Указания к решению задач и ответы

При нумерации задач первая цифра означает главу, вторая — параграф, третья — номер задачи. Если к данному параграфу предложена только одна задача, то третья цифра отсутствует.

Как уже отмечалось во введении, указания приводятся лишь для тех задач, решение которых представляется не вполне очевидным.

Задача 1.1.1. Доказательство от противного

Задача 1.1.2. От противного. В предположении, что существуют два полинома наилучшего приближения, рассмотреть их полусумму.

Задача 1.2. Воспользоваться свойствами конечных разностей.

Задача 1.4.3. Для любого полинома $P_n \in \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство

$$|P_n(x)| \leq \lambda_n(x) \max_k |P_n(x_k)|.$$

Задача 1.4.4. На промежутке между двумя соседними узлами $\lambda_n(x)$ совпадает с некоторым полиномом степени n. Изучить свойства этого полинома вне определяющего его промежутка.

Задача 1.6.1. Использовать формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Задача 1.6.2. Воспользоваться предыдущей задачей.

Задача 1.7.1. Воспользоваться нечетностью этих тригонометрических полиномов.

Задача 2.1.1. Ответ: найдется.

Задача 2.1.3. Построить непрерывно дифференцируемую функцию f со строго положительной производной, для которой $R(f) = 0$.

Задача 2.1.4 Подобрать функцию, которая в узлах имеет значения $f(x_k) = \mathrm{sign} A_k$ и отлична от единицы лишь в малых окрестностях узлов.

Задача 2.4.3. Использовать предыдущую задачу, взяв в качестве p_n полином Чебышева.

Задача 2.4.5. Воспользоваться предыдущей задачей.

Задача 2.4.6. Узлы такой формулы — корни полинома, ортогонального с весом $(x-a)(b-x)w(x)$.

Задача 2.5.1. Ответ:

$$C_n = \frac{\pi}{(2n)!\, 2^{2n-1}}\,.$$

Задача 2.5.2. Использовать теорему об алгебраической степени точности интерполяционных квадратурных формул. Ответ: $N = 2$, исходная квадратурная формула — формула Гаусса.

Задача 2.6.2. Ядро $k(y,t)$ есть функция Грина краевой задачи

$$w'' + w = f, \quad w(0) = w(y) = 0:$$

решение этой задачи имеет представление

$$w(x) == \int_0^h K(x, t_f(t)\, dt.$$

Ответ:

$$K(x,t) = -\frac{1}{\sin h} \begin{cases} \sin t\, \sin(h-x) & \text{при } t \leq x, \\ \sin x\, \sin(h-t) & \text{при } t \geq x. \end{cases}$$

Задача 2.6.3. Ответ:

$$C(x) = -\frac{2\sin\frac{x}{2}\, \sin\frac{h-x}{2}}{\cos\frac{h}{2}}.$$

Задача 2.7.1. Использовать то обстоятельство, что при некотором $N \geq n$ коэффициент Фурье рассматриваемой функции f с номером N отличен от нуля.

Задача 2.7.2. Вычислить коэффициенты Фурье функции, стоящей в правой части доказываемого равенства.

Задача 3.1.2. Ответ: $\|A\|' = \|BAB^{-1}\|$.

Задача 3.1.3. Ответ: для векторных норм:

$$\max \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} = \max \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_1} = \max \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} = 1, \quad \max \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} = \max \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n}, \quad \max \frac{\|x\|_1}{\|x\|_\infty} = n,$$

для матричных норм:

$$\max \frac{\|A\|_2}{\|A\|_1} = \max \frac{\|A\|_1}{\|A\|_2} = \max \frac{\|A\|_\infty}{\|A\|_2} = \max \frac{\|A\|_2}{\|A\|_\infty} = \sqrt{n}, \quad \max \frac{\|A\|_\infty}{\|A\|_1} = \max \frac{\|A\|_1}{\|A\|_\infty} = n.$$

Задача 3.2.2. См. теорему 3 в § 4 главы 4.

Задача 3.2.3. Ответ: такое утверждение неверно

Задача 3.3. Выбрать матрицу B с теми же собственными векторами, что у матрицы A, подобрав соответствующие поставленной задаче ее собственные числа.

Задача 3.4. Ответ. Матрицы L и U имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_n & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_n \end{pmatrix},$$

где $u_1 = b_1$, $v_1 = c_1$ и при $m = 1, 2, \dots, n-1$ $l_{m+1} = a_{m+1}/u_m$, $u_{m+1} = b_{m+1} - l_{m+1}v_m$, $v_{m+1} = c_{m+1}$.

Задача 3.5.2. Воспользоваться утверждением, содержащимся в задаче 3.2.2.

Задача 3.7. Ответ: при обычных условиях $p_k \to 2\mathrm{Re}\lambda_1$.

Задача 3.10. Ответ: погрешность имеет порядок

$$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{4s} + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{2s}\right).$$

Задача 4.3.1. Воспользоваться теоремой 3 из предыдущего параграфа.

Задача 4.3.2. Воспользоваться той же теоремой 3.

Задача 4.3.3. Показать, что если $\|x_{2\nu} - x^*\| \le \varepsilon$, то $\|x_{2\nu+2} - x^*\| \le C\varepsilon^3$.

Задача 5.1. Ответ: $\mathcal{O}(h^3)$.

Задача 5.2. Рассмотреть случай, когда интегрируемая функция f есть полином степени $p+2$.

Задача 5.4. Связь с квадратурной формулой Симпсона.

Задача 5.5. Ответ: метод абсолютно неустойчив.