

Глава 5

Численное решение задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

§1 Простейшие методы

Будем рассматривать задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Численное решение этой задачи — построение таблицы приближенного решения, чаще всего для равноотстоящих узлов $x_k = x_0 + kh$ ($h > 0$ — шаг): $y_k \approx y(x_k)$.

Метод Эйлера.

В точке x_0 легко найти производную решения: $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Поскольку (при малом шаге h)

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

то можно положить $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. По аналогичной формуле можно найти y_2 и т.д. В этом и состоит метод Эйлера:

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k). \quad (2)$$

В методе Эйлера не обязательно считать узлы x_k равноотстоящими. В общем случае, если $x_{k+1} = x_k + h_k$, то в правой части (2) h следует заменить на h_k .

Метод Эйлера имеет простой геометрический смысл. Если каждую точку (x_k, y_k) соединить отрезком со следующей, то мы получим ломаную линию — график приближенного решения. Поэтому метод Эйлера называют иногда *методом ломаных*. Звенья этой ломаной — отрезки касательных, проведенных в точке (x_k, y_k) к проходящей через эту точку интегральной кривой.

Если функцию f считать дифференцируемой, то погрешность метода Эйлера на одном шаге имеет порядок малости $\mathcal{O}(h^2)$. Это означает, что в предположении, что $y_k = y(x_k)$ будет $y(x_{k+1}) - y_{k+1} = \mathcal{O}(h^2)$. В действительности, кроме ошибки, вызванной тем, что в формуле Тейлора мы ограничились лишь двумя членами, в y_{k+1} войдет еще и “наследственная” ошибка — y_{k+1} не совпадает с $y(x_{k+1})$, в частности, и по той причине, что все предыдущие значения y_k, \dots, y_1 были найдены неточно. Для получения решения нашей задачи на промежутке $[x_0, X]$ нам придется сделать примерно $(X - x_0)/h$ шагов, и так как на каждом шаге мы допускаем ошибку порядка h^2 , то можно ожидать, что ошибка, допущенная на всем промежутке, будет порядка h . Влияние “наследственных ошибок” зависит от свойств решаемого уравнения. В частности, если интегральные линии с ростом x сближаются (это так, если $\partial f / \partial y < 0$), то влияние “наследственных ошибок” убывает, а если расходятся ($\partial f / \partial y > 0$), то возрастает.

Метод Эйлера прост. Главный его недостаток — малая точность. В связи с этим рассматриваются некоторые усовершенствования этого метода. Сам метод Эйлера

допускает такую трактовку: в равенстве

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(t) dt = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t)) dt \quad (3)$$

стоящий в правой части интеграл приближенно заменяется на $hf(x_k, y_k)$. Усовершенствования связаны с более точным приближением этого интеграла.

1-й усовершенствованный метод.

Упомянутый выше интеграл будем вычислять по формуле средних прямоугольников, причем неизвестное нам значение подынтегральной функции в середине промежутка будем находить с помощью метода Эйлера. Это приводит к следующему алгоритму:

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}\right), \quad \text{где } y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k).$$

Оценим погрешность этой формулы на одном шаге (для краткости обозначений — на первом), считая при этом функцию f нужное число раз дифференцируемой. В понятных обозначениях для точного решения имеем

$$y(x_1) = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0 + \mathcal{O}(h^3), \quad y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y''_0 = f'_x + y'_0f'_y.$$

Для приближенного решения:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}y'_0\right) = \\ &= y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}f'_x + \frac{h^2}{2}y'_0f'_y + \mathcal{O}(h^3) = y(x_1) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Итак, погрешность метода на одном шаге имеет порядок малости h^3 .

2-ой усовершенствованный метод.

Интеграл, стоящий в правой части (3), будем вычислять по формуле трапеций, опять используя для приближения неизвестного значения подынтегральной функции на правом конце промежутка метод Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})), \quad \text{где } \tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

При оценке ошибки этого метода на одном шаге будем для точного решения использовать то же разложение, что и выше, а для приближенного:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hy'_0)) = \\ &= y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}f'_x + \frac{h^2}{2}y'_0f'_y + \mathcal{O}(h^3) = y(x_1) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Итак, ошибка этого метода на одном шаге также имеет порядок малости h^3 .

