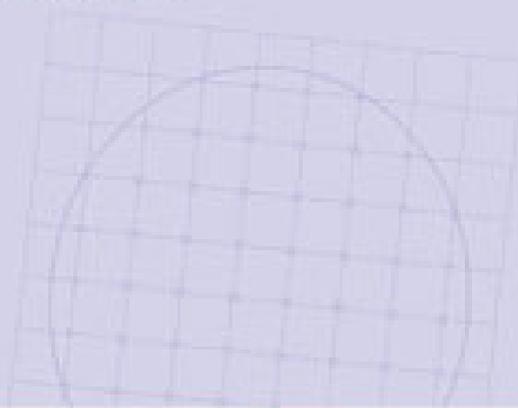


$$(Au, v) = (Av, u)$$

$$\psi(v) = \varphi(A^{-1}v)$$

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-е издание

- *Общая схема исследования сходимости и устойчивости приближенных методов решения линейных функциональных уравнений*
- *Проекционные методы*
- *Метод конечных элементов*
- *Метод сеток*



$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \beta_k(y)$$

И. К. Даугавет

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ линейные уравнения 2-е издание

*Рекомендовано УМО по образованию в области инновационных
междисциплинарных образовательных программ в качестве учебного пособия
по специальности «Математическое обеспечение
и администрирование информационных систем» — 010503*

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2006

УДК 519.6(075.8)

ББК 22.143я73

Д21

Даугавет И. К.

Д21 Теория приближенных методов. Линейные уравнения. —
2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 288 с.: ил.

ISBN 5-94157-737-0

Книга является вторым, исправленным и дополненным, изданием опубликованного в 1985 году учебника «Приближенное решение линейных функциональных уравнений». Излагается исследование основных приближенных методов решения задач математической физики (проекционные методы, метод сеток, включая метод конечных элементов), основанное на общей схеме, использующей язык функционального анализа. Конкретными объектами исследования являются метод механических квадратур для интегральных уравнений (используется принцип компактной аппроксимации), методы Рунге, Галеркина, метод сеток для эллиптических уравнений, уравнений теплопроводности и колебаний струны. Основное внимание уделяется вопросам сходимости и устойчивости. Некоторые из результатов принадлежат автору.

В новом издании добавлены некоторые результаты, касающиеся метода конечных элементов и устойчивости.

*Для студентов технических вузов и математических факультетов университетов,
специалистов в области приближенных методов и их приложений*

УДК 519.6(075.8)

ББК 22.143я73

Рецензенты:

*Рябов В. М., доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой методов вычислений Санкт-Петербургского государственного университета;*

*Демьянович Ю. К., доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой параллельных алгоритмов Санкт-Петербургского государственного университета*

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Компьютерная верстка	<i>Натальи Смирновой</i>
Корректор	<i>Наталья Першакова</i>
Дизайн серни	<i>Игоря Цырульникова</i>
Оформление обложки	<i>Елены Беляевой</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 22.12.05.

Формат 70×100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,22.

Тираж 2000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.02.953 Д.006421.11.04
от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой по надзору
в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-737-0

© Даугавет И. К., 2006

© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2006

Оглавление

Предисловие ко второму изданию	1
Из предисловия к первому изданию	3
Глава 1. Общая схема приближенных методов.....	7
§ 1. Близкие уравнения.....	7
§ 2. Общая схема приближенных методов. Сходимость	14
§ 3. Устойчивость.....	19
Глава 2. Приближенное решение интегральных уравнений.....	29
§ 1. Метод замены ядра на вырожденное	29
§ 2. Метод механических квадратур. Теорема о сходимости.....	36
§ 3. Метод механических квадратур. Оценка погрешности	50
§ 4. Итеративное решение систем уравнений метода механических квадратур	63
Глава 3. Проекционные методы	71
§ 1. Сущность проекционных методов	71
§ 2. Теорема о сходимости	78
§ 3. Метод Галеркина для уравнений второго рода.....	85
§ 4. Метод моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений.....	96
§ 5. Метод наименьших квадратов.....	102
§ 6. Метод Ритца	108
§ 7. Применение метода Ритца к обыкновенным дифференциальным уравнениям	122
§ 8. Применение метода Ритца к дифференциальным уравнениям эллиптического типа.....	132
§ 9. Метод Галеркина	142

