сеткой $\widetilde{X}(|u'|, \eta/2)$, то

1) число узлов $K'_u(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} K(|u'|, \eta/2)$ этой сетки удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{\eta' \to +0} K(|u'|, \eta')\eta' = \int_a^b |u'(t)|dt \le (K(|u'|, \eta/2) + 1)\eta/2, \tag{4.2}$$

2) верно неравенство

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \eta \qquad \forall t \in [a,b]. \tag{4.3}$$

Доказательство. Полагая $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{X}(|u'|, \eta/2)$, применим лемму 3; в результате получим соотношение (4.2). Неравенство (4.3) вытекает из соотношения (3.3) ввиду определения сетки $\widetilde{X}(|u'|, \eta/2)$ (см. формулы (2.3) и (2.4) при $f = |u'|$ и $\varepsilon = \eta/2$). ■

Теорема 3. *Если $u \in C^2[a,b]$, выполнено условие*

$$|u''(t)| \ge c > 0 \qquad \forall t \in [a,b], \tag{4.4}$$

и при $\eta > 0$ сетка $\widehat{X}$ совпадает с сеткой $\widetilde{X}(\sqrt{|u''|}, \eta)$, то

1) число $K''_u(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} K(\sqrt{|u''|}, \eta)$ узлов этой сетки удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{\eta' \to 0} K(\sqrt{|u''|}, \eta')\eta' = \int_a^b \sqrt{|u''|}dt \le \Big(K\big(\sqrt{|u''|}, \eta\big) + 1\Big)\eta, \tag{4.5}$$

2) верно неравенство

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \eta^2 \qquad \forall t \in [a, b]. \tag{4.6}$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы положим $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{X}(\sqrt{|u''|}, \eta)$ и применим лемму 3; в результате получим соотношение (4.5). Неравенство (4.6) получается из соотношения (3.4) и определения сетки $\widetilde{X}\big(\sqrt{|u''|}, \eta\big)$ (см. формулы (2.3) и (2.4) при $f = \sqrt{|u''|}$ и $\varepsilon = \eta$). ∎

16.5. О числе узлов равномерной сетки

По заданному $\eta > 0$ построим равномерную сетку $\overline{X}(|u'|, \eta/2)$ с шагом $h \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)/N(|u'|, \eta/2)$, где $N(|u'|, \eta/2)$ — число узлов упомянутой сетки (см. формулы (2.15)–(2.17)).

Теорема 4. *Пусть $u \in C^1[a, b]$, $\eta > 0$. Если сетка $\widehat{X}$ совпадает с сеткой $\overline{X}(|u'|, \eta/2)$, то*

1) число узлов $N'_u(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} N(|u'|, \eta/2)$ этой сетки удовлетворяет соотношению

$$N'_u(\eta) = \lceil 2(b-a) \max_{t \in [a,b]} |u'(t)|/\eta \rceil - 1, \tag{5.1}$$

2) верно неравенство

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \eta \qquad \forall t \in [a, b]. \tag{5.2}$$

Доказательство. Полагая $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}(|u'|, \eta/2)$, применим формулу (2.15); в результате получим соотношение (5.1). Неравенство (5.2) получается применением соотношения (3.3) в соответствии с определением сетки $\overline{X}(|u'|, \eta/2)$ (см. формулы (2.15)–(2.19) при $f = |u'|$ и $\varepsilon = \eta/2$). ∎

Теорема 5. *Пусть $u \in C^2[a, b]$, $\eta > 0$. Если сетка $\widehat{X}$ совпадает с сеткой $\overline{X}\big(\sqrt{|u''|}, \eta\big)$, то*

1) число узлов $N''_u(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} N\big(\sqrt{|u''|}, \eta\big)$ этой сетки удовлетворяет соотношению

$$N''_u(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\lceil \max_{t \in [a,b]} \sqrt{|u''(t)|/\eta} \Big\rceil - 1, \tag{5.3}$$

2) верно неравенство

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \eta^2 \qquad \forall t \in [a, b]. \tag{5.4}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы похоже на доказательство предыдущей: соотношения (5.3)–(5.4) находим с помощью формул (2.15), (2.19) и (3.4), полагая $f = \sqrt{|u''|}$ и $\varepsilon = \eta$. ∎

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть фиксирована функция $u \in C^1[a,b]$ со свойством*

$$\|u'\|_{C[a,b]} \neq 0. \tag{5.5}$$

При одинаковой верхней грани η уклонения соответствующих кусочно-линейных интерполяций вида (3.2) от фиксированной функции $u \in C^1[a,b]$ число узлов зависит от выбора сетки $\hat{X}$. Отношение числа узлов $N'_u(\eta)$ равномерной сетки $\overline{X}'_u(\eta)$ к числу узлов $K'_u(\eta)$ неравномерной сетки $\widetilde{X}'_u(\eta)$ имеет асимптотику

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{N'_u(\eta)}{K'_u(\eta)} = \frac{\max_{t\in[a,b]}|u'(t)|}{\frac{1}{(b-a)}\int_a^b |u'(t)|dt}. \tag{5.6}$$

Доказательство. При $f = |u'|$ и $\varepsilon = \eta/2$ условия леммы 4 и теоремы 1 выполнены. Использование соотношения (2.23) приводит к формуле (5.6). Поскольку правая часть этой формулы имеет смысл при любом $c > 0$, то условие (4.1) может быть заменено условием (5.5). ∎

Теорема 7. *Пусть фиксирована функция $u \in C^2[a,b]$ со свойством*

$$\|u''\|_{C[a,b]} \neq 0. \tag{5.7}$$

При одинаковой верхней грани η^2 уклонения кусочно-линейных интерполяций вида (3.2) от функции u отношение числа узлов $N''_u(\eta)$ равномерной сетки $\hat{X} = \overline{X}''_u(\eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{X}(|u''|,\eta)$ к числу узлов $K''_u(\eta)$ неравномерной сетки $\hat{X} = \widetilde{X}''_u(\eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{X}(|u''|,\eta)$ имеет асимптотику

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{N''_u(\eta)}{K''_u(\eta)} = \frac{\max_{t\in[a,b]}|u''(t)|^{1/2}}{\frac{1}{(b-a)}\int_a^b |u''(t)|^{1/2}dt}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы использование леммы 4 и теоремы 1 при $f = |u''|$, $\varepsilon = \eta$ приводит к формуле (5.8). Поскольку правая часть этой формулы имеет смысл при любом $c > 0$, то условие (4.4) может быть заменено условием (5.7). ∎

Теорема 8. *Предположим, что при компьютерной реализации объем памяти для каждого из рассматриваемых чисел одинаков, и выполнены условия теоремы 6. Обозначим $\widetilde{Q}'$ объем памяти, требуемый для восстановления непрерывно дифференцируемой функции u с точностью $\eta > 0$ с помощью кусочно линейной интерполяции (3.2) на сетке адаптивного типа*

$\widehat{X} = \widetilde{X}'_u(\eta)$, *а через* $\overline{Q}'$ *— объем памяти, требуемый для восстановления той же функции на равномерной сетке* $\widehat{X} = \overline{X}'_u(\eta/2)$. *Тогда верны формулы*

$$\kappa'_u(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widetilde{Q}'}{\overline{Q}'} = \frac{2K'_u(\eta)}{N'_u(\eta)+2}, \tag{5.9}$$

$$\lim_{\eta\to+0} \kappa'_u(\eta) = 2\frac{\frac{1}{(b-a)}\int_a^b |u'(t)|dt}{\max_{t\in[a,b]}|u'(t)|}. \tag{5.10}$$

Доказательство. Для восстановления непрерывно дифференцируемой функции u с точностью $\eta > 0$ с помощью кусочно линейной интерполяции (3.2) на сетке $\widehat{X} = \widetilde{X}(|u'|, \eta/2)$ требуются множества $\widetilde{U} \stackrel{\text{def}}{=} \{u(\widehat{x}_i)\}_{i\in\{0,1,\ldots,K'_u(\eta)\}}$ и $\widetilde{X}(|u'|, \eta/2) = \{\widehat{x}_i\}_{i\in\{0,1,\ldots,K'_u(\eta)\}}$, а для восстановления этой функции с той же точностью $\eta > 0$, но с помощью кусочно линейной интерполяции (3.2) на сетке $\widehat{X} = \overline{X}(|u'|, \eta/2)$ требуется лишь множество $\{u(\widehat{x}_i)\}_{i\in\{0,1,\ldots,N'_u(\eta)\}}$, а также числа a, b (шаг h вычисляется из соотношения $h = (b-a)/(N'_u(\eta)+1)$, а узлы $\widehat{x}_i$ по формуле $\widehat{x}_i = ih+a$, $i = 0, 1, \ldots, N'_u(\eta)+1$). Формула (5.9) установлена. Переходя в этой формуле к пределу при $\eta \to +0$ с учетом соотношения (5.6), получаем равенство (5.10). ∎

Следствие 1. *Если* $\kappa'_u(\eta) < 1$, *то объем информации при использовании сетки адаптивного типа* $\widetilde{X}(|u'|, \eta/2)$ *меньше объема информации при использовании равномерной сетки* $\overline{X}(|u'|, \eta/2)$, *а в противном случае первый объем больше второго.*

Аналогичным образом устанавливается

Теорема 9. *Предположим, что при компьютерной реализации объем памяти для каждого из рассматриваемых чисел одинаков и выполнены условия теоремы 6. Обозначим* $\widetilde{Q}''$ *объем памяти, требуемый для восстановления дважды непрерывно дифференцируемой функции* u *с точностью* η^2 *с помощью кусочно линейной интерполяции (3.2) на сетке адаптивного типа* $\widehat{X} = \widetilde{X}''_u(\eta)$, *а через* $\overline{Q}''$ *— объем памяти, требуемый для восстановления той же функции с той же точностью на равномерной сетке* $\widehat{X} = \overline{X}''_u(\eta)$. *Тогда*

$$\kappa''_u(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widetilde{Q}''}{\overline{Q}''} = \frac{2K''_u(\eta)}{N''_u(\eta)+2}, \tag{5.11}$$

$$\lim_{\eta\to+0} \kappa''_u(\eta) = 2\frac{\frac{1}{(b-a)}\int_a^b \sqrt{|u''(t)|}dt}{\max_{t\in[a,b]}\sqrt{|u''(t)|}}. \tag{5.12}$$

Формулы (5.9)–(5.12) позволяют определять асимптотику эффективности применения адаптивной неравномерной сетки в конкретных ситуациях.

16.6. О численной устойчивости сетки адаптивного типа

Рассмотрим множество $\mathbb{R}_+^\infty$ бесконечномерных векторов $\mathcal{E}$ с положительными компонентами,

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s, \ldots), \tag{6.1}$$

и положим

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} (1, 1, 1, \ldots).$$

Для двух векторов $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \in \mathbb{R}_+^\infty$,

$$\mathcal{E}' \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_s, \ldots),$$

$$\mathcal{E}'' \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon''_0, \varepsilon_1, \varepsilon''_2, \ldots, \varepsilon''_s, \ldots),$$

со свойством $\varepsilon'_s \le \varepsilon''_s$ $\forall s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ будем писать $\mathcal{E}' \le \mathcal{E}''$.

Введем класс $\mathcal{K}_{c_0,c_1}(\varepsilon)$ векторов $\mathcal{E}$ вида

$$\mathcal{K}_{c_0,c_1}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{E} \mid c_0\, \varepsilon \mathcal{I} \le \mathcal{E} \le c_1\, \varepsilon \mathcal{I}\}. \tag{6.2}$$

где c_0, c_1, ε — положительные числа; очевидно, что $\mathcal{K}_{c_0,c_1}(\varepsilon) \subset \mathbb{R}_+^\infty$.

Здесь снова рассмотрим положительную непрерывную функцию $f(t)$ со свойством (2.1) и будем считать, что число ε находится в промежутке $(0, \varepsilon^*)$, $\varepsilon^* \stackrel{\text{def}}{=} c_1(b-a)\|f\|_{C[a,b]}$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Если непрерывная функция $f(t)$ удовлетворяет условию (2.1), а вектор $\mathcal{E}$ лежит в классе $\mathcal{K}_{c_0,c_1}(\varepsilon)$, то существуют и единственны натуральное число $M = M(f, \mathcal{E})$ и сетка*

$$\widetilde{X}(f, \mathcal{E}): \quad a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_M \le \widetilde{x}_{M+1} = b \tag{6.3}$$

такие, что выполнены свойства

$$\max_{t \in [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) = \varepsilon_s \quad \forall s \in \{0, 1, \ldots, M-1\}, \tag{6.4}$$

$$\max_{t \in [\widetilde{x}_K, \widetilde{x}_{K+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{M+1} - \widetilde{x}_M) \le \varepsilon_M. \tag{6.5}$$

Принимая во внимание обозначений (6.1)–(6.3), легко убедиться в том, что доказательство этой леммы получается по той же схеме, что и доказательство леммы 1.

Для последовательностей класса $\mathcal{K}_{c_0,c_1}(\varepsilon)$ имеем

$$\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s = \frac{\varepsilon_s}{\max_{t \in [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_{s+1}]} f(t)} \ge \frac{c_0 \varepsilon}{\|f\|_{C[a,b]}}, \qquad s = 0, 1, \ldots, M-1; \tag{6.6}$$

из (6.6) видно, что рассматриваемая сетка при фиксированных ε и $\mathcal{E}$ существует, единственна и содержит конечное количество узлов (для сравнения см. лемму 1).

Не нарушая общности, дальше считаем $\widetilde{x}_M \neq \widetilde{x}_{M+1}$.

Лемма 8. *Целочисленная функция $M(f,\mathcal{E})$ обладает следующими свойствами:*

1) справедливо соотношение

$$M(f,\varepsilon\mathcal{I}) = K(f,\varepsilon), \tag{6.7}$$

2) если $\mathcal{E}',\mathcal{E}'' \in \mathbb{R}_+^\infty$, $\mathcal{E}' \le \mathcal{E}''$, то $M(f,\mathcal{E}') \ge M(f,\mathcal{E}'')$,

3) если $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\varepsilon)$ зависит от ε так, что $\mathcal{E}(\varepsilon) \in \mathcal{K}_{c_0,c_1}(\varepsilon)$, то

$$K(f,c_1\varepsilon) \le M(f,\mathcal{E}(\varepsilon)) \le K(f,c_0\varepsilon), \tag{6.8}$$

4) если

$$\varepsilon \to 0, \qquad \mathcal{E}(\varepsilon) \in \mathcal{K}_{c_0,c_1}(\varepsilon), \tag{6.9}$$

и

$$\widetilde{X}(f,\mathcal{E}(\varepsilon)): \quad a = \widetilde{x}_0(\varepsilon) < \widetilde{x}_1(\varepsilon) < \ldots < \widetilde{x}_M(\varepsilon) < \widetilde{x}_{M+1}(\varepsilon) = b, \tag{6.10}$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_{s\in\{0,1,\ldots,M(f,\mathcal{E}(\varepsilon))\}} (\widetilde{x}_{s+1}(\varepsilon) - \widetilde{x}_s(\varepsilon)) = 0, \tag{6.11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M(f,\mathcal{E}(\varepsilon)) = +\infty. \tag{6.12}$$

Доказательство. Утверждение (6.7) первого пункта и утверждение второго пункта очевидны, а соотношение (6.8) тривиально следует из первых двух. Из соотношений (2.1) и (6.4)–(6.5) имеем

$$0 < c(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \le f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \le \varepsilon_s \le c_1\varepsilon$$

$$\forall\, t \in (\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_{s+1}) \quad \forall s \in \{0,1,\ldots,M\};$$

из (6.9)–(6.10) следует (6.11). Ввиду очевидного неравенства

$$(K(f,c_0\varepsilon)+1) \max_{s\in\{0,1,\ldots,M\}} (\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \ge b - a$$

из (6.11) вытекает соотношение (6.12). ■

Лемма 9. *Если $\mathcal{E}(\varepsilon) \in \mathcal{K}_{c_0,c_1}(\varepsilon)$, то*

$$\frac{1}{c_1}\frac{\sum_{s=0}^{M} \max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) - \varepsilon}{(b-a)\max_{t\in[a,b]} f(t) + \varepsilon} \le$$

$$\leq \frac{M(f,\mathcal{E}(\varepsilon))}{N(f,\varepsilon)} \leq \frac{1}{c_0}\frac{\sum_{s=0}^{M}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)}{(b-a)\max_{t\in[a,b]} f(t)}. \tag{6.13}$$

Доказательство. Суммируя (6.4)–(6.5), находим

$$c_0 M\varepsilon \leq \sum_{s=0}^{M-1}\varepsilon_s = \sum_{s=0}^{M-1}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s) \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{M}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s) \leq \sum_{s=0}^{M}\varepsilon_s \leq c_1\varepsilon(M+1). \tag{6.14}$$

Из (6.14) получаем

$$\frac{1}{c_1}\sum_{s=0}^{M}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s) - \varepsilon \leq$$

$$\leq M\varepsilon \leq \frac{1}{c_0}\sum_{s=0}^{M}\max_{t\in[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s). \tag{6.15}$$

Теперь из (2.22) и (6.15) находим (6.13). ■

Теорема 10. *Если $\mathcal{E}(\varepsilon) \in \mathcal{K}_{c_0,c_1}(\varepsilon)$, то*

$$\frac{\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt}{c_1\max_{t\in[a,b]} f(t)} \leq \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{M(f,\mathcal{E}(\varepsilon))}{N(f,\varepsilon)} \leq \frac{\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt}{c_0\max_{t\in[a,b]} f(t)}. \tag{6.16}$$

Доказательство формулы (6.16) получается переходом к пределу в соотношении (6.13) при $\varepsilon \to +0$.

Замечание 1. Полученные утверждения показывают устойчивость алгоритма построения сетки адаптивного типа при неточном соблюдении условий (2.3)–(2.4).

16.7. Координатные сплайны первой степени

Для удобства читателя напомним введенные ранее обозначения.

На конечном или бесконечном интервале (α,β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X: \quad \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \tag{7.1}$$

$$\text{для которой } \alpha = \lim_{j\to-\infty} x_j,\ \beta = \lim_{j\to+\infty} x_j, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{7.2}$$

где $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел.

На сетке (7.1)–(7.2) рассмотрим координатные сплайны ω_j первой степени ($j \in \mathbb{Z}$):

$$\omega_j(t) = (t - x_j)(x_{j+1} - x_j)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \tag{7.3}$$

$$\omega_j(t) = (x_{j+2} - t)(x_{j+2} - x_{j+1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{7.4}$$

$$\omega_j(t) = 0 \quad \text{при } t \notin [x_j, x_{j+2}), \quad \text{так что } \operatorname{supp} \omega_j = [x_j, x_{j+2}]. \tag{7.5}$$

16.8. Биортогональная система функционалов

В пространстве $C(\alpha, \beta)$ непрерывных на интервале (α, β) функций рассмотрим линейные функционалы $g^{(i)}$, $i \in \mathbb{Z}$, определяемые формулой

$$\langle g^{(i)}, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{i+1}) \qquad \forall u \in C(\alpha, \beta). \tag{8.1}$$

Результат действия функционала $g^{(i)}$ на функцию u определяется значением этой функции в точке x_{i+1}; эта точка является носителем функционала $g^{(i)}$:

$$\operatorname{supp} g^{(i)} = x_{i+1}. \tag{8.2}$$

Лемма 10. *Система функционалов $\{g^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ биортогональна системе сплайнов $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$: $\langle g^{(i)}, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}$.*

Доказательство легко получается из формул (7.3)–(7.5) и (8.1)–(8.2). ■

16.9. Укрупнение сетки и калибровочные соотношения

Для фиксированных $k, r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$, положим

$$\widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \text{ при } j \leq k, \text{ и } \widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+r} \text{ при } j \geq k+1, \tag{9.1}$$

и, используя узлы (9.1), ввелем новую сетку $\widetilde{X}:\quad \ldots < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots$.

Сплайны первой степени $\widetilde{\omega}_j$, построенные с использованием новой сетки $\widetilde{X}$, представляются теми же формулами (7.3)–(7.5) с заменой узлов x_j сетки X на узлы $\widetilde{x}_j$ сетки $\widetilde{X}$. Очевидно, что для $j \notin \{k-1, k\}$ сплайны $\widetilde{\omega}_j$ совпадают с рассмотренными ранее:

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_j(t) \quad \forall j \leq k-2; \qquad \widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_{j+r}(t) \quad \forall j \geq k+1. \tag{9.2}$$

При $j \in \{k-1, k\}$ сплайны $\widetilde{\omega}_j$ могут быть представлены в виде линейной комбинации сплайнов $\omega_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_{j+r-1}$:

$$\widetilde{\omega}_{k-1} = \sum_{j=k-1}^{k+r-2} c_j \omega_j, \qquad \widetilde{\omega}_k = \sum_{j=k}^{k+r-1} c'_j \omega_j. \tag{9.3}$$

Применяя к первому из соотношений (9.3) функционалы $g^{(i)}$, $i = k-1, \ldots, k+r-2$, а ко второму — функционалы $g^{(i')}$, $i' = k, \ldots, k+r-1$, получаем

$$c_{k-1} = 1, c_i = \widetilde{\omega}_{k-1}(x_{i+1}) = \frac{x_{k+r} - x_{i+1}}{x_{k+r} - x_k}, i = k, k+1, \ldots, k+r-2,$$

$$c'_i = \widetilde{\omega}_k(x_{i+1}) = \frac{x_{i+1} - x_k}{x_{k+r} - x_k}, i = k, k+1, \ldots, k+r-2,$$

$$c'_{k+r-1} = \widetilde{\omega}_k(x_{k+r}) = 1.$$

Таким образом, соотношения (9.3) принимают вид

$$\widetilde{\omega}_{k-1} = \sum_{i=k-1}^{k+r-2} \widetilde{\omega}_{k-1}(x_{i+1})\omega_i, \qquad \widetilde{\omega}_k = \sum_{i=k}^{k+r-1} \widetilde{\omega}_k(x_{i+1})\omega_i. \tag{9.4}$$

Согласно лемме 10 система функционалов $\langle \widetilde{g}^{(i)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\widetilde{x}_{i+1})$ биортогональна системе сплайнов $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$: $\langle \widetilde{g}^{(i)}, \widetilde{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j}$. Нетрудно видеть, что

$$\widetilde{g}^{(i)} = g^{(i)} \text{ при } i \le k-1, \text{ и } \widetilde{g}^{(i)} = g^{(i+r-1)} \text{ при } i \ge k; \tag{9.5}$$

заметим, что функционалы $g^{(k)}, g^{(k+1)}, \ldots, g^{(k+r-2)}$ не содержатся во множестве функционалов $\{\widetilde{g}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Дальше рассматриваются бесконечные ряды вида $\sum_j c_j \omega_j$, $c_j \in \mathbb{R}^1$, где суммирование по j распространено на все целые числа, $j \in \mathbb{Z}$. При каждом фиксированном $t \in (\alpha, \beta)$ такой ряд содержит не более двух ненулевых слагаемых; поэтому при любой последовательности $\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ коэффициентов $c_j \in \mathbb{R}^1$ упомянутый ряд сходится (в смысле поточечной сходимости).

Теорема 11. *Справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_i = \sum_j \mathfrak{p}_{i,j} \omega_j, \tag{9.6}$$

где для $i, j \in \mathbb{Z}$ *числа* $\mathfrak{p}_{i,j}$ *отыскиваются по формулам:*

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j} \qquad \text{при} \quad i \le k-2, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{9.7}$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = 1, \;\; \mathfrak{p}_{k-1,i} = c_i = (x_{k+r} - x_{i+1})(x_{k+r} - x_k)^{-1}, \tag{9.8}$$

$$i = k, k+1, \ldots, k+r-2,$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} = 0 \text{ при } j \notin \{k-1, k, \ldots, k+r-2\},$$

$$\mathfrak{p}_{k,j} = 0 \text{ при } j \notin \{k, k+1, \ldots, k+r-1\}, \tag{9.9}$$
$$\mathfrak{p}_{k,i} = c'_i = (x_{i+1} - x_k)(x_{k+r} - x_k)^{-1},$$

$$i = k, k+1, \ldots, k+r-2, \qquad \mathfrak{p}_{k,k+r-1} = 1, \tag{9.10}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j-r+1} \qquad \text{при} \quad i \ge k+1, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{9.11}$$

Доказательство. Ввиду формул (9.2) находим (9.7), (9.9) и (9.11). Для доказательства соотношений (9.8) и (9.10) рассмотрим представление функций $\widetilde{\omega}_{k-1}$ и $\widetilde{\omega}_k$ с использованием узлов исходной сетки X; легко видеть, что

$$\widetilde{\omega}_{k-1}(t) = \begin{cases} (t - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})^{-1} & \text{при } t \in [x_{k-1}, x_k) \\ (x_{k+r} - t)(x_{k+r} - x_k)^{-1} & \text{при } t \in [x_k, x_{k+r}), \end{cases}$$

$$\widetilde{\omega}_k(t) = \begin{cases} (t - x_k)(x_{k+r} - x_k)^{-1} & \text{при } t \in [x_k, x_{k+r}) \\ (x_{k+r+1} - t)(x_{k+r+1} - x_{k+r})^{-1} & \text{при } t \in [x_{k+r}, x_{k+r+1}). \end{cases}$$

Отсюда

$$\widetilde{\omega}_{k-1}(x_{i+1}) = \frac{x_{k+r} - x_{i+1}}{x_{k+r} - x_k},$$
$$\widetilde{\omega}_k(x_{i+1}) = \frac{x_{i+1} - x_k}{x_{k+r} - x_k}, \qquad i = k, k+1, \ldots, k+r-2,$$

так что (9.8) и (9.10) вытекают из формул (9.4). Соотношения (9.6)–(9.11) доказаны. ∎

Составим матрицу $\mathfrak{P}$ из чисел $\mathfrak{p}_{i,j}$; результат ее транспонирования имеет вид

$$
\mathfrak{P}^T \overset{\text{def}}{=}
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} \ldots & \widetilde{k-3} & \widetilde{k-2} & \widetilde{k-1} & \widetilde{k} & \widetilde{k+1} & \widetilde{k+2} & \ldots \end{array} \\
\begin{array}{c} \ldots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \ldots \\ k+r-2 \\ k+r-1 \\ k+r \\ k+r+1 \\ \ldots \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccc}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k} & \mathfrak{p}_{k,k} & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k+1} & \mathfrak{p}_{k,k+1} & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k+2} & \mathfrak{p}_{k,k+2} & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k+r-2} & \mathfrak{p}_{k,k+r-2} & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

16.10. Вэйвлетное разложение. Формулы декомпозиции

Обозначим $\mathbb{S}(X)$ пространство, являющееся линейной оболочкой функций ω_j,

$$\mathbb{S}(X) \overset{\text{def}}{=} \{\, u \mid u \overset{\text{def}}{=} \sum_j c_j \omega_j \ \ \forall c_j \in \mathbb{R}^1 \,\}; \tag{10.1}$$

используя X как параметр в обозначении (10.1), заключаем, что пространство $\mathbb{S}(X)$ является *пространством кусочно-линейных сплайнов на сетке* X, а пространство $\mathbb{S}(\widetilde{X})$ является пространством кусочно-линейных сплайнов на сетке $\widetilde{X}$,

$$\mathbb{S}(\widetilde{X}) = \{\, \widetilde{u} \mid \widetilde{u} \overset{\text{def}}{=} \sum_j \widetilde{a}_j \widetilde{\omega}_j \ \ \forall \widetilde{a}_j \in \mathbb{R}^1 \,\}.$$

Согласно теореме 1 справедливо включение $\mathbb{S}(\widetilde{X}) \subset \mathbb{S}(X)$.

Рассмотрим оператор P проектирования пространства $\mathbb{S}(X)$ на подпространство $\mathbb{S}(\widetilde{X})$, задаваемый формулой

$$Pu \overset{\text{def}}{=} \sum_j \langle \widetilde{g}^{(j)}, u \rangle \, \widetilde{\omega}_j \qquad \forall u \in \mathbb{S}(X),$$

и введем оператор $Q = I - P$, где I — тождественный оператор.

Пространством всплесков (вэйвлетов) называется пространство $W \overset{\text{def}}{=} Q\mathbb{S}(X)$. Итак, получаем прямое разложение

$$\mathbb{S}(X) = \mathbb{S}(\widetilde{X}) \dot{+} W \tag{10.2}$$

— *сплайн-вэйвлетное разложение* пространства $\mathbb{S}(X)$.

Пусть $u \in \mathbb{S}(X)$; используя соотношение (10.2), получаем два представления элемента u

$$u = \sum_j c_j \omega_j, \tag{10.3}$$

$$u = \sum_j a_i \widetilde{\omega}_i + \sum_j b_j \omega_j, \tag{10.4}$$

где

$$a_i \overset{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}^{(i)}, u \rangle, \quad b_j,\ c_j\ \in \mathbb{R}^1. \tag{10.5}$$

Из (9.6) и (10.3) — (10.4) имеем

$$\sum_j c_j \omega_j = \sum_i a_i \sum_j \mathfrak{p}_{i,j} \omega_j + \sum_j b_j \omega_j,$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j\}$ получаем

$$c_j = \sum_i a_i \mathfrak{p}_{i,j} + b_j. \tag{10.6}$$

Формулы (10.6) называются *формулами реконструкции.*

Используя представление (10.5), перепишем формулы (10.6) в виде

$$c_j = \sum_i \langle \widetilde{g}^{(i)}, u \rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j$$

и подставим сюда u из соотношения (10.3) (заменив в (10.3) индекс суммирования j на s):

$$c_j = \sum_i \sum_s c_s \langle \widetilde{g}^{(i)}, \omega_s \rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j;$$

отсюда

$$b_j = c_j - \sum_i \sum_s c_s \langle \widetilde{g}^{(i)}, \omega_s \rangle \mathfrak{p}_{i,j}. \tag{10.7}$$

Подставляя (10.3) в (10.5), имеем

$$a_j = \langle \widetilde{g}^{(j)}, \sum_s c_s \omega_s \rangle,$$

так что

$$a_j = \sum_s c_s \langle \widetilde{g}^{(j)}, \omega_s \rangle. \tag{10.8}$$

Формулы (10.7) и (10.8) называются *формулами декомпозиции.*

Лемма 11. *Справедливы соотношения*

$$\langle \widetilde{g}^{(i)}, \omega_s \rangle = \delta_{i,s} \qquad \textit{при} \quad i \le k-1,\ s \in \mathbb{Z}, \tag{10.9}$$

$$\langle \widetilde{g}^{(i)}, \omega_s \rangle = \delta_{i+r-1,s} \qquad \textit{при} \quad i \ge k,\ s \in \mathbb{Z}. \tag{10.10}$$

Доказательство. Из формул (9.5) имеем

$$\langle \widetilde{g}^{(i)}, \omega_s \rangle = \langle g^{(i)}, \omega_s \rangle \qquad \text{при} \quad i \le k-1, s \in \mathbb{Z},$$

откуда, учитывая свойство биортогональности, получаем соотношение (10.9). Для $i \ge k$ ввиду формул (9.5) находим

$$\langle \widetilde{g}^{(i)}, \omega_s \rangle = \langle g^{(i+r-1)}, \omega_s \rangle \qquad \text{при} \quad i \ge k, s \in \mathbb{Z},$$

что доказывает соотношение (10.10). ■

Введем обозначение $\mathfrak{q}_{i,s} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}^{(i)}, \omega_s \rangle$; матрица $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,s})$ после транспонирования имеет вид

$$\mathfrak{Q}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{l} \\ \dots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ \dots \\ k+r-2 \\ k+r-1 \\ k+r \\ k+r+1 \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \dots & \widetilde{k-3} & \widetilde{k-2} & \widetilde{k-1} & \widetilde{k} & \widetilde{k+1} & \widetilde{k+2} & \dots \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \end{array},$$

где строки с k-й по $k+r-2$-ю состоят из нулей.

Следствие 2. *Матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T$:*

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I,$$

где I — единичная матрица.

Рассмотрим векторы

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots),$$

$$\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots),$$

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots).$$

Используя введенные векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, перепишем формулы (10.6)–(10.8) в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}^T \mathbf{a}, \tag{10.11}$$

$$\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}. \tag{10.12}$$

Лемма 12. *Произведение матриц $\mathfrak{P}^T$ и $\mathfrak{Q}$ имеет вид*

$$\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\begin{array}{l} \\ \ldots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ \ldots \\ k+r-2 \\ k+r-1 \\ k+r \\ k+r+1 \\ \ldots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & k-3 & k-2 & k-1 & k & \ldots & k+r-2 & k+r-1 & k+r & k+r+1 & \ldots \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k} & 0 & \ldots & 0 & \mathfrak{p}_{k,k} & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k+r-2} & 0 & \ldots & 0 & \mathfrak{p}_{k,k+r-2} & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right)
\end{array};$$

здесь столбцы с номерами k, $k+1$, $\ldots$, $k+r-2$ состоят из нулей.

Доказательство получается непосредственным вычислением матричного произведения $\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$.

Теорема 12. *Для сплайн-всплескового разложения (10.2) справедливы формулы реконструкции*

$$c_j = a_j \quad \text{при} \quad j \le k-1, \qquad c_j = a_{j-r+1} \quad \text{при} \quad j \ge k+r-1, \tag{10.13}$$

$$c_j = \mathfrak{p}_{k-1,j} a_{k-1} + \mathfrak{p}_{k,j} a_k + b_j \quad \text{при} \quad j = k, k+1, \ldots, k+r-2; \tag{10.14}$$

кроме того, верны формулы декомпозиции

$$a_j = c_j \quad \text{при} \quad j \le k-1, \qquad a_j = c_{j+r-1} \quad \text{при} \quad j \ge k, \tag{10.15}$$

$$b_j = 0 \quad \text{при} \quad j \notin \{k, k+1, \ldots, k+r-2\},$$

$$b_j = c_j - \mathfrak{p}_{k-1,j} c_{k-1} - \mathfrak{p}_{k,j} c_{k+r-1} \quad \text{при} \quad j \in \{k, k+1, \ldots, k+r-2\}; \tag{10.16}$$

Доказательство. Используя формулу (10.11), получаем соотношения (10.13) – (10.14). Применяя лемму 12 и формулы (10.12), находим соотношения (10.15) — (10.16). ∎

Формулы (10.13)–(10.16) показывают, что сплайн-всплесковое разложение можно ассоциировать с удаляемыми узлами исходной сетки. Из формул (10.15) вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Операция проектирования в сплайн-всплесковом разложении (10.2) является операцией интерполяции по сохраняемым узлам.*

Замечание 2. Если исходный поток порожден дважды непрерывно дифференцируемой функцией на равномерной сетке шага $h > 0$, $c_j = u_j \stackrel{\text{def}}{=} u(x_j)$, $x_j = jh$, то всплесковый поток (10.16) имеет второй порядок малости при $h \to +0$:

$$b_j = B(j,k,r)h^2 u''(x_k)/2 + o(h^2), \tag{10.17}$$

где $j = k, k+1, \ldots, k+r-2$,

$$B(j,k,r) \stackrel{\text{def}}{=} (j-k)^2 - \big[k+r-j-1-(j+1-k)(r-1)^2\big]/r. \tag{10.18}$$

Действительно, в случае равномерной сетки

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} = \frac{x_{k+r} - x_{j+1}}{x_{k+r} - x_k} = \frac{k+r-j-1}{r}, \qquad \mathfrak{p}_{k,j} = \frac{x_{j+1} - x_k}{x_{k+r} - x_k} = \frac{j+1-k}{r}.$$

Вводя обозначения $u'_k \stackrel{\text{def}}{=} u'(x_k)$, $u''_k \stackrel{\text{def}}{=} u''(x_k)$ и применяя формулу Тейлора, находим

$$c_j = u_k + (j-k)hu'_k + (j-k)^2 h^2 u''_k/2 + o(h^2),$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} c_{k-1} = \frac{k+r-j-1}{r}\Big(u_k - hu'_k + h^2 u''_k/2 + o(h^2)\Big),$$

$$\mathfrak{p}_{k,j} c_{k+r-1} = \frac{j+1-k}{r}\Big(u_k + (r-1)hu'_k + (r-1)^2 h^2 u''_k/2 + o(h^2)\Big).$$

Теперь видно, что в выражении (10.16) сокращаются слагаемые, содержащие u_k и u'_k. В результате получаем получаем представление (10.17)–(10.18).

