Глава 4
Приближенное решение нелинейных уравнений и систем

§1. Метод итерации. Принцип сжатых отображений

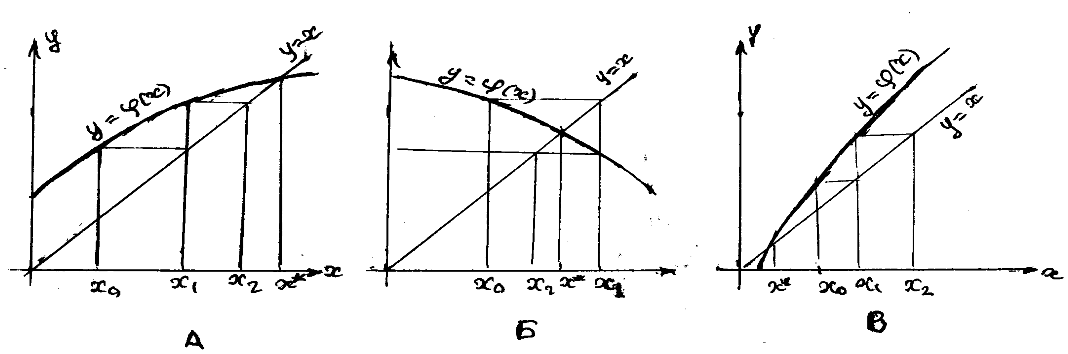
Пусть дано уравнение

$$t = \varphi(t), \tag{1}$$

где φ — вещественная функция вещественной переменной t. Метод итерации для решения этого уравнения состоит в том, что, начиная с некоторого начального приближения t_0, строится последовательность

$$t_{s+1} = \varphi(t_s).$$

Очевидно, что если функция $\varphi(t)$ непрерывна и $t_s \to t^*$, то t^* — корень уравнения (1). Графически t^* — это абсцисса точки пересечения графика функции $\varphi(t)$ с биссектрисой первого координатного угла. Метод итерации имеет такой геометрический смысл. На графике по предыдущему приближению (для определенности t_0) следующее (t_1) строится таким образом: через точку с координатами $(t_0, \varphi(t_0))$ проводится прямая, параллельная оси абсцисс, и абсцисса (равная ординате) точки ее пересечения с биссектрисой первого координатного угла и есть t_1. На приводимом рисунке изображены графики, соответствующие различным случаям поведения функции $\varphi(t)$ в окрестности корня t^*. Из рассмотрения этих графиков можно сделать следующие выводы.



1) Если $|\varphi'(t)| < 1$ (графики А и Б), то следует ожидать сходимость метода.

2) Если $|\varphi'(t)| > 1$ (график В), то следует ожидать расходимость метода.

3) Если $0 < \varphi'(t) < 1$ (график А), то приближения t_s лежат по одну сторону от решения t^*.

4) Если $-1 < \varphi'(t) < 0$ (график Б), то имеет место альтернирующая сходимость, т.е. t^* лежит между последовательными приближениями t_s и t_{s+1}.

Однако делать строгие выводы мы будем сразу для системы нелинейных уравнений.

Пусть дана система нелинейных уравнений

$$\xi_k = \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_n), \qquad k = 1, \dots, n,$$

которую будем записывать в векторной форме

$$x = \Phi(x), \tag{2}$$

где $x = (\xi, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$. Метод итерации состоит в том, что, выбрав начальное приближение x_0, мы строим последовательные приближения по формуле $x_{s+1} = \Phi(x_s)$. Дальше мы считаем, что в $\mathbb{R}^n$ введена некоторая норма $\|.\|$, отображение Φ задано в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Кроме того будем пользоваться обозначением $S_r(y) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \|x - y\| \le r \,\}$ – шар (соответствующий введенной норме!) радиуса r с центром в точке y.

[* З а м е ч а н и е 1. Доказываемая ниже теорема 1 есть частный случай более общей теоремы 2 из § 4, которая в свою очередь следует из принципа сжатых отображений в метрических пространствах (теорема 1 в том же § 4). Подготовленному читателю можно посоветовать вместо чтения непосредственно следующей за этим замечанием теоремы обратиться сразу к теоремам 1 и 2 из § 4 — приводимые там доказательства более общих утверждений в некотором смысле даже проще. ***]**

Теорема 1. *Пусть $x_0 \in \Omega$ и выполнены следующие условия:*

1^0. $\|\Phi(x_0) - x_0\| \le m$,

2^0. существует число $q < 1$, такое что для любых точек $x', x'' \in \Omega$ выполняется неравенство $\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \le q\|x' - x''\|$,

3^0. $S_r(x_0) \subseteq \Omega$, где $r = m/(1-q)$.

Тогда

а) в области Ω существует и притом единственное решение x^* уравнения (1),

б) $x^* \in S_r(x_0)$,

в) $x_s \to x^*$,

г) выполняются оценки погрешности:

$$\|x_s - x^*\| \le \frac{mq^s}{1-q}, \qquad \|x_s - x^*\| \le \frac{q}{1-q}\|x_s - x_{s-1}\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала методом индукции, что при всех $s \ge 0$ α) $x_s \in S_r(x_0)$ и β) $\|x_{s+1} - x_s\| \le mq^s$. Действительно, при $s = 0$ α) очевидно и по условию 1^0 $\|x_1 - x_0\| \le m$, так что β) также выполнено. Докажем возможность индуктивного перехода от s к $s+1$:

α) $\|x_{s+1} - x_0\| \le \|x_{s+1} - x_s\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \le mq^s + mq^{s-1} + \dots + m \le m/(1-q) = r$;

β) $\|x_{s+2} - x_{s+1}\| = \|\Phi(x_{s+1}) - \Phi(x_s)\| \le q\|x_{s+1} - x_s\| \le mq^{s+1}$.

Из β) следует, что при любом натуральном p

$$\begin{aligned} \|x_{s+p} - x_s\| &\le \|x_{s+p} - x_{s+p-1}\| + \dots + \|x_{s+1} - x_s\| \le \\ &\le mq^{s+p-1} + \dots + mq^s \le \frac{mq^s}{1-q} \to 0, \end{aligned} \tag{3}$$

так что последовательность $\{x_s\}$ сходится в себе, и потому сходится: $x_s \to x^*$. Из соотношения $x_s \in S_r(x_0)$ вытекает, что и $x^* \in S_r(x_0)$, а из непрерывности отображения Φ, что $x^* = \Phi(x^*)$. Этим существование решения и утверждения б) и в) теоремы доказаны. Первая из оценок г) получается предельным переходом при $p \to \infty$ из (3), а вторая также предельным переходом по p из следующего неравенства:

$$\|x_{s+p} - x_s\| \le \|x_{s+p} - x_{s+p-1}\| + \cdots + \|x_{s+1} - x_s\| \le$$
$$\le (q^p + q^{p-1} + \cdots + q)\|x_s - x_{s-1}\| \le \frac{q}{1-q}\|x_s - x_{s-1}\|,$$

которое следует из того, что $\|x_{j+1} - x_j\| = \|\Phi(x_j) - \Phi(x_{j-1})\| \le q\|x_j - x_{j-1}\|$. Единственность решения доказывается от противного. Пусть $x^*, x^{**} \in \Omega$ — два решения. Тогда

$$\|x^* - x^{**}\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(x^{**})\| \le q\|x^* - x^{**}\|,$$

откуда следует, что $x^* = x^{**}$. ■

Замечание 2. Решение уравнения (2) обычно называют *неподвижной точкой* отображения Φ. Отображение Φ, удовлетворяющее условию 2^0 теоремы, называют *сжатым* или *сжимающим*. В связи с этим теорему 1 (или некоторые ее модификации) обычно называют *принципом сжатых отображений*. Это один из *принципов неподвижной точки*.

Замечание 3. Первая из оценок г) является *априорной*, а вторая — *апостериорной*. Эти понятия уже были введены ранее в § 5 главы 3.

Введем понятие интеграла от вектор-функции. Пусть вектор $x(t)$ непрерывно зависит от $t \in [a, b]$. Тогда по определению

$$\int_a^b x(t)\,dt = y = (\eta_1, \ldots, \eta_n), \text{ где } \eta_k = \int_a^b \xi_k(t)\,dt.$$

Лемма. *Выполняется неравенство*

$$\left\|\int_a^b x(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|x(t)\|\,dt.$$

Доказательство. При натуральных N положим $h = (b-a)/N$, $t_j = a + (j - \frac{1}{2})h$ и $Q_N = h\sum_{j=1}^N x(t_j)$, так что k-ая компонента вектора Q_N есть квадратурная сумма формулы средних прямоугольников для интеграла от $\xi_k(t)$ и потому при $N \to \infty$ сходится к интегралу от этой компоненты. Таким образом векторы Q_N сходятся к интегралу от $x(t)$. Очевидно неравенство $\|Q_N\| \le h\sum_{j=1}^N \|x(t_j)\|$. Остается совершить предельный переход в этом неравенстве, заметив, что правая его честь есть соответствующая квадратурная сумма для интеграла от $\|x(t)\|$. ■

Отображение Φ называется дифференцируемым в точке x_0, если в этой точке дифференцируемы все его составляющие φ_k. В этом случае используется обозначение $\Phi'(x_0)$ – матрица Якоби:

$$\Phi'(x_0) = \left\{\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_j}(x_0)\right\}.$$

Отображение Φ непрерывно дифференцируемо в Ω, если таковы все φ_k.

Мы по-прежнему считаем, что в $\mathbb{R}^n$ введена некоторая векторная норма, и норма матрицы — это всегда операторная норма, порожденная введенной векторной.