Глава 4. Метод сеток.....	149
§ 1. Сущность метода сеток	149
Метод сеток для обыкновенного дифференциального уравнения.....	149
Аппроксимация дифференциальных выражений.....	150
Метод сеток для эллиптического уравнения.....	156
Вариационно-разностные схемы	161
Особенности применения метода сеток к нестационарным уравнениям	166
Особенности применения общей схемы приближенных методов к исследованию метода сеток	173
§ 2. Вспомогательные сведения из линейной алгебры	177
§ 3. Метод конечных элементов для обыкновенного дифференциального уравнения	184
§ 4. Метод сеток для эллиптических уравнений.....	193
§ 5. Явная разностная схема для уравнения теплопроводности	202
§ 6. О системах уравнений	210
§ 7. Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности.....	226
§ 8. Метод сеток для уравнения колебаний струны	240
§ 9. Метод прогонки	257
Литература.....	271

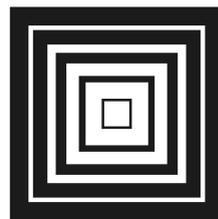
Предисловие ко второму изданию

Дополнения, внесенные во второе издание, касаются в основном вопросов устойчивости проекционных методов и сверхсходимости метода конечных элементов. Изменены некоторые доказательства.

Нумерация теорем, формул в каждом параграфе своя. Ссылки на формулы, теоремы из других параграфов той же главы даются с указанием параграфа, а из другой главы — с указанием параграфа и главы.

Читателям, заинтересованным в более детальном изучении затронутых в книге вопросов, можно рекомендовать книги [2], [14]. В качестве дополнительной литературы к главе 1 можно указать также [10], глава XIV, к главе 2 — [11], глава II, к главе 3 — [15], к главе 4 — [18], [19].

Автор благодарит Ю. К. Демьяновича и В. М. Рябова, замечания которых были учтены при составлении окончательного текста книги.



Общая схема приближенных методов

§ 1. Близкие уравнения

Приведем некоторые основные понятия, которые будут использоваться на протяжении всей книги.

Пусть U и F — два линейных нормированных пространства. Оператор A , заданный на линейном множестве $D(A) \subset U$, со значениями в F будем называть *линейным*, если он однороден и аддитивен. Область задания $D(A)$ оператора A обычно будем считать плотной в U . Таким образом, ограниченность (или, что то же самое, непрерывность) оператора не входит в понятие линейности. Однако в тех случаях, когда линейный оператор A еще и ограничен, обычно будем считать, что область его задания — все пространство: $D(A) = U$. Символом $L(U, F)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из U в F . Как известно, $L(U, F)$ само является линейным нормированным пространством. Наконец, через $R(A)$ будем обозначать множество значений оператора A :

$$R(A) = \{f \mid f \in F, \quad f = Au, \quad u \in D(A)\}.$$

Будем говорить, что линейный оператор A *обратим*, если однородное уравнение $Au = 0$ имеет только нулевое решение. В этом случае оператор A устанавливает между $D(A)$ и $R(A)$ взаимнооднозначное соответствие, и на множестве $R(A)$ определен оператор A^{-1} , называемый обратным по отношению к A , такой, что для любого $u \in D(A)$ будет $A^{-1}Au = u$ и для любого $f \in R(A)$ будет $AA^{-1}f = f$. Оператор A^{-1} также линеен (т. е. аддитивен и однороден), причем

$$D(A^{-1}) = R(A), \quad R(A^{-1}) = D(A).$$

Задача, рассматриваемая в этом параграфе, такова. Пусть дано линейное уравнение

$$Au = f \quad (1)$$

и другое линейное уравнение

$$(A + \Delta A)u = f + \Delta f, \quad (2)$$

в котором линейный оператор ΔA и элемент $\Delta f \in F$ в каком-то смысле малы. Пусть u^* — решение уравнения (1), а $u^* + \Delta u$ — решение уравнения (2). Требуется оценить разность Δu между этими решениями.