Замечание 3. От бесконечной сетки на интервале (α, β) легко перейти к конечной сетке на отрезке $[a,b]$, $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$, сужением на $[a,b]$ всех функций, рассматриваемых в пунктах 7.–10. Бесконечная сетка рассматривалась лишь для упрощения записи (например, в случае использования конечной сетки усложняется запись матриц $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$, добавлением строк и столбцов с начальными и конечными индексами, см. раздел 10, а также работу [26]).

17. АДАПТИВНАЯ СПЛАЙН-ВСПЛЕСКОВАЯ ОБРАБОТКА ДИСКРЕТНОГО ПОТОКА

В данном разделе исходным является дискретный поток, причем априори не предполагается, что он порожден континуально заданной функцией той или иной гладкости. В этой ситуации предлагаются дискретные аналоги адаптивных алгоритмов сплайн-всплескового разложения, обеспечивающего априори заданную оценку уклонения основного потока от исходного. Строится псевдоравномерная сетка и сетка адаптивного типа и получены оценки объемов используемых данных в основном потоке при различных характеристиках нерегулярности исходного потока на упомянутых сетках. Даны предельные характеристики этих объемов в случаях, когда исходный поток порожден дифференцируемой функцией.

17.1. Общая характеристика результатов данного раздела

Наряду с широко распространенными классическими вэйвлетными разложениями, рассматриваемыми, как правило, на равномерной сетке (см., например, [46, 57]), определенное распространение получили сплайн-всплесковые разложения, ассоциируемые, с вообще говоря, неравномерной сеткой (см. [18, 97, 105]). Исходный поток порождает два потока числовой информации: основной и всплесковый. Введение неравномерных сеток важно в случае нерегулярного поведения исходного потока: в областях медленного изменения упомянутого потока естественно использовать крупную сетку, а в областях быстрого изменения необходима мелкая сетка. При таком подходе возможно последовательное адаптивное укрупнение возникающих таким образом неравномерных сеток для получения всплескового пакета с заданной аппроксимацией исходного потока.

В разделе 16 установлено, что если поток порожден функцией $u \in C^1[a, b]$, то отношение объема основного потока, связанного с соответствующей неравномерной сеткой адаптивного типа, к объему основного потока, связанного с псевдоравномерной сеткой, при стремлении шагов сетки к нулю характеризуется величиной $\frac{1}{b-a}\int_a^b |u'(t)|dt/\|u'\|_{C[a,b]}$, а если $u \in C^2[a,b]$, то аналогичное отношение при соответствующей сетке характеризуется величиной $\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{|u''(t)|}dt/\|\sqrt{u''}\|_{C[a,b]}$.

Особенность данного раздела в том, что исходным является дискретный поток; при этом не предполагается, что он порожден непрерывной функцией (иначе говоря, исходный поток, вообще говоря, не является результатом оцифровки аналогового сигнала). В данном разделе показано, что можно работать с дискретными потоками (сеточными функциями), не занимаясь их продолжением на континуум (на интервал вещественной оси).

Здесь предлагаются дискретные аналоги адаптивных алгоритмов сплайн-всплескового разложения, обеспечивающего априори заданную оценку уклонения основного потока от исходного. Вводятся понятия псевдоравномерной сетки и сетки адаптивного типа. Даны представления уклонения основного потока от исходного. Получены оценки объемов используемых данных в основном потоке при различных характеристиках нерегулярности исходного потока в случаях псевдоравномерной сетки и сетки адаптивного типа при одной и той же аппроксимации. Даны предельные характеристики упомянутых объемов в случае, когда исходный поток порожден дифференцируемой функцией.

Данный раздел содержит тринадцать пунктов. Со второго по шестой пункты вводятся понятия сетки адаптивного типа и псевдоравномерной сетки, которые зависят от заданного числового потока f и положительного параметра ε, а также рассматриваются количества узлов этих сеток и асимптотика их отношения для потока, генерируемого непрерывной функцией $f(t)$; в основном, эти пункты имеют вспомогательный характер. В седьмом и восьмом пунктах даются разностные представления уклонения интерполирующего потока от исходного, на основании которых получаются оценки аппроксимации. С девятого по одиннадцатый пункты исследуются объемы информации (числа узлов) в интерполирующих потоках при различных характеристиках нерегулярности исходного потока в случаях псевдоравномерной сетки и сетки адаптивного типа. Наконец, двенадцатый и тринадцатый пункты посвящены сплайн-всплесковому разложению, в котором основной поток совпадает с рассмотренным в предыдущих пунктах интерполирующим потоком.

17.2. Сетка адаптивного типа

Пусть на интервале (α, β) рассматривается сетка

$$\Xi: \quad \ldots < \xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \ldots, \tag{2.1}$$

$$\lim_{i \to -\infty} \xi_i = \alpha, \quad \lim_{i \to +\infty} \xi_i = \beta.$$

Множество функций $u(t)$, заданных на сетке Ξ, обозначим $C(\Xi)$; ясно, что $C(\Xi)$ — линейное пространство.

Пусть $f \in C(\Xi)$, и для некоторой константе $c > 0$ справедливо соотношение

$$f(t) \geq c \quad \forall t \in \Xi. \tag{2.2}$$

Если $a \in \Xi$, то существует такое $i \in \mathbb{Z}$, что $a = \xi_i$; в этом случае обозначим $a^- \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i-1}$, $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i+1}$.

Дальше предполагается, что

$$a, b \in \Xi, \qquad a^+ < b^-, \tag{2.3}$$

т.е. для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$, $i + 2 < j$, верны равенства $a = \xi_i$, $b = \xi_j$. При упомянутых a и b введем обозначение

$[\![a, b]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_s \mid a \leq \xi_s \leq b, \ s \in \mathbb{Z}\}$, т.е. $[\![a, b]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_s \mid i \leq s \leq j, \ s \in \mathbb{Z}\}$; множество $[\![a, b]\!]$ будем называть сеточным отрезком.

Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[\![a, b]\!]$ функций $u(t)$, заданных на сеточном отрезке $[\![a, b]\!]$, где норма вводится соотношением

$$\|u\|_{C[\![a, b]\!]} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \in [\![a, b]\!]} |u(t)|. \tag{2.4}$$

Очевидно, что пространство $C[\![a, b]\!]$ конечномерно.

Пусть

$$\varepsilon \in (\varepsilon^*, \varepsilon^{**}), \tag{2.5}$$

где

$$\varepsilon^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\xi \in [\![a, b^-]\!]} \max_{t \in \{\xi, \xi^+\}} f(t)(\xi^+ - \xi), \quad \varepsilon^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (b - a)\|f\|_{C[\![a, b]\!]}. \tag{2.6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если выполнены условия (2.2), (2.5) – (2.6), то существуют и единственны натуральное число* $K = K(f, \varepsilon, \Xi)$ *и сетка*

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}(f, \varepsilon, \Xi): \quad a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_K \leq \widetilde{x}_{K+1} = b \tag{2.7}$$

такие, что

$$\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)\le\varepsilon<\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}^+_{s+1}-\widetilde{x}_s) \tag{2.8}$$

$$\forall s\in\{0,1,\ldots,K-1\},$$

$$\max_{t\in[\![\widetilde{x}_K,\,b]\!]} f(t)(b-\widetilde{x}_K)\le\varepsilon,\quad \widetilde{X}\subset\Xi. \tag{2.9}$$

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

I. База индукции устанавливается следующим образом. Пусть переменная $\tau\in\Xi$ увеличивается от $a=\widetilde{x}_0$ до b; тогда ввиду предположения (2.2) функция $\phi_0(\tau)\stackrel{\text{def}}{=}\max_{t\in[\![\widetilde{x}_0,\,\tau]\!]} f(t)(\tau-\widetilde{x}_0)$ является строго возрастающей и при изменении τ от $a=\widetilde{x}_0$ к b функция $\phi_0(\tau)$ возрастает от 0 до $\max_{t\in[\![a,\,b]\!]} f(t)(b-a)$. Благодаря условию (2.5)–(2.6) существует единственная точка $\tau_1\in[\![a,\ b]\!]$ такая, что

$$\max_{t\in[\![\widetilde{x}_0,\,\tau_1]\!]} f(t)(\tau_1-\widetilde{x}_0)\le\varepsilon<\max_{t\in[\![\widetilde{x}_0,\,\tau_1^+]\!]} f(t)(\tau_1^+-\widetilde{x}_0).$$

Положим $\widetilde{x}_1\stackrel{\text{def}}{=}\tau_1$. База индукции установлена.

II. Предположим, что узлы $\widetilde{x}_1,\ \widetilde{x}_2,\ \ldots,\ \widetilde{x}_s$ сетки $\widetilde{X}$ определены. Если $\widetilde{x}_s=b$, то полагаем $K\stackrel{\text{def}}{=}s-1$: в этом случае построение сетки $\widetilde{X}(f,\varepsilon,\Xi)$ завершено. В противном случае $\widetilde{x}_s<b$, и построение сетки продолжается. Рассмотрим функцию $\phi_s(\tau)\stackrel{\text{def}}{=}\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\tau]\!]} f(t)(\tau-\widetilde{x}_s)$; она является строго возрастающей: при изменении τ от $\widetilde{x}_s$ до b функция $\phi_s(\tau)$ возрастает от 0 до $m_s\stackrel{\text{def}}{=}\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,b]\!]} f(t)(b-\widetilde{x}_s)$. Заметим, что если $\widetilde{x}_s=b^-$, то

$$m_s=\max_{t\in\{b^-,b\}} f(t)(b-b^-)\le\max_{\xi\in[\![a,\,b^-]\!]}\max_{t\in\{\xi,\xi^+\}} f(t)(\xi^+-\xi)=\varepsilon^*,$$

и по предположению (2.5)–(2.6) имеем $m_s\le\varepsilon$. Во всех случаях, когда $m_s\le\varepsilon$ полагаем $K\stackrel{\text{def}}{=}s$ и $\widetilde{x}_{s+1}=b$.

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon<m_s$; из предыдущего следует, что $\widetilde{x}_s<b^-$. Пусть при некоторых $p,q\in\mathbb{Z}$ справедливы соотношения $\widetilde{x}_s=\xi_p$ и $m_s=\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\xi_q]\!]} f(t)(\xi_q-\widetilde{x}_s)$. Очевидно, что $p<q$ (равенство $p=q$ дает $m_s=0$, что противоречит соотношению $\varepsilon<m_s$).

Поскольку $0<\varepsilon<m_s$, а дискретная функция $\phi_s(\tau)$ принимает возрастающие значения от 0 до m_s, то найдется такое j, что $\xi_j\in[\![\widetilde{x}_s,\ b^-]\!]$ и $\phi_s(\xi_j)\le\varepsilon<\phi_s(\xi_{j+1})$; последнее эквивалентно соотношению

$$\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\xi_j]\!]} f(t)(\xi_j-\widetilde{x}_s)\le\varepsilon<\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\xi_{j+1}]\!]} f(t)(\xi_{j+1}-\widetilde{x}_s).$$

Положим $\widetilde{x}_{s+1} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_j$. Существование точки $\widetilde{x}_{s+1}$, удовлетворяющей соотношениям (2.8), установлено; возможными ее значениями являются следующие узлы исходной сетки $\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots, \xi_{q-1}$. Единственность точки $\widetilde{x}_{s+1}$ следует из строгого возрастания функции $\phi_s(\tau)$.

Итак, если $\varepsilon \geq m_s$, то полагаем $K \stackrel{\text{def}}{=} s$ и $\widetilde{x}_{s+1} = b$; при этом выполнено соотношение (2.9). Если же $\varepsilon < m_s$, то найдется единственная точка $\tau_{s+1} < b$ так, что справедливо неравенство (2.8). Индукционный переход закончен. ∎

Сетку вида (2.7) со свойствами (2.8)–(2.9) будем называть *сеткой адаптивного типа для дискретной функции* f.

Очевидно, что целочисленная функция $K(f, \varepsilon, \Xi)$ обладает свойством монотонности: если $\varepsilon' \leq \varepsilon''$, то $K(f, \varepsilon', \Xi) \geq K(f, \varepsilon'', \Xi)$.

Суммированием соотношений (2.8) получаем неравенство

$$\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \leq K\varepsilon <$$
$$< \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s). \tag{2.10}$$

17.3. О построении сетки адаптивного типа

Здесь дадим иллюстрацию рассуждений, рассмотренных при доказательстве леммы 1 на случае, когда сетка Ξ равномерная шага $h > 0$, и ее узлы задаются формулой $\xi_j = jh$. Пусть

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_0 = b,$$

так что рассматриваемый сеточный отрезок имеет вид $[\![a,\ b]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \{0, h, 2h, 3h\}$; таким образом, $a = 0$, $b = 3h$; ясно, что при этом выполнено условие (2.3): $a^+ = h < b^- = 2h$. В этом случае имеем

$$\varepsilon^* = \max\{f(0), f(h), f(2h), f(3h)\}h = \|f\|_{C[\![a,\, b]\!]} \cdot h, \qquad \varepsilon^{**} = 3\varepsilon^*. \tag{3.1}$$

Условие (2.5) принимает вид

$$\varepsilon^* < \varepsilon < 3\varepsilon^*. \tag{3.2}$$

В доказательстве леммы 1 сначала рассматривается функция ϕ_0; здесь она принимает вид $\phi_0(\tau) = \max_{t \in [\![0,\, \tau]\!]} f(t)\tau$, причем ее аргумент τ пробегает значения 0, h, $2h$, $3h$, так что $\phi_0(\tau) = 0$, $\phi_0(h) = h\max\{f(0), f(h)\}$, $\phi_0(3h) = 2h\max\{f(0), f(h), f(2h)\}$, $\phi_0(3h) = 3h\|f\|_{C[\![a,\, b]\!]}$.

Полагаем $\widetilde{x}_0 \overset{\text{def}}{=} a$, т. е. в нашем случае $\widetilde{x}_0 \overset{\text{def}}{=} 0$. Первый шаг, который необходимо сделать — найти $\widetilde{x}_1$ так, чтобы выполнялось соотношение (2.8) при $s = 0$, т. е. среди значений $\tau \in \{0, h, 2h\}$ найти такое значение τ, чтобы выполнялось соотношение

$$\phi_0(\tau) \le \varepsilon < \phi_0(\tau^+)$$

или (что то же самое) — соотношение

$$\max_{t\in[\![0,\, \tau]\!]} f(t)(\tau) \le \varepsilon < \max_{t\in[\![0,\, \tau+h]\!]} f(t)(\tau + h).$$

При $\tau = 0$ это соотношение принимает вид $0 \le \varepsilon < \max\{f(0), f(h)\}h$; такое неравенство противоречит условиям (3.1)–(3.2), так что для τ возможен лишь один из двух вариантов:

$$\tau = h \qquad \max\{f(0), f(h)\}h \le \varepsilon <$$

$$< 2h \max\{f(0), f(h), f(2h)\}, \tag{3.3}$$

$$\tau = 2h \qquad 2h \max\{f(0), f(h), f(2h)\} \le$$

$$\le \varepsilon < 3h\|f\|_{C[\![a,\, b]\!]}, \tag{3.4}$$

1. Если верно соотношение (3.3), то согласно (2.8) следует положить

$$\widetilde{x}_1 \overset{\text{def}}{=} h, \tag{3.5}$$

и перейти к отысканию $\widetilde{x}_2$. Для этого рассмотрим функцию $\phi_1(\tau) = \max_{t\in[\![\widetilde{x}_1,\, \tau]\!]} f(t)(\tau - \widetilde{x}_1)$. Заметим, что

$$\phi_1(h) = 0, \phi_1(2h) = h \max_{t\in[\![h,\, 2h]\!]} f(t) = h \max\{f(h), f(2h)\}, \tag{3.6}$$

$$\phi_1(3h) = 2h \max_{t\in[\![h,\, 3h]\!]} f(t) = 2h \max\{f(h), f(2h), f(3h)\}. \tag{3.7}$$

Требуется найти такое $\tau \in \{h, 2h\}$, которое удовлетворяет соотношению

$$\phi_1(\tau) \le \varepsilon < \phi_1(\tau^+). \tag{3.8}$$

и положить $\widetilde{x}_2 \overset{\text{def}}{=} \tau$.

При $\tau = h$ соотношение (3.8) принимает вид

$$0 = \phi_1(h) \le \varepsilon < \phi_1(2h); \tag{3.9}$$

легко видеть, что (3.9) противоречит условиям (3.1)–(3.2). Остается рассмотреть лишь случай $\tau = 2h$; в этом случае (3.8) примет вид $\phi_1(2h) \le \varepsilon < \phi_1(3h)$, или, в соответствии с формулами (3.6)–(3.7), вид

$$h \max\{f(h), f(2h)\} \le \varepsilon < 2h \max\{f(h), f(2h), f(3h)\}. \tag{3.10}$$

Итак, если неравенство (3.10) выполнено, то полагаем $\widetilde{x}_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2h$, $\widetilde{x}_3 \stackrel{\text{def}}{=} 3h$. Учитывая соотношение (3.5) видим, что в этом случае искомая сетка $\widetilde{X}$ построена; при этом $\widetilde{X} = \{0, h, 2h, 3h\}$ (т. е. узлы новой сетки совпадают с последовательными узлами исходной сетки $\xi_j = jh,\ j = 0, 1, 2, 3$).

Если неравенство (3.10) не выполнено, то ввиду условий (3.1)–(3.2) заведомо выполнено условие вида (2.9); в рассматриваемом случае оно принимает вид

$$2h \max\{f(h), f(2h), f(3h)\} \le \varepsilon < 3h\|f\|_{C[\![a,\, b]\!]}, \tag{3.11}$$

и потому полагаем $\widetilde{x}_2 \stackrel{\text{def}}{=} 3h$. Благодаря формуле (3.11) полученная сетка $\widetilde{X}$ имеет вид $\widetilde{X} = \{0, h, 3h\}$.

2. До сих пор рассматривалась ситуация, когда выполнено неравенство (3.3). Теперь предположим, что выполнено неравенство (3.4): $\varphi_0(2h) \le \varepsilon < \varphi_0(3h)$. В этом случае полагаем $\widetilde{x}_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2h$ и дальше остается лишь положить $\widetilde{x}_2 \stackrel{\text{def}}{=} 3h$. Таким образом, здесь сетка $\widetilde{X}$ такова $\widetilde{X} = \{0, 2h, 3h\}$.

17.4. Псевдоравномерная сетка

Предположим, что число ε удовлетворяет условию

$$\varepsilon \in (\overline{\varepsilon}^*, \varepsilon^{**}), \tag{4.1}$$

где

$$\overline{\varepsilon}^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\xi \in [\![a,\, b^-]\!]} (\xi^+ - \xi)\|f\|_{C[\![a,\, b]\!]}, \quad \varepsilon^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (b - a)\|f\|_{C[\![a,\, b]\!]}. \tag{4.2}$$

По рассматриваемому ε найдем числа

$$N = N(f, \varepsilon, \Xi) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \varepsilon^{**}/\varepsilon \right\rceil, \tag{4.3}$$

и

$$h = h(f, \varepsilon, \Xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b - a}{N + 1}; \tag{4.4}$$

заметим, что для вещественного числа r выражение $\lceil r \rceil$ означает целое число k со свойством $0 \le k - r < 1$.

На сеточном отрезке $[\![a, b]\!]$ рассмотрим сетку

$$\overline{X} = \overline{X}(f, \varepsilon, \Xi) : \quad a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_N = b, \quad \overline{X} \subset \Xi, \tag{4.5}$$

где

$$\overline{x}_{s+1} - \overline{x}_s \le h < \overline{x}^+_{s+1} - \overline{x}_s, \quad s \in \{0, 1, \ldots, N-1\}, \tag{4.6}$$

$$\overline{x}_{N+1} - \overline{x}_N \le h. \tag{4.7}$$

Сетку (4.5) со свойствами (4.3)–(4.7) будем называть *псевдоравномерной сеткой шага* h. Из (4.3) имеем

$$N \le \frac{b-a}{\varepsilon} \|f\|_{C[\![a, b]\!]} < N + 1, \tag{4.8}$$

так что

$$(b-a)\|f\|_{C[\![a, b]\!]} - \varepsilon < N\varepsilon \le (b-a)\|f\|_{C[\![a, b]\!]}. \tag{4.9}$$

Из (4.8) видно, что для рассматриваемой сетки заведомо выполнено соотношение:

$$\frac{b-a}{N+1} \|f\|_{C[\![a, b]\!]} < \varepsilon,$$

так что

$$h\|f\|_{C[\![a, b]\!]} < \varepsilon,$$

а в силу левого неравенства в (4.6) и неравенства (4.7) имеем

$$\max_{t \in [\![\overline{x}_s,\, \overline{x}_{s+1}]\!]} f(t)\,(\overline{x}_{s+1} - \overline{x}_s) \le \varepsilon, \quad s \in \{0, 1, \ldots, N\}. \tag{4.10}$$

Лемма 2. *По заданному числу ε, удовлетворяющему соотношениям (4.1)–(4.2), однозначно определяется сетка (4.5) со свойствами (4.6)–(4.7); при этом выполнены соотношения (4.9)–(4.10).*

Доказательство существования и единственности сетки (4.5) проводится математической индукцией аналогично доказательству леммы 1, соотношения (4.9)–(4.10) установлены выше.

17.5. Относительное количество узлов

В этом пункте найдем границы отношения числа узлов N псевдоравномерной сетки к числу K узлов адаптивной сетки.

Теорема 1. *В условиях лемм 1 и 2 справедливо неравенство*

$$\frac{(b-a)\|f\|_{C[\![a, b]\!]} - \varepsilon}{\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)} < \frac{N}{K} \le$$

$$\leq \frac{(b-a)\|f\|_{C[\![a,\,b]\!]}}{\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Ввиду предположений (2.2) и (2.7) ясно, что соотношение (2.10) предсталяет собой двойное неравенство между положительными числами. Из предположения (4.1)–(4.2) следует, что $(b-a)\|f\|_{C[\![a,\,b]\!]} - \varepsilon > 0$, и потому соотношение (4.9) обладает тем же свойством: оно представляет собой неравенство между положительными числами. Принимая во внимание эти свойства, видим, что соотношение (5.1) непосредственно вытекает из соотношений (2.10) и (4.9). ■

Заметим, что неравенство (5.1) легко реализуется алгоритмически: вместо часто используемых в подобной ситуации максимумов функций (и связанных с этим теорем существования), заданных на отрезках вещественной оси, здесь требуется найти лишь максимумы среди конечного множества явно указанных чисел; алгоритмы отыскания таких максимумов известны (см., например, [42], стр. 181).

17.6. Предельные соотношения

Предположим, что функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и обладает свойством

$$f(t) \geq c > 0 \quad \forall t \in [a,b]. \tag{6.1}$$

Рассмотрим последовательность сеток $\Xi(\lambda)$ вида (2.1)

$$\Xi(\lambda): \quad \ldots < \xi_{-2}(\lambda) < \xi_{-1}(\lambda) < \xi_0(\lambda) < \xi_1(\lambda) < \xi_2(\lambda) \ldots, \tag{6.2}$$

зависящих от параметра $\lambda > 0$ таких, что $a, b \in \Xi(\lambda)$.

Введем обозначения

$$[\![a,b]\!]_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(\lambda) \cap [a,b], \quad h_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\xi\in[\![a,\,b^-\ ]\!]_\lambda} (\xi^+ - \xi).$$

Теорема 2. *Если непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(t)$ удовлетворяет условию (6.1), а последовательность сеток (6.2) такова, что*

$$\lim_{\lambda\to+0} h_\lambda = 0, \tag{6.3}$$

то верно соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{\lambda\to+0} \frac{K}{N} = \frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt}{\|f\|_{C[a,b]}}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Из (6.2) и (6.3) получаем

$$\lim_{\lambda\to+0}\|f\|_{C[\![a,b\,]\!]_\lambda}=\|f\|_{C[a,b]},$$

а благодаря соотношениям (2.8)–(2.9) находим (6.4). ■

17.7. Аппроксимация дискретного потока

Пусть функция $u(t)$ задана на сеточном отрезке $[\![y,z]\!]$,

$$[\![y,z]\!]: \quad y=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_{M-1}<\xi_M=z. \tag{7.1}$$

Положим

$$\widetilde{u}(t)\stackrel{\text{def}}{=}u(y)+\frac{u(z)-u(y)}{z-y}(t-y), \quad t\in[\![y,z]\!]. \tag{7.2}$$

Замечание 1. Формулу (7.2) можно представить также в виде

$$\widetilde{u}(t)\stackrel{\text{def}}{=}u(z)+\frac{u(z)-u(y)}{z-y}(t-z), \quad t\in[\![y,z]\!]. \tag{7.3}$$

Используя формулы (7.2)–(7.3), для дискретной функции $w\in C[\![a,b]\!]$ при условии

$$y\le\xi_j<\xi_k\le z \tag{7.4}$$

имеем

$$w(\theta)-w(\tau)=\sum_{s=j}^{k-1}\frac{w(\xi_{s+1})-w(\xi_s)}{\xi_{s+1}-\xi_s}(\xi_{s+1}-\xi_s), \tag{7.5}$$

где $\theta=\xi_k$, $\tau=\xi_j$.

Следующая лемма не содержит предположения (7.4).

Лемма 3. *Для дискретной функции $w\in C[\![a,b]\!]$ справедлива формула*

$$w(\theta)-w(\tau)=\operatorname{sgn}(\theta-\tau)\sum_{s=m(k,j)}^{M(k,j)-1}D_\Xi w(\xi_s)(\xi_{s+1}-\xi_s), \tag{7.6}$$

где при $\theta=\xi_k$, $\tau=\xi_j$, $\xi_k,\xi_j\in[\![a,b]\!]$,

$$\operatorname{sgn}(q)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}1 & \text{при } q>0\\ 0 & \text{при } q=0\\ -1 & \text{при } q<0,\end{cases} \qquad D_\Xi u(\xi)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{u(\xi^+)-u(\xi)}{\xi^+-\xi},$$

$$m(k,j) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k,j\}, \ M(k,j) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{k,j\}.$$

Доказательство. При условии (7.4) соотношение (7.6) эквивалентно соотношению (7.5), а при $y \leq \xi_k < \xi_j \leq z$ соотношение (7.6) совпадает с соотношением (7.5), обе части которого умножены на -1; при $y \leq \xi_k = \xi_j \leq z$ соотношение (7.6) тривиально. ■

Лемма 4. *При* $t \in [\![y^+, z]\!]$, $t = \xi_k$, *справедливы следующие представления*

$$u(t) - \widetilde{u}(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \sum_{i=0}^{k-1} \Big[D_\Xi u(\xi_i) - D_\Xi u(\xi_j) \Big] \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\xi_M - \xi_0}, \tag{7.7}$$

$$u(t) - \widetilde{u}(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \sum_{i=k}^{M-1} \Big[D_\Xi u(\xi_j) - D_\Xi u(\xi_i) \Big] \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\xi_M - \xi_0}. \tag{7.8}$$

Доказательство. Применяя (7.5) при $w = u$, $\tau = y = \xi_0$, $\theta = t = \xi_k$, имеем

$$u(t) - u(y) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u(\xi_{i+1}) - u(\xi_i)}{\xi_{i+1} - \xi_i} (\xi_{i+1} - \xi_i). \tag{7.9}$$

Теперь применим формулу (7.5) при $w = u$, $\tau = y = \xi_0$, $\theta = z = \xi_M$; тогда

$$u(z) - u(y) = \sum_{j=0}^{M-1} \frac{u(\xi_{j+1}) - u(\xi_j)}{\xi_{j+1} - \xi_j} (\xi_{j+1} - \xi_j). \tag{7.10}$$

Используя формулы (7.9)–(7.10) имеем

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = \frac{1}{\xi_M - \xi_0} \Bigg[(\xi_M - \xi_0) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u(\xi_{i+1}) - u(\xi_i)}{\xi_{i+1} - \xi_i} (\xi_{i+1} - \xi_i) -$$

$$- (\xi_k - \xi_0) \sum_{j=0}^{M-1} \frac{u(\xi_{j+1}) - u(\xi_j)}{\xi_{j+1} - \xi_j} (\xi_{j+1} - \xi_j) \Bigg]; \tag{7.11}$$

формула (7.11) эквивалентна формуле (7.7).

Для доказательства формулы (7.8) рассмотрим разность $u(t) - \widetilde{u}(t)$ в виде

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = u(t) - u(z) - \frac{u(z) - u(y)}{z - y} (t - z), \quad t \in [y, z],$$

применим формулу (7.6) при $w = u$, $\xi_k = t$, $\xi_j = z$ (т. е. $j = M$) и учтем, что $\operatorname{sgn}(t - z) = -1$, $m(k, j) = k$, $M(k, j) = M$; имеем

$$u(t) - u(z) = -\sum_{i=k}^{M-1} D_\Xi u(\xi_i)(\xi_{i+1} - \xi_i). \tag{7.12}$$

Используя формулы (7.10) и (7.12), находим

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = -\sum_{i=k}^{M-1} D_\Xi u(\xi_i)(\xi_{i+1} - \xi_i) +$$
$$+\frac{\xi_M - \xi_k}{\xi_M - \xi_0} \sum_{j=0}^{M-1} D_\Xi u(\xi_j)(\xi_{j+1} - \xi_j) =$$
$$= \frac{1}{\xi_M - \xi_0} \sum_{j=0}^{M-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \sum_{i=k}^{M-1} (D_\Xi u(\xi_j) - D_\Xi u(\xi_i))(\xi_{i+1} - \xi_i); \tag{7.13}$$

из формулы (7.13) получаем формулу (7.8).

Лемма доказана. ∎

Теорема 3. *Для функций $u(t)$ и $\widetilde{u}(t)$, заданных на сеточном отрезке $[\![y, z]\!]$, справедливы оценки*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le 2\min\{t - y, z - t\} \max_{\xi \in [\![y, z^-]\!]} |D_\Xi u(\xi)|, \tag{7.14}$$

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le (z - y) \max_{\xi \in [\![y, z^-]\!]} |D_\Xi u(\xi)|, \quad t \in [\![y, z]\!]. \tag{7.15}$$

Доказательство. При $t = y$ и при $t = z$ левые части неравенств (7.14) и (7.15) равны нулю, а правые неотрицательны, так что в этих случаях доказываемые неравенства очевидны. При $t \in [\![y^+, z^-]\!]$ из (7.7) находим

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \frac{1}{\xi_M - \xi_0} \sum_{j=0}^{M-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \sum_{i=0}^{k-1} \bigl|D_\Xi u(\xi_i) - D_\Xi u(\xi_j)\bigr| \times$$
$$\times (\xi_{i+1} - \xi_i) \le 2(t - y) \max_{\xi \in [\![y, z^-]\!]} |D_\Xi u(\xi)|, \tag{7.16}$$

а из (7.8) аналогично получаем

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le 2(z - t) \max_{\xi \in [\![y, z^-]\!]} |D_\Xi u(\xi)|. \tag{7.17}$$

Из формул (7.16) и (7.17) получаем соотношение (7.14). Теперь из (7.14) вытекает (7.15). ■

17.8. Еще один вариант аппроксимации дискретного потока

Лемма 5. *При $t \in [\![y^+, z^-]\!]$ справедливо следующее представление*

$$u(t) - \widetilde{u}(t) = \sum_{j=0}^{M-1}(\xi_{j+1} - \xi_j)\sum_{i=0}^{k-1}(\xi_{i+1} - \xi_i)\times$$

$$\times \operatorname{sgn}(\xi_i - \xi_j)\sum_{p=m(i,j)}^{M(i,j)-1} D^2_\Xi u(\xi_{p+1})(\xi_{p+1} - \xi_p)/(\xi_M - \xi_0), \tag{8.1}$$

где

$$D^2_\Xi u(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D_\Xi u(\xi) - D_\Xi u(\xi^-)}{\xi - \xi^-}, \quad \xi \in [\![y^+, z^-]\!]. \tag{8.2}$$

Доказательство. Обозначая

$$\psi(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u(\xi^+) - u(\xi)}{\xi^+ - \xi}, \quad \xi \in [\![y, z]\!],$$

имеем

$$D_\Xi u(\xi_i) - D_\Xi u(\xi_j) = \psi(\xi_i) - \psi(\xi_j).$$

Применяя формулу (7.6) при $w = \psi$ для пары узлов $\xi_i, \xi_j \in [\![y, z^-]\!]$, получаем

$$\psi(\xi_i) - \psi(\xi_j) = \operatorname{sgn}(\xi_i - \xi_j)\sum_{p=m(i,j)}^{M(i,j)-1} D_\Xi\psi(\xi_p)(\xi_{p+1} - \xi_p),$$

так что для упомянутых узлов имеем

$$D_\Xi u(\xi_i) - D_\Xi u(\xi_j) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\xi_\mathrm{i} - \xi_\mathrm{j})\sum_{p=m(i,j)}^{M(i,j)-1} \frac{D_\Xi u(\xi_{p+1}) - D_\Xi u(\xi_p)}{\xi_{p+1} - \xi_p}(\xi_{p+1} - \xi_p). \tag{8.3}$$

Из соотношений (7.7) и (8.3) следует, что формулы (8.1)–(8.2) справедливы. ■

Если исходный поток меняется относительно медленно, так что равномерно ограничены вторые разностные отношения, то полезно следующее утверждение.