Теорема 2. *Пусть область Ω выпукла, отображение Φ непрерывно дифференцируемо в Ω и при всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство $\|\Phi'(x)\| \le q$. Тогда для всех $x', x'' \in \Omega \quad \|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \le q\|x' - x''\|$.*

Доказательство. Для произвольных $x', x'' \in \Omega$ при $t \in [0,1]$ рассмотрим вектор-функцию

$$y(t) = \big(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)\big) = \Phi\big((1-t)x' + tx''\big) = \Phi\big(x' + t(x'' - x')\big)$$

(ввиду выпуклости $\Omega \;\; (1-t)x' + tx'' \in \Omega$). Очевидно, что

$$y(0) = \Phi(x'), \quad y(1) = \Phi(x''), \quad \eta_k(t) = \varphi_k\big(x' + t(x'' - x')\big).$$

Теперь имеем:

$$\eta_k(1) - \eta_k(0) = \int_0^1 \eta_k'(t)\, dt,$$

$$\eta_k'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_j}\big(x' + t(x'' - x')\big) \cdot (\xi_j'' - \xi_j'),$$

$$y(1) - y(0) = \int_0^1 \Phi'\big(x' + t(x'' - x')\big) \cdot (x'' - x')\, dt,$$

$$\|\Phi(x'') - \Phi(x')\| = \|y(1) - y(0)\| \le$$
$$\le \int_0^1 \|\Phi'\big(x' + t(x'' - x')\big)\| \cdot \|x'' - x'\|\, dt \le q\|x'' - x'\|. \quad \blacksquare$$

Доказанная теорема позволяет в принципе сжатых отображений (теорема 1) в случае выпуклой области Ω условие 2^0 заменить на более жесткое, но часто легче проверяемое условие $\|\Phi'(x)\| \le q < 1$ при всех $x \in \Omega$. Обычно при применении полученного утверждения наиболее удобно использовать норму $\|\cdot\|_\infty$ или $\|\cdot\|_1$, поскольку именно для этих векторных норм порожденные ими матричные вычисляются по простым формулам.

Задача 1. Сформулировать принцип сжатых отображений в той форме, как это предлагается в последнем абзаце. Обратить внимание, что предположения о выпуклости области Ω не требуется (за исключением утверждения о единственности) — достаточно воспользоваться выпуклостью $S_r(x_0)$.

Задача 2. Показать, что правая часть во второй из оценок г) в теореме 1 всегда не больше правой части в первой.

Задача 3. Показать, что в § 5 главы 3 теорема 2 может быть получена как следствие доказанной в этом параграфе теоремы 1.

§2. Метод итерации (продолжение)

В этом параграфе сосредоточены результаты, имеющие локальный характер. Мы будем предполагать, что система нелинейных уравнений имеет решение x^*, и нас будет интересовать вопрос, при каких условиях при любом начальном приближении, достаточно близком к точному решению, метод итерации будет к нему сходиться, а также характер (быстрота) этой сходимости.

Напомним из курса анализа: функция n переменных $\varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если она имеет в этой точке частные производные и по всякому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\|x - x_0\|_2 < \delta$

$$\left|\varphi(x) - \varphi(x_0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}(\xi_j - \xi_j^0)\right| < \varepsilon\|x - x_0\|_2.$$

Отсюда легко следует, что данному в предыдущем параграфе определению дифференцируемости отображения $\Phi(x)$ в точке x_0 эквивалентно следующее: по всякому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\|x - x_0\|_2 < \delta$

$$\|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\|_2 < \varepsilon\|x - x_0\|_2.$$

Ввиду эквивалентности всех заданных в $\mathbb{R}^n$ норм норму $\|\cdot\|_2$ в этим неравенств можно заменить на любую другую – получится эквивалентное определение.

Ниже, как и в предыдущем параграфе, норма матрицы — это всегда операторная норма, порожденная введенной в $\mathbb{R}^n$ векторной.

Пусть $\Phi: \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ – отображение, имеющее неподвижную точку $x^* \in \Omega$: $x^* = \Phi(x^*)$. Пусть x^* принадлежит Ω вместе с некоторой окрестностью. Рассматривается итеративная последовательность: $x_{s+1} = \Phi(x_s)$ при некотором начальном приближении x_0.

Теорема 1. *Если отображение Φ дифференцируемо в точке x^* и выполняется неравенство $\|\Phi'(x^*)\| < 1$, то найдется такое $\delta > 0$, что при любом начальном приближении, удовлетворяющем неравенству $\|x_0 - x^*\| < \delta$, последовательность $\{x_s\}$ сходится к x^*.*

Доказательство. Выберем число q так, что $\|\Phi'(x^*)\| < q < 1$, и положим $\varepsilon = q - \|\Phi'(x^*)\|$. По этому ε найдется такое $\delta > 0$, что шар $S_\delta(x^*)$ содержится в Ω и из неравенства $\|x - x^*\| < \delta$ следует что $\|\Phi(x) - \Phi(x^*) - \Phi'(x^*)(x - x^*)\| < \varepsilon\|x - x^*\|$. Если $x \in S_\delta(x^*)$, то

$$\|\Phi(x) - x^*\| = \|\Phi(x) - \Phi(x^*)\| \le \|\Phi'(x^*)\| \cdot \|x - x^*\| + \varepsilon\|x - x^*\| = q\|x - x^*\|.$$

Поэтому, в частности, $\|\Phi(x) - x^*\| < \delta$. Из этого следует, что если начальное приближение удовлетворяет неравенству $\|x_0 - x^*\| < \delta$, то такому же неравенству удовлетворяют и все последующие приближения, а также неравенства $\|x_{s+1} - x^*\| \le q\|x_s - x^*\|$, откуда $\|x_s - x^*\| \le q^s\|x_0 - x^*\|$, и этим доказательство теоремы завершено. ■

При применении этой теоремы в распоряжении исследователя находится параметр q, лежащий в указанных пределах. Увеличение этого параметра ослабляет напрашивающееся утверждение о скорости сходимости, но увеличивает возможную область выбора начального приближения. Кроме того, формулировка теоремы *не инвариантна* относительно введенной в $\mathbb{R}^n$ нормы, так что эта норма – еще один инструмент, находящийся в руках исследователя. В действительности верно несколько более сильное утверждение: условие $\|\Phi'(x^*)\| < 1$ может быть заменено на условие, не зависящее от выбранной нормы: $\rho\big(\Phi'(x^*)\big) < 1$. Здесь $\rho(\Phi'(x^*))$ – спектральный радиус матрицы Якоби $\Phi'(x^*)$. Это утверждение будет доказано ниже, в § 4.

Перейдем к рассмотрению вопросов быстроты сходимости итеративной последовательности.

Определение. Пусть $\alpha > 1$ и дана последовательность векторов $\{ a_s \}$. Говорят, что эта последовательность сходится к вектору a^* *с порядком* α, если существуют такие постоянные C и $q \in (0,1)$, что при всех s

$$\|a_s - a^*\| \le Cq^{\alpha^s}.$$

Грубо говоря, сходимость с порядком α означает, что на каждом шаге приведенная оценка погрешности возводится в степень α.

Пусть имеется некоторый метод (алгоритм), который исходя из произвольного вектора x_0 строит последовательность приближений x_s к интересующему нас вектору x^*. Говорят, что этот метод приближения искомого x^* сходится *с порядком* α, если существует такое $\delta > 0$, что при выполнении условия $\|x_0 - x^*\| < \delta$ последовательность $\{x_s\}$ сходится к x^* с порядком α.

Замечание 1. Сходимость с порядком $\alpha = 2$ называется квадратичной, с порядком 3 — кубической. Существуют еще и такие термины. Последовательность $\{ a_n \}$ сходится к a^* линейно (с быстротой геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$), если существует такая постоянная C, что при всех s $\|a_s - a^*\| \le Cq^s$, и сверхлинейно, если при любом $q > 0$ $\|a_s - a^*\|/q^s \to 0$. Понятие линейной и сверхлинейной сходимости переносится и на методы построения последовательностей.

Замечание 2. Легко видеть, что понятия сходимости с порядком α, линейной и сверхлинейной сходимости инвариантны относительно введенной в $\mathbb{R}^n$ нормы.

Замечание 3. В предыдущей главе мы уже встречались с методами, имеющими линейную сходимость. Это (при выполнении соответствующих условий) методы простой итерации и Зайделя решения систем линейных уравнений и степенной метод нахождения первого (наибольшего по модулю) собственного числа матрицы. Рассмотренный в § 6 предыдущей главы метод уточнения обратной матрицы имеет второй порядок сходимости; формально говоря, это утверждение требует перенесения понятия порядка сходимости на последовательности матриц, что, впрочем, вполне очевидно.

Лемма. *Пусть последовательность $\{x_s\}$ сходится к x^*, m — натуральное число и $y_s = x_{m+s}$. Если последовательность $\{y_s\}$ сходится к x^* с порядком α, то этим же свойством обладает и последовательность $\{x_s\}$.*

Доказательство. Нам известно существование таких C_0 и $q_0 < 1$, что при всех s $\|y_s - x^*\| \le C_0 q_0^{\alpha^s}$. Найдем число q из условия $q^{\alpha^{m+s}} = q_0^{\alpha^s}$, т.е. $q = e^{\alpha^{-m} \ln q_0}$. Число q зависит лишь от q_0 и m, но не от s, причем $q < 1$, поскольку $\ln q_0 < 0$. Теперь имеем $\|x_{m+s} - x^*\| = \|y_s - x^*\| \le C_0 q^{\alpha^{m+s}}$, т.е. $\|x_s - x^*\| \le C_0 q^{\alpha^s}$ при $s \ge m$. Положим теперь $C_1 = \max_{s<m} \|x_s - x^*\|/q^{\alpha^s}$. Тогда при всех $s = 0, 1, 2, \dots$ окажется $\|x^s - x^*\| \le Cq^{\alpha^s}$, где $C = \max\{C_0, C_1\}$. ∎

Замечание 4. Иногда используется такая терминология. Говорят, что последовательность x_s *окончательно обладает* некоторым свойством, если для некоторого m этим свойством обладает последовательность $y_s = x_{m+s}$. В этих терминах доказанная лемма может быть сформулирована так: если некоторая последовательность векторов окончательно сходится с порядком α, то она сходится с порядком α.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$, последовательность $\{x_s\} \subseteq \mathbb{R}^n$ сходится к x^* и такова, что при некоторой постоянной C и всех s*

$$\|x_{s+1} - x^*\| \leq C\|x_s - x^*\|^\alpha. \tag{1}$$

Тогда x_s сходится к x^* с порядком α.