При решении задачи (1) на заданном промежутке обоими этими усовершенствованными методами можно ожидать погрешность порядка $\mathcal{O}(h^2)$.

Обратный метод Эйлера. Формула этого метода получается из формулы Тейлора: $y(x_k) \approx y(x_{k+1}) - hy'(x_{k+1})$ и имеет вид $y_{k+1} = y_k + f(x_{k+1}, y_{k+1})$. Последнее равенство следует рассматривать как уравнение относительно y_{k+1} , которое и приходится решать на каждом шаге метода. Погрешность этого метода на одном шаге имеет тот же порядок малости относительно h , что и метода Эйлера — $\mathcal{O}(h^2)$, но каждый шаг требует большей затраты труда. О некоторых преимуществах этого метода перед методом Эйлера будет сказано в § 5.

Задача. Найти порядок погрешности на одном шаге метода, определяемого (на первом шаге) формулами:

$$\bar{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0), \quad \tilde{y}_1 = y_{1/2} + \frac{h}{2}f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{1/2}\right),$$

$$y_1 = 2\tilde{y}_1 - \bar{y}_1.$$

§2 Методы Адамса.

Квадратурные формулы Адамса.

При рассмотрении во второй главе интерполяционных квадратурных формул предположение о том, что узлы этих формул принадлежали промежутку интегрирования, как правило, не делалось. И хотя это было так в приведенных там конкретных формулах, большинство результатов верно и в том случае, когда часть узлов лежит вне промежутка интегрирования. К числу таких формул относятся квадратурные формулы Адамса

Определение. *Экстраполяционными квадратурными формулами Адамса* называются интерполяционные квадратурные формулы для вычисления интеграла по промежутку $[0, 1]$ с узлами $0, -1, \dots, -p$:

$$\int_0^1 g(x) dx \approx \sum_{j=0}^p \alpha_j^p g(-j), \quad (1)$$

а также подобные им формулы*.

Погрешность (остаточный член) формулы обозначим через $R_p(g)$:

$$R_p(g) = \int_0^1 g(x) dx - \sum_{j=0}^p \alpha_j^p g(-j).$$

Согласно определению интерполяционных квадратурных формул коэффициенты α_j^p вычисляются по правилу

$$\alpha_j^p = \int_0^1 \frac{\omega(x)}{(x+j)\omega'(-j)} dx,$$

*Определение подобных квадратурных формул см. в § 2 второй главы.

где $\omega(x) = \prod_{k=0}^p (x+k)$.

Найдем представление остаточного члена формулы (1) в предположении должной дифференцируемости функции g . Пусть $P_p(x)$ — интерполяционный полином функции g , построенный по узлам $0, -1, \dots, -p$. Поскольку формула (1) интерполяционная, то

$$\begin{aligned} R_p(g) &= \int_0^1 (g(x) - P_p(x)) dx = \frac{1}{(p+1)!} \int_0^1 \omega(x) g^{(p+1)}(\eta(x)) dx = \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \int_0^1 \omega(x) dx g^{(p+1)}(\xi) = A_p g^{(p+1)}(\xi), \quad \xi \in (-p, 1). \end{aligned}$$

Мы воспользовались представлением остатка интерполяции, леммой из §1 главы 2 и неотрицательностью полинома $\omega(x)$ на промежутке $[0, 1]$.

Приведем таблицу коэффициентов α_j^p формулы (1) для первых значений p , а также значений коэффициентов A_p в представлении остаточного члена.

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	A_p
$p = 1$	$3/2$	$-1/2$			$5/12$
$p = 2$	$23/12$	$-4/3$	$5/12$		$3/8$
$p = 3$	$55/24$	$-59/24$	$37/24$	$-3/8$	$251/720$

Определение. *Интерполяционными квадратурными формулами Адамса* называются интерполяционные квадратурные формулы для вычисления интеграла по промежутку $[0, 1]$ с узлами $1, 0, -1, \dots, -(p-1)$:

$$\int_0^1 g(x) dx = \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p g(-j) + R_p(g), \quad (2)$$

а также подобные им формулы.