Теорема 4. *Для функций $u(t)$ и $\widetilde{u}(t)$, заданных на сеточном отрезке $[\![y,z]\!]$, справедлива оценка*

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)| \le (z-y)^2 \max_{\xi\in[\![y^+,z^-]\!]} |D^2_\Xi u(\xi)|, \quad t\in[\![y,z]\!], \tag{8.4}$$

Доказательство. Из (8.1)–(8.2) при $t\in[\![y,z]\!]$ имеем

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{M-1}(\xi_{j+1}-\xi_j)\sum_{i=0}^{k-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)\Big|\sum_{p=m(i,j)}^{M(i,j)-1}(\xi_{p+1}-\xi_p)\Big|/(\xi_M-\xi_0)\times$$

$$\times \max_{\xi\in[\![y^+,z^-]\!]}|D^2_\Xi u(\xi)|. \tag{8.5}$$

Из (8.5) следует оценка (8.4). ■

Замечание 2. Если на отрезке $[y,z]$ рассмотреть последовательность сеток вида (7.1), у которых $\max_{\xi\in[\![y,z^-]\!]}(\xi^+-\xi)\to +0$, то для функции $u\in C^1[y,z]$ неравенство (7.15) при $t\in[y,z]$ даст оценку

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)| \le (z-y)\max_{\xi\in[y,z]}|u'(\xi)|,$$

а для $u\in C^2[y,z]$ из (8.4) при $t\in[y,z]$ получим

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)| \le (z-y)^2\max_{\xi\in[y,z]}|u''(\xi)|.$$

Рассмотрим сетку $\widehat{X}$, являющуюся подмножеством сетки Ξ

$$\widehat{X}: \quad a=\widehat{x}_0<\widehat{x}_1<\widehat{x}_2<\ldots<\widehat{x}_{\widehat{K}}<\widehat{x}_{\widehat{K}+1}=b, \quad \widehat{X}\subset\Xi, \tag{8.6}$$

и для сеточной функции $u(t)$, заданной на $[\![a,b]\!]$, построим кусочно линейную интерполяцию

$$\widetilde{u}(t)\overset{\text{def}}{=}u(\widehat{x}_j)+\frac{u(\widehat{x}_{j+1})-u(\widehat{x}_j)}{\widehat{x}_{j+1}-\widehat{x}_j}(t-\widehat{x}_j) \qquad \forall t\in[\widehat{x}_j,\widehat{x}_{j+1}), \tag{8.7}$$

$$j\in\{0,1,\ldots,\widehat{K}\}.$$

Теорема 5. *Для кусочно-линейной интерполяции (8.7) для сетки (8.6) при* $t \in [\![\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}]\!]$ *справедливы неравенства*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j) \max_{\xi \in [\![\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}^{-}]\!]} |D_\Xi u(\xi)|, \tag{8.8}$$

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j)^2 \max_{\xi \in [\![\widehat{x}_j^{+}, \widehat{x}_{j+1}^{-}]\!]} |D_\Xi^2 u(\xi)|. \tag{8.9}$$

Если $u \in C^1[a,b]$, *то*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \max_{\xi \in [\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}]} |u'(\xi)|(\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j), \tag{8.10}$$

а если $u \in C^2[a,b]$, *то*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \max_{\zeta \in [\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}]} |u''(\zeta)|(\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j)^2 \quad \forall t \in (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}). \tag{8.11}$$

Доказательство. Оценки (8.8) — (8.9) непосредственно вытекают из неравенств (7.14) и (8.4), а соотношения (8.10) – (8.11) получаются предельным переходом из (8.8) — (8.9) при $\max_{\xi \in [\![y,\, z^-]\!]}(\xi^+ - \xi) \to +0$ аналогично тому, как это сделано в замечании 2. ∎

17.9. О числе узлов сетки адаптивного типа

Теорема 6. *Пусть выполнено условие*

$$|D_\Xi u(t)| \ge c > 0 \qquad \forall t \in [\![y, z]\!]. \tag{9.1}$$

Если при $\eta > 0$ *сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\widetilde{X}\big(|D_\Xi u(t)|, \eta, \Xi\big)$, *то*

1) число узлов $K'_{u,\Xi}(\eta) \overset{\text{def}}{=} K\big(|D_\Xi u(t)|, \eta, \Xi\big)$ *этой сетки удовлетворяет соотношениям*

$$\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}]\!]} |D_\Xi u(t)|(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)/\eta \le K'_{u,\Xi}(\eta) <$$

$$< \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}^{+}]\!]} |D_\Xi u(t)|(\widetilde{x}_{s+1}^{+} - \widetilde{x}_s)/\eta. \tag{9.2}$$

2) верно неравенство

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le \eta \qquad \forall t \in [a, b]. \tag{9.3}$$

3) если $u \in C^1[a,b]$ *со свойством* $|u'(t)| \geq c > 0\ \forall t \in [a,b]$, *и рассматривается последовательность сеток вида (6.2), для которой* $\lim_{\lambda\to+0} h_\lambda = 0$, *то*

$$\lim_{\eta'\to+0}\lim_{\lambda\to+0} K'_{u,\Xi(\lambda)}(\eta')\eta' = \int_a^b |u'(t)|dt. \tag{9.4}$$

Доказательство. Формула (9.2) следует из ранее установленной формулы (2.10), в которой нужно взять $f(t) = |D_\Xi u(t)|$. Неравенство (9.3) следует из (2.8) при $f(t) \overset{\text{def}}{=} |D_\Xi u(t)|$, $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \eta/2$ и из (7.15). Наконец, формула (9.4) получается из (9.2) последовательным переходом к пределу: сначала при $\lambda \to +0$, затем при $\eta \to +0$, аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 2. ■

Теорема 7. *Пусть выполнено условие*

$$|D^2_\Xi u(t)| \geq c > 0 \qquad \forall t \in [\![y,z]\!]. \tag{9.5}$$

Если при $\eta > 0$ *сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\widetilde{X}\Big(\sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}, \eta, \Xi\Big)$, *то*

1) число узлов $K''_{u,\Xi}(\eta) \overset{\text{def}}{=} K(\sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}, \eta, \Xi)$ *этой сетки удовлетворяет соотношениям*

$$\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}]\!]} \sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)/\eta \leq K''_{u,\Xi}(\eta) <$$

$$< \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} \sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)/\eta. \tag{9.6}$$

2) верно неравенство

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leq \eta^2 \qquad \forall t \in [a,b]. \tag{9.7}$$

3) если $u \in C^2[a,b]$ *со свойством* $|u''(t)| \geq c > 0\ \forall t \in [a,b]$, *и рассматривается последовательность сеток вида (6.2), для которой* $\lim_{\lambda\to+0} h_\lambda = 0$, *то*

$$\lim_{\eta'\to+0}\lim_{\lambda\to+0} K''_{u,\Xi(\lambda)}(\eta')\eta' = \int_a^b \sqrt{|u''(t)|}dt. \tag{9.8}$$

Доказательство. Благодаря условию (9.5), формула (9.6) следует из формулы (2.10) при $f(t) = \sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}$. Неравенство (9.7) получается из (2.8) при упомянутой функции $f(t)$ и при $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \eta$ с учетом соотношения (8.4). Наконец, формула (9.8) выводится из (9.6) последовательным переходом к пределу: сначала при $\lambda \to +0$, затем при $\eta \to +0$, аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 2 (см. также доказательство теоремы 5). ■

17.10. О числе узлов псевдоравномерной сетки

Теорема 8. *Если сетка $\widehat{X}$ совпадает с сеткой $\overline{X}(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$, то*

1) число $N'_{u,\Xi}(\eta) \overset{\text{def}}{=} N(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$ внутренних узлов этой сетки удовлетворяет соотношению

$$(b-a)\|D_\Xi u\|_{C[\![a,\,b]\!]}/\eta - 1 < N'_{u,\Xi}(\eta) \leq$$
$$\leq (b-a)\|D_\Xi u\|_{C[\![a,\,b]\!]}/\eta. \tag{10.1}$$

2) верно неравенство

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leq \eta \qquad \forall t \in [\![a, b]\!]. \tag{10.2}$$

Доказательство. Полагая $\widehat{X} \overset{\text{def}}{=} \overline{X}(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$, применим формулу (4.9); в результате получим соотношение (10.1). Неравенство (10.2) получается применением соотношения (4.10) при $f = |D_\Xi u|$ и $\varepsilon = \eta$). ■

Теорема 9. *Если сетка $\widehat{X}$ совпадает с сеткой $\overline{X}(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi)$, то*

1) число $N''_{u,\Xi}(\eta) \overset{\text{def}}{=} N(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi)$ внутренних узлов этой сетки удовлетворяет соотношению

$$(b-a)\|\,|D^2_\Xi u|^{1/2}\|_{C[\![a,\,b]\!]}/\eta - 1 < N''_{u,\Xi}(\eta) \leq$$
$$\leq (b-a)\|\,|D^2_\Xi u|^{1/2}\|_{C[\![a,\,b\,]\!]}/\eta. \tag{10.3}$$

2) верно неравенство

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leq \eta^2 \qquad \forall t \in [\![a, b]\!]. \tag{10.4}$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы применим формулу (4.9) при $\widehat{X} \overset{\text{def}}{=} \overline{X}(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi)$; в результате получим соотношение (10.3). Неравенство (10.4) получается применением соотношения (4.10) при $f = \sqrt{|D^2_\Xi u|}$ и $\varepsilon = \eta$. ■

17.11. Сравнительная характеристика числа узлов при одинаковой аппроксимации

Сравнение числа узлов псевдоравномерной и неравномерной сеток при одинаковой аппроксимации сводится к использованию теорем 1-2 при соответствующем выборе функции f и связанной с ней сетки.

Теорема 10. *Пусть для построения аппроксимации $\widetilde{u}(t)$ дискретной функции $u(t)$ с оценкой $|\widetilde{u}(t) - u(t)| \le \eta$ используется два варианта выбора сетки: в первом варианте используется псевдоравномерная сетка, так что $\widehat{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{X}(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$, а во втором варианте $\widehat{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{X}(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$. Тогда отношение количеств узлов этих сеток характеризуется неравенством*

$$\frac{(b-a)\|D_\Xi u\|_{C[\![a,b]\!]} - \eta}{\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} |D_\Xi u(t)|(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)} < \frac{N\,'_{u,\Xi}(\eta)}{K\,'_{u,\Xi}(\eta)} \le$$

$$\le \frac{(b-a)\|D_\Xi u\|_{C[\![a,b]\!]}}{\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}]\!]} |D_\Xi u(t)|(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)}. \tag{11.1}$$

Доказательство. Для доказательства в неравенстве (5.1) положим $f = |D_\Xi u|$ и $\varepsilon = \eta$. В результате получим требуемую оценку. ∎

Теорема 11. *Если рассматривается семейство сеток вида (6.2) со свойством*

$$\lim_{\lambda\to+0} h_\lambda = 0 \tag{11.2}$$

и непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция $u(t)$ со свойством

$$\|u\,'\|_{C[a,b]} \ne 0, \tag{11.3}$$

то

$$\lim_{\eta\to+0}\lim_{\lambda\to+0} \frac{N\,'_{u,\Xi}(\eta)}{K\,'_{u,\Xi}(\eta)} = \frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b |u\,'(t)|dt}{\|u\,'\|_{C[a,b]}}. \tag{11.4}$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим соотношение (11.1) и перейдем в нем к пределу сначала при $\lambda \to +0$, а затем при $\eta \to +0$. Поскольку правая часть этой формулы имеет смысл при любом $c > 0$, то условие (9.1) может быть заменено условием (11.3). ∎

Теорема 12. *Пусть для построения аппроксимации $\widetilde{u}(t)$ дискретной функции $u(t)$ с оценкой $|\widetilde{u}(t) - u(t)| \le \eta^2$ используется два варианта выбора сетки: в первом варианте используется псевдоравномерная сетка вида*

$\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}\big(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi\big)$, *а во втором варианте* $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{X}\big(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi\big)$. *Тогда отношение количеств узлов этих сеток характеризуется неравенством*

$$\frac{(b-a)\|\,|D^2_\Xi u|^{1/2}\|_{C[\![a,\,b]\!]} - \eta}{\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} \sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)} < \frac{N''_{u,\Xi}(\eta)}{K''_{u,\Xi}(\eta)} \le$$

$$\le \frac{(b-a)\|\,|D^2_\Xi u|^{1/2}\|_{C[\![a,\,b]\!]}}{\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} \sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)}. \tag{11.5}$$

Доказательство. Для доказательства в неравенстве (5.1) положим $f = \sqrt{|D^2_\Xi u|}$ и $\varepsilon = \eta$. В результате получим требуемую оценку. ■

Теорема 13. *Если рассматривается семейство сеток вида (6.2) со свойством (11.2) и дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[a,b]$ *функция* $u(t)$ *со свойством*

$$\|u''\|_{C[a,b]} \ne 0, \tag{11.6}$$

то

$$\lim_{\eta\to+0}\lim_{\lambda\to+0} \frac{N''_{u,\Xi}(\eta)}{K''_{u,\Xi}(\eta)} = \frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{|u''(t)|}dt}{\|\sqrt{|u''|}\|_{C[a,b]}}. \tag{11.7}$$

Доказательство получается переходом к пределу при $\lambda \to +0$, а затем и при $\eta \to +0$ в соотношении (11.4). Поскольку правая часть этой формулы имеет смысл при любом $c > 0$, то условие (9.5) может быть заменено условием (11.6). ■

17.12. Укрупнение сетки и калибровочные соотношения

На сетке Ξ рассмотрим дискретный базис $\{\omega_j(t)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ пространства $C(\Xi)$:

$$\omega_j(\xi_i) = \delta_{i,j+1}, \qquad \xi_i \in \Xi, \tag{12.1}$$

а также линейные функционалы $g^{(i)}$, $i \in \mathbb{Z}$, определяемые формулой

$$\langle g^{(i)}, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\xi_{i+1}) \qquad \forall u \in C(\Xi). \tag{12.2}$$

Лемма 6. *Система функционалов* $\{g^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *биортогональна системе функций* $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$:

$$\langle g^{(i)}, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}. \tag{12.3}$$

Формула (12.3) легко получается из формул (12.1)–(12.2).

Для фиксированных $k, r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$, положим

$$\widehat{x}_j \overset{\text{def}}{=} \xi_j \text{ при } j \leq k, \text{ и } \widehat{x}_j \overset{\text{def}}{=} \xi_{j+r-1} \text{ при } j \geq k+1, \tag{12.4}$$

и рассмотрим новую сетку

$$\widehat{X}: \quad \ldots < \widehat{x}_{-1} < \widehat{x}_0 < \widehat{x}_1 < \ldots .$$

Для $j \in \{k-1, k\}$ введем функции

$$\widehat{\omega}_j(t) = (t - \widehat{x}_j)(\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [\![\widehat{x}_j, \widehat{x}^{\,-}_{j+1}]\!], \tag{12.5}$$

$$\widehat{\omega}_j(t) = (\widehat{x}_{j+2} - t)(\widehat{x}_{j+2} - \widehat{x}_{j+1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [\![\widehat{x}_{j+1}, \widehat{x}^{\,-}_{j+2}]\!], \tag{12.6}$$

$$\widehat{\omega}_j(t) = 0 \quad \text{при } t \notin [\![\widehat{x}_j, \widehat{x}^{\,-}_{j+2}]\!] \tag{12.7}$$

и положим

$$\widehat{\omega}_j(t) \equiv \omega_j(t) \quad \forall j \leq k-2; \qquad \widehat{\omega}_j(t) \equiv \omega_{j+r-1}(t) \quad \forall j \geq k+1. \tag{12.8}$$

При $j \in \{k-1, k\}$ сплайны $\widehat{\omega}_j$ могут быть представлены в виде линейной комбинации сплайнов $\omega_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_{j+r-1}$:

$$\widehat{\omega}_{k-1}(t) = \sum_{j=k-1}^{k+r-2} c_j \omega_j(t), \qquad \widehat{\omega}_k(t) = \sum_{j=k}^{k+r-1} c'_j \omega_j(t) \qquad t \in \Xi. \tag{12.9}$$

Применяя к первому из соотношений (12.9) функционалы $g^{(i)}$, $i = k-1, \ldots, k+r-2$, а ко второму — функционалы $g^{(i')}$, $i' = k, \ldots, k+r-1$, получаем

$$c_{k-1} = 1, c_i = \widehat{\omega}_{k-1}(\xi_{i+1}) = \frac{\xi_{k+r} - \xi_{i+1}}{\xi_{k+r} - \xi_k}, i = k, k+1, \ldots, k+r-2,$$

$$c'_i = \widehat{\omega}_k(\xi_{i+1}) = \frac{\xi_{i+1} - \xi_k}{\xi_{k+r} - \xi_k}, i = k, k+1, \ldots, k+r-2,$$

$$c'_{k+r-1} = \widehat{\omega}_k(\xi_{k+r}) = 1.$$

Таким образом, соотношения (12.9) принимают вид

$$\widehat{\omega}_{k-1}(t) = \sum_{i=k-1}^{k+r-2} \widehat{\omega}_{k-1}(\xi_{i+1})\omega_i(t), \qquad \widehat{\omega}_k(t) = \sum_{i=k}^{k+r-1} \widehat{\omega}_k(\xi_{i+1})\omega_i(t). \tag{12.10}$$

Рассмотрим функционалы $\langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle \overset{\text{def}}{=} u(\widehat{\xi}_{i+1})$.

Лемма 7. *Система функционалов $\{\langle \widehat{g}^{(i)}, u\rangle\}_{i\in\mathbb{Z}}$ биортогональна системе сплайнов $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$: $\langle \widehat{g}^{(i)}, \widehat{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j}$.*

Доказательство легко получается из формул (12.5)–(12.8). ∎

Нетрудно видеть, что

$$\widehat{g}^{(i)} = g^{(i)} \text{ при } i \le k-1, \text{ и } \widehat{g}^{(i)} = g^{(i+r-1)} \text{ при } i \ge k; \tag{12.11}$$

заметим, что функционалы $g^{(k)}, g^{(k+1)}, \dots, g^{(k+r-2)}$ не содержатся во множестве функционалов $\{\widehat{g}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

Дальше рассматриваются бесконечные ряды вида $\sum_j c_j\omega_j(t)$ и $\sum_i a_i\widehat{\omega}_i(t)$, $a_j, c_j \in \mathbb{R}^1$, где суммирование распространено на все целые числа, $i, j \in \mathbb{Z}$. При каждом фиксированном $t \in \Xi$ такие ряды содержат не более двух ненулевых слагаемых.

Теорема 14. *Справедливы калибровочные соотношения*

$$\widehat{\omega}_i = \sum_j \mathfrak{p}_{i,j}\omega_j, \tag{12.12}$$

где для $i, j \in \mathbb{Z}$ числа $\mathfrak{p}_{i,j}$ отыскиваются по формулам:

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j} \qquad \text{при} \quad i \le k-2, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{12.13}$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,i} = (\xi_{k+r} - \xi_{i+1})(\xi_{k+r} - \xi_k)^{-1}, \tag{12.14}$$

$$i = k-1, k, k+1, \dots, k+r-2,$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} = 0 \text{ при } j \notin \{k-1, k, \dots, k+r-2\},$$

$$\mathfrak{p}_{k,j} = 0 \text{ при } j \notin \{k, k+1, \dots, k+r-1\}, \tag{12.15}$$

$$\mathfrak{p}_{k,i} = (\xi_{i+1} - \xi_k)(\xi_{k+r} - \xi_k)^{-1},$$

$$i = k, k+1, \dots, k+r-2, k+r-1, \tag{12.16}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j-r+1} \qquad \text{при} \quad i \ge k+1, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{12.17}$$

Доказательство. Ввиду формул (12.8) находим (12.13), (12.15) и (12.17). Для доказательства соотношений (12.14) и (12.16) рассмотрим представление функций $\widehat{\omega}_{k-1}$ и $\widehat{\omega}_k$ с использованием узлов исходной сетки Ξ; легко видеть, что

$$\widehat{\omega}_{k-1}(t) = \begin{cases} (t-\xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-1})^{-1} & \text{при } t \in \{\xi_{k-1}, \xi_k\} \\ (\xi_{k+r} - t)(\xi_{k+r} - \xi_k)^{-1} & \text{при } t \in [\![\xi_k, \xi^{\,-}_{k+r}]\!], \end{cases}$$

$$\widehat{\omega}_k(t) = \begin{cases} (t-\xi_k)(\xi_{k+r} - \xi_k)^{-1} & \text{при } t \in [\![\xi_k, \xi_{k+r}]\!] \\ (\xi_{k+r+1} - t)(\xi_{k+r+1} - \xi_{k+r})^{-1} & \text{при } t \in \{\xi_{k+r}, \xi_{k+r+1}\}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\widehat{\omega}_{k-1}(\xi_{i+1}) = \frac{\xi_{k+r} - \xi_{i+1}}{\xi_{k+r} - \xi_k},$$

$$\widehat{\omega}_k(\xi_{i+1}) = \frac{\xi_{i+1} - \xi_k}{\xi_{k+r} - \xi_k}, \qquad i = k, k+1, \dots, k+r-2,$$

так что (12.14) и (12.16) вытекают из формул (12.10). Соотношения (12.12)–(12.15) доказаны. ■

Составим матрицу $\mathfrak{P}$ из чисел $\mathfrak{p}_{i,j}$; результат ее транспонирования имеет вид

$$\mathfrak{P}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} \dots & \widehat{k-3} & \widehat{k-2} & \widehat{k-1} & \widehat{k} & \widehat{k+1} & \widehat{k+2} & \dots \end{array} \\ \begin{array}{c} \dots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \dots \\ k+r-2 \\ k+r-1 \\ k+r \\ k+r+1 \\ \dots \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k} & \mathfrak{p}_{k,k} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k+1} & \mathfrak{p}_{k,k+1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k+2} & \mathfrak{p}_{k,k+2} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k+r-2} & \mathfrak{p}_{k,k+r-2} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \end{array}.$$

В случае, когда исходная сетка равномерная (например, $\xi_j = jh$, $j \in \mathbb{Z}$), согласно формулам (12.13)–(12.17) имеем

$$\mathfrak{P}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} \dots & \widehat{k-3} & \widehat{k-2} & \widehat{k-1} & \widehat{k} & \widehat{k+1} & \widehat{k+2} & \dots \end{array} \\ \begin{array}{c} \dots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \dots \\ k+r-2 \\ k+r-1 \\ k+r \\ k+r+1 \\ \dots \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1-1/r & 1/r & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1-2/r & 2/r & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1-3/r & 3/r & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1/r & 1-1/r & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \end{array}.$$

17.13. Сплайн-вэйвлетное разложение

Несмотря на то, что формально содержание данного пункта совпадает (с точностью до обозначений) с содержанием пункта 10 раздела 16, они относятся к разным сущностям (объектам) и потому для убедительности и удобства читателя мы повторим все рассуждения.

Обозначим $\mathbb{S}(\widehat{X})$ линейное пространство, являющееся линейной оболочкой функций $\widehat{\omega}_j$,

$$\mathbb{S}(\widehat{X}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\ u \mid u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_j a_j \widehat{\omega}_j \ \ \forall a_j \in \mathbb{R}^1\ \}; \tag{13.1}$$

пространство (13.1) назовем *пространством дискретных сплайнов первой степени на сетке* Ξ.

Согласно теореме 1 справедливо включение $\mathbb{S}(\widehat{X}) \subset C(\Xi)$.

Рассмотрим оператор P проектирования пространства $C(\Xi)$ на подпространство $\mathbb{S}(\widehat{X})$, задаваемый формулой

$$Pu \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_j \langle \widehat{g}^{(j)}, u \rangle\ \widehat{\omega}_j \qquad \forall u \in C(\Xi),$$

и введем оператор $Q = I - P$, где I — тождественный оператор.

Пространством всплесков (вэйвлетов) называется пространство $W \stackrel{\mathrm{def}}{=} QC(\Xi)$. Итак, получаем прямое разложение

$$C(\Xi) = \mathbb{S}(\widehat{X}) \dot{+} W \tag{13.2}$$

— *сплайн-вэйвлетное разложение* пространства $C(\Xi)$.

Пусть $u \in C(\Xi)$; используя соотношение (13.2), получаем два представления элемента u

$$u = \sum_j c_j \omega_j, \tag{13.3}$$

$$u = \sum_j a_i \widehat{\omega}_i + \sum_j b_j \omega_j, \tag{13.4}$$

где

$$a_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle, \quad b_j,\ c_j\ \in \mathbb{R}^1. \tag{13.5}$$

Из (12.12) и (13.3) — (13.4) имеем

$$\sum_j c_j \omega_j = \sum_i a_i \sum_j \mathfrak{p}_{i,j} \omega_j + \sum_j b_j \omega_j,$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j\}$ получаем

$$c_j = \sum_i a_i \mathfrak{p}_{i,j} + b_j. \tag{13.6}$$

Формулы (13.6) называются *формулами реконструкции.*

Используя представление (13.5), перепишем формулы (13.6) в виде

$$c_j = \sum_i \langle \widehat{g}^{(i)}, u\rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j$$

и подставим сюда u из соотношения (13.3) (заменив в (13.3) индекс суммирования j на s):

$$c_j = \sum_i \sum_s c_s \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j;$$

отсюда

$$b_j = c_j - \sum_i \sum_s c_s \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle \mathfrak{p}_{i,j}. \tag{13.7}$$

Подставляя (13.3) в (13.5), имеем

$$a_j = \langle \widehat{g}^{(j)}, \sum_s c_s \omega_s\rangle,$$

так что

$$a_j = \sum_s c_s \langle \widehat{g}^{(j)}, \omega_s\rangle. \tag{13.8}$$

Формулы (13.7) и (13.8) называются *формулами декомпозиции.*

Лемма 8. *Справедливы соотношения*

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle = \delta_{i,s} \qquad \text{при} \quad i \le k-1,\ s \in \mathbb{Z}, \tag{13.9}$$

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle = \delta_{i+r-1,s} \qquad \text{при} \quad i \ge k,\ s \in \mathbb{Z}. \tag{13.10}$$

Доказательство. Из формул (12.11) имеем

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle = \langle g^{(i)}, \omega_s\rangle \qquad \text{при} \quad i \le k-1, s \in \mathbb{Z},$$

откуда, учитывая свойство биортогональности, получаем соотношение (13.9). Для $i \ge k$ ввиду формул (12.11) находим

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle = \langle g^{(i+r-1)}, \omega_s\rangle \qquad \text{при} \quad i \ge k, s \in \mathbb{Z},$$

что доказывает соотношение (13.10). ■

Введем обозначение $\mathfrak{q}_{i,s} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s \rangle$; матрица $\mathfrak{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,s})$ после транспонирования имеет вид

$$
\mathfrak{Q}^T \stackrel{\mathrm{def}}{=}
\begin{array}{l}
 \\
\dots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ \dots \\ k+r-2 \\ k+r-1 \\ k+r \\ k+r+1 \\ \dots
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
\dots & \widehat{k-3} & \widehat{k-2} & \widehat{k-1} & \widehat{k} & \widehat{k+1} & \widehat{k+2} & \dots
\end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccc}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right)
\end{array},
$$

где строки с k-й по $k+r-2$-ю состоят из нулей.

Следствие 1. *Матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T$:*

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I,$$

где I — единичная матрица.

Рассмотрим векторы

$$\mathbf{a} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots), \quad \mathbf{b} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots),$$

$$\mathbf{c} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots).$$

Используя введенные векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, перепишем формулы (13.6)–(13.8) в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}^T \mathbf{a}, \tag{13.11}$$

$$\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}. \tag{13.12}$$

Лемма 9. *Произведение матриц $\mathfrak{P}^T$ и $\mathfrak{Q}$ имеет вид*

$$
\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=}
\begin{array}{l}
 \\
\dots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ \dots \\ k+r-2 \\ k+r-1 \\ k+r \\ k+r+1 \\ \dots
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & k-3 & k-2 & k-1 & k & \dots & k+r-2 & k+r-1 & k+r & k+r+1 & \dots
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k} & 0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k,k} & 0 & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k+r-2} & 0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k,k+r-2} & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1l! & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right)
\end{array};
$$

здесь столбцы с номерами k, $k+1$, …, $k+r-2$ состоят из нулей.

Доказательство получается непосредственным вычислением матричного произведения $\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$.

В случае равномерной исходной сетки $\Xi = \{\xi_j \,|\, \xi_j = jh, j \in \mathbb{Z}\}$ имеем

$$\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\begin{array}{l} \\ \dots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ \dots \\ k+r-2 \\ k+r-1 \\ k+r \\ k+r+1 \\ \dots \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} \dots & k-3 & k-2 & k-1 & k & \dots & k+r-2 & k+r-1 & k+r & k+r+1 & \dots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 1-1/r & 0 & \dots & 0 & 1/r & 0 & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 1/r & 0 & \dots & 0 & 1-1/r & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix} \end{array};$$

Теорема 15. *Для сплайн-всплескового разложения (13.2) справедливы формулы реконструкции*

$$c_j = a_j \quad \textit{при} \quad j \le k-1, \qquad c_j = a_{j-r+1} \quad \textit{при} \quad j \ge k+r-1, \tag{13.13}$$

$$c_j = \mathfrak{p}_{k-1,j} a_{k-1} + \mathfrak{p}_{k,j} a_k + b_j \quad \textit{при} \quad j = k, k+1, \dots, k+r-2; \tag{13.14}$$

кроме того, верны формулы декомпозиции

$$a_j = c_j \quad \textit{при} \quad j \le k-1, \qquad a_j = c_{j+r-1} \quad \textit{при} \quad j \ge k, \tag{13.15}$$

$$b_j = 0 \quad \textit{при} \quad j \notin \{k, k+1, \dots, k+r-2\},$$

$$b_j = c_j - \mathfrak{p}_{k-1,j} c_{k-1} - \mathfrak{p}_{k,j} c_{k+r-1} \quad \textit{при} \quad j \in \{k, k+1, \dots, k+r-2\}; \tag{13.16}$$

Доказательство. Используя формулу (13.11), получаем соотношения (13.13) – (13.14). Применяя лемму 9 и формулы (13.12), находим соотношения (13.15) — (13.16). ■

Следствие. *В случае равномерной исходной сетки для сплайн-всплескового разложения (13.2) справедливы формулы реконструкции*

$$c_j = a_j \quad \textit{при} \quad j \le k-1, \qquad c_j = a_{j-r+1} \quad \textit{при} \quad j \ge k+r-1, \tag{13.17}$$

$$c_j = \Big(1 - \frac{j-k+1}{r}\Big) a_{k-1} + \frac{j-k+1}{r} a_k + b_j \quad \textit{при} \quad j = k, k+1, \dots, k+r-2; \tag{13.18}$$

кроме того, верны формулы декомпозиции

$$a_j = c_j \quad \textit{при} \quad j \le k-1, \qquad a_j = c_{j+r-1} \quad \textit{при} \quad j \ge k, \tag{13.19}$$

$$b_j = 0 \quad \textit{при} \quad j \notin \{k, k+1, \ldots, k+r-2\},$$

$$b_j = c_j - \Big(1 - \frac{j-k+1}{r}\Big) c_{k-1} - \frac{j-k+1}{r} c_{k+r-1}$$

$$\textit{при} \quad j \in \{k, k+1, \ldots, k+r-2\}; \tag{13.20}$$

Формулы (13.17)–(13.20) показывают, что сплайн-всплесковое разложение можно ассоциировать с удаляемыми узлами исходной сетки. Из формул (13.18) вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Операция проектирования в сплайн-всплесковом разложении (13.2) является операцией интерполяции по сохраняемым узлам.*

18. РЕАЛИЗАЦИЯ СПЛАЙН-ВСПЛЕСКОВОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Всплесковые (вэйвлетные) разложения широко используются при обработке числовых информационных потоков; объемы таких потоков постоянно возрастают, и это является стимулом к дальнейшему развитию теории всплесков. Используемый в данном разделе подход к построению всплесков основывается на применении аппроксимационных соотношений, так что автоматически обеспечивается эффективная аппроксимация (чаще всего, она асимптотически оптимальна по N-поперечнику стандартных компактов). В противоположность классическим вэйвлетам упомянутый подход позволяет без дополнительных сложных исследований использовать неравномерную сетку (как конечную, так и бесконечную), что весьма важно для экономии компьютерных ресурсов в случае появления сингулярных изменений рассматриваемых потоков. В классическом случае большую трудность представляет построение всплескового (вэйвлетного) базиса в том или ином функциональном пространстве (часто в $L_2(\mathbb{R}^1)$); используемый здесь подход не требует предварительного построения всплескового базиса (при желании этот базис может быть получен после проведения основных исследований). С другой стороны, знание всплескового базиса позволяет достичь существенной экономии компьютерных и сетевых ресурсов. Заметим, что для получения упомянутой экономии не нужен всплесковый базис в пространстве функций с континуальной областью определения, достаточно лишь получить подходящий базис для пространства всплесковых числовых потоков, но для этого необходимо все построения выполнять без использования функций с континуальной областью определения. В разделе 17 использовался такой же подход в случае для сплайн-всплескового разложения, но там рассматривалось лишь одно гнездо укрупнения.

Цель данного раздела — построение сплайн-всплескового разложения в общем случае многогнездового укрупнения сетки в предположении, что адаптивная сетка построена (о ее построении см. раздел 17). В рамках упомянутого подхода рассматривается дискретное сплайн-всплесковое разложение первого порядка; все построения проводятся без отображения в пространства функций с континуальной областью определения. Вводятся конечномерные пространства исходных потоков, всплесковых потоков и основных потоков, ассоциированные с исходной и с укрупненной сетками соответственно. В результате получаются достаточно простые формулы декомпозиции и реконструкции, и выясняется, что базисом пространства всплесков является простейшая совокупность ортов эвклидова пространства; кроме того, оказывается, что трудоемкость реализации оказывается пропорциональна объему исходного информационного потока.

18.1. О содержании и структуре данного раздела

Для удобства читателя здесь рассматривается общая идея сплайн-всплескового разложения на одномерном примере; для простоты областью определения здесь служит континуум — интервал вещественной оси.

Пусть $\mathbb{L}$ — линейное пространство функций, определенных на интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$. Рассмотрим сетку

$$X : \ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots , \tag{1.1}$$

$$\lim_{j\to-\infty} x_j = \alpha, \qquad \lim_{j\to-\infty} x_j = \beta, \tag{1.2}$$

и вектор-функцию $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$, с компонентами, принадлежащими пространству $\mathbb{L}$: $\varphi_i \in \mathbb{L}$, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Рассмотрим множество G линейных функционалов $g^{(s)} \in \mathbb{L}^*$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \{g^{(s)}\}_{s\in\mathbb{Z}}$, со свойством

$$\operatorname{supp} g^{(s)} \subset (x_s, x_{s+1}) \qquad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Результат действия функционала $g^{(s)}$ на функцию $u \in \mathbb{L}$ обозначается острыми скобками $\langle g^{(s)}, u\rangle$, а результат действия функционала на вектор-функцию $\varphi(t)$ представляет собой вектор-столбец с числовыми компонентами в соответствии с формулами

$$\langle g^{(s)}, \varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} (\langle g^{(s)}, \varphi_0\rangle, \langle g^{(s)}, \varphi_1\rangle, \ldots, \langle g^{(s)}, \varphi_m\rangle)^T.$$

Предположим, что выполнено условие

$$\det\Big(\langle g^{(s)}, \varphi\rangle, \langle g^{(s+1)}, \varphi\rangle, \ldots, \langle g^{(s+m)}, \varphi\rangle\Big) \neq 0 \qquad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

По определению положим

$$\mathbf{a}_s \stackrel{\text{def}}{=} \langle g^{(s)}, \varphi\rangle. \tag{1.5}$$

Линейная независимость векторов $\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s+1}, \ldots, \mathbf{a}_{s+m+1}$ следует из формулы (1.4).

Теперь рассмотрим аппроксимационные соотношения

$$\sum_{i=k-m}^{k} \mathbf{a}_i \omega_i(t) = \varphi(t) \qquad \forall t \in (x_k, x_{k+1}) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{supp} \omega_s \subset [x_s, x_{s+m+1}] \qquad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Из аппроксимационных соотношений (1.6)–(1.7) однозначно определяются функции $\omega_i(t)$.

Предположим, что $\omega_s \in \mathbb{L}$. Согласно формулам (1.3)–(1.7) имеем

$$\langle g^{(j)}, \omega_s \rangle = \delta_{j,s} \qquad \forall j, s \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{S} = \mathbb{S}(X, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{\omega_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$, где $\mathcal{L}$ — линейная оболочка функций, находящихся в фигурных скобках.