Доказательство. Положим $\beta = 1/(\alpha - 1)$ и определим числа $r_s = C^\beta\|x_s - x^*\|$. Поскольку в силу доказанной леммы нам достаточно доказать, что последовательность $\{x_s\}$ *окончательно* сходится с порядком α (см. замечание 4), мы, не умаляя общности, в праве считать, что выполняется неравенство $q = r_0 < 1$. Умножим неравенство (1) на C^β. Тогда в силу равенства $1 + \beta = \alpha\beta$ его можно записать в виде $r_{s+1} \leq r_s^\alpha$, и последовательно применяя последнее неравенство, мы получим $r_s \leq q^{\alpha^s}$ и тем самым $\|x_s - x^*\| \leq C^{-\beta}q^{\alpha^s}$. ■

Замечание 5. Неравенство (1) часто принимают за определение понятия порядка сходимости последовательностей. Доказанная теорема показывает, что последовательность, сходящаяся с порядком α в смысле такого определения, сходится с тем же порядком и в смысле данного выше определения. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, числовая последовательность $a_s = q^{\alpha^s}/s$ (здесь $q < 1$, $\alpha > 1$, $s = 1, 2, \dots$) сходится к нулю с порядком α, хотя неравенство (1) для нее не выполняется.

Вернемся к методу итерации для систем нелинейных уравнений. Прежде чем доказывать некоторый признак сходимости этого метода с порядком α, введем удобное обозначение для частных производных функции многих переменных. Вектор $J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ с целыми неотрицательными компонентами будем называть мультииндексом, а число $|J| = \sum_{\nu=1}^n j_\nu$ — его длиной. Пусть $f(x)$ — функция n переменных, имеющая соответствующие частные производные. Тогда положим

$$D^J f(x) = \frac{\partial^{|J|} f}{\partial\xi_1^{j_1} \dots \partial\xi_n^{j_n}}.$$

Доказательство признака сходимости с некоторым порядком метода итераций будет основано на следующем известном из курса анализа утверждении. Пусть функция $\varphi(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) $m + 1$ раз непрерывно дифференцируема на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x^* \in \Omega$ и $M \subseteq \Omega$ — выпуклая замкнутая окрестность точки x^*. Пусть $T_m(\varphi, x)$ — "отрезок ряда Тейлора" функции φ, содержащий значения производных функции φ в точке x^* до порядка m включительно. Тогда найдется такая постоянная C, что для всех точек $x \in M$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - T_m(\varphi, x)| \leq C\|x - x^*\|^{m+1}.$$

Постоянная C зависит, конечно, от функции φ (от оценок в M производных φ порядка $m + 1$) и выбранной векторной нормы.

Теорема 3. *Пусть x^* неподвижная точка отображения Φ: $\Phi(x^*) = x^*$, причем все функции $\varphi_k(x)$ $m + 1$ раз непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x^* и при всех $k = 1, 2, \dots, n$ и для всех мультииндексов J, длина которых не превосходит m ($1 \leq |J| \leq m$), $D^J\varphi_k(x^*) = 0$. Тогда метод итерации для нахождения x^* сходится с порядком $m + 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя инвариантность порядка сходимости относительно векторной нормы, выберем в качестве этой нормы $\|\cdot\|_\infty$. Выберем некоторый "шар" (относительно выбранной нормы) $M = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \|x - x^*\|_\infty < \delta \,\}$, в котором все функции φ_k $m+1$ раз непрерывно дифференцируемы. Тогда для всех точек $x \in M$ с некоторыми постоянными C_k выполняются неравенства

$$|\varphi_k(x) - T_m(\varphi_k, x)| \le C_k \|x - x^*\|_\infty^{m+1}.$$

Но $T_m(\varphi_k, x) = \varphi_k(x^*)$, поскольку все производные функций φ_k в точке x^* обращаются в ноль, и полагая $C = \max C_k$, для всех $x \in M$ мы имеем

$$\|\Phi(x) - x^*\|_\infty = \|\Phi(x) - \Phi(x^*)\|_\infty \le C\|x - x^*\|_\infty^{m+1},$$

и тем самым, если δ выбрано настолько малым, что $C\delta^{m+1} < 1$, при $x_0 \in M$ все члены итеративной последовательности $x_{s+1} = \Phi(x_s)$ также будут содержаться в M и для них будет выполняться неравенство $\|x_{s+1} - x^*\|_\infty \le C\|x_s - x^*\|_\infty^{m+1}$, т.е. неравенство (1) из теоремы 2, на которую и остается сослаться. ■

§3. Метод Ньютона

Метод Ньютона сначала рассмотрим для одного уравнения $f(t) = 0$ и заодно кратко укажем некоторые другие методы решения нелинейных уравнений. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня t^* этого уравнения и пусть нам известно достаточно близкое приближение t_0 к этому корню. Тогда, используя формулу Тейлора,

$$0 = f(t^*) = f(t_0) + (t^* - t_0)f'(t_0) + \frac{1}{2}(t^* - t_0)^2 f''(\tau).$$

Последнее слагаемое в правой части мало, и им можно пренебречь, так что t^* с хорошей точностью удовлетворяет уравнению $f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) = 0$. Решение этого уравнения $t_1 = t_0 - f(t_0)/f'(t_0)$ принимается за следующее приближение к решению. Итак, метод Ньютона состоит в следующем. Выбирается некоторое начальное приближение t_0 и строится последовательность

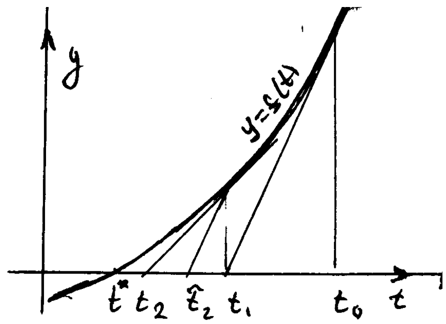
$$t_{s+1} = t_s - \frac{f(t_s)}{f'(t_s)}. \tag{1}$$

Метод Ньютона имеет простой геометрический смысл: t_{s+1} есть абсцисса точки пересечения касательной к графику функции f, построенной в точке $\big(t_s, f(t_s)\big)$, с осью абсцисс. Поэтому в случае одного уравнения метод Ньютона называют иногда *методом касательных.*

Иногда оказывается удобным не пересчитывать на каждом шаге производную и пользоваться упрощенной формулой

$$\tilde{t}_{s+1} = \tilde{t}_s - \frac{f(\tilde{t}_s)}{f'(t_0)}.$$

Этот метод называется *модифицированным методом Ньютона.* Очевидно, что если $\tilde{t}_0 = t_0$, то и $\tilde{t}_1 = t_1$. Модифицированный метод Ньютона также имеет очевидный геометрический смысл. Первое приближение $\tilde{t}_1$, построенное этим методом, совпадает с t_1, построенным методом Ньютона, а далее через точку $\big(\tilde{t}_1, f(\tilde{t}_1)\big)$ графика функции f проводится прямая, параллельная касательной в точке $\big(t_0, f(t_0)\big)$ и за следующее приближение $\tilde{t}_2$ принимается абсцисса точки пересечения этой прямой с осью абсцисс. Так же и для всех следующих приближений через точки $\big(\tilde{t}_s, f(\tilde{t}_s)\big)$ проводятся прямые, параллельные самой первой касательной. Эти графические построения изображены на рисунке.



В случае трудностей с вычислением производной ее значения можно заменять, используя численное дифференцирование. Пусть взяты два близких к точному решению начальных приближения t_0 и t_1. Тогда можно построить следующее приближение по формуле $t_2 = t_1 - f(t_1)/f(t_0, t_1)$, заменив в формуле (1) при $s = 1$ производную $f'(t_1)$ на разделенную разность $f(t_0, t_1)$. Это приводит к последовательности

$$t_{s+1} = t_s - \frac{f(t_s)}{f(t_{s-1}, t_s)} = t_s - \frac{t_s - t_{s-1}}{f(t_s) - f(t_{s-1})} f(t_s). \tag{2}$$

Этот метод называется *методом секущих.* Очевиден геометрический смысл этого метода: приближение t_{s+1} есть абсцисса пересечения с осью абсцисс хорды графика функции f — прямой, проходящей через точки $\big(t_s, f(t_s)\big)$ и $\big(t_{s-1}, f(t_{s-1})\big)$.

Иногда употребляют также *метод хорд.* Предполагается, что известны начальные приближения t_0 и t_1, такие что $f(t_0)$ и $f(t_1)$ имеют противоположные знаки. Тогда построенное по формуле (2) (при $s = 1$) приближение t_2 лежит между t_0 и t_1. Из промежутков $[t_0, t_2]$ и $[t_2, t_1]$ выбирается тот, на концах которого функция f принимает значения разных знаков, и делается новый шаг, аналогичный предыдущему.

Вернемся к методу Ньютона. Формулу (1) можно рассматривать как формулу метода итераций для уравнения $t = \varphi(t)$, где $\varphi(t) = t - f(t)/f'(t)$. Легко проверить, что $\varphi'(t^*) = 0$. Поэтому, в связи с результатами предыдущего параграфа, следует ожидать квадратичную сходимость метода.

Аналогично модифицированный метод Ньютона можно рассматривать как метод итерации для уравнения $t = \tilde{\varphi}(t)$, где $\tilde{\varphi}(t) = t - f(t)/f'(t_0)$ Здесь $\tilde{\varphi}'(t_0) = 0$, и при достаточно хорошем начальном приближении можно ожидать сходимость этого метода с быстротой геометрической прогрессии с малым знаменателем.