Прежде чем перейти к решению этой задачи, отметим, что она бывает интересна в разных отношениях, и ее решение находит применение в различных ситуациях. Перечислим некоторые из них.

1. Довольно частым является тот случай, когда само уравнение, которое требуется решить, известно нам неточно. Например, неточно (или даже таблично) заданы коэффициенты дифференциального уравнения и его правая часть. Вопрос о том, к каким ошибкам в решении приведет неточность в задании уравнения, приводит нас к поставленной задаче.
2. Распространенным приближенным методом является метод замены уравнения на более простое, "близкое". Так, интегральные уравнения часто решают методом замены ядра на вырожденное (этот метод будет подробно изучаться в главе 2). Ясно, что оценка погрешности метода замены уравнения на близкое сводится к рассматриваемой задаче.
3. Как будет видно из дальнейшего, большинство методов приближенного решения интегральных и дифференциальных уравнений приводят к системам линейных алгебраических уравнений. Матрица коэффициентов и правые части этой системы строятся по некоторым правилам, исходя из заданного уравнения. Вычисление коэффициентов и правых частей, как правило, не может быть произведено вполне точно хотя бы из-за неизбежных ошибок округления. Вопрос о том, насколько исказится приближенное решение из-за неточного построения системы линейных уравнений, также приводит нас к поставленной задаче.
4. Пусть нам известен некоторый элемент $\bar{u} \in D(A)$, который из каких-либо соображений нам угодно принять за приближенное решение уравнения (1). Для оценки качества этого приближенного решения естественно подставить его в уравнение. Разность между результатом подстановки в левую часть и правой частью $A\bar{u} - f$ называется *невязкой* приближенного

решения \bar{u} . Само приближенное решение \bar{u} , как очевидно, является "точным" решением уравнения $Au = f + \Delta f$, где $\Delta f = A\bar{u} - f$ есть его невязка. Таким образом, оценка погрешности приближенного решения через его невязку также сводится к поставленной задаче. Некоторая специфика здесь заключается в том, что $\Delta A = 0$. Как видно из сказанного, ошибку, вызванную неточным построением решения, можно трактовать как следствие неточного задания правой части. Это позволяет, в частности, вопрос о том, с какой точностью следует решать упомянутые в пункте 3 системы уравнений, заменять вопросом о допустимой невязке полученных приближенных решений этих систем.

Поставленная задача решается следующей теоремой.

Теорема 1

Пусть выполнены условия: 1) пространство U полно; 2) $R(A) = F$, оператор A обратим и обратный оператор A^{-1} ограничен¹; 3) оператор ΔA ограничен и $\|A^{-1}\Delta A\| \leq \rho < 1$.

Тогда:

а) $R(A + \Delta A) = F$, оператор $A + \Delta A$ обратим, обратный оператор $(A + \Delta A)^{-1}$ ограничен и

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \rho}; \quad (3)$$

б) для разности решений уравнений (2) и (1) выполняется оценка

$$\|\Delta u\| \leq \frac{1}{1 - \rho} (\rho \|u^*\| + \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta f\|). \quad (4)$$

Доказательство

а) Пусть для некоторого элемента $f \in F$ нашлось решение u_0 уравнения $(A + \Delta A)u = f$, так что $(A + \Delta A)u_0 = f$. Применяя к обеим частям последнего тождества оператор A^{-1} , получаем $(I + A^{-1}\Delta A)u_0 = A^{-1}f$. Так как норма

¹ Тем самым уравнение (1) однозначно разрешимо при любой правой части f .

оператора $A^{-1}\Delta A$ меньше единицы, то по теореме Банаха существует обратный оператор $(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}$, причем

$$\|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \leq \frac{1}{1 - \rho}.$$

Поэтому $u_0 = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}f$. В частности, если $f = 0$, то непременно и $u_0 = 0$, и потому оператор $A + \Delta A$ обратим. Пусть теперь f — произвольный элемент пространства F . Положим $u_0 = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}f$. Для u_0 справедливо равенство $u_0 = A^{-1}f - A^{-1}\Delta Au_0$, из которого видно, что $u_0 \in D(A) = D(A + \Delta A)$. Применяя к элементу u_0 оператор $A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$, видим, что $(A + \Delta A)u_0 = f$. Итак, при любом $f \in F$ уравнение $(A + \Delta A)u = f$ имеет решение $u_0 = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}f$. Тем самым показано, что $R(A + \Delta A) = F$ и $(A + \Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}$. Остается отметить, что из последнего равенства вытекают ограниченность оператора $(A + \Delta A)^{-1}$ и оценка (3). Утверждение а) доказано.