Если рассмотреть подмножество $\widetilde{X}$ сетки X такое, что

$$\widetilde{X} : \ldots < \widetilde{x}_{-2} < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < \ldots,$$

$$\lim_{j \to -\infty} \widetilde{x}_j = \alpha, \qquad \lim_{j \to -\infty} \widetilde{x}_j = \beta, \qquad \widetilde{X} \subset X,$$

то можно найти функции $\widetilde{\omega}_i$, связанные с новой сеткой $\widetilde{X}$ аналогично предыдущему и рассмотреть линейное пространство $\widetilde{\mathbb{S}} = \mathbb{S}(\widetilde{X}, \varphi)$, которое при определенных условиях окажется подпространством пространства $\mathbb{S}(X, \varphi)$.

Рассмотрим оператор P, который проектирует пространство $\mathbb{S}$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}$:

$$Pu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle \widetilde{g}^{(s)}, u \rangle \omega_s \qquad \forall u \in \mathbb{S}(X, \varphi), \tag{1.8}$$

где $\{\widetilde{g}^{(s)}\}_{s \in \mathbb{Z}}$ — фиксированная система функционалов, биортогональная системе функций $\{\widetilde{\omega}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Ясно, что если $t \in (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1})$ фиксировано, то правая часть формулы (1.8) имеет не более $m+1$ слагаемого:

$$Pu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=k-m}^{k} \langle \widetilde{g}^{(s)}, u \rangle \omega_s(t) \qquad \forall t \in (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1}). \tag{1.9}$$

Проектирующий оператор P определяет всплесковое разложение

$$\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dotplus \mathbb{W}. \tag{1.10}$$

Пусть $\mathbf{c} = (\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots)$ — исходный поток числовой информации. Рассмотрим функцию

$$u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j c_j \omega_j(t); \tag{1.11}$$

ее проекция $\widetilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} Pu$ на пространство $\widetilde{\mathbb{S}}$ может быть представлена в форме

$$\widetilde{u} = \sum_i a_i \widetilde{\omega}_i. \tag{1.12}$$

Итак, имеем так называемый основной поток $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$, который соответствует укрупнению $\widetilde{X}$ сетки X, а также всплесковый поток $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots)$, который определяется разложением разности $w \stackrel{\text{def}}{=} u - \widetilde{u}$ по базису пространства $\mathbb{S}$: $w = \sum_s b_s \omega_s$ (см. формулы (1.9)–(1.12)).

Переход от исходного потока $\mathbf{c}$ к потокам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется *декомпозицией*, а обратный переход называется *реконструкцией*.

Формулы декомпозиции могут быть представлены в форме $\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}$, а формулы реконструкции — в форме $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}^T \mathbf{a}$, где $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ — матрицы сужения и продолжения соответственно.

В частном случае для $m = 1$, $\varphi(t) = (1, t)^T$, $X \backslash \widetilde{X} = \{x_{k+1}\}$ формулы декомпозиции имеют вид

$$a_i = c_i \quad \text{при} \quad i \le k-1, \qquad a_i = c_{i+1} \quad \text{при} \quad i \ge k,$$

$$b_j = 0 \quad \text{при} \quad j \ne k, \qquad b_k = -\frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \cdot c_{k-1} + c_k - \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_k} \cdot c_{k+1},$$

а формулы реконструкции могут быть представлены в форме

$$c_j = a_j + b_j \quad \text{при} \quad j \le k-1,$$

$$c_k = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \cdot a_{k-1} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_k} \cdot a_k + b_k,$$

$$c_j = a_{j-1} + b_j \quad \text{при} \quad j \ge k+1.$$

Заметим, что если отрезок $[a, b]$ содержится в интервале (α, β), то все предыдущие построения справедливы для сужения рассматриваемых функций на этот отрезок; при этом рассматриваемые сетки, а также исходный, основной и всплесковый потоки оказываются конечными.

На этом закончим описание основной идеи построений и перейдем к характеристике структуры данного раздела.

Данный раздел содержит двенадцать пунктов. Во втором пункте вводится исходная сетка, служащая областью определения исходного потока числовой информации. В третьем пункте рассматривается укрупнение упомянутой сетки: вновь получаемая сетка служит областью определения основного потока. В четвертом пункте рассматриваются калибровочные соотношения, связывающие дискретные сплайны на укрупненной сетке с дискретными сплайнами на исходной сетке. Пятый и шестой пункты служат для описания дискретного сплайн-всплескового разложения; здесь получаются формулы декомпозиции в общей форме. В седьмом и восьмом пунктах эти формулы конкретизируются для рассматриваемой ситуации (т.е. вычисляются коэффициенты в упомянутых формулах с использованием представлений дискретных сплайнов). В девятом пункте приводится иллюстративный пример дискретного всплескового разложения. В десятом пункте рассмотрен континуальный образ рассматриваемого разложения. Одиннадцатый пункт посвящен вариантам алгоритмов адаптивного укрупнения сетки, определяемого исходным потоком. В двенадцатом пункте найдено время вычислений всплескового разложения на вычислительной системе с учетом влияния коммуникационной среды.

18.2. Первоначальные обозначения

В отличие от предыдущего пункта, где описывается основная идея сплайн-всплесковых разложений, в данной работе всюду (кроме пункта 11) рассматриваются сеточные функции, область определения которых — та или иная сетка вида (1.1)–(1.2) или ее часть. Такой подход удобен при обработке числовых потоков, представляющих собой последовательности чисел; последние можно рассматривать как функции заданные на сетке (например, на множестве целых чисел).

Пусть на интервале (α,β) рассматривается сетка

$$\Xi : \quad \ldots < \xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \ldots, \tag{2.1}$$

$$\lim_{i\to-\infty} \xi_i = \alpha, \quad \lim_{i\to+\infty} \xi_i = \beta. \tag{2.2}$$

Множество функций $u(t)$, заданных на сетке Ξ, обозначим $C(\Xi)$; ясно, что $C(\Xi)$ — линейное пространство.

Если $a \in \Xi$, то существует такое $i \in \mathbb{Z}$, что $a = \xi_i$; в этом случае обозначим $a^- \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i-1}$, $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i+1}$.

Дальше предполагается, что

$$a, b \in \Xi, \qquad a^+ < b^-, \tag{2.3}$$

т.е. для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$, $i+2 < j$, верны равенства $a = \xi_i$, $b = \xi_j$. При упомянутых a и b введем обозначение $[\![a,b]\!] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\xi_s \mid a \le \xi_s \le b,\ s \in \mathbb{Z}\}$; таким образом, $[\![a,b]\!] = \{\xi_s \mid i \le s \le j,\ s \in \mathbb{Z}\}$; множество $[\![a,b]\!]$ будем называть сеточным отрезком.

Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[\![a,b]\!]$ функций $u(t)$, заданных на сеточном отрезке $[\![a,b]\!]$, где норма вводится соотношением

$$\|u\|_{C[\![a,b]\!]} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{t \in [\![a,b]\!]} |u(t)|. \tag{2.4}$$

Из соотношений (2.1)–(2.4) видно, что фактически речь идет о конечномерном пространстве $C[\![a,b]\!]$ сеточных функций $u(t)$.

18.3. Укрупнение сетки

Для натурального числа m положим

$$J_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{0, 1, \ldots, m\}, \qquad J'_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{-1, 0, 1, \ldots, m\}.$$

На сеточном отрезке $[\![a,b]\!]$,

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{M-1} < \xi_M = b,$$

рассмотрим функции $\{\omega_j(t)\}_{j \in J'_{M-1}}$ пространства $C[\![a,b]\!]$:

$$\omega_j(\xi_s) = \delta_{s,j+1}, \qquad s \in J_M, \tag{3.1}$$

а также линейные функционалы $g^{(i)}$, $i \in J'_{M-1}$, определяемые формулой

$$\langle g^{(i)}, u \rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} u(\xi_{i+1}) \qquad \forall u \in C[\![a,b]\!]. \tag{3.2}$$

Система $\{\omega_j\}_{j \in J'_{M-1}}$ является базисом в пространстве $C[\![a,b]\!]$; ее будем называть дискретным базисом.

Лемма 1. *Система функционалов $\{g^{(i)}\}_{i \in J'_{M-1}}$ биортогональна дискретному базису $\{\omega_j\}_{j \in J'_{M-1}}$:*

$$\langle g^{(i)}, \omega_j \rangle = \delta_{i,j} \qquad \forall\, i, j \in J'_{M-1}. \tag{3.3}$$

Формула (3.3) легко получается из формул (3.1)–(3.2).

В дальнейшем условимся считать, что при $c > d$ множество $[\![c,d]\!]$ пусто.

Пусть $5 \leq K < M$. Рассмотрим инъективное отображение $\varkappa$ множества J_K в множество J_M, при котором

$$\varkappa(0) = 0, \quad \varkappa(i) < \varkappa(i+1), \quad \varkappa(K) = M. \tag{3.4}$$

Введем множество $J^* \subset J_M$, задаваемое формулой

$$J^* \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa J_K; \tag{3.5}$$

на этом множестве определено однозначное обратное отображение $\forall r \in J^* \quad \varkappa^{-1} : r \longrightarrow s, \quad s \in J_K, \qquad J_K = \varkappa^{-1} J^*$. Рассмотрим новую сетку

$$\widehat{X}: \quad a = \widehat{x}_0 < \widehat{x}_1 < \ldots < \widehat{x}_K = b, \tag{3.6}$$

где $\widehat{x}_i \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{\varkappa(i)}$, $i \in J_K$.

Замечание 1. В дальнейшем иногда рассматриваются виртуальные узлы ξ_{-1} и $\widehat{x}_{-1}$ сеток $[\![a, b]\!]$ и $\widetilde{X}$ со свойством $\xi_{-1} = \widehat{x}_{-1} < a$; они виртуальны в том смысле, что служат для удобства записей, но на окончательный результат они не оказывают влияния.

Введем функции $\widehat{\omega}_j(t)$, $j \in J'_{K-1}$, согласно формулам

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = (\widehat{x}_1 - t)(\widehat{x}_1 - \widehat{x}_0)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [\![\widehat{x}_0, \widehat{x}_1^{\,-}]\!], \tag{3.7}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a, b]\!] \setminus [\![\widehat{x}_0, \widehat{x}_1^{\,-}]\!], \tag{3.8}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (t - \widehat{x}_i)(\widehat{x}_{i+1} - \widehat{x}_i)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [\![\widehat{x}_i^{\,+}, \widehat{x}_{i+1}^{\,-}]\!], \tag{3.9}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (\widehat{x}_{i+2} - t)(\widehat{x}_{i+2} - \widehat{x}_{i+1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [\![\widehat{x}_{i+1}, \widehat{x}_{i+2}^{\,-}]\!], \tag{3.10}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a, b]\!] \setminus [\![\widehat{x}_i^{\,+}, \widehat{x}_{i+2}^{\,-}]\!], \quad i \in J_{K-2}, \tag{3.11}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = (t - \widehat{x}_{K-1})(\widehat{x}_K - \widehat{x}_{K-1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [\![\widehat{x}_{K-1}^{\,+}, \widehat{x}_K]\!], \tag{3.12}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a, b]\!] \setminus [\![\widehat{x}_{K-1}^{\,+}, \widehat{x}_K]\!], \tag{3.13}$$

Формулы (3.7)–(3.13) могут быть переписаны с использованием узлов исходной сетки следующим образом

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = (\xi_{\varkappa(1)} - t)(\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi_{\varkappa(1)}^{\,-}]\!], \tag{3.14}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a, b]\!] \setminus [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi_{\varkappa(1)}^{\,-}]\!], \tag{3.15}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (t - \xi_{\varkappa(i)})(\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi_{\varkappa(i)}^{\,+}, \xi_{\varkappa(i+1)}]\!], \tag{3.16}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (\xi_{\varkappa(i+2)} - t)(\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{\varkappa(i+1)})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi_{\varkappa(i+1)}^{\,+}, \xi_{\varkappa(i+2)}^{\,-}]\!], \tag{3.17}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \backslash [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \quad i \in J_{K-2}, \tag{3.18}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = (t - \xi_{\varkappa(K-1)})(\xi_{\varkappa(K)} - \xi_{\varkappa(K-1)})^{-1}$$

$$\text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!], \tag{3.19}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \backslash [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!]. \tag{3.20}$$

Из (3.14)–(3.20) для $t \in [\![a,b]\!]$ имеем

$$\widehat{\omega}_i(t) = (t - \xi_{\varkappa(i)})(\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)})^{-1}$$

$$\text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi_{\varkappa(i+1)}]\!],\ i \in J_{K-1}, \tag{3.21}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (\xi_{\varkappa(i+2)} - t)(\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{\varkappa(i+1)})^{-1}$$

$$\text{при} \quad t \in [\![\xi_{\varkappa(i+1)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!],\ i \in J'_{K-2}; \tag{3.22}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \backslash [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!]. \tag{3.23}$$

Из формул (3.21)–(3.23) следует, что

$$\widehat{\omega}_i(\xi_{\varkappa(i+1)}) = 1 \quad \forall i \in J'_{K-1}. \tag{3.24}$$

Замечание 2. Носителем функции $\widehat{\omega}_i$ назовем множество, состоящее из тех узлов сетки X, в которых эта функция отлична от нуля, а кратностью накрытия $\kappa(t)$ точки $t \in X$ носителями функций $\widehat{\omega}_i$ назовем число функций, отличных от нуля в точке t. Ясно, что $1 \le \kappa(t) \le 2$, а кроме того $\kappa(t) = 2$ $\forall t \in X \backslash \widehat{X}$, или (что то же самое)

$$\kappa(\xi_s) = 2 \qquad \forall s \in J_M \backslash J^*. \tag{3.25}$$

Формула (3.25) обосновывает введение понятия дискретного носителя функции $\widehat{\omega}_i$:

$$\operatorname{supp} \widehat{\omega}_i = [\![\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+2}]\!]. \tag{3.26}$$

18.4. Калибровочные соотношения

Сплайны $\widehat{\omega}_i$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций сплайнов ω_j:

$$\widehat{\omega}_i(t) = \sum_{j \in J'_{M-1}} \mathfrak{p}_{i,j}\omega_j(t) \quad \forall t \in [\![a,b]\!], \quad i \in J'_{K-1}, \tag{4.1}$$

называемых *калибровочными соотношениями*.

При фиксированном $t \in X$ в сумме (4.1) имеется одно слагаемое, так что (4.1) можно рассматривать как разложение вектора $\widehat{\omega}_i$ по ортогональной (в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{M+1}$) системе векторов ω_j.

Лемма 2. *Для чисел* $\mathfrak{p}_{i,j}$ *справедливы следующие формулы*

$$\mathfrak{p}_{-1,j} = \widehat{\omega}_{-1}(\xi_{j+1}) \qquad \forall j \in \{\varkappa(0)-1, \varkappa(0), \dots, \varkappa(1)-2\}, \tag{4.2}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \widehat{\omega}_i(\xi_{j+1}) \qquad \forall j \in \{\varkappa(i), \varkappa(i)+1, \dots, \varkappa(i+2)-2\} \quad \forall i \in J_{K-2}, \tag{4.3}$$

$$\mathfrak{p}_{K-1,j} = \widehat{\omega}_{K-1}(\xi_{j+1}) \qquad \forall j \in \{\varkappa(K-1), \varkappa(K-1)+1, \dots, \varkappa(K)-1\}; \tag{4.4}$$

числа $\mathfrak{p}_{r,s}$, $r \in {J'}_{K-1}$, $s \in {J'}_{M-1}$, *не упомянутые в этих формулах, равны нулю.*

Доказательство. Применяя функционалы $g^{(j)}$ в (4.1) и учитывая соотношения (3.2)–(3.3), имеем

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = \sum_{j=\varkappa(0)-1}^{\varkappa(1)-2} \widehat{\omega}_{-1}(\xi_{j+1})\omega_j(t) \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi^{\,+}_{\varkappa(1)}]\!], \tag{4.5}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \setminus [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi^{\,+}_{\varkappa(1)}]\!], \tag{4.6}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = \sum_{j=\varkappa(i)}^{\varkappa(i+2)-2} \widehat{\omega}_i(\xi_{j+1})\omega_j(t) \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \tag{4.7}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \setminus [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \quad i \in J_{K-2}, \tag{4.8}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = \sum_{j=\varkappa(K-1)}^{\varkappa(K)-1} \widehat{\omega}_{K-1}(\xi_{j+1})\omega_j(t) \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!], \tag{4.9}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \setminus [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!]. \tag{4.10}$$

Из формул (4.5)–(4.10) следуют соотношения (4.2)–(4.4). ∎

Лемма 3. *Числа* $\mathfrak{p}_{i,j}$ *могут быть представлены в следующем виде:*

$$\mathfrak{p}_{-1,j} = (\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)})^{-1}(\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{j+1})$$
$$\forall j \in \{\varkappa(0)-1, \varkappa(0), \dots, \varkappa(1)-2\}, \tag{4.11}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = (\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)})^{-1}(\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(i)})$$
$$\forall j \in \{\varkappa(i), \varkappa(i)+1, \dots, \varkappa(i+1)-1\} \quad \forall i \in J_{K-2}, \tag{4.12}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = (\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{\varkappa(i+1)})^{-1}(\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{j+1})$$

$$\forall j \in \{\varkappa(i+1), \varkappa(i)+1, \ldots, \varkappa(i+2)-2\} \quad \forall i \in J_{K-2}, \tag{4.13}$$

$$\mathfrak{p}_{K-1,j} = (\xi_{\varkappa(K)} - \xi_{\varkappa(K-1)})^{-1}(\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(K-1)})$$
$$\forall j \in \{\varkappa(K-1), \varkappa(K-1)+1, \ldots, \varkappa(K)-1\}; \tag{4.14}$$

числа $\mathfrak{p}_{r,s}$, $r \in J'_{K-1}$, $s \in J'_{M-1}$, *не фигурирующие в этих формулах, равны нулю.*

Доказательство. С учетом соотношений (3.14)–(3.20) представления (4.5)–(4.10) могут быть записаны в форме

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = (\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)})^{-1} \sum_{j=\varkappa(0)-1}^{\varkappa(1)-2} (\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{j+1}) \cdot \omega_j(t)$$
$$\text{при} \quad t \in [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi^{\,+}_{\varkappa(1)}]\!], \tag{4.15}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \backslash [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi^{\,+}_{\varkappa(1)}]\!], \tag{4.16}$$

$$\widehat{\omega}_{i}(t) = (\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)})^{-1} \sum_{j=\varkappa(i)}^{\varkappa(i+1)-1} (\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(i)}) \cdot \omega_j(t)$$
$$\text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi_{\varkappa(i+1)}]\!], \tag{4.17}$$

$$\widehat{\omega}_{i}(t) = (\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{\varkappa(i+1)})^{-1} \sum_{j=\varkappa(i+1)}^{\varkappa(i+2)-2} (\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{j+1}) \cdot \omega_j(t)$$
$$\text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i+1)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \tag{4.18}$$

$$\widehat{\omega}_{i}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \backslash [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \quad i \in J_{K-2}, \tag{4.19}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = (\xi_{\varkappa(K)} - \xi_{\varkappa(K-1)})^{-1} \sum_{j=\varkappa(K-1)}^{\varkappa(K)-1} (\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(K-1)}) \cdot \omega_j(t)$$
$$\text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!], \tag{4.20}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \backslash [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!]. \tag{4.21}$$

Из (4.15)–(4.21) получаем соотношения (4.11)–(4.14). ■

Рассмотрим функционалы

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\widehat{x}_{i+1}) \quad \forall u \in C[\![a,b]\!], \quad i \in J'_{K-1}. \tag{4.22}$$

Лемма 4. *Система функционалов (4.22) биортогональна системе сплайнов* $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in {J'}_{K-1}}$*:*

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, \widehat{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j} \qquad \forall i,j \in {J'}_{K-1}. \tag{4.23}$$

Доказательство соотношений (4.23) легко получается из формул (3.7)–(3.13) применением к ним функционалов (4.22). ■

Лемма 5. *Справедливы равенства*

$$\widehat{g}^{(i)} = g^{(\varkappa(i+1)-1)} \text{ при } i \in {J'}_{K-1}. \tag{4.24}$$

Доказательство. Используя соотношения (3.2), (3.4)–(3.6) и (4.22), для $u \in C[\![a,b]\!]$ и $i \in {J'}_{K-1}$ имеем

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle = u(\widehat{x}_{i+1}) = u(\xi_{\varkappa(i+1)}) = \langle g^{\varkappa(i+1)-1}, u \rangle;$$

последнее эквивалентно равенствам (4.24). ■

Следствие 1. *Верно равенство*

$$\widehat{g}^{(\varkappa^{-1}(j+1)-1)} = g^{(j)} \qquad \forall j+1 \in J^*. \tag{4.25}$$

Доказательство. В (4.24) положим $j = \varkappa(i+1) - 1$. Поскольку $i \in {J'}_{K-1}$, то $i+1 \in J_K$, и согласно определению J^* (см. формулу (3.5)) имеем $\varkappa(i+1) \in J^*$. Итак, $j+1 \in J^*$ и $i = \varkappa^{-1}(j+1) - 1$. Подставляя полученное i в (4.24), находим (4.25). ■

18.5. Матрица сужения и ее свойства

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j})$ $i \in {J'}_{K-1}, j \in {J'}_{M-1}$, называемую матрицей сужения; здесь, как и прежде,

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \langle g^{(j)}, \widehat{\omega}_i \rangle. \tag{5.1}$$

Введем упорядоченные (по возрастанию) подмножества множества целых чисел, обозначая

$$J^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, \dots, \varkappa(1) - 2\}, \tag{5.2}$$

$$J^1(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varkappa(r), \dots, \varkappa(r+1) - 1\} \qquad \forall r \in J_{K-1}, \tag{5.3}$$

$$J^2(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varkappa(r+1), \dots, \varkappa(r+2) - 2\} \qquad \forall r \in J_{K-2}, \tag{5.4}$$

$$J(r) \overset{\text{def}}{=} J^1(r) \bigcup J^2(r) \quad \forall r \in J_{K-2}, \qquad J(K-1) \overset{\text{def}}{=} J^1(K-1). \tag{5.5}$$

Условимся считать множество пустым, если первое из выписанных чисел больше последнего.

Замечание 3. *Согласно только что введенным соглашениям равенство* $J^2(r) = \emptyset$ *эквивалентно соотношению* $\varkappa(r+2) - \varkappa(r+1) < 2$. *Поскольку* $\varkappa(s)$ — *возрастающая целочисленная функция (так что* $\varkappa(r+2) - \varkappa(r+1) \geq 1$*), то множество* $J^2(r)$ *может быть пустым лишь в том случае, когда* $\varkappa(r+2) = \varkappa(r+1) + 1$. *Множество* $J^1(r)$ *не может оказаться пустым, ибо неравенство* $\varkappa(r+1) - \varkappa(r) < 1$ *для функции* $\varkappa(s)$ *невозможно. Легко видеть, что множества* J^0 *и* $J(K-1)$ *также не могут быть пустыми.*

Теорема 1. *Справедливы калибровочные соотношения*

$$\widehat{\omega}_r(t) = \sum_{q \in J'_{M-1}} \mathfrak{p}_{r,q} \omega_q(t) \quad \forall t \in [\![a, b]\!], \qquad r \in J'_{K-1}, \tag{5.6}$$

где

$$\mathfrak{p}_{-1,q} = \frac{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{q+1}}{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)}} \qquad q \in J^0, \tag{5.7}$$

$$\mathfrak{p}_{r,q} = \frac{\xi_{q+1} - \xi_{\varkappa(r)}}{\xi_{\varkappa(r+1)} - \xi_{\varkappa(r)}} \qquad q \in J^1(r), \quad r \in J_{K-1}, \tag{5.8}$$

$$\mathfrak{p}_{r,q} = \frac{\xi_{\varkappa(r+2)} - \xi_{q+1}}{\xi_{\varkappa(r+2)} - \xi_{\varkappa(r+1)}} \qquad q \in J^2(r), \quad r \in J_{K-2}; \tag{5.9}$$

а не упомянутые в формулах (5.7)–(5.9) элементы $\mathfrak{p}_{r,q}$ *матрицы* $\mathfrak{P}$ *равны нулю.*

Доказательство. Заметим, что соотношения (5.8) и (5.9) непротиворечивы, ибо при заданном r множества $J^1(r)$ и $J^2(r)$ не пересекаются. Нетрудно видеть, что формулы (5.6)–(5.9) являются другой формой записи установленных ранее формул (4.15)–(4.21). ∎

Следствие 2. *Калибровочные соотношения (5.6)–(5.9) для* $\forall t \in [\![a, b]\!]$ *могут быть представлены в виде*

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = \sum_{j \in J^0} \mathfrak{p}_{-1,j} \omega_j(t), \tag{5.10}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = \sum_{j \in J(i)} \mathfrak{p}_{i,j} \omega_j(t) \qquad i \in J'_{K-2}, \tag{5.11}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = \sum_{j \in J^1(K-1)} \mathfrak{p}_{K-1,j} \omega_j(t) \quad \forall t \in [\![a, b]\!], \tag{5.12}$$

а также в виде

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = \sum_{j\in J^0} \frac{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{j+1}}{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)}}\omega_j(t), \tag{5.13}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = \sum_{j\in J^1(i)} \frac{\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(i)}}{\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)}}\omega_j(t) + \sum_{j\in J^2(i)} \frac{\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{j+1}}{\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{\varkappa(i+1)}}\omega_j(t),$$

$$i \in J_{K-2}, \tag{5.14}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = \sum_{j\in J^1(K-1)} \frac{\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(K-1)}}{\xi_{\varkappa(K)} - \xi_{\varkappa(K-1)}}\omega_j(t) \quad \forall t \in [\![a, b]\!]. \tag{5.15}$$

Доказательство. Формулы (5.10)–(5.15) очевидным образом следуют из теоремы 1 (они эквивалентны соотношениям (5.6)–(5.9)). ■

Следствие 3. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{i,\varkappa(i+1)-1} = 1 \qquad \forall i \in J'_{K-1}. \tag{5.16}$$

Если при фиксированном $i \in J_{K-2}$

$$\varkappa(i+1) = \varkappa(i) + 1, \quad \varkappa(i+2) = \varkappa(i+1) + 1, \tag{5.17}$$

то (кроме единичного элемента, указанного формулой (5.16)) все остальные элементы i-й строки равны нулю, так что

$$\mathfrak{p}_{i,s} = \delta_{\varkappa(i+1)-1,\, s} \qquad \forall s \in J'_{M-1}. \tag{5.18}$$

Если выполнено условие $\varkappa(1) = 1$, то формула (5.18) верна для $i = -1$, а если $\varkappa(K-1) = M-1$, то упомянутая формула верна при $i = K-1$.

Доказательство. При $i = -1$ формулу (5.16) получаем из (5.7), полагая там $q = -1$. Если $i \in J_{K-1}$, то (5.16) вытекает из (5.8) при $q = \varkappa(i+1) - 1$.

Если $i \in J_{K-2}$, то при условии (5.17) множество индексов $J^1(i)$ состоит из одного элемента, $J^1(i) = \{\varkappa(i)\}$, а множество индексов $J^2(i)$ пусто. В соответствии с теоремой 1 это означает, что элементы $\mathfrak{p}_{i,q}$ матрицы $\mathfrak{P}$ для $q \neq \varkappa(i+1) - 1$ равны нулю, и следовательно, верно соотношение (5.18).

Если $\varkappa(1) = 1$, то $J^0 = \{-1\}$, и поэтому (согласно теореме 1) верна формула (5.18) при $i = -1$, а если $\varkappa(K-1) = M-1$, то $J^1(K-1) = \{M-1\}$, откуда (снова используем теорему 1) выводим формулу (5.18) при $i = K-1$.
■

Следствие 4. *Если $j+1 \in J^*$, то в j-м столбце матрицы $\mathfrak{P}$ на i-м месте, $i = \varkappa^{-1}(j+1) - 1$, находится единица; остальные элементы этого столбца — нули, так что*

$$\mathfrak{p}_{r,j} = \delta_{r,\varkappa^{-1}(j+1)-1} \qquad \forall r \in J'_{K-1}. \tag{5.19}$$

Доказательство. Для доказательства используем формулы (5.1) для чисел $p_{r,j}$, формулу (4.25) и свойство (4.23). При любом $r \in J'_{K-1}$ имеем

$$p_{r,j} = \langle g^{(j)}, \widehat{\omega}_r \rangle = \langle \widehat{g}^{(\varkappa^{-1}(j+1)-1)}, \widehat{\omega}_r \rangle \qquad \forall\, r \in J'_{K-1},$$

откуда вытекает соотношение (5.19). ∎

18.6. Дискретное сплайн-всплесковое разложение

Построения, относящиеся к ранее предложенному (см. [82]) всплесковому разложению для функций, заданных на континууме, годятся и в рассматриваемом здесь случае дискретных числовых потоков. Для удобства чтения данного раздела и учитывая, что эти построения занимают весьма мало места, приведем их здесь.

Обозначим $\mathbb{S}(\widehat{X})$ линейное пространство, являющееся линейной оболочкой функций $\widehat{\omega}_j$,

$$\mathbb{S}(\widehat{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{\widehat{\omega}_i(t) \mid \forall t \in [\![a,b]\!] \quad \forall i \in J'_{K-1}\}.$$

Пространство $\mathbb{S}(\widehat{X})$ называется *пространством дискретных сплайнов первой степени на сетке* $\widehat{X}$.

Поскольку $\mathbb{S}(\widehat{X}) \subset C[\![a,b]\!]$, то можно рассмотреть оператор P проектирования пространства $C[\![a,b]\!]$ на подпространство $\mathbb{S}(\widehat{X})$:

$$Pu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in J'_{K-1}} \langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle\, \widehat{\omega}_i \quad \forall u \in C[\![a,b]\!]; \tag{6.1}$$

пусть $Q = I - P$, где I — оператор, тождественный в $C[\![a,b]\!]$.

Итак, в соответствии с (6.1) получаем прямое разложение

$$C[\![a,b]\!] = \mathbb{S}(\widehat{X}) \dotplus \mathbb{W}, \tag{6.2}$$

где $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} QC[\![a,b]\!]$. Пространство $\mathbb{S}(\widehat{X})$ называется *основным пространством*, а $\mathbb{W}$ — *пространством всплесков (вэйвлетов)* в *всплесковом разложении* (6.2) пространства $C[\![a,b]\!]$.

Пусть $u \in C[\![a,b]\!]$; используя соотношение (6.2), получаем два представления элемента u

$$u = \sum_{s \in J'_{M-1}} c_s \omega_s, \tag{6.3}$$

а также

$$u = \widehat{u} + w, \tag{6.4}$$

где

$$\widehat{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in J'_{K-1}} a_i \widehat{\omega}_i, \qquad w \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in J'_{M-1}} b_j \omega_j,$$

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle \quad \forall i \in J'_{K-1}, \quad b_j,\ c_s\ \in \mathbb{R}^1 \quad \forall j, s \in J'_{M-1}. \tag{6.5}$$

Очевидно, соотношение (6.4) представляет всплесковое разложение элемента $u \in C[\![a,b]\!]$, где $\widehat{u} \in \mathbb{S}(\widehat{X})$, а $w \in \mathbb{W}$.

Из (6.3)–(6.4) имеем

$$\sum_{j \in J'_{M-1}} c_j \omega_j = \sum_{i \in J'_{K-1}} a_i \sum_{j \in J'_{M-1}} \mathfrak{p}_{i,j} \omega_j + \sum_{j \in J'_{M-1}} b_j \omega_j,$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j\}_{j \in J'_{M-1}}$ получаем *формулы реконструкции*

$$c_j = \sum_{i \in J'_{K-1}} a_i \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \qquad \forall j \in J'_{M-1}. \tag{6.6}$$

Используя представление (6.5), перепишем формулы (6.6) в виде

$$c_j = \sum_{i \in J'_{K-1}} \langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \qquad \forall j \in J'_{M-1}$$

и подставим сюда u из соотношения (6.3):

$$c_j = \sum_{i \in J'_{K-1}} \sum_{s \in J'_{M-1}} c_s \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s \rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \qquad \forall j \in J'_{M-1};$$

отсюда

$$b_j = c_j - \sum_{i \in J'_{K-1}} \sum_{s \in J'_{M-1}} c_s \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s \rangle \mathfrak{p}_{i,j} \qquad \forall j \in J'_{M-1}. \tag{6.7}$$

Подставляя (6.3) в (6.5), имеем

$$a_i = \langle \widehat{g}^{(i)}, \sum_{s \in J'_{M-1}} c_s \omega_s \rangle \qquad \forall i \in J'_{K-1},$$

так что

$$a_i = \sum_{s \in J'_{M-1}} c_s \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s \rangle \qquad \forall i \in J'_{K-1}. \tag{6.8}$$

Формулы (6.7) и (6.8) называются *формулами декомпозиции.*

18.7. Матрица продолжения

Полагая

$$\mathfrak{q}_{s,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widehat{g}^{(s)}, \omega_j \rangle, \tag{7.1}$$

рассмотрим матрицу $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{s,j})_{s \in {J'}_{K-1}, j \in {J'}_{M-1}}$; эту матрицу называем *матрицей продолжения.*

Лемма 6. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{s,j} = \delta_{\varkappa(s+1)-1,\, j} \qquad \textit{при} \quad s \in {J'}_{K-1},\ j \in {J'}_{M-1}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Из формул (3.3), (4.22), (4.24), (6.8) и (7.1), имеем

$$\mathfrak{q}_{s,j} = \langle \widehat{g}^{(s)}, \omega_j \rangle = \langle g^{\varkappa(s+1)-1}, \omega_j \rangle = \delta_{\varkappa(s+1)-1,\, j}.$$

формула (7.2) доказана. ■

Следствие 5. *Справедливы следующие утверждения:*

1) нулевыми являются те столбцы $\mathfrak{q}^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{sj})_{s \in {J'}_{K-1}}$ матрицы $\mathfrak{Q}$, номер j которых удовлетворяет условию $j+1 \notin J^*$;

2) остальные столбцы, т.е. столбцы, номер j которых удовлетворяет условию $j+1 \in J^*$, содержат единицу на месте s_0, где $\varkappa(s_0+1) = j+1$; остальные элементы j-го столбца равны нулю.

Доказательство. Из формулы (7.2) получаем $\mathfrak{q}_{s,j} = \delta_{\varkappa(s+1),\, j+1}$, а поскольку $\varkappa(s+1) \in J^*$ и $j+1 \notin J^*$, то $\varkappa(s+1) \neq j+1$, и значит $\mathfrak{q}_{s,j} = 0$; первый пункт следствия доказан.

Если $j+1 \in J^*$, то существует единственное s_0 такое, что $s_0+1 \in J_K$ и $j+1 = \varkappa(s_0+1)$; из формулы (7.2) имеем $\mathfrak{q}_{s_0,j} = 1$, а для $s \neq s_0$ из той же формулы получаем $\mathfrak{q}_{s_0,j} = 0$. Теперь доказан и второй пункт следствия. ■

Следствие 6. *Матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T$:*

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I, \tag{7.3}$$

где I — единичная матрица размеров $K+1 \times K+1$.