При $p = 1$ эта формула совпадает с формулой трапеций. Коэффициенты β_j^p вычисляются по формулам:

$$\beta_j^p = \int_0^1 \frac{\omega(x)}{(x+j)\omega'(-j)} dx,$$

где на этот раз $\omega(x) = (x-1)x(x+1)\dots(x+p-1)$. Поскольку $\omega(x)$ не меняет знака на $[0, 1]$, то, как и в случае экстраполяционной формулы Адамса, легко получить представление остаточного члена в форме Лагранжа:

$$R_p(g) = B_p g^{(p+1)}(\xi), \quad B_p = \frac{1}{(p+1)!} \int_0^1 \omega(x) dx, \quad \xi \in (-p+1, 1).$$

Приведем таблицу коэффициентов β_j^p и B_p .

	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	B_p
$p = 1$	$1/2$	$1/2$			$-1/12$
$p = 2$	$5/12$	$2/3$	$-1/12$		$-1/24$
$p = 3$	$3/8$	$19/24$	$-5/24$	$1/24$	$-19/720$

Заметим, что в интерполяционной формуле Адамса расположение узлов более благоприятно, чем в экстраполяционной, и коэффициенты B_p в представлении остаточного члена по модулю меньше соответствующих коэффициентов A_p .

Формулы Адамса обычно применяются, когда функция f задана таблицей своих значений в равноотстоящих узлах $x_k = x_0 + kh$: $f(x_k) = f_k$ и требуется вычислить интеграл от этой функции по промежутку между двумя соседними узлами. Применяя формулы, подобные приведенным выше формулам Адамса для промежутка $[0, 1]$, тогда получим в случае экстраполяционной формулы Адамса

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h \sum_{j=0}^p \alpha_j^p f_{k-j}, \quad R_p(f) = A_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_{k-p}, x_{k+1}),$$

а в случае интерполяционной

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p f_{k-j}, \quad R_p(f) = B_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_{k-p+1}, x_{k+1}).$$

Часто эти формулы записывают в другом виде, с использованием конечных разностей. Действительно, квадратурная сумма есть интеграл от интерполяционного полинома функции f , построенного по узлам квадратурной формулы. В случае экстраполяционной формулы воспользуемся формулой Ньютона для конца таблицы

$$P_p(x_k + th) = f_k + t\Delta f_{k-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{k-2} + \dots$$

и тем, что

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} P_p(x) dx = h \int_0^1 P_p(x_k + th) dt.$$

Тогда получим экстраполяционную формулу Адамса в виде:

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h \left[f_k + \frac{1}{2}\Delta f_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{k-3} + \right. \\ \left. + \frac{251}{720}\Delta^4 f_{k-4} + \dots + a_p \Delta^p f_{k-p} \right], \quad R_p(f) = A_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\xi). \end{aligned} \quad (3)$$

В случае интерполяционной формулы

$$\begin{aligned} P_p(x_{k+1} + th) = f_{k+1} + t\Delta f_k + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{k-1} + \dots, \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_p(x) dx = h \int_{-1}^0 P_p(x_{k+1} + th) dt, \end{aligned}$$

так что интерполяционная формула Адамса принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h \left[f_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta f_k - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{k-2} - \right. \\ \left. - \frac{19}{720}\Delta^4 f_{k-3} - \dots - b_p \Delta^p f_{k-p+1} \right], \quad R_p(f) = B_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\xi). \end{aligned} \quad (4)$$

Экстраполяционный метод Адамса.