б) В силу наложенных условий и уже доказанного утверждения а) уравнения (1) и (2) однозначно разрешимы. Также однозначно разрешимо и уравнение $Au = f + \Delta f$; его решение обозначим через $u^* + \Delta u_1$. Итак, мы имеем тождества

$$Au^* = f, \quad (5)$$

$$(Au^* + \Delta u_1) = f + \Delta f, \quad (6)$$

$$(A + \Delta A)(u^* + \Delta u) = f + \Delta f. \quad (7)$$

Вычитая из (6) тождество (5), получаем $A\Delta u_1 = \Delta f$, откуда $\Delta u_1 = A^{-1}\Delta f$ и

$$\|\Delta u_1\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta f\|. \quad (8)$$

Вычитая из тождества (7) тождество (6), находим

$$(A + \Delta A)(\Delta u - \Delta u_1) = -\Delta A(u^* + \Delta u_1),$$

откуда (вспоминая, что $(A + \Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}$),

$$\begin{aligned} \|\Delta u - \Delta u_1\| &\leq \left\| (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} \right\| \cdot \left\| A^{-1}\Delta A \right\| \cdot \left(\|u^*\| + \|\Delta u_1\| \right) \leq \\ &\leq \frac{\rho}{1-\rho} \left(\|u^*\| + \|\Delta u_1\| \right) \leq \frac{\rho}{1-\rho} \left(\|u^*\| + \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta f\| \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Из оценок (8) и (9) сразу же следует (4). ■

□ **Замечание 1.** Поскольку $\|u^*\| = \|A^{-1}f\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|f\|$, то из неравенства (4) вытекает оценка

$$\|\Delta u\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\rho} (\rho \|f\| + \|\Delta f\|). \quad (10)$$

□ **Замечание 2.** Уравнения (1) и (2) можно считать близкими, если малы величины $\|A^{-1}\Delta A\|$ и $\|\Delta f\|$. В этом случае правые части оценок (4) и (10) будут, вообще говоря, также малы.

□ **Замечание 3.** В приложениях теоремы 1 обычно одно из уравнений (1), (2) считается "точным" — тем, решение которого нас в действительности интересует, а другое — "приближенным", решение которого нам известно или мы собираемся его реально строить. В оценки (4) и (10) эти уравнения входят неравноправно — вычисление их правых частей требует в основном информации об уравнении (1). Поэтому какое из этих уравнений считать "точным", а какое "приближенным", зависит от той задачи, которую мы решаем при помощи теоремы 1. Например, если по заданному "точному" уравнению мы должны выбрать "приближенное", которое дало бы нам решение с заданной точностью, уравнением (1) удобно считать "точное". Если же у нас уже имеются оба уравнения — "точное" и "приближенное", то обычно о "приближенном" уравнении мы располагаем большей информацией (оно уже решено или будет реально решаться, и значительную информацию мы можем получить в процессе решения), и потому именно "приближенное" уравнение выгодно считать уравнением (1), а "точное" — уравнением (2). Вообще, видимо, первый способ ((1) — "точное", (2) — "приближенное" уравнение) более удобен в теоретических вопросах, например, при исследовании сходимости решений последова-

тельности уравнений к решению предельного. Противоположный же способ рассмотрения более удобен, когда требуется вычислить реальную оценку.