Доказательство. Для элемента $[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{i,j}$ матрицы $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T$ имеем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{i,j} = \sum_{s \in {J'}_{M-1}} \mathfrak{q}_{is}\mathfrak{p}_{js}, \quad i,j \in {J'}_{K-1}.$$

Согласно формуле (7.2) отсюда получаем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{i,j} = \sum_{s \in {J'}_{M-1}} \delta_{\varkappa(i+1)-1,s}\mathfrak{p}_{js} = \mathfrak{p}_{j,\varkappa(i+1)-1}. \tag{7.4}$$

Используя представление (4.22) и формулу (4.23), находим

$$\mathfrak{p}_{j,\varkappa(i+1)-1} = \langle g^{\varkappa(i+1)-1}, \widehat{\omega}_j\rangle = \langle \widehat{g}^{(i)}, \widehat{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j}, \quad i,j \in {J'}_{K-1}. \tag{7.5}$$

Из (7.4) и (7.5) выводим (7.3). ∎

18.8. Потоки. Формулы декомпозиции

Введем в рассмотрение три вектора

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{K-1}), \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{M-1}),'$$
$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots, c_{M-1}),$$

называя их основным, всплесковым и исходным числовыми потоками. Линейные пространства этих потоков обозначим $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ соответственно.

Соотношениями

$$\widetilde{u} = \sum_{i \in {J'}_{K-1}} a_i \widetilde{\omega}_i, \quad w = \sum_{i \in {J'}_{N-1}} b_i \omega_i, \quad u = \sum_{i \in {J'}_{N-1}} c_i \omega_i \tag{8.1}$$

устанавливаются линейные изоморфизмы только что введенных пространств и пространств $\mathbb{S}(\widehat{X})$, $\mathbb{W}$, $C[\![a,b]\!]$:

$$\mathcal{A} \sim \mathbb{S}(\widehat{X}), \qquad \mathcal{B} \sim \mathbb{W}, \qquad \mathcal{C} \sim C[\![a,b]\!]. \tag{8.2}$$

Ввиду этих изоморфизмов имеем

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B}.$$

Используя введенные векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, перепишем формулы (6.6)–(6.8) в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}^T \mathbf{a}, \tag{8.3}$$

$$\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}. \tag{8.4}$$

Лемма 7. *Элементы $[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j}$, $i,j \in {J'}_{M-1}$, матричного произведения $\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$ определяются формулами*

$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j} = 0 \qquad \text{при } i \in {J'}_{M-1},\ j+1 \in J_M \backslash J^*, \tag{8.5}$$

$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j} = \mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(j+1)-1,i} \qquad \text{при } i \in {J'}_{M-1},\ j+1 \in J^*. \tag{8.6}$$

Доказательство. При $j+1 \in J^*$ согласно формуле (7.2) имеем

$$\mathfrak{q}_{s,j} = \delta_{\varkappa(s+1)-1,j} = \delta_{\varkappa(s+1),j+1} = \delta_{s+1,\varkappa^{-1}(j+1)} = \delta_{s,\varkappa^{-1}(j+1)-1} \tag{8.7}$$

$$\forall s \in {J'}_{K-1} \quad \forall j+1 \in J^*, \tag{8.8}$$

а при $j+1 \in J_M \backslash J^*$ получаем

$$\mathfrak{q}_{s,j} = \delta_{\varkappa(s+1),j+1} = 0 \qquad \forall s \in {J'}_{K-1} \quad \forall j+1 \in J_M \backslash J^*. \tag{8.9}$$

При $j+1 \in J^*$ из (8.7)–(8.8) следует, что

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = \sum_{s \in {J'}_{K-1}} \mathfrak{p}_{s,i}\mathfrak{q}_{s,j} = \mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(j+1)-1,i} \qquad \text{при } i \in {J'}_{M-1}.$$

Если $j+1 \in J_M \backslash J^*$, то из (8.9) имеем

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = 0 \qquad \text{при } i \in {J'}_{M-1},\ j+1 \in J_M \backslash J^*.$$

Итак, формулы (8.5)–(8.6) доказаны. ■

Следствие 7. *Если* $i+1,\ j+1 \in J^*$, *то*

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = \delta_{i,j}. \tag{8.10}$$

Доказательство. Учитывая, что $j+1 \in J^*$, положим

$$r = \varkappa^{-1}(j+1) - 1. \tag{8.11}$$

Ясно, что $r \in {J'}_{K-1}$ и $j = \varkappa(r+1) - 1$. Согласно формуле (8.6) имеем

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = \mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(j+1)-1,i} = \mathfrak{p}_{r,i} \qquad \text{при } i \in {J'}_{M-1},\ j+1 \in J^*. \tag{8.12}$$

Поскольку по условию $i+1 \in J^*$, то выполнены условия следствия 4 (с $j = i$), и поэтому согласно формуле (5.19) получаем

$$\mathfrak{p}_{r,i} = \delta_{r,\varkappa^{-1}(i+1)-1}. \tag{8.13}$$

Учитывая (8.13) в соотношении (8.12), находим

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = \delta_{r,\varkappa^{-1}(i+1)-1}. \tag{8.14}$$

Подставляя r из (8.11) в соотношение (8.14), после элементарных преобразований находим

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = \delta_{\varkappa^{-1}(j+1)-1,\varkappa^{-1}(i+1)-1} = \delta_{i,j}.$$

Этим доказана формула (8.10). ■

Теорема 2. *Для формул декомпозиции справедливы соотношения*

$$a_i = c_{\varkappa(i+1)-1} \qquad \forall i \in {J'}_{K-1}, \tag{8.15}$$

$$b_q = 0 \qquad \forall q+1 \in J^*, \tag{8.16}$$

$$b_q = c_q - \sum_{j \in {J'}_{K-1}} \langle g^{(q)}, \widehat{\omega}_j \rangle c_{\varkappa(j+1)-1} \quad \forall q+1 \in J_M \backslash J^*. \tag{8.17}$$

Доказательство. Из (6.8) и (7.1)–(7.2) при $i \in {J'}_{K-1}$ имеем

$$a_i = \sum_{j \in {J'}_{M-1}} \mathfrak{q}_{ij} c_j = \sum_{j \in {J'}_{M-1}} \delta_{\varkappa(i+1)-1} c_j = c_{\varkappa(i+1)-1}.$$

Итак, формула (8.15) установлена.

Из второго соотношения (8.4) имеем

$$b_q = c_q - [\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \mathbf{c}]_q \qquad \forall q \in {J'}_{M-1},$$

так что

$$b_q = c_q - \sum_{s \in {J'}_{M-1}} [\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{q,s}\, c_s.$$

Учитывая формулы (8.5),

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{q,s} = 0 \qquad \text{при } s+1 \notin J^* \quad \forall q \in {J'}_{M-1},$$

получаем

$$b_q = c_q - \sum_{s+1 \in J^*} [\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{q,s}\, c_s.$$

Из (8.6) следует, что

$$b_q = c_q - \sum_{s+1 \in J^*} \mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(s+1)-1,q}\, c_s. \tag{8.18}$$

Из (5.19) при $q+1 \in J^*$ получаем

$$\mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(s+1)-1,q} = \delta_{s,q},$$

откуда находим

$$b_q = c_q - \sum_{s+1 \in J^*} \delta_{s,q}\, c_s = 0, \quad q+1 \in J^*.$$

Этим доказана формула (8.16).

Теперь обратимся к случаю $q+1 \in J_M \backslash J^*$.

Используя биективное соответствие $\varkappa : \quad J_K \longrightarrow J^*$ (см. (3.4)–(3.5)), в формуле (8.18) сделаем подстановку в индексе суммирования:

$$j = \varkappa^{-1}(s+1) - 1 \iff s = \varkappa(j+1) - 1;$$

ясно, что $j \in J'_{K-1}$. В результате получаем

$$b_q = c_q - \sum_{j \in J'_{K-1}} \mathfrak{p}_{j,\,q}\; c_{\varkappa(j+1)-1}.$$

Применяя формулу (5.1), выводим соотношение (8.17). ■

Теорема 3. *Для всплескового потока при $q+1 \in J_M \backslash J^*$ верны равенства*

$$b_q = c_q - (\widehat{x}_{s+1} - \widehat{x}_s)^{-1} \Big[(\widehat{x}_{s+1} - \xi_{q+1}) c_{\varkappa(s)-1} + (\xi_{q+1} - \widehat{x}_s) c_{\varkappa(s+1)-1} \Big], \quad (8.19)$$

где

$$\widehat{x}_s < \xi_{q+1} < \widehat{x}_{s+1}. \quad (8.20)$$

Доказательство. Заметим, что отличными от нуля слагаемыми в соотношении (8.17) являются разве лишь те, для которых $\langle g^{(q)}, \widehat{\omega}_j \rangle \neq 0$; в силу определения (3.2) последнее эквивалентно соотношению $\widehat{\omega}_j(\xi_{q+1}) \neq 0$.

Найдем $s \in J_K$ так, чтобы выполнялось неравенство (8.20); ввиду условия $q+1 \in J_M \backslash J^*$ такое s существует и единственно. Учитывая соотношение $\operatorname{supp} \widehat{\omega}_{\mathrm{j}} = [\![\widehat{x}_j^{\,+}, \widehat{x}_{j+2}^{\,-}]\!]$ (см. (3.26)), видим, что под знаком суммы в (8.17) имеется не более двух ненулевых слагаемых, а именно слагаемые, соответствующие значениям $j = s-1$ и $j = s$. Итак

$$b_q = c_q - \langle g^{(q)}, \widehat{\omega}_{s-1} \rangle c_{\varkappa(s)-1} - \langle g^{(q)}, \widehat{\omega}_s \rangle c_{\varkappa(s+1)-1}. \quad (8.21)$$

Для завершения доказательства в соотношении (8.21) осталось воспользоваться формулами (3.7)–(3.13). ■

Следствие 8. *Формуле (8.17) можно придать вид*

$$b_q = c_q - \mathfrak{p}_{s-1,q} c_{\varkappa(s)-1} - \mathfrak{p}_{s,q} c_{\varkappa(s+1)-1} \quad (8.22)$$

где s удовлетворяет соотношению (8.20).

Следствие 9. *Пространство всплесковых потоков $\mathcal{B}$ имеет вид*

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = (b_{-1}, b_0, \ldots, b_{M-1}) \ \forall b_{j-1} \in \mathbb{R}^1,$$

$$j \in J_M \backslash J^*; b_{\,i-1} = 0 \ \forall i \in J^* \}; \tag{8.23}$$

таким образом, пространство всплесковых потоков является линейной оболочкой ортонормированной системы (в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^{M+1}$ *со стандартным скалярным произведением)* $\mathbf{e}_j \stackrel{\text{def}}{=} ([\mathbf{e}_j]_{-1}, [\mathbf{e}_j]_0, \ldots, [\mathbf{e}_j]_{M-1})$*, где* $[\mathbf{e}_j]_i = \delta_{i,j}$*,* $i, j \in {J'}_{M-1}$*.*

Доказательство. Известно (см. [32]), что пространство всплесковых потоков совпадает с ядром оператора $\mathfrak{Q}$. Поскольку

$$\mathfrak{Q}\mathbf{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j \in {J'}_{M-1}} \mathfrak{q}_{ij}\, b_j = 0 \qquad \forall i \in {J'}_{K-1},$$

то пользуясь соотношением (7.2), имеем

$$\sum_{j \in {J'}_{M-1}} \delta_{\varkappa(i+1)-1,j}\, q_{ij}\, b_j = 0 \qquad \forall i \in {J'}_{K-1} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad b_{\varkappa(i+1)-1} = 0 \qquad \forall i \in {J'}_{K-1}.$$

Таким образом (см. также (8.16)), нулевыми оказываются следующие компоненты всплескового потока

$$b_{j-1} = 0 \qquad \forall j \in J^*.$$

Остальные компоненты — произвольные; они определяют пространство $\mathcal{B}$ всплесковых потоков в представлении (8.2). Формула (8.23) доказана.

18.9. Иллюстративный пример всплескового разложения

Здесь приведем иллюстративный пример.

Положим $M = 10$ и на сеточном отрезке $[\![a, b]\!]$, рассмотрим сетку

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_9 < \xi_{10} = b;$$

в качестве дискретного базиса (3.1) рассмотрим элементы $\{\omega_j(t)\}_{j \in {J'}_{M-1}}$ пространства $C[\![a, b]\!]$:

$$\omega_j(\xi_s) = \delta_{s,j+1}, \qquad s \in J_{10}, \tag{9.1}$$

а также линейные функционалы $g^{(i)}$, $i \in J'_9$, определяемые формулой

$$\langle g^{(i)}, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\xi_{i+1}) \qquad \forall u \in C[\![a, b]\!], \tag{9.2}$$

где
$$J_{10} = \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}, \qquad J'_9 = \{-1, 0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Рассмотрим новую сетку
$$\widehat{X}: \quad a = \widehat{x}_0 < \widehat{x}_1 < \ldots < \widehat{x}_8 = b, \tag{9.3}$$
где $\widehat{x}_i \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{\varkappa(i)}$, $i \in J_8$, а отображение $\varkappa(i)$ определяется соотношениями
$$\varkappa(0) = 0,\ \varkappa(1) =, \ldots, \varkappa(5) = 5,\ \varkappa(6) = 8,\ \varkappa(7) = 9,\ \varkappa(8) = 10.$$

Итак, рассматриваемом случае $K = 8$, а подмножество J^* множества J_{10}, получаемое по формуле (3.5), имеет вид
$$J^* = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\};$$
таким образом $J_{10} \backslash J^* = \{6, 7\}$.

Из формулы (5.2) получаем $J^0 = \{-1\}$, а из (5.3) имеем $J^1(s) = s$ при $s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $J^1(5) = \{5, 6, 7\}$, $J^1(6) = \{8\}$.

Применяя формулу (5.4), находим $J^2(s) = \emptyset$ при $s \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$, $J^2(4) = \{5, 6\}$, из второй формулы в (5.5) выводим $J^1(7) = \{9\}$.

Наконец, согласно первой формуле (5.5) находим $J(s) = \{s\}$ при $s \in \{0, 1, 2, 3\}$, $J(4) = \{4, 5, 6\}$, $J(5) = \{5, 6, 7\}$, $J(s) = \{s + 2\}$ при $s \in \{6, 7\}$.

Введем функции $\widehat{\omega}_j(t)$, $j \in J'_7$, согласно формулам (3.7)–(3.13) и рассмотрим векторы
$$\widehat{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\omega}_{-1}(t), \widehat{\omega}_0(t), \ldots, \widehat{\omega}_7(t))^T,$$
$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{-1}(t), \omega_0(t), \ldots, \omega_9(t))^T.$$

Благодаря соотношениям (9.1)–(9.3) из теоремы 1 (см. формулы (5.7)–(5.9)) следует, что калибровочные соотношения $\widehat{\omega}(t) = \mathfrak{P}\omega(t)$ определяются матрицей

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ -\widehat{1} \\ \widehat{0} \\ \widehat{1} \\ \widehat{2} \\ \widehat{3} \\ \widehat{4} \\ \widehat{5} \\ \widehat{6} \\ \widehat{7} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\xi_8-\xi_6}{\xi_8-\xi_5} & \frac{\xi_8-\xi_7}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_6-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & \frac{\xi_7-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

отсюда

$$\widehat{\omega}_i(t) = \omega_i(t) \quad \text{при } i \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}, \tag{9.4}$$

$$\widehat{\omega}_4(t) = \omega_4(t) + \frac{\xi_8 - \xi_6}{\xi_8 - \xi_5} \cdot \omega_5(t) + \frac{\xi_7 - \xi_6}{\xi_8 - \xi_5} \cdot \omega_6(t), \tag{9.5}$$

$$\widehat{\omega}_5(t) = \frac{\xi_6 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5} \cdot \omega_5(t) + \frac{\xi_7 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5} \cdot \omega_6(t) + \omega_7(t), \tag{9.6}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = \omega_{i+2}(t) \quad \text{при } i \in \{6, 7\}. \tag{9.7}$$

Итак, в рассматриваемом случае калибровочные соотношения определяются формулами (9.4)–(9.7).

Проиллюстрируем следствие 3 на рассматриваемом примере. Легко видеть, что условия (5.17) выполнены при $i \in \{0, 1, 2, 3, 6\}$, и справедливы соотношения (5.18) при $s \in J'_9$. Поскольку $\varkappa(1) = 1$, то формула (5.18) справедлива при $i = -1$, так что $p_{-1,s} = \delta_{-1,s}$ при $s \in J'_9$. Поскольку $K = 8$, то $\varkappa(K-1) = \varkappa(7) = 9$, так что выполнено условие $\varkappa(\,-1) = M - 1$, и поэтому формула (5.18) справедлива при $i = K - 1 = 7$; таким образом, $p_{7,s} = \delta_{9,s}$ для $s \in J'_9$.

Еще проще иллюстрируется следствие 4. Условие $j + 1 \in J^*$ в рассматриваемом случае эквивалентно условию

$$j \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}.$$

В дальнейшем понадобится результат транспонирования матрицы $\mathfrak{P}$:

$$\mathfrak{P}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} -\widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{3} & \widehat{4} & \widehat{5} & \widehat{6} & \widehat{7} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_8-\xi_6}{\xi_8-\xi_5} & \frac{\xi_6-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_8-\xi_7}{\xi_8-\xi_5} & \frac{\xi_7-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Операция проектирования пространства $C[\![a, b]\!]$ исходных потоков $\mathbb{W}$ на пространство $\mathbb{S}(\widehat{X})$ основных потоков определяется способом продолжения биортогональной (к системе координатных сплайнов $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in J'_7}$) системы функционалов $\{g^{(j)}_{j\in J'_7}\}$ на пространство $C[\![a,b]\!]$ (см. (6.1), (6.8) и (8.2)). В конечном счете это проектирование означает применение матрицы продолжения $\mathfrak{Q}$ к исходному потоку $\mathbf{c}\in\mathfrak{C}$: $\mathbf{a}=\mathfrak{Q}\mathbf{c}$. Согласно формулам (7.2) в рассматриваемом случае матрица $\mathfrak{Q}$ имеет вид

$$
\mathfrak{Q} = \begin{array}{c} \\ -\widehat{1} \\ \widehat{0} \\ \widehat{1} \\ \widehat{2} \\ \widehat{3} \\ \widehat{4} \\ \widehat{5} \\ \widehat{6} \\ \widehat{7} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

так что

$$
\mathbf{a}_i = \mathbf{c}_i \qquad \text{при} \quad i\in\{-1,0,1,2,3,4\}, \tag{9.8}
$$

$$
\mathbf{a}_i = \mathbf{c}_{i+2} \qquad \text{при} \quad i\in\{7,8\}. \tag{9.9}
$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I$, где I — единичная квадратная матрица размеров 9×9. Из (8.5)–(8.6) следует, что квадратная матрица $\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$ размеров 11×11, имеет вид

$$
\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q} = \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_8-\xi_6}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 & \frac{\xi_6-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_8-\xi_7}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 & \frac{\xi_7-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Заметим, что компоненты всплескового потока $\mathbf{b}=\mathbf{c}-\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\mathbf{c}$ заведомо равны нулю, если их номера j таковы, что числа $j+1$ содержатся в множестве J^*.

Всплесковый поток $\mathbf{b}$ получается из исходного потока $\mathbf{c}$ по формулам (8.19). В рассматриваемом случае получаем

$$\mathbf{b}_j = 0 \qquad \text{при} \quad j \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}, \tag{9.10}$$

$$\mathbf{b}_5 = -\frac{\xi_8 - \xi_6}{\xi_8 - \xi_5}\mathbf{c}_4 + \mathbf{c}_5 - \frac{\xi_6 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5}\mathbf{c}_7, \tag{9.11}$$

$$\mathbf{b}_6 = -\frac{\xi_8 - \xi_7}{\xi_8 - \xi_5}\mathbf{c}_4 + \mathbf{c}_6 - \frac{\xi_7 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5}\mathbf{c}_7. \tag{9.12}$$

Формулы (9.8)–(9.12) являются формулами декомпозиции.

Используя формулу (8.3), получаем:

$$c_j = a_j + b_j \qquad \text{при} \quad j \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \tag{9.13}$$

$$c_5 = \frac{\xi_8 - \xi_6}{\xi_8 - \xi_5} \cdot a_4 + \frac{\xi_6 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5} \cdot a_5 + b_5, \tag{9.14}$$

$$c_6 = \frac{\xi_8 - \xi_7}{\xi_8 - \xi_5} \cdot a_4 + \frac{\xi_7 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5} \cdot a_5 + b_6, \tag{9.15}$$

$$c_j = a_{j-2} + b_j \qquad \text{при} \quad j \in \{7, 8, 9\}. \tag{9.16}$$

Итак, в рассматриваемом случае формулы реконструкции определяются соотношениями (9.13)–(9.16).

18.10. Континуальный образ дискретного всплескового разложения

Как было отмечено в начале раздела, в отличие от большинства подходов к всплесковым (вэйвлетным) разложениям (см. [46]) в данном разделе не использовались стандартные пространства функций (такие, как $C[a,b]$, L_2 и т.п.): во всем изложении фигурировали лишь конечномерные пространства потоков. Хотя использованный подход позволяет поддерживать алгоритмическую структуру на всех этапах построений, однако, иногда может возникнуть ситуация, в которой необходимо применить упомянутые выше бесконечномерные пространства функций (например, если исходный поток получается дискретизацией и оцифровкой непрерывного сигнала, поступающего от аудио- или видео-устройства аналогового типа). В этом случае введенные понятия и результаты сохраняются с поправкой на область определения для соответствующих функций; эту ситуацию будем называть *континуальным случаем.*

Рассмотрим континуальный случай несколько подробнее. Областью изменения аргумента t становится вся вещественная ось $\mathbb{R}^1$ или отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$, а множество $X \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\![a, b]\!]$ является сеткой на отрезке $[a, b]$. При этом переопределяются некоторые понятия и обозначения таким образом, что вводимые функции оказываются результатом расширения области определения рассмотренных ранее отображений, а обозначения этих отображений переносятся на упомянутые функции.

Дискретный базис (3.1) заменяем на систему кусочно-линейных непрерывных функций

$$\omega_{-1}(t) = (\xi_1 - t)(\xi_1 - \xi_0)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\xi_0, \xi_1), \tag{10.1}$$

$$\omega_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \backslash (\xi_0, \xi_1), \tag{10.2}$$

$$\omega_i(t) = (t - \xi_i)(\xi_{i+1} - \xi_i)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\xi_i, \xi_{i+1}), \tag{10.3}$$

$$\omega_i(t) = (\xi_{i+2} - t)(\xi_{i+2} - \xi_{i+1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\xi_{i+1}, \xi_{i+2}), \tag{10.4}$$

$$\omega_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \backslash (\xi_i, \xi_{i+2}), \quad i \in J_{M-2}, \tag{10.5}$$

$$\omega_{M-1}(t) = (t - \xi_{M-1})(\xi_M - \xi_{M-1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\xi_{M-1}, \xi_M), \tag{10.6}$$

$$\omega_{M-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \backslash (\xi_{M-1}, \xi_M). \tag{10.7}$$

Функции $\widehat{\omega}_j(t)$, определенные формулами (3.7) – (3.13), как функции дискретного аргумента $t \in [\![a, b]\!]$, переопределяются путем расширения их области определения до отрезка $[a, b]$:

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = (\widehat{x}_1 - t)(\widehat{x}_1 - \widehat{x}_0)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1), \tag{10.8}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \backslash (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1), \tag{10.9}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (t - \widehat{x}_i)(\widehat{x}_{i+1} - \widehat{x}_i)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+1}), \tag{10.10}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (\widehat{x}_{i+2} - t)(\widehat{x}_{i+2} - \widehat{x}_{i+1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\widehat{x}_{i+1}, \widehat{x}_{i+2}), \tag{10.11}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \backslash (\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+2}), \quad i \in J_{K-2}, \tag{10.12}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = (t - \widehat{x}_{K-1})(\widehat{x}_K - \widehat{x}_{K-1})^{-1}$$
$$\text{при} \quad t \in (\widehat{x}_{K-1}, \widehat{x}_K), \tag{10.13}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \backslash (\widehat{x}_{K-1}, \widehat{x}_K). \tag{10.14}$$

Заметим, что переход к расширенной области определения не отражается на формулировках лемм и теорем, фигурирующих в пунктах $1 - 8$.

Рассматривая ситуацию с упомянутой точки зрения, вспомним, что

$$\mathbb{S}(\widehat{X}) = \mathcal{L}\{\widehat{\omega}_i(t) \mid \forall t \in [\![a, b]\!] \quad \forall i \in J'_{K-1}\},$$

и введем обозначения

$$X \overset{\text{def}}{=} [\![a,b]\!], \qquad \mathbb{S}(X) \overset{\text{def}}{=} C[\![a,b]\!],$$

$$\widetilde{\mathbb{S}}(X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{\omega_j(t) \mid \forall t \in [a,b]\ \forall j \in J'_{M-1}\},$$

$$\widetilde{\mathbb{S}}(\widehat{X}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{\widehat{\omega}_i(t) \mid \forall t \in [a,b]\ \forall i \in J'_{K-1}\},$$

где функции $\omega_j(t)$ и $\widehat{\omega}_i(t)$ определяются соотношениями (10.1)–(10.7) и (10.8)–(10.14) соответственно.

Очевидны линейные изоморфизмы

$$\mathcal{C} \sim \widetilde{\mathbb{S}}(X) \sim \mathbb{S}(X), \qquad \mathcal{A} \sim \widetilde{\mathbb{S}}(\widehat{X}) \sim \mathbb{S}(\widehat{X}),$$

а также вложение

$$\widetilde{\mathbb{S}}(\widehat{X}) \subset \widetilde{\mathbb{S}}(X).$$

В соответствии с формулами (6.2)–(6.4) с учетом упомянутых изоморфизмов получаем всплесковое разложение в континуальном случае

$$\widetilde{\mathbb{S}}(X) = \widetilde{\mathbb{S}}(\widehat{X}) \dot{+} \widetilde{\mathbb{W}},$$

где

$$\widetilde{\mathbb{W}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{\omega_{j-1}(t) \mid \forall t \in [a,b]\ \forall j \in J_M \backslash J^*\}.$$

Ясно, что пространства $\mathcal{B}$, $\mathbb{W}$ и $\widetilde{\mathbb{W}}$ также линейно изоморфны: $\mathcal{B} \sim \mathbb{W} \sim \widetilde{\mathbb{W}}$.

18.11. Вычисление всплескового разложения

Вычисление всплескового разложения включает два этапа: первый этап — реализация формул декомпозиции, второй этап — реализация формул реконструкции.

Реализация формул декомпозиции содержит две задачи: отыскание основного потока и отыскание всплескового потока. Первая из этих задач, как правило, является более важной, чем вторая, поскольку в большинстве случаев именно основной поток дает представление о характере исходного потока.

При численной реализации всплескового разложения требуется для исходной сетки X построить вложенную сетку $\widehat{X}$, а это построение обычно определяется исходным потоком $\mathbf{c}$ (см. пункт 11) и может требовать значительные компьютерные ресурсы. Заметим, что используемый здесь алгоритм построения вложенной сетки в определенном смысле является оптимальным; недостаток этого алгоритма в том, что он представляет собой существенно последовательный процесс, хотя в реальных ситуациях обработка может проводиться как на однопроцессорной вычислительной системе (ОВС), так и на параллельной вычислительной системе (ПВС). Применение последовательного алгоритма (или параллельного алгоритма небольшой ширины) предпочтительнее в случае поступления исходного потока и его обработки в реальном масштабе времени: в этом случае весь поток еще не получен. Если же исходный поток уже получен, то его обработка на ПВС может оказаться весьма эффективной за счет разбиения потока на достаточно длинные фрагменты, количество которых равно числу параллельных вычислительных модулей; обработка каждой из таких частей проводится в последовательном режиме назначенным для этой части вычислительным модулем с последующим соединением этих частей в исходном порядке.

В дальнейшем считается, что рассматриваемая вычислительная система (ВС) является (однопроцессорной или параллельной) вычислительной системой дискретного действия, которая работает синхронно (по тактам). На такой ВС рассматривается дискретное время, единицей времени считается длина такта, так что принимаемые временем значения представляют собой отрезок натурального ряда, а любой рассматриваемый промежуток времени имеет целочисленную длину.

При реализации упомянутых алгоритмов приходится извлекать элемент из некоторого массива (т.е. присваивать его значения некоторой промежуточной переменной), погружать элемент в массив (т.е. присваивать значение промежуточной переменной элементу массива), а также делать определенные арифметические и логические операции.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbf{A}$ — массив, элементами A_i которого являются числа типа $f_{\mathbf{A}}$ (для простоты можно ограничиться числами одного типа: например, можно считать, что $f_{\mathbf{A}} = f$, где f означает тип $\mathbf{t}real$; конкретное представление типов $f_{\mathbf{A}}$ и f в ВС рассматривать не будем).

Предположим, что $\breve{T}_{\mathbf{A}}$ — время (т.е. длина отрезка времени: напомним, что время считается дискретным, единица времени равна длине такта ВС) извлечения i-го элемента A_i массива $\mathbf{A}$ в простую (вспомогательную) переменную; через $\widehat{T}_{\mathbf{A}}$ обозначим время, требуемое для погружения значения простой переменной в элемент A_i этого массива (считаем, что упомянутые времена не зависят от номера i рассматриваемого элемента, но, возможно, зависят от типа элементов массива и от его длины).

Для краткости в дальнейшем массивы, необходимые для хранения числовых потоков $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, и их элементы, будем обозначать теми символами, какими обозначаются потоки и их компоненты; то же соглашение относится к другим подобным объектам: X, $\widehat{X}$, J_s, J^* и т.п. Все рассматриваемые далее массивы считаются динамически расширяемыми (т.е. длина массива заранее не фиксируется, при добавлении элемента в массив длина его увеличивается на единицу).

Рассмотрим сначала формулы декомпозиции (8.15)–(8.16):

$$a_i = c_{\varkappa(i+1)-1} \qquad \forall i \in {J'}_{K-1}, \tag{11.1}$$

$$b_q = 0 \qquad \forall q+1 \in J^*, \tag{11.2}$$

а при $q+1 \in J_M \backslash J^*$ соотношения (8.19)–(8.20) можно перепишем в виде

$$b_q = c_q - (\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)})^{-1}\Big[(\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{q+1})c_{\varkappa(i)-1} +$$

$$+(\xi_{q+1} - \xi_{\varkappa(i)})c_{\varkappa(i+1)-1}\Big], \tag{11.3}$$

где

$$\varkappa(i) + 1 \le q + 1 \le \varkappa(i+1) - 1. \tag{11.4}$$

Можно представить ряд вариантов вычислений по формулам (12.11)–(12.14). Рассмотрим один из них, предполагая, что

$$a = 0, \quad b = M, \qquad \xi_i = i, \tag{11.5}$$

Таким образом

$$X \stackrel{\rm def}{=} \{a = 0, 1, 2, \ldots, M-1, M = b\}.$$

В этом случае $\widehat{x}_i = \varkappa(i)$, $i \in \{0, 1, \ldots, K\}$,

$$\widehat{X} = \{a = \varkappa(0), \varkappa(1), \varkappa(2), \ldots, \varkappa(K-1), \varkappa(K) = b\};$$

очевидно, что $X = J_M$ и $\widehat{X} = J^*$.

При условии (11.5) формулы (11.3)–(11.4) принимают вид

$$b_q = c_q - (\varkappa(i+1) - \varkappa(i))^{-1}\Big[(\varkappa(i+1) - q - 1)c_{\varkappa(i)-1} +$$

$$+((q + 1 - \varkappa(i))c_{\varkappa(i+1)-1}\Big], \tag{11.6}$$

где

$$\varkappa(i) + 1 \le q + 1 \le \varkappa(i+1) - 1. \tag{11.7}$$

Пусть реализация алгоритма отыскания $j = \varkappa(i)$ требует τ_i единиц времени; будем считать, что аддитивная операция требует t_a единиц времени, а мультипликативная — t_m единиц времени.

Для ясности изложения, как правило, не указываем имена промежуточных переменных, хотя их присутствие подразумевается (например, вместо присваивания $j := \varkappa(i+1)$ с дальнейшим использованием простой переменной j будем говорить "вычислим $\varkappa(i+1)$").

Реализацию декомпозиции представим в виде последовательности этапов. Рассмотрим $i+1$-й этап процесса декомпозиции.

Для обозначения состояния массивов на i-м этапе будем использовать i в качестве нижнего индекса.

Перед началом $i+1$-го этапа состояние массивов характеризуется следующим:

а/ вычислено значение $\varkappa(i)$ (и сохранено в некоторой простой переменной),

б/ массив X_i представляется в виде

$$X_i = \{0, 1, 2, \ldots, i-1, i\},$$

в/ массив $J_i^* = \widehat{X}_i$ имеет вид

$$\widehat{X}_i = \{a = \varkappa(0), \varkappa(1), \varkappa(2), \ldots, \varkappa(i)\},$$

г/ массив $\mathbf{a}$ заполнен вплоть до элемента $a_{\varkappa(i-1)}$, так что

$$\mathbf{a}_i = \{a_{\varkappa(0)}, a_{\varkappa(1)}, \ldots, a_{\varkappa(i-1)}\},$$

д/ массив $\mathbf{b}$ заполнен вплоть до элемента $b_{\varkappa(i-1)-1}$, т.е.

$$\mathbf{b}_i = \{b_{\varkappa(i_0+1)}, \ldots, b_{\varkappa(i_1)-1}\},$$

где $i_0 = \min\{i \mid i \in X \backslash \widehat{X}\}$, $i_1 = \max\{i \mid i \in X \backslash \widehat{X}\}$,

е/ вычислено значение $c_{\varkappa(i)-1}$.

Проведение $i+1$-го этапа состоит в следующих действиях.

1. Сначала вычислим $\varkappa(i+1)$; это потребует $\tau_i + t_a$ единиц времени.

2. Подключим к массиву $\widehat{X}_i$ следующий элемент $\varkappa(i+1)$; это потребует $\widehat{T}_{\widehat{X}}$ единиц времени, и упомянутый массив примет вид

$$\widehat{X}_{i+1} = \{a = \varkappa(0), \varkappa(1), \varkappa(2), \ldots, \varkappa(i), \varkappa(i+1)\}.$$

3. Вычисление и извлечение элемента $c_{\varkappa(i+1)-1}$ из массива $\mathbf{c}$ дополнительно потребует $t_a + \breve{T}_{\mathbf{c}}$ единиц времени.

4. Добавление элемента $a_i = c_{\varkappa(i+1)-1}$ в массив $\mathbf{a}$ потребует $\widehat{T}_{\mathbf{a}}$ единиц времени (напоминаем, что значение $\varkappa(i+1)-1$ уже вычислено и помещено в

простую переменную, имя которой в соответствии с принятым соглашением не упоминается).

5. По формулам (11.6)–(11.7) вычисляем b_q для каждого

$$q \in \{\varkappa(i), \varkappa(i)+1, \ldots, \varkappa(i+1)-2\} \tag{11.8}$$

(заметим, что множество индексов (11.8) не пусто, ибо $q+1 \in J_M \backslash J^*$). Поскольку элементы $\varkappa(i)$, $\varkappa(i+1)$ и $c_{\varkappa(i)-1}$ уже вычислены, то потребуется лишь извлечь элемент $c_{\varkappa(i+1)-1}$ из массива $\mathbf{c}$ и составить разность $\varkappa(i+1)-\varkappa(i)$; для этого потребуется $\breve{T}_{\mathbf{c}} + t_a$ единиц времени.

Для вычисления b_q положим $q = \varkappa(i)+j$, так что

$$b_{\varkappa(i)+j} = c_{\varkappa(i)+j} - (\varkappa(i+1)-\varkappa(i))^{-1}\Big[(\varkappa(i+1)-\varkappa(i)+j-1)c_{\varkappa(i)-1} + \\ +(j+1)c_{\varkappa(i+1)-1}\Big], \tag{11.9}$$

и создадим цикл по $j \in \{0, 1, \ldots, \varkappa(i+1)-\varkappa(i)-2\}$.