Исследование методов Ньютона и модифицированного будем проводить для случая системы уравнений

$$F(x) = 0, \tag{3}$$

где $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$. Согласно формуле Тейлора

$$\mathbb{O} = F(x^*) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x^* - x_0)$$

(напомним, что $F'(x_0)$ — матрица Якоби). Так что исходя из начального приближения x_0 последующие по методу Ньютона строятся по формуле, вполне аналогичной формуле (1):

$$x_{s+1} = x_s - [F'(x_s)]^{-1} F(x_s). \tag{4}$$

Формула модифицированного метода:

$$\tilde{x}_{s+1} = \tilde{x}_s - [F'(x_0)]^{-1} F(\tilde{x}_s). \tag{5}$$

Реально в методе Ньютона нахождение x_{s+1} требует не обращения матрицы (что нерационально), а решения системы линейных уравнений:

$$x_{s+1} = x_s + \Delta x_s, \qquad F'(x_s)\Delta x_s = -F(x_s).$$

В модифицированном методе обращение матрицы может оказаться оправданным, хотя более естественно использовать LU-разложение матрицы $F'(x_0)$.

Теорема 1 (о методе Ньютона). *Пусть x^* – решение системы уравнений (1). Пусть в некоторой окрестности точки x^* отображение $F(x)$ трижды непрерывно дифференцируемо и $\det F'(x^*) \neq 0$. Тогда метод Ньютона сходится для x^* квадратически.*

Доказательство. Очевидно, что $F'(x) \to F'(x^*)$ при $x \to x^*$. Но при условии $\|F'(x) - F'(x^*)\| \cdot \|[F'(x^*)]^{-1}\| < 1$ матрица Якоби $F'(x)$ также обратима (мы используем теорему 5 из §2 главы 3). Поэтому для некоторого $r > 0$ при всех тех x, для которых $\|x - x^*\| \le r$, существует матрица $\Gamma(x) = [F'(x)]^{-1} = \{\gamma_{kj}(x)\}$. Легко видеть, что функции $\gamma_{kj}(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Метод Ньютона теперь запишется так: $x_{s+1} = x_s - \Gamma(x_s)F(x_s) = \Phi(x_s)$. Отображение $\Phi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x^*, и чтобы воспользоваться теоремой 2 из предыдущего параграфа, достаточно убедиться, что $\Phi'(x^*) = 0$. Для компонент отображения Φ имеем

$$\varphi_k(x) = \xi_k - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}(x) \cdot f_j(x),$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_l} = \delta_{kl} - \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial \xi_l}(x) f_j(x) + \gamma_{kj}(x) \frac{\partial f_j}{\partial \xi_l}(x) \right].$$

При $x = x^*$ первые слагаемые в квадратных скобках обращаются в ноль, а сумма по j вторых есть (k,l)-ый элемент матрицы $\Gamma(x^*)F'(x^*) = E$, т.е. δ_{kj}. Итак, все элементы матрицы $\Phi'(x^*)$ равны нулю, $\Phi'(x^*) = 0$, и для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 2 из §2. ■

Замечание 1. В условиях этой теоремы требование на гладкость отображения F завышено — в действительности достаточно двукратной дифференцируемости.

Замечание 2. Условие $\det F'(x^*) \neq 0$ теоремы существенно – без него квадратичной сходимости может и не быть. Приведем соответствующий пример в одномерном случае. Пусть $f(t) = t^2$. Корень $t^* = 0$ уравнения $f(t) = 0$ таков, что $f'(t^*) = 0$.

Для метода Ньютона легко получаем $t_{s+1} = \frac{1}{2}t_s$, и при $t_0 \neq 0$ сходимость метода всего лишь линейная.

[* З а м е ч а н и е 3. Метод Ньютона допускает обобщение на случай нелинейных уравнений в нормированных пространствах. Такое обобщение было предложено и глубоко исследовано Л.В.Канторовичем (см., например гл.XVIII книги *Канторович Л.В. и Акилов Г.П.*), и в связи с этим обычно называется методом Канторовича. Теоремы Л.В.Канторовича о методе Ньютона для уравнений в нормированных пространствах являются *теоремами существования и единственности* точного решения в некоторой окрестности известного приближенного решения. Подробнее об этих теоремах будет сказано в § 5. Теоремы Канторовича находят существенные применения при исследоании нелинейных функциональных уравнений. ***]**

Теорема 2 (о модифицированном методе Ньютона). *Пусть x^* — решение уравнения $F(x) = 0$, и в некоторой его окрестности отображение F дважды непрерывно дифференцируемо. Пусть $\det F'(x^*) \neq 0$. Тогда найдутся такие $\delta > 0$ и $c > 0$, что при $x_0 \in S_\delta(x^*)$ модифицированный метод Ньютона сходится с быстротой геометрической прогрессии: $\|\tilde{x}_s - x^*\| \leq q^s\|x_0 - x^*\|$, где $q = c\,\|x_0 - x^*\| < 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через r радиус того шара $S_r(x^*)$, в котором отображение F дважды непрерывно дифференцируемо. Найдется такая постоянная c_1, что для $x', x'' \in S_r(x^*)$ выполняется неравенство $\|F'(x') - F'(x'')\| \leq c_1\|x' - x''\|$. Выберем $r_0 < r$ так, что $\|[F'(x^*)]^{-1}\|c_1 r_0 < \frac{1}{2}$. По теореме 5 из §2 главы 4 для всех $x \in S_{r_0}(x^*)$ существует обратная матрица $\Gamma(x) = [F'(x)]^{-1}$ и $\|\Gamma(x)\| \leq 2\|\Gamma(x^*)\| = c_2$. Положим $c = 2c_1c_2$ и выберем δ так, что $\delta \leq r_0$ и $c\delta < 1$. Итак, c и δ выбраны. Покажем, что они требуемые. Пусть $x_0 \in S_\delta(x^*)$. В модифицированном методе Ньютона $\tilde{x}_0 = x_0$ и $\tilde{x}_{s+1} = \Phi(\tilde{x}_s)$, где $\Phi(x) = x - \Gamma_0 F(x)$, $\Gamma_0 = \Gamma(x_0)$. Так как $\Phi'(x) = E - \Gamma_0 F'(x) = \Gamma_0\big(F'(x_0) - F'(x)\big)$,то при $\|x - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\|$ будет

$$\|\Phi'(x)\| \leq c_2c_1\|x_0 - x\| \leq c_1c_2(\|x_0 - x^*\| + \|x - x^*\|) \leq c\|x_0 - x^*\| = q < 1.$$

Поэтому по теореме 2 из §1 для любых точек x', x'', таких что $\|x' - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\|$ и $\|x'' - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\|$, имеем

$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \leq q\|x' - x''\|.$$

Отсюда

$$\|\tilde{x}_s - x^*\| = \|\Phi(\tilde{x}_{s-1}) - \Phi(x^*)\| \leq q\|\tilde{x}_{s-1} - x^*\| \leq \cdots \leq q^s\|x_0 - x^*\|.$$

Этим теорема доказана. ■

Известны методы и более высокого, чем второй, порядка сходимости. Например, методами третьего порядка являются методы касательных гипербол и Чебышева. Вычислительные формулы этих методов в случае одного вещественного уравнения $f(t) = 0$ выглядят соответственно так:

$$t_{s+1} = t_s - \frac{1}{1 - \frac{f''(t_s)f(t_s)}{2[f'(t_s)]^2}}\frac{f(t_s)}{f'(t_s)},$$

$$t_{s+1} = t_s - \left(1 + \frac{f(t_s)f''(t_s)}{2[f'(t_s)]^2}\right)\frac{f(t_s)}{f'(t_s)}.$$

Методы высших порядков обычно менее эффективны, чем метод Ньютона, особенно в случае систем уравнений. Например, при решении систем указанные методы третьего порядка на одном шаге требуют вычисления самих функций φ_k (их n), их первых производных (их n^2) и вторых (их n^3) и решения двух систем линейных уравнений порядка n. Так что один шаг такого метода более трудоемок, чем два шага метода Ньютона. В то же время, грубо говоря, один шаг такого метода возводит погрешность в третью степень, в то время как два шага метода Ньютона – в четвертую.

Но бывают случаи, когда начальное приближение чем-то особенно просто – в этой точке уже известны все производные, среди них много нулей и т.п. Если одного шага метода Ньютона здесь не хватает для достижения нужной точности, то применение методов высшего порядка оправдано. Возможно, методы высших порядков имеют некоторое преимущество при распараллеливании вычислительных процессов.

Задача 1. Показать, что в случае одного уравнения для четырежды непрерывно дифференцируемой функции f методы Чебышева и касательных гипербол имеют третий порядок сходимости.

Задача 2. Показать, что в случае одного уравнения $f(t) = 0$ метод Ньютона для корня t^* сходится кубически, если $f'(t^*) \neq 0$, $f''(t^*) = 0$.

Задача 3. Показать, что метод решения системы уравнений $F(x) = 0$, в котором чередуются метод Ньютона и модифицированный:

$$x_{2\nu+1} = x_{2\nu} - [F'(x_{2\nu})]^{-1}F(x_{2\nu}),$$

$$x_{2\nu+2} = x_{2\nu+1} - [F'(x_{2\nu})]^{-1}F(x_{2\nu+1})$$

($\nu = 0, 1, 2, \dots$), имеет порядок сходимости $\alpha = \sqrt{3}$. * Предполагается, что $\det F'(x^*) \neq 0$.

[* §4. Дополнительные сведения о методе итерации

В этом параграфе будет указано некоторое обобщение принципа сжатых отображений и доказано утверждение, приведённое без доказательства в комментарии к теореме 1 в §2.

Заметим прежде всего, что принцип сжатых отображений, доказанный в § 1, допускает широкое обобщение на случай уравнений в метрических пространствах.

Пусть X — полное метрическое пространство с метрической функцией (расстоянием) $\rho(x', x'')$, и пусть Φ — отображение пространства X в себя. Точка $x^* \in X$ называется неподвижной точкой отображения Φ, если $\Phi(x^*) = x^*$.

Теорема 1 (принцип сжатых отображений). *Пусть нашлось такое число $q < 1$, что для всех точек $x', x'' \in X$ выполняется неравенство*†

$$\rho\big(\Phi(x'), \Phi(x'')\big) \leq q\,\rho(x', x''). \tag{1}$$

Тогда:

1) отображение Φ имеет и притом единственную неподвижную точку x^*;

---

*Поскольку после вычисления $x_{2\nu+1}$ вычисление $x_{2\nu+2}$ требует существенно меньшего числа арифметических операций, такой метод часто оказывается более эффективным, чем "чистый" метод Ньютона.