В теореме 1 речь шла об оценке абсолютной погрешности при замене решения уравнения (1) решением уравнения (2) (или наоборот). Иногда больший интерес представляет оценка относительной погрешности $\|\Delta u\|/\|u^*\|$. Задача об оценке относительной погрешности будет решаться в предположении, что все операторы A , A^{-1} , ΔA ограничены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть линейный оператор A ограничен вместе с обратным A^{-1} . Числом обусловленности оператора A называется величина

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

В случае, если оператор A не имеет обратного (или A^{-1} не ограничен), иногда считают $\mu(A) = +\infty$. Очевидно, что для любого обратимого оператора A $\mu(A) \geq 1$.

Неформальный смысл числа обусловленности выявляется следующей теоремой.

Введем обозначения:

$$\delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad \delta f = \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}, \quad \delta u = \frac{\|\Delta u\|}{\|u^*\|}$$

— относительные погрешности в операторе A , правой части f и относительная погрешность в решении уравнения (1), вызванная погрешностями в A и f .

Теорема 2

Пусть пространство U — полное и пусть A , A^{-1} , ΔA — ограниченные линейные операторы, причем $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$. Пусть u^* и $u^* + \Delta u$ — решения уравнений (1) и (2) соответственно. Тогда

$$\delta u \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \cdot \delta A} (\delta A + \delta f). \quad (11)$$

Доказательство

Отметим прежде всего, что

$$\|A^{-1}\Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| = \mu(A) \cdot \delta A = \rho < 1,$$

и поэтому выполнены условия теоремы 1. Значит, справедливо неравенство (4). Но

$$\|\Delta f\| = \|f\| \cdot \delta f \leq \|A\| \cdot \|u^*\| \cdot \delta f.$$

Поэтому

$$\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta f\| \leq \mu(A) \delta f \cdot \|u^*\|.$$

Подставив эту оценку в правую часть неравенства (4) и поделив на $\|u^*\|$, получим

$$\delta u \leq \frac{1}{1-\rho} (\rho + \mu(A) \delta f).$$

Остается подставить сюда вместо ρ его значение и вынести $\mu(A)$ за скобку. ■

В предположении, что относительная погрешность δA настолько мала, что величиной $\mu(A)\delta A$ можно пренебречь по сравнению с единицей, качественно оценка (11) выглядит так: относительная погрешность решения оценивается величиной, пропорциональной сумме относительных погрешностей в операторе и в правой части, причем коэффициент пропорциональности — число обусловленности оператора A .

Разумеется, правая часть оценки (11) тем меньше, чем меньше число обусловленности $\mu(A)$. Оператор A и уравнение (1) принято называть *хорошо обусловленными*, если число обусловленности $\mu(A)$ невелико, и *плохо обусловленными*, если $\mu(A)$ большое.

Можно показать, что оценка (11) является точной в том отношении, что для любого обратимого оператора A найдутся такая правая часть f и такие отличные от нулевых погрешности ΔA ($\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$) и Δf , что отношение правой и левой части оценки (11) сколь угодно близко к единице.

§ 2. Общая схема приближенных методов. Сходимость

Пусть требуется решить уравнение

$$Au = f \quad (1)$$

с линейным оператором A , действующим из нормированного пространства U в пространство F . Приближенные методы решения уравнения (1) обычно требуют решения некоторого другого, более простого линейного уравнения, чаще всего системы линейных алгебраических уравнений. Это обстоятельство и будет положено в основу излагаемой ниже общей схемы приближенных методов¹.

Итак, пусть наряду с уравнением (1) задано другое уравнение (или последовательность уравнений)

$$A_n u_n = f_n \quad (2)$$

с линейным оператором A_n , действующим из пространства U_n в пространство F_n . Нормированные пространства U_n и F_n всегда будем считать полными, а оператор A_n всегда будем предполагать ограниченным. Уравнения (1) и (2) считаются некоторым образом связанными между собой. Будем предполагать, что задан линейный ограниченный оператор ψ_n , действующий из пространства F в пространство F_n , и что правая часть f_n уравнения (2) всегда есть результат применения этого оператора к f : $f_n = \psi_n f$. Решение u^* уравнения (1) и решение u_n^* уравнения (2) лежат, вообще говоря, в разных пространствах; поэтому не всегда u_n^* можно рассматривать как приближенное решение уравнения (1). Будем называть u_n^* *каркасом приближенного решения* и считать, что само приближенное решение $u^{(n)}$ восстанавливается по каркасу с помощью линейного ограниченного оператора $\bar{\varphi}_n$, действующего из U_n в U : $u^{(n)} = \bar{\varphi}_n u_n^*$. Наконец, предположим, что задан еще один линейный ограниченный оператор φ_n , действующий из пространства U в про-

¹ Эта основная идея общей теории приближенных методов принадлежит Л. В. Канторовичу, а та конкретная схема, о которой идет речь далее, — М. К. Гавурину.