На j-й итерации этого цикла потребуется

5.1) извлечь $c_{\varkappa(i)+j}$ из массива $\mathbf{c}$, на что потребуется $t_a + \breve{T}_{\mathbf{c}}$ единиц времени,

5.2) в квадратных скобках выражения (11.9) выполнить 4 аддитивных операции и две мультипликативных (выполненные ранее операции естественно в этом подсчете не учитываются), на что потребуется $4t_a + 2t_m$ единиц времени,

5.3) вне квадратных скобок потребуется выполнить 1 мультипликативную и одну аддитивную операцию; на это потребуется $t_a + t_m$ единиц времени,

5.4) полученное значение $b_q = b_{\varkappa(i)+j}$ нужно погрузить в массив $\mathbf{b}$, для чего потребуется $\widehat{T}_{\mathbf{b}}$ единиц времени.

Итак, для реализации одной итерации цикла по j требуется $6t_a + 3t_m + \breve{T}_{\mathbf{c}}$ единиц времени, а таких итераций всего $\varkappa(i+1)-\varkappa(i)-1$ (очевидно, что итераций нет вовсе в случае, когда $\varkappa(i+1) = \varkappa(i)+1$). С учетом упомянутых выше подготовительных операций для отыскания всех требуемых значений b_q на $i+1$-м этапе потребуется $\breve{T}_{\mathbf{c}} + t_a + (6t_a + 3t_m + \breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{b}})(\varkappa(i+1)-\varkappa(i)-1)$ единиц времени.

Теперь видно, что для реализации $i+1$-го этапа в целом требуется

$$\tau_i + 3t_a + \widehat{T}_{\widehat{X}} + \breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{a}} + \breve{T}_{\mathbf{c}} + (6t_a + 3t_m + \breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{b}})(\varkappa(i+1)-\varkappa(i)-1) \tag{11.10}$$

единиц времени.

Теорема 14. *Время T^*, требуемое для реализации алгоритма декомпозиции на ОВС вычисляется по формуле*

$$T^* = \sum_{i=0}^{K-1} \tau_i + K(3t_a + \widehat{T}_{\widehat{X}} + 2\breve{T}_{\mathbf{c}} +$$

$$+\widehat{T}_{\mathbf{a}}) + (6t_a + 3t_m + \breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{b}})(M - K). \tag{11.11}$$

Доказательство. Число этапов равно числу K отрезков вида $[\![\varkappa(i), \varkappa(i+1)]\!]$. Используя формулу (11.10), видим, что время потраченное на реализацию всех этапов равно

$$T^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=0}^{K-1} \Big(\tau_i + 3t_a + \widehat{T}_{\widehat{X}} + 2\breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{a}} + (6t_a + 3t_m + \breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{b}})(\varkappa(i+1) - \varkappa(i) - 1)\Big).$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=0}^{K-1} (\varkappa(i+1) - \varkappa(i) - 1) = \varkappa(K) - \varkappa(0) - K = M - K$$

и потому справедливо соотношение (11.11). ∎

Дальнейшие оценки трудоемкости проводятся аналогично пункту 8 раздела 15; детальное их проведение предоставляется читателю.

19. СПЛАЙН-ВСПЛЕСКОВОЕ УКРУПНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ КУРАНТОВА ТИПА

Имеется большое число исследований всплескового (вэйвлетного) разложения числовых информационных потоков (см. [46, 51] и имеющуюся там библиографию). Большинство исследований относится к числовым потокам, ассоциированнным с равномерной сеткой на вещественной оси. Всплесковые разложения потоков, связанных с неравномерными сетками, исследованы меньше. В многомерном случае в работе [45] рассмотрены всплесковые разложения. Локальные аппроксимации на многообразии рассмотрены в [25,35], однако, всплесковые разложения потоков, связанных с неравномерной сеткой на многообразии исследованы недостаточно. При поступлении исходного плотного информационного потока важно выделить из него основную информацию (основной поток) и иметь возможность его локально уточнить с помощью всплескового (уточняющего) потока. Поскольку исходный поток естественным образом ассоциирован с некоторой сеткой, то появляется задача укрупнения сетки, с которой ассоциирован основной поток. Желательно рассматривать алгоритмы адаптивного локального укрупнения в зависимости от свойств исходного потока. В одномерном случае локальное укрупнение сетки не вызывает затруднений. В многомерном случае сеткой является совокупность вершин симплициального подразделения многообразия (см. [11,98]), и ее локальное укрупнение не всегда возможно (в том числе, и в двумерном случае на плоскости); таким образом, возникает задача найти варианты сеток и алгоритмов их локального укрупнения в многомерном случае.

В данном разделе эта задача решается в двумерном случае применительно к областям на плоскости. Здесь рассматриваются сплайн-всплесковые разложения цепочек вложенных пространств курантова типа на неравномерной сетке в двумерной области. Упомянутые пространства определяются аппроксимационными соотношениями, триангуляцией и генерирующей векторфункцией, а вложенность ассоциируется с укрупнением триангуляции. Здесь предлагается триангуляция, допускающая локальное укрупнение, и для соответствующего вложения пространств строится всплесковое разложение. Устанавливается, что предлагаемый алгоритм укрупнения обладает свойством инвариантности структуры и может быть использован для получения вэйвлет-пакета. Результаты проиллюстрированы на модельных примерах. Заметим, что полученные результаты могут быть распространены на двумерные цилиндр, тор и сферу.

19.1. Некоторые обозначения

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(\mathbf{t})$ класса $C^1(\Omega)$; здесь Ω — некоторая область на плоскости $\mathbb{R}^2$. Будем считать область Ω триангулированной; пусть $\mathcal{T}$ — соответствующий комплекс (возможно, криволинейный) с конечным или счетным множеством (открытых) треугольников $\mathbb{T}$. Множество вершин (нульмерный остов комплекса) обозначим X, а сами вершины $\mathbf{t}_j$, $j \in J_0$, где J_0 — некоторое (не более, чем счетное) множество индексов; множество X называется сеткой, а вершины $\mathbf{t}_j$ — узлами этой сетки. Множество вершин треугольника $\mathbb{T}$ обозначим $X_\mathbb{T}$, а множество индексов, соответствующих этим вершинам, обозначим $J_\mathbb{T}$; таким образом,

$$X_\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{t}_j \mid \mathbf{t}_j \in Cl(\mathbb{T}), j \in J_0\}, \qquad J_\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid \mathbf{t}_j \in Cl(\mathbb{T}), j \in J_0\},$$

где символ Cl означает замыкание множества в топологии пространства $\mathbb{R}^2$. Число треугольников, инцидентных каждому узлу, предполагается конечным.

Объединение $\mathfrak{S}_j$ замкнутых треугольников, инцидентных узлу $\mathbf{t}_j$, называется телом барицентрической звезды для вершины (узла) $\mathbf{t}_j$. Совокупность внутренних точек из $\mathfrak{S}_j$ обозначается $\mathfrak{S}'_j$. Некоторые узлы $\mathbf{t}_i$ могут оказаться на границе области Ω; в этом случае $\mathbf{t}_i$ лежит на границе своей барицентрической звезды. Пусть J — множество индексов j, для которых $\mathbf{t}_j \in \mathfrak{S}'_j$ — внутренняя точка своей барицентрической звезды, $\mathbf{t}_j \in \mathfrak{S}'_j$; таким образом, $J \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j \in J_0,\ \mathbf{t}_j \in \mathfrak{S}'_j\}$.

Матрицу с вектор-столбцами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\ldots$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ обозначим $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{f})$, а для квадратной матрицы $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ через $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначим ее определитель; i-ю компоненту вектора будем обозначать квадратными скобками с нижним индексом i, где $i = 1, 2, 3$; например, $[\mathbf{a}]_i$ означает i-ю компоненту вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, так что $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_3)^T$. Аналогичным образом, если B — матрица, то ее элементы будем иногда обозначать $[B]_{ij}$.

На каждом треугольнике $\mathbb{T}$ введем локальную нумерацию, используя числа $0, 1, 2$; соответствующее взаимно-однозначного отображение (биекцию) обозначим $\chi_{\mathbb{T}}$,

$$\chi_{\mathbb{T}}: \quad \{0,1,2\} \to J_{\mathbb{T}}.$$

Пусть

$$d_{\varphi,\mathbb{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(0)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(1)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(2)})),$$

$$d_{\varphi,\mathbb{T},i}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(0)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(1)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(2)}) \mid\mid '^{\,i}\ \varphi(\mathbf{t})),$$

где символ $\mid\mid '^{\,i}\ \varphi(\mathbf{t})$ означает замену i-го столбца $\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(i)})$ в рассматриваемом определителе на столбец $\varphi(\mathbf{t})$, $i = 0, 1, 2$.

Предположим, что выполнено условие

(A) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого треугольника $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$ справедливо неравенство $|d_{\varphi,\mathbb{T}}| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим функции $\omega_j(\mathbf{t})$, определяемые из соотношений

$$\sum_j \varphi(\mathbf{t}_j)\omega_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) \qquad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T},\ \mathbb{T} \subset \mathfrak{S}_j \tag{1.1}$$

$$\omega_j(\mathbf{t}) = 0 \qquad \text{при} \quad \mathbf{t} \notin \mathfrak{S}_j. \tag{1.2}$$

Благодаря соотношению (1.2) тождества (1.1) можно переписать в виде

$$\sum_{\mathbf{t}_j \in Cl(\mathbb{T})} \varphi(\mathbf{t}_j)\omega_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) \qquad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T}; \tag{1.3}$$

из предположения (A) следует, что функции $\omega_j(\mathbf{t})$ однозначно определены на всех треугольниках $\mathbb{T}$ подразделения $\mathcal{T}$. Вектор-функция $\varphi(t)$ называется *генератором* (генерирующей функцией) семейства функций $\{\omega_j\}$.

Из (1.3) получаем

$$\omega_{\chi_{\mathbb{T}}(i)}(\mathbf{t}) = d_{\varphi,\mathbb{T},i}(\mathbf{t})/d_{\varphi,\mathbb{T}} \qquad \mathbf{t} \in \mathbb{T} \quad \forall i \in \{0,1,2\},$$

так что используя соотношение (1.2), выводим

$$\omega_j(\mathbf{t}) = \begin{cases} d_{\varphi,\mathbb{T},\chi_{\mathbb{T}}^{-1}(j)}(\mathbf{t})/d_{\varphi,\mathbb{T}} & \text{при} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T} \subset \mathfrak{S}_j \\ 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T} \quad \text{для} \quad \mathbb{T} \cap \mathfrak{S}_j = \emptyset,\ \mathbb{T} \in \mathcal{T}. \end{cases} \tag{1.4}$$

19.2. Вспомогательные утверждения

Предположим, что векторы $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ линейно независимые, $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \in \mathbb{R}^2$. Обозначим $\mathcal{L}$ множество точек $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению

$$\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) = 0. \tag{2.1}$$

Очевидно, что $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \in \mathcal{L}$.

Лемма 1. *Если точка $\overline{\mathbf{t}}_0$ принадлежит $\mathcal{L}$, а $\overline{\mathcal{L}}$ — множество точек, удовлетворяющих уравнению*

$$\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) = 0, \tag{2.2}$$

то $\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ и предположения $\overline{\mathbf{t}}_0 \in \mathcal{L}$ с некоторыми коэффициентами $\alpha_j \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$\varphi(\overline{\mathbf{t}}_0) = \alpha_0 \varphi(\mathbf{t}_0) + \alpha_1 \varphi(\mathbf{t}_1).$$

Пусть $\mathbf{t}_* \in \mathcal{L}$; тогда

$$\det(\varphi(\mathbf{t}_*), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) = 0. \tag{2.3}$$

Подставляя точку $\mathbf{t}_*$ в левую часть уравнения (2.2), получаем

$$\det(\varphi(\mathbf{t}_*), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) =$$

$$= \det(\varphi(\mathbf{t}_*), \alpha_0 \varphi(\mathbf{t}_0) + \alpha_1 \varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_1)).$$

Последнее выражение ввиду свойств определителя и соотношения (2.3) равно нулю. Итак, $\mathbf{t}_* \in \overline{\mathcal{L}}$. ∎

Следствие 1. *Если точки $\overline{\mathbf{t}}_0, \overline{\mathbf{t}}_1$ принадлежат $\mathcal{L}$, а $\overline{\mathcal{L}}$ — множество точек, удовлетворяющих уравнению*

$$\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_0), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_1)) = 0,$$

то $\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{L}}$; если $\varphi(\overline{t}_0)$ и $\varphi(\overline{t}_1)$ линейно независимы, то $\mathcal{L}$ и $\overline{\mathcal{L}}$ совпадают.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Пусть $\mathbf{t}_* \in \mathcal{L}$; заменим в определителе $\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_0), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_1))$ вектор-столбцы $\varphi(\overline{\mathbf{t}}_s)$ суммами $\alpha_{0s}\varphi(\mathbf{t}_0) + \alpha_{1s}\varphi(\mathbf{t}_1)$, $s = 0, 1$, а затем отбросим слагаемые, в которых определители имеют одинаковые столбцы. В результате придем к сумме слагаемых, в каждом из которых (с точностью до порядка столбцов) присутствует равный нулю определитель $\det(\varphi(\mathbf{t}_*), \varphi(\mathbf{t}_j), \varphi(\mathbf{t}_1))$. Последнее утверждение леммы очевидно. ∎

Введем обозначения

$$\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)), \tag{2.4}$$

$$B_\delta(\mathbf{t}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{t} \mid ||\mathbf{t} - \mathbf{t}_0||_{\mathbb{R}^2} < \delta\}; \tag{2.5}$$

в случае, когда положение центра круга значения не имеет, для него используется символ B_δ без указания его центра.

Пусть
$$\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} ([\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2, -[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1)^T. \tag{2.6}$$

В дальнейшем символ D_i означает первую частную производную по i-й координате $[\mathbf{t}]_i$ переменной $\mathbf{t}$, а символ $\nabla_{\mathbf{t}}$ означает градиент, $\nabla_{\mathbf{t}} \stackrel{\text{def}}{=} (D_1, D_2)$.

Лемма 2. *Если $\mathbf{t}, \mathbf{t}_1 \in B_\delta(\mathbf{t}_0) \subset \Omega$, то при $\delta \to 0$ справедлива формула*

$$\nabla_{\mathbf{t}} \psi(\mathbf{t}_0) = -\,\mathbf{g} \cdot \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)) + \widetilde{\mathbf{o}}(\delta), \tag{2.7}$$

где через $\widetilde{\mathbf{o}}(\tau)$ обозначаются двухкомпонентная вектор-функции со свойством
$$\lim_{\tau \to 0} ||\widetilde{\mathbf{o}}(\tau)||_{\mathbb{R}^2}/\tau = 0.$$

Доказательство. Дифференцированием функции $\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1)$ (см. (2.4) — (2.5)) по переменной $[\mathbf{t}]_1$ получаем

$$D_1\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) = \det(D_1\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) =$$
$$= \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0),$$
$$\varphi(\mathbf{t}_0) + D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\Big), \tag{2.8}$$

где $\mathbf{o}(1)$ и $\mathbf{o}(\delta)$ означают трехкомпонентные вектор-функции, для которых $\lim_{\delta\to 0} ||\mathbf{o}(1)||_{\mathbb{R}^3} = 0$ и $\lim_{\delta\to 0} ||\mathbf{o}(\delta)||_{\mathbb{R}^3}/\delta = 0$. Используя элементарные преобразования столбцов (не меняющие значение определителя), из (2.8) найдем

$$D_1\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) = \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0),$$
$$D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\Big) =$$
$$= \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0),$$
$$-\mathbf{o}(1)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\Big).$$

Отсюда получаем
$$D_1\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) =$$
$$= \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2\Big) + o(\delta) =$$
$$= [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big) + o(\delta),$$

так что

$$D_1\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = -[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2\det\Big(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big)+o(\delta). \qquad (2.9)$$

Аналогичным образом имеем

$$D_2\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = \det\Big(D_2\varphi(\mathbf{t}_0)+\mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0),$$

$$\varphi(\mathbf{t}_0)+D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_1+\mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2+\mathbf{o}(\delta)\Big),$$

и дальше с помощью элементарных преобразований столбцов определителя, выводим

$$D_2\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0)+\mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0),$$

$$\mathrm{D}_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_1-\mathbf{o}(1)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2+\mathbf{o}(\delta)\Big).$$

Отсюда находим

$$D_2\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = [\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_1\det\Big(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big)+o(\delta). \qquad (2.10)$$

Благодаря обозначению (2.6), формулы (2.9) и (2.10) можно записать в виде

$$D_1\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = [\mathbf{g}]_1\det\Big(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big)+o(\delta),$$

$$D_2\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = [\mathbf{g}]_2\det\Big(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big)+o(\delta);$$

таким образом, формула (2.7) доказана. ■

Предположим, что выполнено условие

(C_ε) существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что

$$|\det(\varphi(\mathbf{t}), D_1\varphi(\mathbf{t}), D_2\varphi(\mathbf{t}))| \geq \varepsilon \qquad \forall\mathbf{t}\in Cl(\Omega).$$

Лемма 3. *Если $\varphi\in C^1(Cl(\Omega))$ и $\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in B_\delta\bigcap\Omega$, то при $\delta\to 0$ справедлива формула*

$$\det(\varphi(\mathbf{t}_0),\varphi(\mathbf{t}_1),\varphi(\mathbf{t}_2)) = \det(\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_2-\mathbf{t}_0)\times$$

$$\times\det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0))+o(\delta^2), \qquad (2.11)$$

где B_δ — любой шар радиуса $\delta>0$, имеющий непустое пересечение с областью Ω. Если $\varphi\in C^S(Cl(\Omega))$, $S>1$, $Cl(\Omega)$ — компакт, и выполнено условие

(C_ε), то каково бы ни было число $c > 0$, существует $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ такое, что при любых векторах $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in B_\delta \bigcap \Omega$, удовлетворяющих неравенству

$$|\det(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0)| \geq c\delta^2, \tag{2.12}$$

верно соотношение

$$|\det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_2))| \geq \varepsilon/2.$$

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$\varphi(\mathbf{t}_i) = \varphi(\mathbf{t}_0) + \sum_{j=1}^{2} D_j\varphi(x_0)[\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_0]_j + \mathbf{o}(\delta), \quad i = 1, 2,$$

так что находим

$$\det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_2)) =$$
$$= \det(\varphi(\mathbf{t}_0),\ D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta),$$
$$D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) = \det(\varphi(\mathbf{t}_0),$$
$$D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1,\ D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta))+$$
$$+ \det(\varphi(\mathbf{t}_0),\ D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2,\ D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1+$$
$$+D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) + o(\delta^2).$$

Вынося множитель второго столбца за знак соответствующего определителя и проводя элементарные преобразования, последовательно выводим

$$\det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_2), \varphi(\mathbf{t}_2)) =$$
$$= [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta))+$$
$$+[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1+$$
$$+D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) + o(\delta^2) =$$
$$= [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2)+$$
$$+[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1) + o(\delta^2) =$$
$$= [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0))+$$
$$+[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)) + o(\delta^2) =$$
$$= \det(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0) \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)) + o(\delta^2).$$

Формула (2.11) установлена. Второе утверждение получается, если учесть равномерную малость остатка в упомянутой формуле. Лемма доказана. ■

Следствие 2. *Если выполнены условия леммы 3 и* $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in B_\delta \bigcap \Omega$, $\mathbf{t}' \neq \mathbf{t}''$, *то* $\varphi(\mathbf{t}')$ *и* $\varphi(\mathbf{t}'')$ *— линейно независимые векторы.*

Доказательство вытекает из (2.11). ■

Лемма 4. *Если* $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ *— компакт, выполнено условие* (C_ε), *а множество* $\mathcal{L}$ *задается уравнением (2.1), то каково бы ни было число* $c > 0$, *существует* $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ *такое, что при любых векторах* $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in B_\delta \bigcap \Omega$, *удовлетворяющих неравенству*

$$||\mathbf{g}|| \geq c\delta, \tag{2.13}$$

множество $\mathcal{L} \bigcap B_\delta \bigcap \Omega$ *представляет собой простую кривую класса* C^S.

Доказательство сводится к применению леммы 2 и теоремы о неявно заданной функции. ■

Пусть T — прямолинейный треугольник с вершинами $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$. Радиусы вписанного и описанного кругов для треугольника T обозначим $r_{_T}$ и $R_{_T}$ соответственно.

Введем условие

(D_η) существует константа $\eta > 0$ такая, что $r_{_T}/R_{_T} \geq \eta$.

Замечание 1. *Две стороны треугольника* T, *инцидентные одной вершине, назовем соседними. Условие* (D_η) *эквивалентно условию: углы между соседними сторонами треугольника* T *лежат в интервале* $(\epsilon_\eta, \pi - \epsilon_\eta)$, *где* $\epsilon_\eta \in (0, \pi/2)$. *Если выполнено условие* (D_η), *то при некотором числе* $c > 0$ *справедливы неравенства (2.12) и (2.13).*

19.3. Непрерывность функций курантова типа

Теорема 1. *Если* $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ *— компакт, и выполнено условие* (C_ε), *то каково бы ни было* $\eta > 0$, *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$ *такое, что для любой прямолинейной триангуляции* $\mathcal{T}$, *все треугольники* T *которой удовлетворяют условию* (D_η), *существует криволинейная триангуляция* $\mathfrak{T}$ *с теми же вершинами, криволинейные треугольники* $\mathbb{T}$ *которой определяются кривыми класса* C^S, *задаваемыми уравнениями вида (2.1).*

Доказательство легко получается применением лемм 1 — 4. ■

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 выполнено условие* (A); *на криволинейной триангуляции* $\mathfrak{T}$ *функции* ω_j *определены и непрерывны в области* $Cl(\Omega)$.

Доказательство. Для доказательства заметим, что согласно лемме 3 условие (A) выполнено, и потому функции ω_j определены однозначно. Используя формулы (1.4), видим, что функция ω_j обращается в нуль на границе своего носителя. Применяя аппроксимационные тождества (1.1), отсюда выводим непрерывность функций ω_j на сторонах треугольников. В остальных точках области Ω непрерывность вытекает из непрерывности вектор-функции $\varphi(\mathbf{t})$ и из формул (1.4). ∎

19.4. Укрупнение триангуляции. Калибровочные соотношения

Дальше будем считать, что выполнены предположения предыдущего пункта. Из условия (C_ε) следует, что система функций $[\varphi]_0$, $[\varphi]_1$, $[\varphi]_2$ линейно независимая на любом треугольнике $\mathbb{T}$ подразделения $\mathcal{T}$; благодаря этому система функций $\{\omega_j\}_{j\in J}$ также является линейно независимой системой.

Рассмотрим систему функционалов $\{g_i\}_{i\in J}$, заданную на пространстве $C(\Omega)$ формулами

$$\langle g_i, u\rangle = u(\mathbf{t}_i) \qquad \forall i\in J \quad \forall u\in C(\Omega). \tag{4.1}$$

Поскольку носителем функции ω_j служит тело барицентрической звезды $\mathfrak{S}_j$, то ввиду непрерывности ω_j на области Ω ее значения на границе множества $\mathfrak{S}_j$ равны нулю. Внутри этого множества лежит узел $\mathbf{t}_j$; остальные узлы сетки X лежат на границе или вне носителя функции ω_j. Ввиду этого

$$\langle g_i, \omega_j\rangle = 0 \qquad i\neq j \qquad \forall i,j\in J. \tag{4.2}$$

Используя свойство (4.2) в тождестве (1.3), записанном для $\mathbf{t}=\mathbf{t}_j$, имеем

$$\langle g_j, \omega_j\rangle = 1 \qquad \forall j\in J. \tag{4.3}$$

Соотношения (4.2) — (4.3) показывают, что формулы (4.1) задают продолжение на $C(\Omega)$ системы функционалов, биортогональной системе функций $\{\omega_j\}_{j\in J}$.

Рассмотрим триангуляцию $\widetilde{\mathcal{T}}$ области Ω, которая является укрупнением подразделения $\mathcal{T}$.[1] Будем считать, что здесь справедливы предположения предыдущего пункта для исходной триангуляции; учитывая теорему 1, а также используя лемму 1 и следствие из нее, построим триангуляцию $\widetilde{\mathcal{T}}$ таким образом, чтобы стороны треугольников подразделения $\widetilde{\mathcal{T}}$ определялись уравнениями вида (2.1).

[1] Укрупнением $\widetilde{\mathcal{T}}$ триангуляции $\mathcal{T}$ называем такую триангуляцию, измельчением которой является $\mathcal{T}$ (понятие измельчения триангуляции известно, см. [54], с. 107).

Для подразделения $\widetilde{\mathfrak{T}}$ рассмотрим построения, аналогичные тем, которые были сделаны для подразделения $\mathfrak{T}$; для удобства читателя повторим эти построения.

Нульмерный остов (множество вершин) триангуляции $\widetilde{\mathfrak{T}}$ обозначим $\widetilde{X}$, а сами вершины — символами $\widetilde{\mathbf{t}}_j$, $j \in \widetilde{J}$, где $\widetilde{J}$ — некоторое множество индексов; множество $\widetilde{X}$ называется сеткой для нового подразделения $\widetilde{\mathfrak{T}}$, а вершины $\widetilde{\mathbf{t}}_j$ — узлами этой сетки. Телом барицентрической звезды $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$ вершины (узла) $\widetilde{\mathbf{t}}_j$ является объединение замыканий треугольников, инцидентных этому узлу,

$$\widetilde{\mathfrak{S}}_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\widetilde{\mathbf{t}}_j \in Cl(\widetilde{\mathbb{T}})} Cl(\widetilde{\mathbb{T}}).$$

Пусть множество индексов, соответствующих вершинам треугольника $\widetilde{\mathbb{T}}$, обозначено $\widetilde{J}_{\mathbb{T}}$,

$$\widetilde{J}_{\widetilde{\mathbb{T}}} \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ j \mid \widetilde{\mathbf{t}}_j \in Cl(\widetilde{\mathbb{T}}), j \in \widetilde{J} \Big\}.$$

На каждом треугольнике $\widetilde{\mathbb{T}}$, как и прежде, вводится локальная нумерация числами $0, 1, 2$; обозначим соответствующую биекцию $\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}$,

$$\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}} : \quad \{0, 1, 2\} \to \widetilde{J}_{\widetilde{\mathbb{T}}}.$$

Положим

$$\widetilde{d}_{\varphi, \widetilde{\mathbb{T}}} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(0)}), \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(1)}), \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(2)})),$$

$$\widetilde{d}_{\varphi, \widetilde{\mathbb{T}}, i}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(0)}), \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(1)}), \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(2)}) \mid\mid {'}^{\,i}\, \varphi(\mathbf{t})),$$

где символ $\mid\mid {'}^{\,i}\, \varphi(\mathbf{t})$, как и прежде, означает замену i-го столбца $\varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(i)})$ в последнем определителе на столбец $\varphi(\mathbf{t})$, $i = 0, 1, 2$.

Рассмотрим функции $\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t})$, определяемые из соотношений

$$\sum_{\widetilde{\mathbf{t}}_j \in Cl(\widetilde{\mathbb{T}})} \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_j)\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) \qquad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \widetilde{\mathbb{T}}, \;\; \widetilde{\mathbb{T}} \subset \widetilde{\mathfrak{S}}_j,$$

$$\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = 0 \qquad \text{при} \quad \mathbf{t} \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_j.$$

Из этих соотношений при сделанных предположениях функции $\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t})$ определяются однозначно:

$$\widetilde{\omega}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(i)}(\mathbf{t}) = \widetilde{d}_{\varphi, \widetilde{\mathbb{T}}, i}(\mathbf{t}) / \widetilde{d}_{\varphi, \widetilde{\mathbb{T}}} \qquad \mathbf{t} \in \widetilde{\mathbb{T}} \quad \forall i \in \{0, 1, 2\},$$

откуда легко выводим

$$\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = \widetilde{d}_{\varphi,\widetilde{\mathbb{T}},\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}^{-1}(j)}(\mathbf{t})/\widetilde{d}_{\varphi,\widetilde{\mathbb{T}}} \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \widetilde{\mathbb{T}} \subset \widetilde{\mathfrak{S}}_j,$$

$$\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \widetilde{\mathbb{T}} \quad \text{для} \quad \mathbb{T} \cap \widetilde{\mathfrak{S}}_j = \emptyset,\ \widetilde{\mathbb{T}} \in \widetilde{\mathfrak{T}}.$$

Ввиду упомянутых предположений функции $\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t})$ непрерывны в области Ω.

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in\widetilde{J}}$, заданную на пространстве $C(\Omega)$ формулами

$$\langle \widetilde{g}_i, u\rangle = u(\widetilde{\mathbf{t}}_i) \qquad \forall i \in \widetilde{J} \quad \forall u \in C(\Omega). \tag{4.4}$$

Аналогично формулам (4.2) — (4.3) имеем соотношения биортогональности

$$\langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j} \qquad \forall i,j \in \widetilde{J}.$$

Будем считать множества J и $\widetilde{J}$ упорядоченными; введем вектор-столбцы

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_j)_{j\in J}, \quad g \stackrel{\text{def}}{=} (g_i)_{i\in J}, \quad \widetilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_j)_{j\in\widetilde{J}}, \quad \widetilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{g}_i)_{i\in\widetilde{J}}$$

и рассмотрим матрицу $\mathfrak{P} = (\mathfrak{p}_{i,j})_{i\in\widetilde{J},j\in J}$ вида

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (g\widetilde{\omega}^T)^T, \qquad \mathfrak{p}_{i,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle, \qquad i \in \widetilde{J}, \quad j \in J. \tag{4.5}$$

Дальше понадобится следующее утверждение.

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 и при предположениях*

$$[\mathfrak{P}\omega]_j(\mathbf{t}) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{t} \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_j \quad \forall j \in \widetilde{J} \tag{4.6}$$

справедливо соотношение

$$\widetilde{\omega}(\mathbf{t}) \equiv \mathfrak{P}\omega(\mathbf{t}). \tag{4.7}$$

Доказательство. Покажем, что в исследуемом случае справедливы предположения (4.6). Для этого заметим, что j-й столбец ($j \in \widetilde{J}$) матрицы $g\widetilde{\omega}^T$ получается применением функционалов g_i, $i \in J$, к функции $\widetilde{\omega}_j$. Ввиду непрерывности функции $\widetilde{\omega}_j$ и в соответствии с определением (4.1) функционалов g_i, значения на $\widetilde{\omega}_j$ тех функционалов, которые соответствуют узлам $\mathbf{t}_i$, лежащим на границе или вне носителя $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$ функции $\widetilde{\omega}_j$, равны нулю. Таким образом, неравными нулю могут быть лишь значения на $\widetilde{\omega}_j$ тех функционалов g_i, которые соответствуют узлам $\mathbf{t}_i$, лежащим внутри барицентрической звезды $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$; функции ω_i, соответствующие только что упомянутым узлам (по построению триангуляции $\widetilde{\mathfrak{T}}$) непрерывны и имеют носители, содержащиеся в барицентрической звезде $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$. Итак, $\operatorname{supp} \sum_{i\in J} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j \rangle \omega_i \subset \widetilde{\mathfrak{S}}_j$; последнее означает, что выполнено условие (4.6). ∎

Учитывая непрерывность рассматриваемых функций в области Ω, видим, что установлено следующее утверждение.

Теорема 4. *В условиях теоремы 1 при $\mathbb{T} \in \mathfrak{T}$ для систем ω_j и $\widetilde{\omega}_i$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) \equiv \sum_{i\in J_{\mathbb{T}}} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j \rangle \omega_i(\mathbf{t}) \qquad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{T}.$$

19.5. Вложенность пространств и всплесковое разложение

Рассмотрим пространства $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}(\{\omega_i\}_{i\in J})$ и $\widetilde{\mathbb{S}} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}(\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in \widetilde{J}})$, где символ $\mathcal{L}$ означает линейную оболочку функций, заключенных в фигурные скобки, а символ Cl_p означает замыкание в топологии поточечной сходимости. Ввиду теоремы 4 верно соотношение $\widetilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{S} \subseteq C(\Omega)$. Пусть $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{g}\omega^T$ — матрица с элементами $\mathfrak{q}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle$, $i \in \widetilde{J}, j \in J$.

Теорема 5. *В условиях теоремы 1 матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T$.*

Доказательство. Транспонируем соотношение (4.7) и умножим его на одностолбцовую матрицу $\widetilde{g}$ слева; ввиду очевидного равенства $\widetilde{g}\widetilde{\omega}^T = I$ (где I — единичная матрица) получаем $I = \widetilde{g}\omega^T\, \mathfrak{P}^T$, что и требовалось. Теорема доказана. ∎

Определим линейную операцию проектирования $\mathcal{P}$ пространства $\mathbb{S}$ на $\widetilde{\mathbb{S}}$ равенством[2]

$$\mathcal{P}u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in \widetilde{J}} \langle \widetilde{g}_i, u \rangle\, \widetilde{\omega}_i \qquad \forall u \in \mathbb{S}, \tag{5.1}$$

и рассмотрим линейное пространство $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{I} - \mathcal{P})\,\mathbb{S}$, где $\mathcal{I}$ — тождественная операция. Очевидно, что пространство $\mathbb{S}$ может быть представлено в виде прямой суммы: $\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dotplus \mathbb{W}$. Эта формула дает искомое всплесковое разложение пространства $\mathbb{S}$; первое слагаемое в этом разложении называется *основным* пространством, а второе — *всплесковым* пространством.

Если $u \in \mathbb{S}$ и $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathbb{S}}$, то с некоторыми коэффициентами $c_j \in \mathbb{R}^1$, $j \in J$, и $\widetilde{c}_j \in \mathbb{R}^1$, $j \in \widetilde{J}$, верны представления $u = \sum_{j\in J} \omega_j c_j$ и $\widetilde{u} = \sum_{j\in \widetilde{J}} \widetilde{\omega}_j \widetilde{c}_j$;

[2] Фигурирующие дальше бесконечные суммы понимаются в топологии поточечной сходимости (легко видеть, что при фиксированном $\mathbf{t} \in \Omega$ каждая из этих сумм имеет конечное число ненулевых слагаемых).

вводя вектор-столбцы $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_j)_{j\in J}$ и $\widetilde{\mathbf{c}} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{c}_j)_{j\in \widetilde{J}}$ запишем эти соотношения в виде $u = \omega^T \mathbf{c}$, $\widetilde{u} = \widetilde{\omega}^T \widetilde{\mathbf{c}}$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Если элемент $u \in \mathbb{S}$ представлен в виде суммы $u = \widetilde{u} + w$, $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathbb{S}}$, $w \in \mathbb{W}$, то для векторов $\widetilde{\mathbf{c}}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$ таких, что $\widetilde{u} = \widetilde{\omega}^T \widetilde{\mathbf{c}}$, $u = \omega^T \mathbf{c}$, $w = \omega^T \mathbf{b}$, справедливы формулы декомпозиции*

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \tag{5.2}$$

и формулы реконструкции

$$\mathbf{c} = \mathfrak{P}^T \widetilde{\mathbf{c}} + \mathbf{b}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Из определения (5.1) для $u = \omega^T \mathbf{c}$ имеем

$$\widetilde{u} = \mathcal{P}u = \sum_{i\in\widetilde{J}} \widetilde{\omega}_i \sum_{j\in J} \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle c_j = \widetilde{\omega}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c},$$

откуда благодаря единственности разложения по базису $\widetilde{\omega}$ выводим первое из соотношений (5.2). Из (4.5) получаем $\mathfrak{P}^T = g\widetilde{\omega}^T$. Переписывая представление $u = \widetilde{u} + w$ в виде $\omega^T \mathbf{c} = \widetilde{\omega}^T \widetilde{\mathbf{c}} + \omega^T \mathbf{b}$ и умножая последнее соотношение слева на g, а затем используя определение матрицы $\mathfrak{Q}$, находим (5.3). Благодаря применению в формуле (5.3) только что установленного первого из соотношений (5.2), получаем второе соотношение в (5.2). Теорема доказана. ■

Матрица $\mathfrak{Q}$ называется *матрицей продолжения*, а матрица $\mathfrak{P}$ — *матрицей сужения*.