†Отображение Φ, удовлетворяющее этому условию, называется *сжатым* или *сжимающим*.

2) при любом начальном приближении $x_0 \in X$ итеративная последовательность $x_s = \Phi(x_{s-1})$ (s=1,2,...) сходится к x^*;

3) выполняются оценки

$$\rho(x_s, x^*) \leq \frac{q^s}{1-q}\,\rho(x_0, x_1), \qquad \rho(x_s, x^*) \leq \frac{q}{1-q}\,\rho(x_{s-1}, x_s).$$

Доказательство.Заметим прежде всего, что при наложенном условии отображение Φ непрерывно. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и построим итеративную последовательность $x_{s+1} = \Phi(x_s)$ $(s = 0, 1, 2, \dots)$. Тогда

$$\rho(x_{s+1}, x_s) = \rho\big(\Phi(x_s), \Phi(x_{s-1}\big) \leq q\rho(x_s, x_{s-1}).$$

Применяя рекуррентно это неравенство, мы получим: $\rho(x_{s+1}, x_0) \leq q^s\rho(x_1, x_0)$, и при любых натуральных s и p

$$\begin{aligned}\rho(x_{s+p}, x_s) &\leq \rho(x_{s+p}, x_{s+p-1}) + \rho(x_{s+p-1}, x_{s+p-2}) + \dots + \rho(x_{s+1}, x_s) \leq \\ &\leq (q^{s+p-1} + q^{s+p-2} + \dots + q^s)\rho(x_0, x_1) \leq \frac{q^s}{1-q}\,\rho(x_1, x_0).\end{aligned} \tag{2}$$

Правая часть этого неравенства не зависит от p и стремится к нулю при $s \to \infty$. Это означает, что последовательность $\{x_s\}$ сходится в себе и потому в силу полноты X сходится к некоторому элементу $x^* \in X$. Переходя к пределу при $s \to \infty$ в равенстве $x_{s+1} = \Phi(x_s)$ мы получим $x^* = \Phi(x^*)$, т.е. x^* — неподвижная точка. Этим доказано существование неподвижной точки и сходимость метода итерации при любом начальном приближении к некоторой неподвижной точке. Легко доказать единственность неподвижной точки. Действительно, если x^* и x^{**} — неподвижные точки, то

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho\big(\Phi(x^*), \Phi(x^{**}\big) \leq q\rho(x^*, x^{**}),$$

что возможно лишь при $x^{**} = x^*$. Переходя к пределу при $p \to \infty$ и фиксированном s в неравенстве (2), мы получим первую из доказываемых оценок. Вторая получается из первой, если рассмотреть новое начальное приближение $x_0' = x_{s-1}$ и для оценки погрешности первого приближения $x_1' = x_s$ применить эту первую оценку. ■

Как следствие этой теоремы легко получить обобщение теоремы 1 из § 1 на случай уравнений в метрических пространствах, предполагая, что отображение Φ является сжимающим лишь в некоторой окрестности точки x_0.

Следствие 1. *Пусть X — полное метрическое пространство, $x_0 \in X$ и нашлись такие числа $m > 0$ и $0 < q < 1$, что выполнены условия:*

1^0. $\rho\big(\Phi(x_0), x_0\big) \leq m$,

2^0. *для всех точек $x', x'' \in S$, где $S = \{\, x \in X \;\big|\; \rho(x, x_0) \leq m/(1-q)\,\}$ — "шар" с центром в точке x_0 и радиусом $r = m/(1-q)$, выполняется условие сжатия $\rho\big(\Phi(x'), \Phi(x'')\big) \leq q\rho(x', x'')$.*

Тогда

а) в шаре S существует единственная неподвижная точка x^* отображения Φ,

б) итеративная последовательность $x_{s+1} = \Phi(x_s)$ $(s = 0, 1, 2, \dots)$ сходится к x^*: $\rho(x_s - x^*) \to 0$, *в) выполняются оценки*

$$\rho(x_s - x^*) \le \frac{mq^s}{1-q}, \qquad \rho(x_s - x^*) \le \frac{q}{1-q}\,\rho(x_s, x_{s-1}).$$

Доказательство. Шар S с метрической функцией ρ есть полное (ввиду замкнутости S) метрическое пространство, и для того, чтобы воспользоваться доказанной теоремой, требуется лишь показать, что Φ отображает этот шар в себя. Итак, пусть $x \in S$. Тогда

$$\rho\big(\Phi(x), x_0\big) \le \rho\big(\Phi(x), \Phi(x_0)\big) + \rho\big(\Phi(x_0), x_0\big) \le q\rho(x, x_0) + m \le q\,\frac{m}{1-q} + m = \frac{m}{1-q},$$

так что $\Phi(x) \in S$. ■

Замечание 1. Как видно из доказательства, в условиях следствия метод итерации будет сходиться при любом начальном приближении $x' \in S$.

Замечание 2. Теорема 1 в § 1 есть частный случай доказанного следствия, когда роль метрического пространства X играет пространство $\mathbb{R}^n$ с введенной там нормой. Заметим еще, что конечномерность пространства $\mathbb{R}^n$ не играет в этой теореме роли, и его можно заменить на любое полное нормированное пространство.

В следующей теореме за счет некоторого дополнительного предположения о метрическом пространстве (компактность) мы ослабим сделанное в теореме 1 предположение о сжатии.

Теорема 2. *Пусть отображение Φ полного компактного метрического пространства X в себя таково, что для любых точек $x', x'' \in X$, таких что $x' \neq x''$, выполняется строгое неравенство $\rho\big(\Phi(x'), \Phi(x'')\big) < \rho(x', x'')$. Тогда Φ имеет единственную неподвижную точку x^* $(\Phi(x^*) = x^*)$, и итеративная последовательность $x_{s+1} = \Phi(x_s)$ сходится к этой неподвижной точке $(x_s \to x^*)$ при любом начальном приближении $x_0 \in X$.*

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in X$ произвольна. Построим последовательность $x_{s+1} = \Phi(x_s)$. Последовательность $\alpha_s = \rho(x_{s+1}, x_s) = \rho\big(\Phi(x_s), \Phi(x_{s-1})\big)$ не возрастает и ограничена снизу нулём, так что она сходится: $\alpha_s \to \alpha$. Ввиду компактности X из последовательности $\{x_s\}$ можно выбрать частичную сходящуюся: $x_{s_m} \to x^* \in X$. Переходя к пределу в равенстве $\alpha_{s_m} = \rho\big(\Phi(x_{s_m}), x_{s_m}\big)$ и используя непрерывность Φ, получаем $\rho\big(\Phi(x^*), x^*\big) = \alpha$. Точно так же предельным переходом в равенстве $\alpha_{s_{m+1}} = \rho\big(\Phi(\Phi(x_{s_m})), \Phi(x_{s_m})\big)$ получается равенство $\alpha = \big(\Phi\big(\Phi(x^*)\big), \Phi(x^*)\big)$, откуда следует, что $\rho\big(\Phi\big(\Phi(x^*)\big), \Phi(x^*)\big) = \rho\big(\Phi(x^*), x^*\big)$, что по условию невозможно, если $\Phi(x^*) \neq x^*$. Итак, существование неподвижной точки доказано. Её единственность очевидна: если кроме x^* есть ещё и x^{**}, то оказалось бы

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(\Phi(x^*)), \Phi(x^{**}) < \rho(x^*, x^{**}),$$

что нелепо. Как было показано, любая предельная точка последовательности $\{x_s\}$ является неподвижной, и потому совпадает с x^*, а так как эта последовательность лежит в компактном X, то вся она сходится к x^*. Остаётся только напомнить, что точка $x_0 \in X$ была выбрана произвольно. ■

З а м е ч а н и е 3. Отображение Φ, подчиненное условию $\rho\big(\Phi(x'), \Phi(x'')\big) < \rho(x', x'')$ при $x' \neq x''$, называется нерастягивающим. Условие компактности пространства X в условиях теоремы существенно. Вот пример. Пусть $X = [0, \infty)$ с естественной метрикой. Тогда отображение $\varphi(t) = t + 1/(1+t)$ пространства X в себя, которое нерастягивающее, поскольку при всех $t > 0$ $0 < \varphi'(t) < 1$, не имеет неподвижных точек.

З а м е ч а н и е 4. В условиях теоремы сходимость метода итерации может быть очень медленной. Возьмём последовательность t_s, которая, монотонно убывая, стремится к нулю, причём разности $t_s - t_{s+1}$ также монотонно убывают. Определим функцию $\varphi(t)$ следующим образом: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t_s) = t_{s+1}$ и на каждом промежутке $[t_{s+1}, t_s]$ $\varphi(t)$ линейна. Тогда φ — нерастягивающее отображение отрезка $[0, t_0]$ в себя, и при начальном приближении t_0 $\{t_s\}$ есть последовательность, полученная методом итерации. Можно положить, например, $t_s = (s+1)^{-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, и тогда последовательность $\{t_s\}$ сходится к нулю чрезвычайно медленно.

При изложении следующего вопроса нам потребуется одна теорема, доказательство которой было предложено в качестве задачи к § 2 третьей главы.