пространство U_n . Роль этого оператора будет выяснена позже. Пока заметим только, что он не связан с алгоритмом метода; $\varphi_n u$ есть "представитель" элемента u в пространстве U_n .

Все введенные пространства и операторы можно изобразить на схеме (рис. 1).

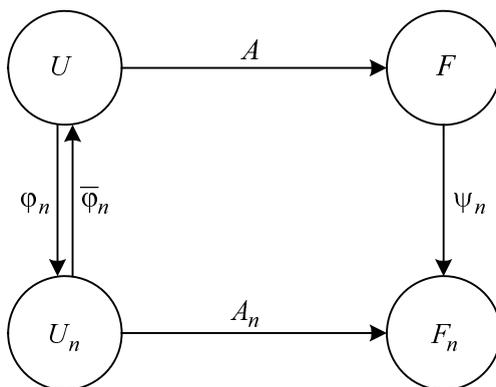


Рис. 1

Перейдем к вопросу о сходимости приближенных решений $u^{(n)}$ к точному u^* . При этом, конечно, считается, что (2) — последовательность уравнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1

Мерой аппроксимации уравнения (1) уравнением (2) на элементе $u \in D(A)$ называется число

$$\gamma_n(u) = \|A_n \varphi_n u - \psi_n A u\|.$$

Говорят, что последовательность операторов A_n аппроксимирует оператор A на элементе u , если $\gamma_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Пусть δ_n — некоторая бесконечно малая величина. Условимся говорить, что уравнения (2) аппроксимируют на элементе u уравнение (1) с порядком δ_n , если $\gamma_n(u) = O(\delta_n)$.

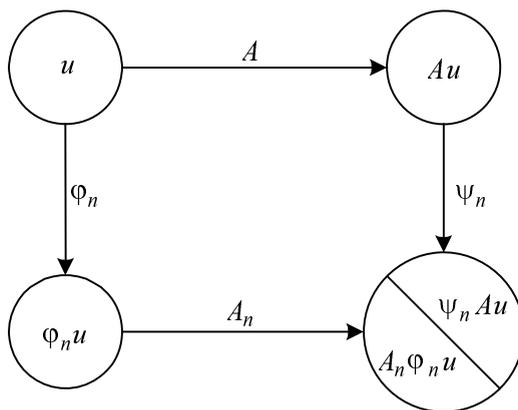


Рис. 2

Формула, определяющая меру аппроксимации, легко запоминается с помощью схемы (рис. 2), которую следует сопоставить со схемой, изображенной на рис. 1: мера аппроксимации есть норма разности двух элементов, указанных в правом нижнем кружочке. Поясним смысл меры аппроксимации еще следующим образом. Каждый элемент $\bar{u} \in D(A)$ есть решение уравнения $Au = \bar{f}$, где $\bar{f} = A\bar{u}$. Соответствующее этому уравнению "приближенное" уравнение есть $A_n u_n = \bar{f}_n$, где $\bar{f}_n = \psi_n \bar{f} = \psi_n A\bar{u}$. Поэтому $\gamma_n(u) = \|A_n \phi_n \bar{u} - \bar{f}_n\|$ — норма невязки, которая получается при подстановке в "приближенное" уравнение "представителя" точного решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

Будем говорить, что *каркасы приближенных решений сходятся*, если выполняется соотношение $\|\phi_n u^* - u_n^*\| \rightarrow 0$.