19.6. О матрицах всплескового разложения пространств аппроксимаций курантова типа

Рассмотрим сначала матрицу $\mathfrak{P}$, обозначая ее элементы $(\mathfrak{p}_{ji})$: согласно определению $\mathfrak{P}^T = g\widetilde{\omega}^T$, так что $\mathfrak{p}_{ji} = \langle g_i, \widetilde{\omega}_j \rangle$, $i \in J$, $j \in \widetilde{J}$.

Ввиду определения (4.4) с учетом расположения носителя функции $\widetilde{\omega}_j$ и принимая во внимание непрерывность этой функции, приходим к выводу, что в j-м столбце матрицы $\mathfrak{P}^T$ ненулевыми окажутся разве лишь те элементы p_{ji} с номерами $i \in J$ из рассматриваемого столбца, которым соответствуют узлы $\mathbf{t}_i$, являющиеся внутренними точками упомянутого носителя, т.е. внутренними точками тела звезды $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$: $\mathbf{t}_i \in \widetilde{\mathfrak{S}}'_j$. Итак,

$$\mathfrak{p}_{ji} = 0 \qquad \text{при} \quad \mathbf{t}_i \notin \widetilde{\mathfrak{S}}'_j. \tag{6.1}$$

$$[\mathfrak{P}\mathbf{c}]_j = \sum_{i\in J, \mathbf{t}_i\in\mathfrak{S}'_j} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j\rangle \mathbf{c}_i. \tag{6.2}$$

Обратимся теперь к матрице $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}_{j'k})_{j'\in\widetilde{J}, k\in J}$, где $\mathfrak{q}_{j'k} = \langle\widetilde{g}_{j'}, \omega_k\rangle$; очевидно, что в каждой строке этой матрицы имеется лишь одна единица, а остальные элементы — нули: в строке с номером $j'\in\widetilde{J}$ единица находится на том месте, номер k которого является номером удаляемой вершины $\mathbf{t}_k$ исходной триангуляции $\mathcal{T}$. Номерам вершин укрупненной триангуляции $\widetilde{\mathcal{T}}$ поставим в соответствие номера вершин исходной триангуляции $\mathcal{T}$ и это соответствие обозначим ϑ; итак,

$$\vartheta: \quad \widetilde{J}\to J, \qquad \widetilde{\mathbf{t}}_j = \mathbf{t}_{\,\vartheta(j)}. \tag{6.3}$$

В этих обозначениях имеем

$$\mathfrak{q}_{j'k} = \delta_{\vartheta(j'),k} \qquad j'\in\widetilde{J},\ k\in J. \tag{6.4}$$

Непосредственным вычислением покажем, что произведение $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T$ представляет собой единичную матрицу. Имеем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{j'j} = \sum_{k\in J}\mathfrak{q}_{j'k}\mathfrak{p}_{jk} = \sum_{k\in J}\delta_{\vartheta(j'),k}\mathfrak{p}_{jk} = \mathfrak{p}_{j\vartheta(j')}. \tag{6.5}$$

Ввиду соотношений (6.3) находим

$$\mathbf{t}_{\vartheta(j')}\in\widetilde{\mathfrak{S}}'_j \quad\Longleftrightarrow\quad j'=j,$$

так что из (6.5) благодаря соотношениям (4.1) и (4.5) получаем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{j'j} = \delta_{j',j};$$

последнее соответствует тому, что матрица $\mathfrak{Q}$ — левая обратная к матрице $\mathfrak{P}^T$ (см. теорему 5).

Теорема 7. *В условиях теоремы 1 формулы декомпозиции (5.2) могут быть записаны в виде*

$$\widetilde{c}_j = c_{\vartheta(j)} \quad \forall j\in\widetilde{J}, \tag{6.6}$$

$$b_i = c_i - \sum_{j\in\widetilde{J}, \mathbf{t}_i\in\widetilde{\mathfrak{S}}'_j}\langle g_i, \widetilde{\omega}_j\rangle c_{\vartheta(j)} \qquad \forall i\in J, \tag{6.7}$$

а формулам реконструкции (5.3) можно придать форму

$$c_i = \sum_{j\in\widetilde{J}, \mathbf{t}_i\in\widetilde{\mathfrak{S}}'_j}\langle g_i, \widetilde{\omega}_j\rangle\widetilde{c}_j + b_i \qquad \forall i\in J. \tag{6.8}$$

Доказательство. Соотношения (6.6) получаются применением свойства (6.4) к первой из формул (5.2).

Для второй формулы (5.2) с учетом соотношений (6.1) — (6.2) получаем

$$b_i = c_i - [\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}]_i = c_i - [\mathfrak{P}^T \widetilde{\mathbf{c}}]_i = c_i - \sum_{j \in \widetilde{J}, \mathbf{t}_i \in \widetilde{\mathfrak{S}}'_j} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j \rangle \widetilde{c}_j \quad \forall i \in J,$$

откуда учитывая (6.6), выводим (6.7). Формулы реконструкции (6.8) очевидным образом получаются из (6.7). ■

19.7. Триангуляция, допускающая локальное укрупнение

В дальнейших рассуждениях ограничиваемся прямолинейной триангуляцией и кусочно-линейной аппроксимацией Куранта, т.е. в качестве генерирующей функции берем $\varphi(\mathbf{t}) = (1, [\mathbf{t}]_1, [\mathbf{t}]_2)^T$.

Для определения подходящего варианта сплайн-всплескового разложения важно иметь возможность локально укрупнять триангуляцию (т.е. укрупнять ее лишь в некоторой подобласти $\Omega_0 \subset \Omega$, оставляя нетронутыми треугольники вне этой подобласти); при этом результирующая триангуляция области Ω должна оставаться правильной (т.е. любая вершина любого треугольника не должна лежать на стороне другого треугольника). Оказывается, не каждую триангуляцию можно локально укрупнять.

В этом пункте рассмотрена локально укрупняемая триангуляция, причем в области укрупнения укрупненная триангуляция снова может укрупняться; таким образом, предлагаемый алгоритм укрупнения обладает рекуррентными свойствами: укрупнение можно проводить многократно. Предлагаемый далее алгоритм применим не только к плоской области, но и к некоторым двумерным поверхностям: он годится для аппроксимаций курантова типа в случае цилиндрической поверхности, тора и сферы.

Сначала рассмотрим правильную триангуляцию плоскости $\{t \mid t = (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ (эта триангуляция может состоять из конечного или бесконечного числа треугольников). Нас интересуют локальные укрупнения исходной правильной триангуляции (т.е. объединения конечного числа треугольников), приводящие снова к правильной триангуляции.

Для описания триангуляции будем использовать таблицу инциденций, каждая строка которой описывает треугольник перечнем инцидентных ему вершин. Иногда рассматривается таблица инциденций, получающаяся объединением нескольких таблиц инциденций. Заметим, что порядок объединения таблиц не существен; не существен также порядок строк и порядок следования вершин в строках рассматриваемых таблиц.

Введем обозначения

$$\mathbb{Z}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(i,j) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(2i,2j) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbb{Z}^2_{\mathbf{1}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(2i+1,2j+1) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}, \qquad \widehat{\mathbb{Z}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}} \cup \mathbb{Z}^2_{\mathbf{1}}.$$

Пусть фиксированы числа $h' > 0, h'' > 0$. Обозначим $\mathbf{r}_{i,j}$ точки с координатами (ih', jh''), $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, и рассмотрим прямоугольники вида $\Pi_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \mid ih' \leq x \leq (i+2)h',\ jh'' \leq x \leq (j+2)h''\}$, где $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}$.

Пусть триангуляция $\mathcal{T}^*$, описывается трехстолбцовой таблицей (с бесконечным числом строк), получающейся объединением таблиц

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{r}_{i,j+1} \\ \mathbf{r}_{i+1,j+1} & \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{r}_{i,j+1} \end{matrix} \right\|$$

при $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$; здесь строка $\mathbf{r}_{i,j}\ \mathbf{r}_{i+1,j}\ \mathbf{r}_{i,j+1}$ означает, что рассматривается треугольник с вершинами $\mathbf{r}_{i,j}$, $\mathbf{r}_{i+1,j}$, $\mathbf{r}_{i,j+1}$, а строка $\mathbf{r}_{i+1,j+1}\ \mathbf{r}_{i+1,j}\ \mathbf{r}_{i,j+1}$ означает, что рассматривается треугольник у которого вершинами служат точки $\mathbf{r}_{i+1,j+1}$, $\mathbf{r}_{i+1,j}, \mathbf{r}_{i,j+1}$. Легко видеть, что триангуляция $\mathcal{T}^*$ не допускает локального укрупнения с сохранением правильности; дальше предлагается триангуляция, свободная от этого недостатка.

Пусть $\mathbb{X}^*$ — некоторое (конечное или бесконечное) множество пар четных целочисленных индексов: $\mathbb{X}^* \subset \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}$; рассмотрим замкнутую область

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{X}^*} \Pi_{i,j}$$

(в частности, если $\mathbb{X}^* = \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}$, то Ω совпадает со всей плоскостью $\mathbb{R}^2$).

Через $\mathbb{X}$ обозначим множество индексов $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}} \cup \mathbb{Z}^2_{\mathbf{1}}$ таких, что точки $\mathbf{r}_{i,j} = (ih', jh'')$ лежат в Ω; только что упомянутые точки $\mathbf{r}_{i,j}$ будем называть узлами исходной сетки, они являются вершинами определяемой ниже исходной триангуляции.

Узел $\mathbf{r}_{2i_0,2j_0}$ называется внутренним узлом для Ω, если он является внутренней точкой в Ω (таким образом, в Ω содержатся прямоугольники $\Pi_{i,j}$ при $i \in \{2i_0, 2i_0-2\}$, $j \in \{2j_0, 2j_0-2\}$; здесь же заметим, что вводимое понятие относится только к узлам с четными индексами). Множество пар $(i,j) \in \mathbb{X}^*$, для которых $\mathbf{r}_{i,j}$ — внутренний узел, обозначим $\mathbb{X}_0$. Очевидно, что

$$\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}^* \subset \mathbb{X} \subset \widehat{\mathbb{Z}}^2.$$

Рассмотрим триангуляцию, которая получается объединением таблиц

$$\left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \end{array} \right\| \qquad \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}. \tag{7.1}$$

Укрупнение триангуляции будем производить объединением двух соседних (т.е. имеющих общую сторону) треугольников. Полученные в результате треугольники будем называть *укрупненными* треугольниками.

Не нарушая общности, в дальнейшем предполагаем, что $\mathbf{r}_{0,0}$ — внутренний узел в Ω, т.е. $(0,0) \in \mathbb{X}_0$. Рассмотрим такое укрупнение, при котором вершину $\mathbf{r}_{0,0}$ окружают лишь укрупненные треугольники. Для этого заменим перечисленные ниже соседние треугольники на треугольник, получающийся их объединением. Эквивалентное преобразование таблицы инциденций состоит в том, что из нее исключаются строки, соответствующие объединяемым треугольникам и добавляются строки, соответствующие результатам такого объединения — укрупненным треугольникам. Как было отмечено выше, расположение строк в таблице инциденций не существенно, и потому строки могут быть добавлены между любыми строками упомянутой таблицы. Таким образом, достаточно перечислить выбрасываемые строки таблицы и указать вставляемые в нее строки. Однако, для наглядности преобразования таблицы инциденций будем задавать указанием двух строк заменяемых треугольников (в левой от стрелки части формулы) и указанием строки укрупненного треугольника (в правой части формулы).

Итак, укрупнение зададим следующим преобразованием таблицы инциденций.

$$\left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,1} \\ \mathbf{r}_{-2,2} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,1} \end{array} \right\| \quad \longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,2} \end{array} \right\|, \tag{7.2}$$

$$\left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{-2,2} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-1,1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-1,1} \end{array} \right\| \quad \longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-2,2} \end{array} \right\|, \tag{7.3}$$

$$\left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{1,1} \\ \mathbf{r}_{2,2} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{1,1} \end{array} \right\| \quad \longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{2,2} \end{array} \right\|, \tag{7.4}$$

$$\left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{2,2} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,1} \end{array} \right\| \quad \longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,2} \end{array} \right\|, \tag{7.5}$$

$$\left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,-1} \\ \mathbf{r}_{2,-2} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,-1} \end{array} \right\| \quad \longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{lll} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,-2} \end{array} \right\|, \tag{7.6}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{2,-2} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{1,-1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{1,-1} \end{matrix} \right\| \quad \longrightarrow \quad \left\| \, \mathbf{r}_{0,0} \quad \mathbf{r}_{0,-2} \quad \mathbf{r}_{2,-2} \, \right\|, \tag{7.7}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-1,-1} \\ \mathbf{r}_{-2,-2} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-1,-1} \end{matrix} \right\| \quad \longrightarrow \quad \left\| \, \mathbf{r}_{0,0} \quad \mathbf{r}_{-2,0} \quad \mathbf{r}_{-2,-2} \, \right\|, \tag{7.8}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{-2,-2} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,-1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,-1} \end{matrix} \right\| \quad \longrightarrow \quad \left\| \, \mathbf{r}_{0,0} \quad \mathbf{r}_{-2,0} \quad \mathbf{r}_{-2,-2} \, \right\|. \tag{7.9}$$

Легко видеть, что в результате получается правильная триангуляция.

Исходную триангуляцию (7.1) обозначим $\mathcal{T}$, описанную только что укрупненную (согласно формулам (7.2) — (7.9)) триангуляцию обозначим $\mathcal{T}_{\mathbf{0}}$, а переход от исходной триангуляции к укрупненной обозначим $[\mathcal{T} \longmapsto \mathcal{T}_{\mathbf{0}}]$.

19.8. Структура барицентрических звезд исходной триангуляции

Для построения аппроксимации Куранта важна структура барицентрических звезд, соответствующих вершинам рассматриваемой триангуляции.

Для исходной триангуляции имеется два типа барицентрических звезд: к первому типу отнесем барицентрические звезды, содержащие четыре треугольника, а ко второму типу отнесем барицентрические звезды с восемью треугольниками.

8.1. Барицентрические звезды с четырьмя треугольниками соответствуют вершинам $\mathbf{r}_{i,j}$ при $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{1}}$; каждой такой вершине соответствует барицентрическая звезда, описываемая следующей таблицей инциденций

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \end{matrix} \right\|.$$

8.2. Вершинам $\mathbf{r}_{i,j}$ при $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}$ соответствуют барицентрические звезды с таблицей инциденций вида

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{-2+i,j} & \mathbf{r}_{-1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{-1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,-1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,-2+j} & \mathbf{r}_{1+i,-1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,-2+j} & \mathbf{r}_{-1+i,-1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{-2+i,2+j} & \mathbf{r}_{-1+i,-1+j} \end{matrix} \right\|.$$

19.9. Структура барицентрических звезд локально укрупненной триангуляции

При локальном укрупнении триангуляции на «границе укрупнения» появляются дополнительно новые типы барицентрических звеэд, содержащих по шесть и по восемь треугольников, а внутри зоны укрупнения типы барицентрических звезд сохраняются.

9.0. Барицентрическая звезда точки $\mathbf{r}_{0,0}$ состоит из восьми треугольников; она определяются следующей таблицей.

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,-2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{2,-2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-2,-2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,-2} \end{Vmatrix}.$$

9.1. Барицентрические звезды из шести треугольников определяются следующими таблицами.

Таблицы для барицентрических звезд вершин $\mathbf{r}_{0,\pm 2}$ имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,\pm 4} & \mathbf{r}_{-1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{-2,\pm 2} & \mathbf{r}_{-1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{2,\pm 2} & \mathbf{r}_{1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,\pm 4} & \mathbf{r}_{1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,\pm 2} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,\pm 2} \end{Vmatrix};$$

здесь знаки $\pm$ означают, что во всех случаях нужно брать либо знак $+$, либо во всех случаях брать знак $-$ (аналогичное соглашение используется также в дальнейшем).

Таблицы для барицентрических звезд вершин $\mathbf{r}_{\pm 2,0}$ получаются перестановкой индексов каждой вершины в таблицах для барицентрических звезд вершин $\mathbf{r}_{0,\pm 2}$:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 4,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 4,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,-2} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,2} \end{Vmatrix}.$$

9.2. Барицентрические звезды из восьми треугольников определяются следующими таблицами.

Барицентрические звезды вершины $\mathbf{r}_{\pm 2,2}$ имеют вид

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{\pm 1,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 2,4} & \mathbf{r}_{\pm 1,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 2,4} & \mathbf{r}_{\pm 3,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 4,2} & \mathbf{r}_{\pm 3,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 4,2} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} \end{matrix} \right\|.$$

Барицентрические звезды вершин $\mathbf{r}_{\pm 2,-2}$ получаются сменой знака второго индекса у точек предыдущей таблицы

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{\pm 1,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 2,-4} & \mathbf{r}_{\pm 1,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 2,-4} & \mathbf{r}_{\pm 3,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 4,-2} & \mathbf{r}_{\pm 3,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 4,-2} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} \end{matrix} \right\|.$$

19.10. Калибровочные соотношения для функций Куранта

Как известно, функцией Куранта, ассоциированной с выделенной вершиной правильной триангуляции, называется непрерывная функция, равная единице в упомянутой вершине, линейная на каждом треугольнике барицентрической звезды этой вершины и равная нулю вне указанной барицентрической звезды. Система функций Куранта — линейно независимая система.

Функцию Куранта, соответствующую выделенной вершине $\mathbf{r}_{i,j}$ исходной триангуляции, обозначим $\omega_{i,j}(t)$, $(i,j) \in \mathbb{X}$, $t \in \mathbb{R}^2$. На исходной триангуляции имеется два типа функций Куранта, соответствующих рассмотренным выше двум типам барицентрических звезд (см. пункт 19.8): у функций Куранта с нечетными индексами носитель состоит из четырех треугольников, а у функций Куранта с четными индексами носитель состоит из восьми треугольников.

Введем обозначения

$$\mathbb{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(0,0),(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)\}, \quad \mathbb{I}_1' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_1 \backslash (0,0).$$

Для укрупненной триангуляции функцию Куранта, соответствующую выделенной вершине $\mathbf{r}_{i,j}$, будем обозначать $\widetilde{\omega}_{i,j}$; заметим, что не все вершины исходной триангуляции участвуют в укрупненной триангуляции, а именно, индексы (i,j) пробегают не все множество $\mathbb{X}$, а лишь его часть: $(i,j) \in \mathbb{X} \backslash \mathbb{I}_1'$; обозначим $\mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{X} \backslash \mathbb{I}_1'$.

Теорема 8. *Справедливы следующие соотношения*

$$\widetilde{\omega}_{i,j}(t) \equiv \omega_{i,j}(t) \qquad \forall (i,j) \in \mathbb{X} \backslash \mathbb{I}_1 \backslash 2\mathbb{I}_1, \tag{10.1}$$

$$\widetilde{\omega}_{0,0}(t) \equiv \omega_{0,0}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,-1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,-1}(t), \tag{10.2}$$

$$\widetilde{\omega}_{2,2}(t) \equiv \omega_{2,2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,1}(t), \qquad \widetilde{\omega}_{-2,2}(t) \equiv \omega_{-2,2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,1}(t), \tag{10.3}$$

$$\widetilde{\omega}_{2,-2}(t) \equiv \omega_{2,-2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,-1}(t), \quad \widetilde{\omega}_{-2,-2}(t) \equiv \omega_{-2,-2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,-1}(t). \tag{10.4}$$

Доказательство соотношений (10.1) — (10.4) легко получается, если учесть линейность функций Куранта на треугольниках, содержащихся в их носителе. ■

В дальнейшем вектор (i,j) будем обозначать через α (впрочем, для краткости иногда скобки в обозначении вектора будем опускать); положим

$$\mathbf{r}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{i,j}, \qquad \omega_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{i,j}, \qquad \widetilde{\omega}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\omega}_{i,j},$$

$$\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} (0,0), \qquad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} (1,1), \qquad \mathbf{e}^* \stackrel{\text{def}}{=} (-1,1).$$

В этих обозначениях имеем

$$\mathbb{I}_1 = \{\mathbf{0}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^*, -\mathbf{e}, -\mathbf{e}^*\}, \quad \mathbb{I}_1' = \mathbb{I}_1 \backslash \mathbf{0}, \quad 2\mathbb{I}_1 = \{\mathbf{0}, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, -2\mathbf{e}^*\},$$

так что формулы (10.1) — (10.4) принимают вид

$$\widetilde{\omega}_\alpha(t) \equiv \omega_\alpha(t) \qquad \text{при} \quad \alpha \in \mathbb{X} \backslash \mathbb{I}_1 \backslash 2\mathbb{I}_1, \qquad \alpha \in \mathbb{X}, \tag{10.5}$$

$$\widetilde{\omega}_{\mathbf{0}}(t) \equiv \omega_{\mathbf{0}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{e}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{e}^*}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-\mathbf{e}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-\mathbf{e}^*}(t), \tag{10.6}$$

$$\widetilde{\omega}_{2\mathbf{e}}(t) \equiv \omega_{2\mathbf{e}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{e}}(t), \qquad \widetilde{\omega}_{-2\mathbf{e}}(t) \equiv \omega_{-2\mathbf{e}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-\mathbf{e}}(t), \tag{10.7}$$

$$\widetilde{\omega}_{2\mathbf{e}^*}(t) \equiv \omega_{2\mathbf{e}^*}(t) + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{e}^*}(t), \qquad \widetilde{\omega}_{-2\mathbf{e}^*}(t) \equiv \omega_{-2\mathbf{e}^*}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-\mathbf{e}^*}(t). \tag{10.8}$$

Краткая запись формул (10.5) — (10.8) такова

$$\widetilde{\omega}_\alpha(t) \equiv \sum_{\gamma\in\mathbb{X}} \mathfrak{p}_{\alpha,\gamma}\, \omega_\gamma(t) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{Y}, \tag{10.9}$$

где

$$\mathfrak{p}_{\alpha,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{\alpha,\gamma} \qquad \text{при} \quad \alpha\in\mathbb{X}\backslash\mathbb{I}_1\backslash 2\mathbb{I}_1, \qquad \gamma\in\mathbb{X}, \tag{10.10}$$

$$p_{2\alpha,2\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad \text{при } \alpha\in\mathbb{I}_1, \quad p_{\mathbf{0},\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} 1/2, \; p_{2\alpha,\alpha} = 1/2 \quad \text{при} \quad \alpha\in\mathbb{I}_1'; \tag{10.11}$$

здесь $\delta_{\alpha,\alpha'}$ — символ Кронекера.

Заметим, что формула (10.9) охватывает все функции $\widetilde{\omega}_\alpha$, соответствующие укрупненной триангуляции, а формула (10.10) учитывает все случаи (10.5) совпадения функций $\widetilde{\omega}_\alpha$ и ω_γ; кроме того, первая формула в (10.11) охватывает коэффициенты первых слагаемых в правых частях всех формул (10.6) — (10.8), а вторая формула в (10.11) дает значения коэффициентов всех слагаемых правой части формулы (10.6) кроме первого. Наконец, третья формула в (10.11) задает вторые слагаемые в правых частях формул (10.7) — (10.8).

Полностью упорядочим (произвольным образом) множество $\{\gamma \mid \gamma\in\mathbb{X}\}$ мультииндексов γ (т.е. упорядочим множество $\mathbb{X}$), зафиксируем этот порядок и будем использовать его в дальнейшем; в подмножестве $\mathbb{Y}$ введем упорядочение индуцированное упорядоченностью во множестве $\mathbb{X}$.

В соответствии с этой упорядоченностью введем вектор-столбцы

$$\widetilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Y}}, \qquad \omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{X}}, \tag{10.12}$$

а также рассмотрим матрицу

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{0}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{\alpha,\gamma}), \tag{10.13}$$

где $\alpha\in\mathbb{Y}$ — номер строки, а $\gamma\in\mathbb{X}$ — номер столбца.

Из теоремы 8 получаем

Следствие 3. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{\omega} = \mathfrak{P}_{\mathbf{0}}\omega. \tag{10.14}$$

Доказательство соотношения (10.14) очевидным образом следует из формул (10.9) — (10.13). ■

Для иллюстрации обратимся к случаю, когда

$$\mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{-\mathbf{i}^*, -\mathbf{i}, -2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, \mathbf{e}^*, \mathbf{e}, \mathbf{0}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^*, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, \mathbf{i}, \mathbf{i}^*\}, \tag{10.15}$$

где $\mathbf{i} \stackrel{\text{def}}{=} (2, 0)$, $\mathbf{i}^* \stackrel{\text{def}}{=} (0, 2)$. В этом случае

$$\mathbb{Y} = \{-\mathbf{i}^*, -\mathbf{i}, -2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, \mathbf{0}, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, \mathbf{i}, \mathbf{i}^*\}, \tag{10.16}$$

$\mathfrak{P}_\mathbf{0}$ — прямоугольная матрица размеров 9×13 вида

$$\mathfrak{P}_\mathbf{0} = \begin{array}{c} \\ -\mathbf{i}^* \\ -\mathbf{i} \\ -2\mathbf{e}^* \\ -2\mathbf{e} \\ \mathbf{0} \\ 2\mathbf{e} \\ 2\mathbf{e}^* \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{i}^* \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} -\mathbf{i}^* & -\mathbf{i} & -2\mathbf{e}^* & -2\mathbf{e} & -\mathbf{e}^* & -\mathbf{e} & \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{e}^* & 2\mathbf{e} & 2\mathbf{e}^* & \mathbf{i} & \mathbf{i}^* \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Рассмотрим линейные пространства

$$\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\ \mathcal{L}(\{\omega_\gamma \mid \forall \gamma \in \mathbb{X}\}), \qquad \widetilde{\mathbb{S}}_\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\ \mathcal{L}(\{\widetilde{\omega}_\alpha \mid \forall \alpha \in \mathbb{Y}\}). \tag{10.17}$$

Следствие 4. *Линейное пространство* $\widetilde{\mathbb{S}}_\mathbf{0}$ *является подпространством в* $\mathbb{S}$*:*

$$\widetilde{\mathbb{S}}_\mathbf{0} \subset \mathbb{S}. \tag{10.18}$$

Доказательство соотношения (10.18) следует из формул (10.14) и (10.17). ■

19.11. Биортогональная система и ее значения на базисных функциях объемлющего пространства

В пространстве $C(\mathbb{R}^2)$ зададим систему линейных функционалов g_γ для $\forall \gamma \in \mathbb{X}$ формулами

$$\langle g_\gamma, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\mathbf{r}_\gamma). \tag{11.1}$$

Ясно, что система $\{g_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{X}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_{\gamma'}\}_{\gamma' \in \mathbb{X}}$:

$$\langle g_\gamma, \omega_{\gamma'} \rangle = \delta_{\gamma, \gamma'}. \tag{11.2}$$

Аналогичным образом задается система функционалов $\widetilde{g}_\alpha$ для $\forall \alpha \in \mathbb{Y}$ формулами

$$\langle \widetilde{g}_\alpha, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\widetilde{\mathbf{r}}_\alpha); \tag{11.3}$$

она оказывается биортогональной системе функций $\{\widetilde{\omega}_{\alpha'}\}_{\alpha'\in\mathbb{Y}}$:

$$\langle\widetilde{g}_\alpha, \widetilde{\omega}_{\alpha'}\rangle = \delta_{\alpha,\alpha'} \qquad \forall\alpha,\alpha'\in\mathbb{Y},$$

и, кроме того,

$$\langle\widetilde{g}_\alpha, u\rangle = \langle g_\alpha, u\rangle \qquad \forall\alpha\in\mathbb{Y}\quad\forall u\in C(\Omega). \tag{11.4}$$

Пусть $\mathfrak{Q}_\mathbf{0}$ — матрица с элементами

$$\mathfrak{q}_{\alpha,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\widetilde{g}_\alpha, \omega_\gamma\rangle \qquad \forall\alpha\in\mathbb{Y}\quad\forall\gamma\in\mathbb{X}, \tag{11.5}$$

где α — номер строки, а β — номер столбца.

Теорема 9. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{\alpha,\gamma} = \delta_{\alpha,\gamma} \qquad \forall\alpha\in\mathbb{Y}\quad\forall\gamma\in\mathbb{X}. \tag{11.6}$$

Доказательство. С учетом расположения носителей функций $\omega_{\alpha'}$ из (11.1) — (11.4) получаем

$$\langle\widetilde{g}_\alpha, \omega_\gamma\rangle = \delta_{\alpha,\gamma} \qquad \forall\alpha\in\mathbb{Y}\quad\forall\gamma\in\mathbb{X};$$

отсюда, принимая во внимание обозначения (11.5), приходим к (11.6). ∎

В случае (10.15) — (10.16) $\mathfrak{Q}_\mathbf{0}$ — прямоугольная матрица размеров 9×13; она имеет вид

$$\mathfrak{Q}_\mathbf{0} = \begin{array}{c} \\ -\mathbf{i}^* \\ -\mathbf{i} \\ -2\mathbf{e}^* \\ -2\mathbf{e} \\ \mathbf{0} \\ 2\mathbf{e} \\ 2\mathbf{e}^* \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{i}^* \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} -\mathbf{i}^* & -\mathbf{i} & -2\mathbf{e}^* & -2\mathbf{e} & -\mathbf{e}^* & -\mathbf{e} & \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{e}^* & 2\mathbf{e} & 2\mathbf{e}^* & \mathbf{i} & \mathbf{i}^* \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Введем вектор-столбцы, компонентами которых являются функционалы $\widetilde{g}_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{Y}$: $\widetilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{g}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Y}}$.

Благодаря свойству биортогональности имеем

$$\widetilde{g}\,\widetilde{\omega}^T = I, \tag{11.7}$$

где I — единичная матрица с элементами $\delta_{\alpha,\alpha'}\quad \alpha,\alpha'\in\mathbb{Y}$ (здесь $\delta_{\alpha,\alpha'}$ — символ Кронекера).

Применяя теорему 5 и формулу (11.7), получаем следующее утверждение

Теорема 10. *Матрица* $\mathfrak{Q}_{\mathbf{0}}$ *является левой обратной для матрицы* $\mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^{T}$, *т.е.*

$$\mathfrak{Q}_{\mathbf{0}}\mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^{T} = I. \tag{11.8}$$

Для случая (10.15) — (10.16) формула (11.8) проверяется непосредственным подсчетом произведения прямоугольных матриц $\mathfrak{Q}_{\mathbf{0}}$ и $\mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^{T}$ (размеров 9×13 и 13×9 соответственно): в результате получается квадратная единичная матрица одиннадцатого порядка.

19.12. Общая структура всплескового разложения

Аналогично пунктам 5 и 6 для рассматриваемых триангуляций рассмотрим оператор $P_{\mathbf{0}}$ проектирования пространства $C(\Omega)$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}_{\mathbf{0}}$, задаваемый формулой

$$P_{\mathbf{0}}u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha\in\mathbb{Y}} \langle \widetilde{g}_{\alpha}, u\rangle\, \widetilde{\omega}_{\alpha} \qquad \forall u \in C(\Omega), \tag{12.1}$$

и введем оператор $Q_{\mathbf{0}} = I - P_{\mathbf{0}}$, где I — тождественный в $C(\Omega)$ оператор.

В данном случае пространством всплесков является пространство $\mathbb{W}_{\mathbf{0}} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\mathbf{0}}\mathbb{S}$.

Благодаря соотношениям (10.18) и (12.1) получаем прямое разложение

$$\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dotplus \mathbb{W}_{\mathbf{0}} \tag{12.2}$$

— *сплайн-всплесковое разложение* пространства $\mathbb{S}$. Как и прежде, рассматривая вектор-столбцы $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{\alpha})_{\alpha\in\mathbb{Y}}$, $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_{\beta})_{\beta\in\mathbb{X}}$, $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{\gamma})_{\gamma\in\mathbb{X}}$, получаем следующие утверждения

Теорема 11. *Формулы декомпозиции имеют вид*

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^{T}\mathfrak{Q}_{\mathbf{0}}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{\mathbf{0}}\mathbf{c}, \tag{12.3}$$

а формулы реконструкции могут быть представлены в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^{T}\mathbf{a}. \tag{12.4}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Теорема 12. *Пространство* $\mathbb{W}_\mathbf{0}$ *изоморфно ядру оператора* $\mathfrak{Q}_\mathbf{0}$*:*

$$\mathbb{W}_\mathbf{0} = \{w \,|\, w = \sum_{\beta\in\mathbb{X}} b_\beta\omega_\beta \quad \forall \mathbf{b} \in \ker \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\}. \tag{12.5}$$

Доказательство вытекает из следующей цепочки эквивалентных формул

$$u = \sum_{\gamma\in\mathbb{X}} c_\gamma\omega_\gamma \in \mathbb{W}_\mathbf{0} \iff P_\mathbf{0}u = 0 \iff \langle\widetilde{g}_\alpha, u\rangle = 0 \quad \forall \in \mathbb{Y} \iff$$

$$\iff \langle\widetilde{g}_\alpha, \sum_{\gamma\in\mathbb{X}} c_\gamma\omega_\gamma\rangle = 0 \quad \forall \in \mathbb{Y} \iff \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{c} = 0 \iff \mathbf{c} \in \ker \mathfrak{Q}_\mathbf{0}.$$

Заметим, что первая эквивалентность следует из определения (12.1) оператора $P_\mathbf{0}$, предпоследняя эквивалентность следует из определения матрицы $\mathfrak{Q}_\mathbf{0}$, а остальные эквивалентности очевидны. Формула (12.5) и упомянутый в теореме изоморфизм установлены. ∎

Рассмотрим линейные пространства

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a} \,|\, \mathbf{a} = (a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Y}}\}, \qquad \mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \ker \mathfrak{Q}_\mathbf{0}, \qquad \mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a} \,|\, \mathbf{a} = (a_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{X}}\}.$$

Пусть $\mathcal{E}$ — прямое произведение пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$: $\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, так что

$$\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} \;\middle|\; \mathbf{a} \in \mathcal{A},\ \mathbf{b} \in \mathcal{B}\right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{D}_\mathbf{0} : \ \mathcal{C} \mapsto \mathcal{E}, \quad \mathfrak{D}_\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\\ I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\end{pmatrix};$$

для него верна эквивалентность

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\\ I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{c} \iff \begin{cases}\mathbf{a} = \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{c}\\ \mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0})\mathbf{c}\end{cases};$$

этот оператор называется *оператором декомпозиции.*

Оператор $\mathfrak{R}_\mathbf{0} : \ \mathcal{E} \mapsto \mathcal{C}, \quad \mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}\mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I\end{pmatrix}$, удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R}_\mathbf{0}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} \iff \mathbf{c} = \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathbf{a} + \mathbf{b};$$

он называется *оператором реконструкции.*

Теорема 13. *Операторы $\mathfrak{D}_\mathbf{0}$ и $\mathfrak{R}_\mathbf{0}$ взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\mathfrak{R}\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{R}\mathfrak{D} = \begin{pmatrix}\mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_\mathbf{0} \\ I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\end{pmatrix} = \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0} + I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0} = I.$$

С другой стороны с учетом свойства (11.8) имеем

$$\mathfrak{D}_\mathbf{0}\mathfrak{R}_\mathbf{0}\begin{pmatrix}\mathbf{a} \\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_\mathbf{0} \\ I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a} \\ \mathbf{b}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \\ \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a} \\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{a} + \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{a} \\ \mathbf{b}\end{pmatrix}.$$

Теорема доказана. ■

19.13. Всплесковое разложение при локальном укрупнении триангуляции

Здесь применим полученные в предыдущих пунктах формулы для отыскания всплескового разложения пространства $\mathbb{S}$ при локальном укрупнении триангуляции $[\mathcal{T} \longmapsto \mathcal{T}_\mathbf{0}]$, описанном в пунктах 7 — 9.