Теорема 3. *Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{M}_n$ выполняется равенство*

$$\lim_{s\to\infty} \sqrt[s]{\|A^s\|} = \rho(A).$$

Здесь $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A, а $\|\cdot\|$ — произвольная матричная норма.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что если доказываемое равенство верно для некоторой матричной нормы $\|\cdot\|_*$, то оно верно и для любой другой. Действительно, ввиду эквивалентности всех матричных норм при некоторых постоянных C_1, $C_2 > 0$ будет $C_1\|A^s\|_* \leq \|A^s\| \leq C_2\|A^s\|_*$, и остаётся извлечь из членов этого неравенства корень степени s и перейти к пределу при $s \to \infty$. Поэтому впредь мы будем считать, что матричная норма — операторная. Тогда $\rho(A) = \sqrt[s]{\rho(A^s)} \leq \sqrt[s]{\|A^s\|}$, и потому

$$\underline{\lim} \sqrt[s]{\|A^s\|} \geq \rho(A).$$

Докажем обратную оценку. Возьмём произвольно малое $\varepsilon > 0$ и построим матрицу $B = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} A$. Тогда $\rho(B) = \rho(A)/(\rho(A)+\varepsilon) < 1$ и поэтому по теореме 1 из § 2 третьей главы $B^s \to 0$, так что при достаточно больших s $\|A^s\|/(\rho(A)+\varepsilon)^s = \|B^s\| < 1$ и

$$\|A^s\| \leq \big(\rho(A)+\varepsilon\big)^s, \qquad \sqrt[s]{\|A^s\|} \leq \rho(A)+\varepsilon, \qquad \overline{\lim} \sqrt[s]{\|A^s\|} \leq \rho(A)+\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε

$$\overline{\lim} \sqrt[s]{\|A^s\|} \leq \rho(A),$$

что вместе с предыдущим неравенством даёт требуемое равенство. ■

Лемма. *Пусть $A \in \mathbb{M}_n$ и $\varepsilon > 0$. Для этих A и ε найдётся такая векторная норма $\|\cdot\|_\varepsilon$, что для порождённой ею матричной нормы и матрицы A выполняется неравенство $\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A)+\varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся произвольной векторной нормой $\|\cdot\|$ и порождённой ею операторной матричной. Из теоремы 2 следует, что найдётся столь большое s, что $\sqrt[s]{\|A^s\|} < \rho(A) + \varepsilon$ и потому $\|A^s\| < \big(\rho(A) + \varepsilon\big)^s$. Определим требуемую норму формулой

$$\|x\|_\varepsilon = \big(\rho(A) + \varepsilon\big)^{s-1}\|x\| + \big(\rho(A) + \varepsilon\big)^{s-2}\|Ax\| + \dots + \big(\rho(A) + \varepsilon\big)\|A^{s-2}x\| + \|A^{s-1}x\|.$$

Проверка того, что $\|\cdot\|_\varepsilon$ действительно норма, элементарна. Тогда для любого вектора x имеем:

$$\|Ax\|_\varepsilon = \big(\rho(A) + \varepsilon\big)^{s-1}\|Ax\| + \big(\rho(A) + \varepsilon\big)^{s-2}\|A^2x\| + \dots + \big(\rho(A) + \varepsilon\big)\|A^{s-1}x\| + \|A^sx\|.$$

Число s выбрано так, что для последнего слагаемого в правой части выполняется неравенство $\|A^sx\| \le \big(\rho(A) + \varepsilon\big)^s\|x\|$. Используя эту оценку и делая её правую часть первым слагаемым, сразу же получаем: $\|Ax\|_\varepsilon \le \big(\rho(A) + \varepsilon\big)\|x\|_\varepsilon$, и этим лемма доказана. ■

Докажем теперь теорему, которая является усилением теоремы 1 из § 2. Это утверждение уже отмечалось в комментарии к упомянутой теореме. Пусть x^* — неподвижная точка отображения Φ некоторого множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$: $x^* = \Phi(x^*)$, причем x^* содержится в Ω вместе с некоторой окрестностью.

Теорема 4. *Если отображение Φ дифференцируемо в точке x^* и $\rho(\Phi'(x^*)) < 1$ ($\rho(\Phi'(x^*))$ — спектральный радиус этой матрицы), то найдётся такое $\delta > 0$, что при условии $\|x_0 - x^*\| < \delta$ итеративная последовательность $x_{s+1} = \Phi(x_s)$ сходится к x^*, причём по любому $\varepsilon > 0$ найдётся такая постоянная C_ε, что $\|x_s - x^*\| \le C_\varepsilon q^s$, где $q = \rho(\Phi'(x^*)) + \varepsilon$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что утверждение теоремы инвариантно относительно выбора векторной нормы, и выберем её так, чтобы выполнялось неравенство $\|\Phi'(x^*)\| < \rho(\Phi'(x^*)) + \varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что правая часть этого неравенства меньше единицы (мы воспользовались доказанной леммой). Тогда согласно уже упоминавшейся теореме 1 из S 2 найдётся такое $\delta > 0$, что неравенство $\|x_0 - x^*\| < \delta$ гарантирует сходимость к x^* итеративной последовательности $\{x_s\}$ с быстротой геометрической прогрессии со знаменателем $q > \|\Phi'(x^*)\|$, сколь угодно близким к норме этой матрицы. ■

Следствие 2. *Если $\rho(\Phi(x^*)) = 0$, то при достаточно близком к x^* начальном приближении x_0 метод итерации имеет сверхлинейную сходимость.*

По поводу понятия сверхлинейной сходимости см. тот же § 2. *]

[* § 5. Принцип мажорант. Теоремы Канторовича

В третьем параграфе уже упоминались теоремы Л.В.Канторовича о методе Ньютона. Эти теоремы являются одновременно теоремами существования и единственности решений нелинейных уравнений в банаховых пространствах, что позволяет их применять, например, к нелинейным дифференциальным или интегральным уравнениям. Основой для доказательства этих теорем служит также принадлежащий Л.В.Канторовичу принцип мажорант*. Этим вопросам и посвящен этот параграф. Их изложение требует аппарата дифференцирования и интегрирования в банаховых пространствах. Не имея возможности изложения этих вопросов с подробными доказательствами, ограничимся перечислением определений и основных свойств вводимых этими определениями понятий с некоторыми комментариями, в частности, указаниями на возможный путь доказательства. Рекомендуется усматривать аналогию излагаемого с известными результатами для вещественных функций вещественного аргумента, а также с конечномерным случаем (некоторые результаты такого рода излагались в §§ 1 и 2).

Пусть X и Y — банаховы пространства и F — заданный на открытом множестве $\Omega \subseteq X$ оператор со значениями в пространстве Y. Определим, что такое дифференцируемость оператора F вполне аналогично тому, как об этом говорилось в 2 для операторов (отображений) в конечномерном векторном пространстве.

Определение. Говорят, что оператор F *дифференцируем* в точке $x_0 \in \Omega$, если существует такой линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$†, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $\|x - x_0\| < \delta$ влечет $\|F(x) - F(x_0) - A(x - x_0)\| \leq \varepsilon \|x - x_0\|$. Оператор A называют производной оператора F в точке x_0 и пишут $A = F'(x_0)$. В случае существования единственность такого оператора A очевидна.

Как об этом уже говорилось ранее, производная оператора, действующего в конечномерном векторном пространстве — это матрица Якоби.

Замечание 1. Определенную выше производную называют также *сильной* производной или *производной Фреше*. Есть еще понятие *слабой* производной или *производной Гато*, но нам оно не понадобится.

Перечислим простейшие свойства дифференцируемых операторов. Большинство из этих свойств очевидно.

1^0. Если оператор F дифференцируем в точке x_0, то для любого элемента $\Delta x \in X$

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + t\Delta x) - F(x_0)}{t} = F'(x_0)\Delta x.$$

Сходимость здесь равномерна относительно всех Δx из единичного шара: $\|\Delta x\| \leq 1$.

2^0. Если оператор F дифференцируем в точке x_0, то он в этой точке непрерывен.

3^0. Если операторы F_1 и F_2 дифференцируемы в точке x_0, то дифференцируема и любая их линейная комбинация, причем если $S(x) = \alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$, то $S'(x_0) = \alpha F_1'(x_0) + \beta F_2'(x_0)$.

---

*Этот принцип использовался в дальнейшем многими авторами для исследования различных итеративных методов решения нелинейных функциональных уравнений.

†Через $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначается банахово пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y.

4⁰. Если оператор F линейный ($F \in \mathcal{L}(X,Y)$), то при любом x $F'(x) = F$.

5⁰. Пусть оператор F дифференцируем в точке x_0 и действующий из пространства Y в пространство Z оператор Q дифференцируем в точке $y_0 = F(x_0)$. Тогда действующий из X в Z оператор $R(x) = Q\big(F(x)\big)$ дифференцируем в точке x_0 и $R'(x_0) = Q'(y_0)F'(x_0)$. В частном случае, когда один из операторов F или Q линеен, то $R'(x_0) = Q'(y_0)F$ или, соответственно, $R'(x_0) = QF'(x_0)$.

Пусть $x_0, x_1 \in X$. Отрезком, соединяющим эти точки, называется множество точек $[x_0, x_1] = \{\, x = (1-t)x_0 + tx_1 \;\big|\; t \in [0,1] \,\} \subset X$.

6⁰. Если оператор F дифференцируем во всех точках отрезка $[x_0, x_1] \subset \Omega$, то

$$\|F(x_1) - F(x_0)\| \leq \sup_{x \in [x_0, x_1]} \|F'(x)\| \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

Эту формулу называют иногда формулой конечных приращений. Для доказательства можно рассмотреть функционал $\mathcal{F} \in Y^*$, такой что $\|\mathcal{F}\| = 1$ и выполняется равенство $\mathcal{F}\big(F(x_1) - F(x_2)\big) = \|F(x_1) - F(x_2)\|$, и применить формулу конечных приращений к вещественной функции $\varphi(t) = \mathcal{F}F\big((1-t)x_0 + tx_1\big)$.

7⁰. Если оператор F дифференцируем при всех $x \in [x_0, x_0 + \Delta x]$, то

$$\|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) - f'(x_0)\Delta x\| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'(x_0 + \theta\Delta x) - f'(x_0)\| \cdot \|\Delta x\|$$

(формула конечных приращений с оценкой остатка). Это свойство доказывается ссылкой на предыдущее с заменой $F(x)$ на $F(x) - F'(x_0)x$.

Перейдем теперь к определению интегралов. Пусть $f(t)$ непрерывная функция вещественного аргумента $t \in [a,b]$ со значениями в пространстве X. Интеграл от этой функции по промежутку $[a,b]$ есть элемент пространства X и определяется как предел римановых сумм, то есть в привычных обозначениях

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\max \Delta_i \to O} \sum \Delta_i f(\tau_i).$$

Отметим свойства такого интеграла.