Теорема 1

(о сходимости каркасов приближенных решений)

Пусть существует решение u^* уравнения (1) и пусть при некотором n существует ограниченный обратный оператор A_n^{-1} . Тогда

$$\|\phi_n u^* - u_n^*\| \leq \|A_n^{-1}\| \gamma_n(u^*), \quad (3)$$

и если ограниченные операторы A_n^{-1} существуют при всех достаточно больших n и

$$\|A_n^{-1}\| \cdot \gamma_n(u^*) \rightarrow 0, \quad (4)$$

то каркасы приближенных решений сходятся.

Доказательство

Сходимость каркасов при условии (4) сразу же следует из (3), поэтому только это неравенство и требуется доказать. Поскольку

$$u_n^* = A_n^{-1} f_n = A_n^{-1} \psi_n f \text{ и } f = Au^*,$$

то

$$\varphi_n u^* - u_n^* = A_n^{-1} A_n \varphi_n u^* - A_n^{-1} \psi_n f = A_n^{-1} (A_n \varphi_n u^* - \psi_n Au^*),$$

и потому

$$\|\varphi_n u^* - u_n^*\| \leq \|A_n^{-1}\| \cdot \|A_n \varphi_n u^* - \psi_n Au^*\| = \|A_n^{-1}\| \cdot \gamma_n(u^*). \blacksquare$$

Следствие. Если операторы A_n аппроксимируют оператор A на решении u^* и если при достаточно больших n существуют непрерывные обратные операторы A_n^{-1} и они равномерно ограничены ($\|A_n^{-1}\| \leq C$), то каркасы приближенных решений сходятся.

- **Замечание 1.** Полезно иметь в виду, что мера аппроксимации на точном решении $\gamma_n(u^*)$ есть, как об этом уже говорилось ранее, $\|A_n \varphi_n u^* - f_n\|$. Оценка (3) в связи с этим приобретает смысл оценки погрешности "приближенного решения" $\varphi_n u^*$ уравнения (2) через норму его невязки и может рассматриваться как частный случай оценки, указанной в *теореме 1* из § 1.
- **Замечание 2.** Неформальный смысл сходимости каркасов определяется трактовкой решения приближенного уравнения в конкретных методах. Поясним это примером. Обычно искомый элемент $u^* \in U$ есть функция, заданная в некоторой области. Часто (так это будет, например, в методе сеток) каркас приближенного решения можно трактовать как таблицу

приближенного решения. Если определить оператор φ_n таким образом, чтобы функции u он ставил в соответствие таблицу значений этой функции в тех же узлах, то сходимость каркасов будет означать близость (при достаточно больших n) таблиц точного и приближенного решений.

Обратимся теперь непосредственно к вопросу о сходимости приближенных решений $u^{(n)}$.

Теорема 2

(о сходимости приближенных решений)

Пусть существует точное решение u^* . Пусть при некотором n существует ограниченный обратный оператор A_n^{-1} . Тогда

$$\|u^{(n)} - u^*\| \leq \|\bar{\varphi}_n\| \cdot \|A_n^{-1}\| \cdot \gamma_n(u^*) + \|\bar{\varphi}_n \varphi_n u^* - u^*\|. \quad (5)$$

Если ограниченные обратные операторы A_n^{-1} существуют при всех достаточно больших n и выполняются соотношения

$$\|\bar{\varphi}_n\| \cdot \|A_n^{-1}\| \cdot \gamma_n(u^*) \rightarrow 0, \quad \bar{\varphi}_n \varphi_n u^* \rightarrow u^*,$$

то $u^{(n)} = \bar{\varphi}_n u_n^* \rightarrow u^*$.

Доказательство

Доказательство этой теоремы сразу же сводится к доказательству неравенства (5). Очевидно, что

$$u^{(n)} - u^* = \bar{\varphi}_n u_n^* - u^* = \bar{\varphi}_n (u_n^* - \varphi_n u^*) + \bar{\varphi}_n \varphi_n u^* - u^*.$$

Отсюда

$$\|u^{(n)} - u^*\| \leq \|\bar{\varphi}_n\| \cdot \|u_n^* - \varphi_n u^*\| + \|\bar{\varphi}_n \varphi_n u^* - u^*\|.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться для оценки величины $\|u_n^* - \varphi_n u^*\|$ неравенством (3). ■