Теорема 14. *При локальном укрупнении триангуляции $[\mathcal{T} \longmapsto \mathcal{T}_\mathbf{0}]$ в всплесковом разложении (12.2) формулы декомпозиции (12.3) имеют вид*

$$b_\alpha = 0, \qquad a_\alpha = c_\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{Y}, \tag{13.1}$$

$$b_{-\mathbf{e}^*} = c_{-\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2}\,c_{-2\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2}\,c_\mathbf{0}, \qquad b_{-\mathbf{e}} = c_{-\mathbf{e}} - \frac{1}{2}\,c_{-2\mathbf{e}} - \frac{1}{2}\,c_\mathbf{0}, \tag{13.2}$$

$$b_\mathbf{e} = c_\mathbf{e} - \frac{1}{2}\,c_{2\mathbf{e}} - \frac{1}{2}\,c_\mathbf{0}, \qquad b_{\mathbf{e}^*} = c_{\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2}\,c_{2\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2}\,c_\mathbf{0}. \tag{13.3}$$

Доказательство. Используя формулы (10.10) — (10.11) и (11.6) в соотношениях (12.3), получаем равенства (13.1) — (13.3). ■

Заметим, что в случае (10.15) — (10.16) формулы (13.2) — (13.3) можно проиллюстрировать первым из соотношений (12.3), где $\mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0}$ — квадратная матрица размеров 13×13 вида

$$\mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathfrak{Q}_\mathbf{0} =$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} -\mathbf{i}^* & -\mathbf{i} & -2\mathbf{e}^* & -2\mathbf{e} & -\mathbf{e}^* & -\mathbf{e} & \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{e}^* & 2\mathbf{e} & 2\mathbf{e}^* & \mathbf{i} & \mathbf{i}^* \end{array} \\
\begin{array}{c} -\mathbf{i}^* \\ -\mathbf{i} \\ -2\mathbf{e}^* \\ -2\mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^* \\ -\mathbf{e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^* \\ 2\mathbf{e} \\ 2\mathbf{e}^* \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{i}^* \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Теорема 15. *Для локального укрупнения $[\mathcal{T} \longmapsto \mathcal{T}_{\mathbf{0}}]$ всплесковому разложению (12.2) соответствуют формулы реконструкции*

$$c_\alpha = a_\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{Y}, \tag{13.4}$$

$$c_{-\mathbf{e}^*} = b_{-\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2}\, a_{-2\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2}\, a_{\mathbf{0}}, \qquad c_{-\mathbf{e}} = b_{-\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\, a_{-2\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\, a_{\mathbf{0}}, \tag{13.5}$$

$$c_{\mathbf{e}} = b_{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\, a_{2\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\, a_{\mathbf{0}}, \qquad c_{\mathbf{e}^*} = b_{\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2}\, a_{2\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2}\, a_{\mathbf{0}}. \tag{13.6}$$

Доказательство формул (13.4) — (13.6) вытекает из соотношений (12.4), если подставить в них значения коэффициентов $\mathfrak{p}_{\alpha,\gamma}$ из равенств (10.10) — (10.11). ■

19.14. Структура локального укрупнения

Исследуем структуру предложенного укрупнения исходной триангуляции. При фиксированных $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ введем обозначения $\mathbf{o} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+1,2j+1}$, $\mathbf{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{r}_{2i,2j}$, $\mathbf{y} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{r}_{2i,2j+2}$, $\mathbf{z} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+2,2j+2}$, $\mathbf{w} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+2,2j}$, $\mathbf{y}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{r}_{2i,2j-2}$, $\mathbf{z}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{r}_{2i-2,2j-2}$, $\mathbf{o}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+1,2j-1}$. Прямоугольник с вершинами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ назовем исходным прямоугольником.

В соответствии с рассматриваемым алгоритмом триангуляция исходного прямоугольника преобразуется следующим образом

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{x} & \mathbf{o} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y} & \mathbf{o} & \mathbf{z} \\ \mathbf{z} & \mathbf{o} & \mathbf{w} \\ \mathbf{x} & \mathbf{o} & \mathbf{w} \end{matrix} \right\| \qquad ==> \qquad \left\| \begin{matrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{x} & \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{matrix} \right\|, \tag{14.1}$$

а триангуляция симметричного относительно прямой $\mathbf{xw}$ прямоугольника преобразуется по правилу

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{x} & \mathbf{o}' & \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}' & \mathbf{o}' & \mathbf{z}' \\ \mathbf{z}' & \mathbf{o}' & \mathbf{w} \\ \mathbf{x} & \mathbf{o}' & \mathbf{w} \end{matrix} \right\| \qquad ==> \qquad \left\| \begin{matrix} \mathbf{x} & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \\ \mathbf{x} & \mathbf{z}' & \mathbf{w} \end{matrix} \right\|. \tag{14.2}$$

В дальнейшем рассматриваются также соответствующие преобразования прямоугольников, симметричных упомянутым относительно прямой $\mathbf{yy}'$.

Прямоугольники $\mathbb{R}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \mid (2i-2)h' \le x \le (2i+2)h', (2i-2)h'' \le y \le (2i+2)h''\}$, рассматриваемые для всех $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, заполняют всю плоскость. Очевидно, что

$$\mathbb{R}_{i,j} = \bigcup_{i'=i-1,i;j'=j-1,j} \Pi_{i',j'}.$$

Для $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ каждый прямоугольник $\Pi_{i,j}$ триангулирован согласно таблице

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{2i,2j} & \mathbf{r}_{2i,2j+2} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \\ \mathbf{r}_{2i,2j} & \mathbf{r}_{2i+2,2j} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \\ \mathbf{r}_{2i+2,2j+2} & \mathbf{r}_{2i+2,2j} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \\ \mathbf{r}_{2i+2,2j+2} & \mathbf{r}_{2i,2j+2} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \end{matrix} \right\| \qquad \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2. \tag{14.3}$$

Рассмотрим укрупнение вида (14.1) — (14.2) соответствующего подразделения прямоугольника $\mathbb{R}_{i,j}$ и покажем, что результат изоморфен подразделению (14.3); тем самым будет установлено, что структура локального укрупнения подразделения в подобласти совпадает со структурой исходного подразделения. Таким образом, будет показано (см. теорему 16), что в подобласти, где произведено укрупнение, возможно использование предлагаемого алгоритма для дальнейшего локального укрупнения. Отсюда видно, что можно получить цепочку вложенных пространств с локальным укрупнением триангуляции и сгенерировать всплесковый (вэйвлетный) пакет.

Для удобства введем обозначения

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{2i-2,2j-2},\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_{2i+2,2j-2},\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{r}_{2i+2,2j+2},\ \mathbf{a}_4 = \mathbf{r}_{2i-2,2j+2},$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{r}_{2i,2j-2},\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{r}_{2i+2,2j},\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{r}_{2i,2j+2},\ \mathbf{b}_4 = \mathbf{r}_{2i-2,2j},$$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_{2i-1,2j-1},\ \mathbf{c}_2 = \mathbf{r}_{2i+1,2j-1},\ \mathbf{c}_3 = \mathbf{r}_{2i+1,2j+1},\ \mathbf{c}_4 = \mathbf{r}_{2i-1,2j+1},\ \mathbf{o} = \mathbf{r}_{2i,2j}.$$

Рассмотрим преобразование, описываемое соотношениями (14.4)–(14.7) (см. дальше):

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{a}_1 \end{matrix} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_4 \end{matrix} \right\|, \tag{14.4}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{o} \end{matrix} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \end{matrix} \right\|, \tag{14.5}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{a}_3 \end{matrix} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{o} & \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{o} & \mathbf{b}_3 \end{matrix} \right\|, \tag{14.6}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_4 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{a}_4 \end{matrix} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_4 & \mathbf{o} & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_4 & \mathbf{o} & \mathbf{b}_4 \end{matrix} \right\|. \tag{14.7}$$

Итак, в результате получаем триангуляцию

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{matrix} \right\|^T, \tag{14.8}$$

где символ $\| \cdot \|^T$ означает транспонирование таблицы, рассматриваемой как матрица. Выделим фрагмент исходной триангуляции топологически изоморфный результату, полученному применением преобразования (14.4) — (14.7):

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{c}_4 \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{matrix} \right\|^T. \tag{14.9}$$

Из формул (14.8) — (14.9) видно, что установлено следующее утверждение.

Теорема 16. *Исходное и укрупненное подразделения изоморфны; изоморфизм, сохраняющий величины углов треугольников, определяется отображением*

$$\mathbf{o} \longrightarrow \mathbf{o}, \qquad \mathbf{a}_i \longrightarrow \mathbf{b}_i, \qquad \mathbf{b}_i \longrightarrow \mathbf{c}_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{b}_4 \longrightarrow \mathbf{c}_1. \tag{14.10}$$

Замечание 2. *Наряду с изоморфизмом (14.10) можно рассмотреть другой изоморфизм (без сохранения величин углов); он может быть задан соотношениями*

$$\mathbf{o} \longrightarrow \mathbf{o}, \quad \mathbf{a}_i \longrightarrow \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{b}_i \longrightarrow \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема обработки числовых информационных потоков возникла в связи с непрерывным ростом объема потоков от известных источников и от вновь появляющихся. Современные компьютеры не всегда позволяют производить их обработку в приемлемое время, а мощности передающих устройств не хватает для передачи этих потоков на значительные расстояния. Решение этой проблемы — динамический процесс, он связан с ростом технологических возможностей и с разработкой новых агоритмов обработки числовых потоков. Алгоритмы с адаптивными свойствами работают наиболее эффективно и экономично, поскольку учитывают свойства числовых потоков; последние в первую очередь характеризуются скоростью их изменения и топологическими характеристиками, связанными с их источником.

Наиболее современный аппарат обработки — алгоритмы вэйвлетных разложений. Эти алгоритмы позволяют выделить из исходного потока основную информационную составляющзую для передачи ее потребителю и сохранить дополнительную (вэйвлетную) составляющую, позволяющую в случае необходимости полностью восстановить исходный поток. Классические вэйвлетные разложения в основном используют равномерную сетку и не учитывают характеристики исходного потока, т. е. не облдают свойсвами адаптивности. Адаптивные алгоритмы обработки получаются для рассматренных в данной книге сплайн-всплесковых способов обработки исходного потока (см. разделы 15–17).

При вэйвлетных (всплесковых) разлолжениях интересуются прежде всего степенью сжатия потока (т. е. отношением объема исходного потока к объему основного потока), аппроксимационными свойствами основного потока по отношению к исходному (т. е. возможностью качественного восстановления), простотой алгоритмов сжатия/восстановления и т.п. Отметим, что имеется два типа восстановления: приближенное восстановление по основному потоку с учетом априорных дополнительных сведений, например, скорости изменения потока или его гладкости; второй тип — точное восстановление с использованием всплескового потока (из-за машинной арифметики это восстановление также неточное, но обычно его точность достаточно высокая). Весьма важна устойчивость алгоритмов, а также свойство локальности (т. е. свойство, состоящее в том, что удаленные части потока не влияют на результат декомпозиции и реконструкции потока). Кроме рассмотренной выше адаптивности алгоритма, важны его параллельные формы для реализации на параллельных вычислительных системах.

1. Методы сплайн-всплесковых разложений

Методы сплайн-всплесковых разложений состоят в следующем.

1. Сначала задается исходная сплайновая сетка X и генерирующая вектор-функция φ, а также строится соответствующая им полная цепочка векторов в $\mathbb{R}^n$.

2. Рассматриваются аппроксимационные соотношения с использованием упомянутой цепочки векторов и генерирующей вектор-функции.

3. Отыскивается система Φ координатных сплайнов и биортогональная ей система функционалов из указанных аппроксимационных соотношений.

4. Исходный поток применяется к построению исходного элемента u сплайнового пространства $\mathbb{S}(X,\varphi)$, натянутого на найденную систему Φ.

5. Строится адаптивное укрупнение $\widetilde{X}$ исходной сплайновой сетки X с использованием свойств исходного потока.

6. Отыскивается система $\widetilde{\Phi}$ координатных сплайнов на сетке $\widetilde{X}$ по схеме, изложенной в пунктах $1-3$, и рассматривается сплайновое пространство $\mathbb{S}(\widetilde{X},\varphi)$, полученное как линейная оболочка системы $\widetilde{\Phi}$. Согласно теории (см. [38]) имеем $\mathbb{S}(X,\varphi) \subset \mathbb{S}(\widetilde{X},\varphi)$.

7. Реализуется операция P проекирования пространства $\mathbb{S}(X,\varphi)$ на $\mathbb{S}(\widetilde{X},\varphi)$ с помощью продолжения на $\mathbb{S}(X,\varphi)$ системы функционалов, биортогональных системе $\widetilde{\Phi}$.

8. Отыскивается проекция $\widetilde{u} = Pu$ элемента u на подпространство $\mathbb{S}(\widetilde{X},\varphi)$; коэффициенты разложения элемента $\widetilde{u}$ по системе $\widetilde{\Phi}$ представляет собой основной поток, а разложение $u-\widetilde{u}$ по системе Φ дает всплесковый поток.

2. Нерешенные задачи

В данной книге основное внимание уделялось сплайн-всплесковым разложениям первого порядка, частично затрагивались такие разложения в случае второго порядка (и это относилось к лагранжевым аппроксимациям). Кроме того, рассмотрены приемы разложения потоков в эрмитовом случае с использованием потока значений функции и ее первой производной (см. раздел 7). Такой охват материала связан с первоочередными потребностями практического использования предложенных алгоритмов, которые (как показывают теоретические результаты и проведенные на их основе численные эксперименты) выгодно отличаются по скорости и по объему требуемой памяти от классических алгоритмов, представленных, в частности, в системе Maple (см. [109]). С другой стороны, это объясняется неразработанностью определенных вопросов.

В связи с этим имеется ряд задач, решение которых можно получить методами, рассмотренными в соответствующих разделах. Перечислим эти задачи, указывая в скобках относящиеся к ним разделы.

1. Построение и исследование биортогональных аппроксимаций для порядков $m \geq 2$ (разделы 3,4).

2. Исследование неотрицательности координатных сплайнов для порядков $m \geq 3$ (раздел 6).

3. Построение сплайн-всплесковых разложений для порядков $m \geq 3$ (раздел 10).

4. Изучение негладких сплайн-всплесков для порядков $m \geq 3$ (раздел 11).

5. Интерференция сплайн-всплесков для порядков $m \geq 2$ (раздел 13).

6. Гребенчатые структуры для порядков $m \geq 2$ (раздел 14).

7. Ортогональность базисных всплесков для порядков $m \geq 2$ (раздел 15).

8. Адаптивные сплайн-всплесковые разложения для порядков $m \geq 2$ (раздел 16).

Конечно, этим не исчерпывается список неисследованных вопросов: сюда относятся сплайн-всплесковые целочисленные потоки и их обработка в кольце целых чисел, вопросы устойчивости вычислений, распараллеливания алгоритмов и т.п.

3. Нерешенные проблемы и подходы к их решению

В тех разделах, где рассматривалось сплайн-всплесковое разложение, обязательно требовались вложенные пространства. В одномерном случае вопросы вложенности пространств для (вообще говоря, неполиномиальных) минимальных сплайнов порядка m решены полностью (см. раздел 5). В многомерном случае исследование вложенности сплайновых пространств становится центральным. Оказывается, что решение этого вопроса в ряде случаев упирается в построение произвольно мелких локально укрупняемых симплициальных подразделений (в двумерном случае — триангуляций). Локально укрупняемая триангуляция на плоскости рассмотрена в разделе 19. Локально укрупняемое симплициальное подразделение в трехмерном пространстве изучено в работе [87].

В связи с этим отметим две нерешенные проблемы.

1. Не известны топологически правильные (и сколь угодно мелкие) локально укрупняемые (криволинейные) триангуляции (с сохранением правильности) на замкнутых поверхностях (для поверхностей рода $g = 1$ такие триангуляции известны, т.к. они известны для тора). Достаточно решить подобную задачу для любой поверхности рода g, $g \neq 1$: этим будет решена задача для всех поверхностей этого рода g. Например, хотелось бы знать, существуют ли такие триангуляции для сферы (для нее $g = 0$), а если существуют, то как их построить.

Существование таких триангуляций доказало бы существование вложенных пространств (Куранта и Зламала) с адаптивными свойствами по отношению к потокам, областью определения которых является множество вершин упомянутых триангуляций. Если в каких-либо областях на поверхности исходный поток медленно меняется, то укрупнение триангуляции в этих областях приводит к построению построению всплескового разложения с менее плотным основным потоком; можно надеяться, что дополняющий его всплесковый поток имеет малые компоненты, хранение и передача которых может производиться с использованием малых ресурсов (по этому поводу см. раздел 19 этой книги).

Важность решения подобных проблем определяется необходимостью получения и обработки огромных числовых информационных потоков от различных исследуемых объектов (начиная от излучения тел сложной формы в электрических печах до устройств типа Токамак и до излучения с поверхности живых организмов для определения их внутреннего состояния).

2. Как было отмечено, вопрос о вложенности сплайновых (не обязательно полиномиальных) пространств на одномерных локально укрупняемых вложенных сетках полностью изучен (см. раздел 5). В n-мерном случае (при $n \geq 2$) этот вопрос решен лишь для полиномиальных сплайновых аппроксимаций Куранта, Зламала, Женишека (в случае локально укрупняемых триангуляций и симплициальных подразделений — см. предыдущий пункт).

Не известен критерий вложенности неполиномиальных сплайновых пространств даже в случае вложенности симплициальных подразделений (триангуляций) при $n \geq 2$. Попытка получить обобщение критерия, полученного в разделе 5, пока успехом не увенчалась.

Авторы надеются, что любознательный читатель успешно справится с понравившейся ему задачей.

Список литературы

[1] *Бурова И. Г., Демьянович Ю. К.* Минимальные сплайны и их приложения. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 364 с.

[2] *Бурова И. Г., Евдокимова Т. О.* О гладких тригонометрических сплайнах второго порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2004. Вып. 3. С. 11-–16.

[3] *Бурова И. Г., Евдокимова Т. О.* О гладких тригонометрических сплайнах третьего порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2004. Вып. 4. С. 12-21.

[4] *Бурова И. Г., Демьянович Ю. К.* О гладкости сплайнов // Математическое моделирование. 2004. Т. 16, № 12. С. 40–43.

[5] *Бурова И. Г.* О моделировании неполиномиальных интегро-дифференциальных приближений // Тр. СПИИРАН. 2011. Т. 19. С. 176–203.

[6] *Бурова И. Г., Евдокимова Т. О.* Об аппроксимации разрывными интегро-дифференциальными сплайнами третьего порядка // Список 2014: сб. материалов всероссийской научной конференции по проблемам информатики. 2014. С. 241-–247.

[7] *Бурова И. Г., Евдокимова Т. О.* Приближение неполиномиальными сплайнами минимального дефекта. СПб., 2007.

[8] *Бурова И. Г., Демьянович Ю. К.* Теория минимальных сплайнов СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. 316 с.

[9] *Бурова И. Г., Родникова О. В.* О применении интегродифференциальных сплайнов к решению одной интерполяционной задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 12. С. 1966–1978.

[10] *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе: Пер. с англ. М.: Мир, 1974.

[11] *Демьянович Ю. К., Зимин А. В.* Аппроксимации курантова типа и их вэйвлетные разложения // Проблемы математического анализа. 2008. Т. 37. С. 3–22.

[12] *Демьянович Ю. К.* Всплески и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 200 с.

[13] *Демьянович Ю. К., Ходаковский В. А.* Введение в теорию вэйвлетов. СПб., 2008. 51 с.

[14] *Демьянович Ю. К.* Вложеннные пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковое разложение // Математические заметки. 2005. Т. 78. Вып. 5. С. 22–26.

[15] *Демьянович Ю. К.* Всплесковые (вэйвлетные) разложения на неравномерной сетке // Труды СПбМО. 2007. Т. 13. С. 27–51.

[16] *Демьянович Ю. К.* Вэйвлеты на многообразии // Доклады РАН. 2009. Т. 421, № 2. С. 1–5.

[17] *Демьянович Ю. К.* Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 3. С. 310–316.

[18] *Демьянович Ю. К.* Всплесковые разложения на неравномерной сетке // Труды СПбМО. 2007. Т. 13. С. 27–51.

[19] *Демьянович Ю. К., Ле Т. Н. Б.* Вэйвлетное разложение сплайнов эрмитова типа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2010. Вып. 2. С. 32—38.

[20] *Демьянович Ю. К., Ле Т. Н. Б.* Вэйвлетное разложение сплайнов эрмитова типа третьей высоты // Проблемы математического анализа. 2010. Вып. 44. С. 65–72.

[21] *Демьянович Ю. К., Мирошниченко И. Д.* Гнездовые сплайн-вэйвлетные разложения // Проблемы математического анализа. 2012. Вып. 64. С. 51–61.

[22] *Демьянович Ю. К., Лебединский Д. М., Лебединская Н. А.* Двусторонние оценки некоторых координатных сплайнов // Записки научн. семинаров ПОМИ. 2015. Т. 439. С. 74–92.

[23] *Демьянович Ю. К., Косогоров О. М.* Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов // Проблемы математического анализа. 2009. Вып. 43. С. 3–19.

[24] *Демьянович Ю. К., Макаров А. А.* Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов // Проблемы математического анализа. 2006. Вып. 34. С. 39–54.

[25] *Демьянович Ю. К.* Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994. 356 с.

[26] *Демьянович Ю. К.* Минимальные сплайны и всплески // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 2. С. 8–22.

[27] *Демьянович Ю. К.* Минимальные сплайны лагранжева типа // Проблемы математического анализа. 2010. Вып. 50. С. 21–64.

[28] *Демьянович Ю. К.* Негладкие сплайн-вэйвлетные разложения и их свойства // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Т. 395. С. 31–60.

[29] *Демьянович Ю. К., Мирошниченко И. Д.* Негладкие сплайн-вэйвлетные разложения на отрезке // Проблемы математического анализа. 2012. Вып. 63. С. 23–40.

[30] *Демьянович Ю. К., Зимин А. В.* О всплесковом разложении сплайнов эрмитова типа // Проблемы математического анализа. 2007. Вып. 35. С. 33–45.

[31] *Демьянович Ю. К., Дронь В. О.* О вэйвлетном разложении на гребенчатой структуре // Проблемы математического анализа. 2013. Вып. 68. С.63–79.

[32] *Демьянович Ю. К., Бурова И. Г.* О свойствах операторов декомпозиции для сплайн-всплесковых представлений // Проблемы математического анализа. 2014. Вып. 77. С. 77–90.

[33] *Демьянович Ю. К., Михлин С. Г.* О сеточной аппроксимации функций соболевских пространств // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1973. Т. 35. С. 6–11.

[34] *Демьянович Ю. К.* Об аппроксимации минимальными сплайнами // Проблемы математического анализа. 2013. Вып. 71. С. 103–108.

[35] *Демьянович Ю. К.* Сплайн-вэйвлетные разложения на многообразии // Проблемы математического анализа. 2007. Т. 36. С. 15–22.

[36] *Демьянович Ю. К.* Сплайн-вэйвлеты при однократном локальном укрупнении сетки // Записки научных семинаров ПОМИ. 2012. Т. 405. С. 97–118.

[37] *Демьянович Ю. К.* Стоячие волны в сплайн-вэйвлетном разложении первого порядка // Математическое моделирование. Изд-во РАН. 2013. Т. 25. № 1. С. 113–119.

[38] *Демьянович Ю. К.* Теория сплайн-всплесков. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 526 с.

[39] *Демьянович Ю. К., Бурова И. Г., Евдокимова Т. О., Иванцова О. Н., Мирошниченко И. Д.* Параллельные алгоритмы. Разработка и реализация. Теория сплайн-всплесков. М.: Изд-во НОУ «ИНТУИТ», 2012. 344 с.

[40] *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

[41] *Квасов Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. 416 с.

[42] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М., 2002. 960 с.

[43] *Ле Т. Н. Б.* Вэйвлетные разложения для модельных задач // Процессы управления и устойчивость: Труды 41-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. С. 182–185.

[44] *Лебедев А. С., Лисейкин В. Д., Хакимзянов Г. С.* Разработка методов построения адаптивных сеток // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, № 3. С. 29–43.

[45] *Максименко И. Е., Скопина И. Е.* Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, № 2. С. 1–39.

[46] *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 2005. 671 с.

[47] *Малоземов В. Н., Певный А. Б.* Полиномиальные сплайны: учеб. пособие. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 120 с.

[48] *Михлин С. Г.* Вариационно-сеточная аппроксимация // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. 1974. Т. 48. С.32–188.

[49] *Мысовских И. П.* Лекции по методам вычислений. СПб., 1998.

[50] *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. Т. 53, № 6 (324). С. 5228.

[51] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.

[52] *Оселедец И. В.* Использование разделенных разностей и B-сплайнов для конструирования быстрого дискретного преобразования вэйвлетного типа на неравномерной сетке // Ж. Математические Заметки. 2006. Т. 77, №5. С. 686–694.

[53] *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.

[54] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977. 496 с.

[55] *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

[56] *Тыртышников Е. Е.* Методы численного анализа. М., 2007. 320 с.

[57] *Чуи К.* Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.

[58] *Bezier P. E.* Example of an Existing System in the Motor Industry: The Unisurf System // Proc. Roy. Soc. (London). 1971. Vol. A321. P. 207–218.

[59] *Buchwald B., Muhlbach G.* Construction of B-splines for generalized spline spaces from local ECT-systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2003. Vol. 159. P. 249–267.

[60] *Buhmann M. D.* Multiquadratic Prewavelets on Nonequally Spaced Knots in One Dimension // Math. of Comput., 1995. Vol. 64, N 212. P. 1611–1625.

[61] *Burova I. G.* On left integro-differential splines and Cauchy problem // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2015. Vol. 9. P. 683–690.

[62] *Burova I. G., Abdurakhimova A. S.* Third order splines and solution of delay differential equation // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 28 (11). P. 883–886.

[63] *Burova I. G., Bezrukavaya O. V.* The construction of images using minimal spline // CEUR Workshop Proceedings. 2015. Vol. 1452. P. 13–18.

[64] *Burova I. G., Doronina A. G.* On approximations by polynomial and nonpolynomial integro-differential splines // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10 (13–16). P. 735–745.

[65] *Burova I. G., Evdokimova T. O.* On approximations by polynomial and triginimetrical splines of the fifth order // WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education. 2015. Vol. 12. C. 124-136.

[66] *Burova I. G., Evdokimova T. O.* On construction third order approximation using values of integrals // WSEAS Transactions on Mathematics. 2014. Vol. 13. P. 676–683.

[67] *Burova I. G., Evdokimova T. O.* On splines of the fifth order // Recent Advances in Mathematical and Computational Methods. Proceedings of the 17th International Conference on Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering (MACMESE 15). 2015. P. 60-65.

[68] *Burova I. G., Poluyanov S. V.* On approximations by polynomial and trigonometrical integro-differential splines // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2016. Vol. 10. P. 190–199.

[69] *Burova I. G., Poluyanov S. V.* Construction of meansquare approximation with integro-differential splines of fifth order and first level // Vestnik of Saint-Petersburg University. Mathematics. 2014. 47 (2). P. 57–63.

[70] *Burova I. G., Rodnikova O. V.* Application of integrodifferential splines to solving an interpolation problem // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. 54 (12). P. 1903–1914.

[71] *Cottrell J. Austin, Hughes, Thomas J. R., Bazilevs Yu.* Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA. John Wiley Sons. 2009. 360 p.

[72] *Dem'yanovich Yu. K.* Wavelets on a manifold Doklady Mathematics. T. 79. Вып. 1. С. 21–24.

[73] *Dem'yanovich Y. K.* Embedded spaces of trigonometric splines and their wavelet expansion. Mathematical Notes. T. 78. Вып. 5–6. С. 615–63. Nov-Dec, 2005.

[74] *Dem'yanovich Y. K.* Smoothness of spline spaces and wavelet decompositions Doklady Mathematics. T. 71. Вып. 2. С. 220–223. Mar-Apr. 2005.

[75] *Dem'yanovich Yu. K.* Adaptive properties of the hermite splines // IFAC-PapersOnLine. 2015. 28 (11). P. 496–498.

[76] *Dem'yanovich Y. K.* Approximation by Minimal Splines // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2013. 193 (2). P. 261–266.

[77] *Dem'yanovich Yu. K.* Embedding of Non-polynomial Spline Spaces // Mathematical Sciences. 2012, 6:28.

[78] *Dem'yanovich Yu. K.* Interference in Spline-wavelet Decompositions // J. of Math. Sciences. Vol. 186. N 2. Oktober, 2012. P. 234–246.

[79] *Dem'yanovich Y. K.* Nonsmooth spline-wavelet expansions and their properties // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2012. Vol. 182 (6). P. 761–778.

[80] *Dem'yanovich Y. K.* Orthogonal Basis for Wavelet Flows // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2016. Vol. 213 (4). P. 530–550.

[81] *Dem'yanovich Y. K.* The Uniqueness of a Space of Smooth Splines and Calibration Relations // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2013. Vol. 193 (2). P. 249–260.

[82] *Dem'yanovich Y. K.* Spline-wavelets in the case of a single local coarsening of a grid // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2013. Vol. 191 (1). P. 52–64.

[83] *Dem'yanovich Y. K.* Standing waves in the first order spline-wavelet decomposition // Mathematical Models and Computer Simulations. 2013. Vol. 5 (4). P. 404–408.

[84] *Dem'yanovich Y. K., Anolik M. V., Ivantsova O. N.* Adaptive properties of spline-wavelet approximation // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2015. Vol. 207 (2). P. 176–194.

[85] *Dem'yanovich Yu. K, Burova I. G.* Integral Representation and Sharp Estimates of B_φ-Splines // J. of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 198, issue 6. P. 724–734.

[86] *Dem'yanovich Y. K., Burova I. G.* Properties of decomposition operators of spline-wavelet decompositions // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2015. Vol. 205 (2). P. 205–221.

[87] *Dem'yanovich Y. K., Gerasimov I. V.* Local Coarsening of Simplicial Subdivisions // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2016. Vol. 216 (2). P. 219–235.

[88] *Dem'yanovich Y. K., Dron' V. O.* Structure of two-nested spline-wavelet decomposition // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2013. Vol. 189 (3). P. 388–401.

[89] *Dem'yanovich Y. K., Dron' V. O.* Wavelet decomposition on a comb structure // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2013. Vol. 189 (3). P. 402–421.

[90] *Dem'yanovich Yu. K, Kosogorov O. M.* Approximation by Minimal Splines // J. of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164, issue 7. P. 383–402.

[91] *Dem'yanovich Yu. K., Le T. N. B.* Approximation by Hermite Type Splines // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2014. P. 1–7. (article in press)

[92] *Dem'yanovich Y. K., Lebedeva A. V.* Biorthogonal Approximation by Splines // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2014. Vol. 202 (2). P. 184–199.

[93] *Dem'yanovich Y. K., Lebedinskii D. M., Lebedinskaya N. A.* Two-Sided Estimates of Some Coordinate Splines // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2016. Vol. 216 (6). P. 770–782.

[94] *Dem'yanovich Yu. K., Miroshnichenko I. D.* Calibration relations to of the fourth order // Journal of Math. Sciences. 2011. Vol. 178, N 6. P. 576–588.

[95] *Dem'yanovich Y. K., Miroshnichenko I. D.* Nested spline-wavelet decompositions // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2012. Vol. 184 (3). P. 282–294.

[96] *Dem'yanovich Y. K., Miroshnichenko I. D.* Nonsmooth spline-wavelet decompositions on a segment // Journal of Mathematical Sciences. 2012. Vol. 181 (5). P. 578–599.

[97] *Dem'yanovich Y. K., Ponomareva A. Y.* Adaptive Spline-Wavelet Processing of a Discrete Flow // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2015. Vol. 210 (4). P. 371–390.

[98] *Dem'yanovich Y. K., Romanovskii L. M.* Spline-Wavelet Coarsening of Courant-Type Approximations // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2014. Vol. 199 (4). P. 414–431.

[99] *Dem'yanovich Y. K., Vager B. G.* Spline-wavelet decomposition on an interval // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2015. Vol. 207 (5). P. 736–752.

[100] *Goel J. J.* Construction of basis functions for numerical utilization of Ritz's method // Numer. Math. 1968. Vol. 12. P. 435–447.

[101] *Pena J. M.* Shape preserving representations for trigonometric polynomial curves // Computer Aided Geometric Design. 1997. Vol. 14. N 1. P. 5–11.

[102] *Piegl L., Tiller W.* Curve and Surface Constructions Using Rational B-splines. Comp. Aid. Des. 1987. Vol. 19. P. 485–498.

[103] *Rogers D. F., Fog N. G.* Constrained B-spline Curve and Surface Fitting. CADJ. 1989. Vol. 21. P. 641–648.

[104] *Schumaker L. L.* On super splines and finite elements. SIAM J. Numer. Anal. 1989. Vol. 26. P. 997–1005.

[105] *Sweldens W.* The lifting scheme: a construction of second generation wavelets. SIAM J. of Math. Analysis. 1997. Vol. 29 (2). P. 511–546.

[106] *Terekhov K., Vassilevski Yu.* Two-phase water flooding simulations on dynamic adaptive octree grids with two-point nonlinear fluxes // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2013. Vol. 28, N 3. P. 267–288.

[107] *Xu G., Wang G.-Z.* AHT Bezier Curves and NUAHT B-Spline Curves // Journal of Computer Science and Technology Vol. 2007. Vol. 22. N 4. P. 597–607.

[108] *Daubechies I., Guskov I., Schröder P., Sweldens W.* Wavelets on Irregular Point Sets // Phil. Trans.: Math., Physical, Engng. Sci. 1999. Vol. 357. P. 23972413.

[109] Maple 2017.0, Product Build IDs, Maple Build ID 1231047, Licensed to: Prof. Yuri Dem'yanovich, Serial Number: M4SUJR24AKMC7YDY, Permanent License.

[110] *Schoenberg I. J.* Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4, N 1. P. 45–99.

[111] *Schoenberg I. J.* Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4, N 2. P. 112–141.

Научное издание

БУРОВА Ирина Герасимовна, ДЕМЬЯНОВИЧ Юрий Казимирович, ЕВДОКИМОВА Татьяна Олеговна

СПЛАЙН-ВСПЛЕСКИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

Редактор *Ю. Н. Ворошилова*

Верстка *Е. М. Воронковой*

Обложка *Арделян Е. В.*

Подписано в печать 04.10.2017. Формат $70\times100\,{}^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 33,5. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ.
199004, С.-Петербург, В.О., 6-я линия, 11/21

Тел. / факс (812) 328-44-22
E-mail: publishing@spbu.ru / publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5.