8⁰. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ — линейный оператор, то

$$\int_a^b Af(t)\,dt = A\int_a^b f(t)\,dt.$$

9⁰. Если $\varphi(t)$ заданная на $[a,b]$ непрерывная вещественная функция и оператор F задается формулой $F(t) = \varphi(t)x_0$, то

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt \cdot x_0.$$

10⁰. Выполняется неравенство

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

11^0. Если оператор F непрерывно дифференцируем на промежутке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, то

$$\int_0^1 F'(x_0 + t\Delta x)\Delta x\, dt = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0).$$

Доказательство — применение формулы Ньютона-Лейбница к вещественной функции $\varphi(t) = \mathcal{F}F(x_0 + t\Delta x)$, где $\mathcal{F} \in Y^*$ — произвольный линейный функционал.

Определим теперь интегралы другого типа. Пусть R заданный на открытом множестве $\Omega \subseteq X$ оператор со значениями в пространстве линейных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$ (таков, например, оператор, который точке $x \in \Omega$ ставит в соответствие значение в этой точке производной $F'(x)$ дифференцируемого оператора). Пусть дан отрезок $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset \Omega$. Тогда интеграл определяемого типа задается формулой

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} R(x)\, dx = \int_0^1 R(x_0 + t\Delta x)\Delta x\, dt.$$

Значение этого интеграла — элемент пространства Y. Отметим свойства такого интеграла.

12^0. Если оператор F непрерывно дифференцируем на отрезке $[x_0, x_1] \subset \Omega$, то

$$\int_{x_0}^{x_1} F'(x)\, dx = F(x_1) - F(x_0)$$

(формула Ньютона - Лейбница для операторов). Это — следствие свойства 11^0.

13^0. Пусть $\varphi(t)$ непрерывная вещественная функция. Если для $x \in [x_0, x_1]$, таких что $\|x - x_0\| \le t - t_0$, выполняется неравенство $\|R(x)\| \le \varphi(t)$ и если $\|x_1 - x_0\| \le t_1 - t_0$, то

$$\left\| \int_{x_0}^{x_1} R(x)\, dx \right\| \le \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\, dt.$$

Принцип мажорант. Метод итерации

Будем рассматривать уравнение

$$x = \Phi(x), \tag{1}$$

где Φ заданный в шаре $\Omega = \{\, x \in X \;\big|\; \|x - x_0\| < R \,\}$ непрерывно дифференцируемый оператор со значениями в пространстве X. Наряду с (1) будем рассматривать уравнение

$$t = \varphi(t), \tag{2}$$

где φ вещественная функция вещественного аргумента, непрерывно дифференцируемая на промежутке $[t_0, t_0 + r]$.

Определение. Будем говорить, что уравнение (2) мажорирует уравнение (1), если $R \ge r$ и выполняются условия:

1) $\|\Phi(x_0) - x_0\| \le \varphi(t_0) - t_0$,

2) $\|\Phi'(x)\| \le \varphi'(t)$ при $\|x - x_0\| \le t - t_0 \le r$.

Теорема 1. *Пусть уравнение (2) мажорирует уравнение (1) и пусть уравнение (2) имеет корень $t^* \in [t_0, t_0 + r]$. Тогда в шаре $\Omega_0 = \{\, x \in X \;\big|\; \|x - x_0\| \le r \,\}$ существует* *решение x^* уравнения (2), и к этому решению сходится итеративная последовательность $x_s = \Phi(x_{s-1})$ $(s = 1, 2. \dots)$. Если t^* минимальный корень (2) на $[t_0, t_0 + r]$, то выполняются оценки $\|x_s - x^*\| \le t^* - t_s$, где $t_s = \varphi(t_{s-1})$.*

Доказательство. Мы считаем, что $\Phi(x_0) \ne x_0$ — в противном случае x_0 и есть решение.

1) Покажем сначала, что последовательность t_s сходится к минимальному корню t^* уравнения (2). Из второго пункта данного выше определения следует, что при всех t $\varphi'(t) > 0$, а из первого, что $t_1 - t_0 > 0$, так что $t_1 > t_0$. Кроме того, $t_0 < t^*$. Отсюда по индукции легко получается, что при всех s $t_s < t_{s+1} < t^*$, и $\{t_s\}$ сходится как ограниченная монотонная последовательность, а так как ее предел — корень уравнения (2), то это t^*.

2) Методом индукции покажем, что при всех s будет $\|x_s - x_{s-1}\| \le t_s - t_{s-1}$. При $s = 1$ это так (первый пункт данного выше определения). Покажем возможность индуктивного перехода. Пусть при $\nu \le s$ $\|x_\nu - x_{\nu-1}\| \le t_\nu - t_{\nu-1}$. Тогда и

$$\|x_s - x_0\| \le \sum_{\nu=0}^{s-1} \|x_{\nu+1} - x_\nu\| \le \sum_{\nu=0}^{s-1} (t_{\nu+1} - t_\nu) = t_s - t_0$$

и так как при $\tau \in [0,1]$ $\|x_\tau - x_s\| \le t_\tau - t_s$, где $x_\tau = x_{s-1} + \tau(x_s - x_{s-1})$, а $t_\tau = t_{s-1} + \tau(t_s - t_{s-1})$, так что $\|x_\tau - x_0\| \le t_\tau - t_0$, $\|\Phi'(x_\tau)\| \le \varphi'(t_\tau)$, то

$$\|x_{s+1} - x_s\| = \|\Phi(x_s) - \Phi(x_{s-1})\| = \left\| \int_{x_{s-1}}^{x_s} \Phi'(x)\, dx \right\| \le$$
$$\le \int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi'(t)\, dt = \varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1}) = t_{s+1} - t_s.$$

В частности отсюда следует, что $x_{s+1} \in \Omega_0$.

3) Далее, тот же прием, что выше, позволяет установить, что при любом натуральном p выполняется неравенство $\|x_{s+p} - x_s\| \le t_{s+p} - t_s$, так что последовательность $\{x_s\}$, как и $\{t_s\}$, сходится в себе, а потому сходится: $x_s \to x^* \in \Omega_0$, причем предельный переход сразу же дает равенство $\Phi(x^*) = x^*$, что и завершает доказательство. ■

Замечание 2. Как видно из доказательства, выполняется более сильная, вообще говоря, оценка, чем в формулировке теоремы: $\|x^* - x_0\| \le t^* - t_0$.

Теорема 2 (о единственности). *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $\varphi(t_0 + r) < t_0 + r$ и t^* — единственный на промежутке $[t_0, t_0 + r]$ корень уравнения (2). Тогда в шаре $\Omega_0 = \{\, x \in X \mid \|x - x_0 \le r \}$ корень x^* уравнения (1) единственный и при любом начальном приближении $\tilde{x}_0 \in \Omega_0$ последовательность $\tilde{x}_s = \Phi(\tilde{x}_{s-1})$ $(s = 1, 2, \dots)$ сходится к x^*.*

Доказательство. Положим $\tilde{t}_0 = t_0 + r$, $\tilde{t}_{s+1} = \varphi(\tilde{t}_s)$. Тогда $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_0$, а так как $\varphi'(t) > 0$, то по индукции и при всех s $\tilde{t}_{s+1} < \tilde{t}_s$ и $\tilde{t}_s > t^*$. Поэтому последовательность $\tilde{t}_s$ сходится к единственному на $[t_0, t_0 + r]$ корню t^*. Возьмем теперь произвольный элемент $\tilde{x}_0 \in \Omega_0$, так что $\|\tilde{x}_0 - x_0\| \le r = \tilde{t}_0 - t_0$, и покажем, что для последовательности $\tilde{x}_s = \Phi(\tilde{x}_{s-1})$ при всех s также выполняется аналогичное неравенство $\|\tilde{x}_s - x_s\| \le \tilde{t}_s - t_s$, где x_s и t_s — те же последовательности, что в теореме 1. Пусть уже доказано, что при $\nu \le s-1$ $\|\tilde{x}_\nu - x_\nu\| \le \tilde{t}_\nu - t_\nu$ и $\|\tilde{x}_\nu - x_0\| \le r$ (т.е $x_\nu \in \Omega_0$). Из неравенства

$$\|\tilde{x}_{s-1}-x_0\| \le \|\tilde{x}_{s-1}-x_{s-1}\|+\sum_{\nu=1}^{s-1}\|x_\nu-x_{\nu-1}\| \le \tilde{t}_{s-1}-t_{s-1}+\sum_{\nu=1}^{s-1}(t_\nu-t_{\nu-1}) = \tilde{t}_{s-1}-t_0 < r$$

следует, что в соответствующих точках x_τ и t_τ промежутков $[x_{s-1}, \tilde{x}_{s-1}]$ и $[t_{s-1}, \tilde{t}_{s-1}]$ будет $\|\Phi'(x)\| \le \varphi'(t)$ и потому

$$\|\tilde{x}_s - x_s\| = \left\|\int_{x_{s-1}}^{\tilde{x}_{s-1}} \Phi'(x)\,dx\right\| \le \int_{t_{s-1}}^{\tilde{t}_{s-1}} \varphi'(t)\,dt = \tilde{t}_s - t_s.$$

Так как $\tilde{t}_s - t_s \to 0$, то последовательность $\{\tilde{x}_s\}$ имеет тот же предел, что и x_s, т.е x^*. Итак, при любом $\tilde{x}_0$ сходимость $\tilde{x}_s$ к x^* доказана. Остается доказать единственность решения уравнения (1) в Ω_0. Если бы было другое решение x^{**}, то положив $\tilde{x}_0 = x^{**}$, мы получили бы $\tilde{x}_s = x^{**}$ при всех s, что нелепо, так как должно быть $\tilde{x}_s \to x^*$. ■

Замечание 3. Сходимость $\tilde{x}_s$ к x^* при любом $\tilde{x}_0$ означает, в частности, устойчивость метода итерации к допускаемым малым ошибкам — полученное с небольшой погрешностью очередное приближение можно воспринимать как новое начальное приближение.

Вторая производная.

Если оператор $F : X \Rightarrow Y$ дифференцируем в некоторой области $\Omega \subseteq X$, то каждой точке $x \in \Omega$ поставлена в соответствие производная $F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$, т.е. F' есть оператор, заданный в Ω, со значениями в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Если этот оператор в свою очередь дифференцируем в точке x_0, то его производная обозначается через $F''(x_0)$ и называется второй производной оператора F. При этом $F''(x_0)$ – это элемент пространства $\mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X, Y)\big)$. Применив оператор $F''(x_0)$ к элементу $x_1 \in X$, мы получим элемент пространства $\mathcal{L}(X, Y)$, т.е линейный оператор, применив который к $x_2 \in X$ — элемент пространства Y, для которого принято обозначение: $\big(F''(x_0)x_1\big)x_2 = F''(x_0)(x_2, x_1)$. В этой записи $F''(x_0)$ выступает как *билинейный оператор.*

Двуместный оператор $B(x_2, x_1)$ $(x_1, x_2 \in X, B(x_2, x_1) \in Y)$ называется *билинейным,* если он аддитивен и однороден по каждому аргументу и конечна величина $\|B\| = \sup\|B(x_2, x_1)\|/(\|x_1\| \cdot \|x_2\|)$, называемая нормой билинейного оператора B. Множество таких операторов обозначается через $\mathcal{L}(X^2, Y)$, и после естественного определения суммы таких операторов и их умножения на число превращается в линейное нормированное пространство, которое оказывается полным. Между пространствами $\mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X, Y)\big)$ и $\mathcal{L}(X^2, Y)$ можно установить линейное взаимно-однозначное соответствие, поставив каждому оператору $Q \in \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X, Y)\big)$ в соответствие (как это указывалось выше по отношению к оператору $F''(x_0)$) , билинейный оператор $B(x_2, x_1) = (Qx_1)x_2$, и тогда каждый оператор $B \in \mathcal{L}(X^2, Y)$ окажется сопоставленным оператору $Q \in \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X, Y)\big)$: $Qx = B(\cdot, x)$. Это соответствие оказывается изометричным: $\|B\| = \|Q\|$. Итак, $F''(x)$ считается билинейным оператором.

В конечномерном случае ($\dim X = n$, $\dim Y = m$) вторая производная $F''(x_0)$ оператора $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ $(x = (\xi_1, \ldots, \xi_n))$ — это “трехмерная матрица”, элементы которой — производные $\partial^2 f_\nu/(\partial\xi_k\,\partial\xi_j)$.

Отметим два свойства второй производной, которые, впрочем, не будут использоваться ниже.

14^0. Если F дважды непрерывно дифференцируем в Ω и $[x_0,x_1]\subset\Omega$, то

$$F(x_1)=F(x_0)+F'(x_0)(x_1-x_0)+\int_{x_0}^{x_1}F''(x)(x_1-x,\,\cdot\,)\,dx.$$

Это равенство можно доказать применением равенства Ньютона - Лейбница к оператору $Q(x)=F(x)+F'(x)(x_1-x)$.

15^0. Если оператор F дважды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности точки x_0, то вторая производная $F''(x_0)$ есть *симметричный* билинейный оператор, т.е. для любых $x_1,x_2\in X$ выполняется равенство $F''(x_0)(x_1,x_2)=F''(x_0)(x_2,x_1)$.

Принцип мажорант. Метод Ньютона

Пусть F — заданный и дважды непрерывно дифференцируемый в области $\Omega=\{\,x\in X\ \big|\ \|x-x_0\|<R\,\}$ оператор со значениями в Y. Мы будем рассматривать уравнение

$$F(x)=0 \tag{1}$$

и наряду с ним числовое уравнение

$$\psi(t)=0\,, \tag{2}$$

где $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0,t_0+r]$ функция.

Теорема 3. *Пусть $R>r$ и выполнены условия:*

1) $c_0=-1/\psi'(t_0)>0$,

2) существует обратный оператор $\Gamma_0=[F'(x_0)]^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$,

3) $\|\Gamma_0F(x_0)\|\le c_0\psi(t_0)$,

4) $\|\Gamma_0F''(x)\|\le c_0\psi''(t)$ при $\|x-x_0\|\le t-t_0\le r$,

5) существует $t^*\in[t_0,t_0+r]$ — решение уравнения (2).

Тогда уравнение (1) имеет решение x^*, такое что $\|x^*-x_0\|\le t^*-t_0$.

Если, кроме того, $\psi(t_0+r)<0$ и t^* — единственное на $[t_0,t_0+r]$ решение уравнения (2), то x^* — единственное в шаре $\Omega_0=\{\,x\ \big|\ \|x-x_0\|\le r\,\}$ решение уравнения (1).

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор $\Phi(x)=x-\Gamma_0F(x)$ и функцию $\varphi(t)=t+c_0\psi(t)$. Как очевидно, уравнения

$$x=\Phi(x) \tag{3}$$

и

$$t=\varphi(t) \tag{4}$$

эквивалентны соответственно уравнениям (1) и (2). Покажем, что в смысле данного ранее определения уравнение (4) мажорирует уравнение (3). Действительно,

$$\|\Phi(x_0)-x_0\|=\|\Gamma_0F(x_0\|\le c_0\psi(t_0)=\varphi(t_0)-t_0,$$

так что первое условие этого определения выполнено. Проверим теперь второе. Пусть $\|x-x_0\|\le t-t_0$. Тогда

$$\Phi'(x)=E-\Gamma_0F'(x)=\Gamma_0[F'(x_0)-F'(x)]=-\int_{x_0}^{x}\Gamma_0F''(x)\,dx$$

и потому (используя свойство 13^0)

$$\|\Phi'(x)\| \le c_0 \int_{t_0}^{t} \psi''(\tau)\, d\tau = c_0\big(\psi'(t) - \psi'(t_0)\big) = 1 + c_0\psi'(t) = \varphi'(t),$$

так что выполнено и второе условие определения, а тем самым и условия теоремы 1, и для доказательства существования решения x^* остается сослаться на эту теорему.

Пусть теперь $\psi(t_0 + r) < 0$. Это означает, что $\varphi(t_0 + r) < t_0 + r$, а так как корни уравнений (2) и (4) совпадают. то выполнены условия и теоремы 2, что и дает доказательство второго утверждения. ■

Замечание 4. Мы не воспользовались вторым утверждением теоремы 2 (о сходимости метода итерации). Если ограничиться случаем $\tilde{x}_0 = x_0$, то по отношению к уравнению (1) оно означает сходимость к x^* модифицированного метода Ньютона. Можно доказать, что в условиях теоремы 3 для нахождения x^* сходится и метод Ньютона, но доказательство этого утверждения сложнее.

Применение теоремы 3 для доказательства существования и единственности решения некоторого функционального уравнения требует построения мажорирующего числового уравнения (функции ψ). Можно указать некоторый стандартный выбор функции ψ, при котором проверка условий теоремы 3 относительно проста. Положим, считая $t_0 = 0$,

$$\psi(t) = Kt^2 - 2t + 2\eta. \tag{5}$$

Для этой функции $c_0 = 1/2$. Положим $h = K\eta$. Тогда корни этой функции таковы:

$$r_0 = \frac{1}{K}(1 - \sqrt{1 - 2K\eta}) = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h}\,\eta, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{1-2h}}{h}\,\eta.$$

Эти корни вещественны, если $h \le 1/2$.

Переходя к уравнению (1), напомним , что оператор F дважды непрерывно дифференцируем в области $\Omega = \{\, x \in X \;\big|\; \|x - x_0\| < R \,\}$.

Теорема 4. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия:*
1) существует обратный оператор $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$,
2) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \le \eta$,
3) при $\|x - x_0\| < R \quad \|\Gamma_0 F''(x)\| \le K$,
4) $h = K\eta \le \frac{1}{2}$,
5) $R > r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\,\eta$.
Тогда существует решение x^* уравнения (1), такое что $\|x^* - x_0\| \le r_0$.

Кроме того, если число r таково, что $r \le r_1 = \frac{1+\sqrt{1+2h}}{h}\,\eta$ *и* $r < R$, *то в шаре* $\Omega_1 = \{\, x \in X \;\big|\; \|x - x_0\| \le r \,\}$ *решение x^* единственно.*

Доказательство немедленно вытекает из предыдущей теоремы, если учесть, что для указанной функции $\psi(t) \quad \eta = c_0\psi(0)$ и $\psi''(t) \equiv c_0 K$. ■

Замечание 5. Условия теоремы иногда удобнее проверять в форме: $\|\Gamma_0\| \le B$, $F(x_0) \le \eta'$, $\|F''(x)\| \le K'$, и тогда $\eta = B\eta'$, $K = BK'$, $h = B^2K'\eta'$.

Замечание 6. В условиях теоремы (при выборе начального приближении x_0) к решению x^* сходятся как метод Ньютона, так и модифицированный метод Ньютона, причем выполняются оценки:

$$\|x_s - x^*\| \leq t^* - t_s \leq \frac{1}{2^s}(2h)^{2^s}\frac{1}{h}, \quad \|\tilde{x}_s - x^*\| \leq t^* - \tilde{t}_s \leq \frac{\eta}{h}\,(1 - \sqrt{1-2h})^{s+1}.$$

Из этих оценок видна квадратичная (при $h < \frac{1}{2}$) сходимость метода Ньютона и сходимость модифицированного метода с быстротой геометрической прогрессии с малым знаменателем, если начальное приближение x_0 достаточно близко к решению. Эти последние результаты доказывались в § 3 главы 4 для нелинейных систем уравнений.

Замечание 7. Если решение нелинейного функционального уравнения (2) x^*, существование которого мы хотим доказать, действительно существует, в его окрестности оператор F дважды непрерывно дифференцируем и существует обратный оператор $[F'(x^*)]^{-1}$, то для доказательства существования с помощью теоремы 4 достаточно построить близкое к x^* приближенное решение x_0. *]