Вернемся к задаче Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Мы ищем значения приближенного решения в равноотстоящих узлах $x_j = x_0 + jh$. Пусть при $j = 0, \dots, k$, где $k \geq p - 1$, эти приближенные значения $y_j \approx y(x_j)$ уже найдены. Будем искать y_{k+1} . По формуле Ньютона - Лейбница

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся экстраполяционной формулой Адамса, заменив значения y' в узлах приближенными значениями $y'(x_j) \approx f(x_j, y_j)$, и заменим $y(x_k)$ на y_k . Тогда, полагая $\eta_j = hf(x_j, y_j)$, получим

$$y_{k+1} = y_k + \eta_k + \frac{1}{2}\Delta\eta_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{k-2} + \dots + a_p\Delta^p\eta_{k-p} \quad (5)$$

или в безразностной форме

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{j=0}^p \alpha_j^p \eta_{k-j}.$$

Метод Адамса есть способ *продолжения* таблицы — первые значения искомой функции должны быть найдены другим способом. Если метод применяется в разностной форме, то к тому моменту, когда мы вычисляем y_{k+1} , мы должны располагать таблицей (в случае $p = 3$)

x_j	y_j	η_j	$\Delta\eta_j$	$\Delta^2\eta_j$	$\Delta^3\eta_j$
x_{k-2}	y_{k-2}	η_{k-2}	\dots	$\Delta^2\eta_{k-3}$	\dots
x_{k-1}	y_{k-1}	η_{k-1}	$\Delta\eta_{k-2}$	$\Delta^2\eta_{k-2}$	$\Delta^3\eta_{k-3}$
x_k	y_k	η_k	$\Delta\eta_{k-1}$		

Значение y_{k+1} вычисляется по формуле (5). В эту формулу входят разности, находящиеся в нижней косой строке приведенной таблицы. После этого вычисляется $\eta_{k+1} = hf(x_{k+1}, y_{k+1})$, заполняется следующая косая строка разностей, и все готово для следующего шага. Безразностная форма метода позволяет избежать вычисления конечных разностей.

Счет с разностями обычно применяется при ручных вычислениях. Он имеет то преимущество, что позволяет контролировать разумность выбранного порядка метода p и шага h — первый отброшенный в формуле (5) член не должен превосходить принятую точность вычисления решения. Впрочем, при $p > 5$ метод обычно не применяется, поскольку в разностях высокого порядка сильно влияние ошибок округления.

При счете на компьютере обычно применяется безразностная формула. Тогда требуются другие способы контроля за шагом h .

Интерполяционный метод Адамса.

Отличие этого метода от экстраполяционного состоит в том, что для вычисления интеграла по $[x_k, x_{k+1}]$ от производной решения используется интерполяционная квадратурная формула Адамса. Тогда мы приходим к формуле

$$y_{k+1} = y_k + \eta_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta\eta_k - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_{k-1} - \dots \quad (6)$$

или в безразностной форме

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p \eta_{k-j}. \quad (7)$$

Когда нам следует вычислить y_{k+1} , величина η_{k+1} (и разности, входящие в (6), если мы используем эту формулу) нам неизвестна. Поэтому (6) или (7) следует рассматривать как *уравнение* вида $y_{k+1} = \varphi(y_{k+1})$, решив которое, мы и найдем искомое значение y_{k+1} . Уравнение легко решается методом итерации: выбрав начальное приближение y_{k+1}^0 , мы строим последующие $y_{k+1}^{\nu} = \varphi(y_{k+1}^{\nu-1})$. Легко видеть, что $\varphi'(y) = h\beta_{-1}^p f'_y(x_{k+1}, y)$. Поскольку вычисления обычно ведутся с малым шагом h , эта производная мала по абсолютной величине, и метод итерации сходится очень быстро. Хорошее начальное приближение y_{k+1}^0 получают обычно, используя экстраполяционный метод Адамса. При использовании конечных разностей есть и другой способ построения начального приближения. Обычно шаг h выбирается так, что последние используемые разности порядка p (для определенности пусть $p = 3$) почти постоянны с принятой точностью вычислений. Поэтому полагают $\Delta^3\eta_{k-2}^0 = \Delta^3\eta_{k-1}^0$ и путем сложения заполняют косую строку разностей вплоть до η_{k+1}^0 , после чего y_{k+1}^0 находят по формуле (6).

При вычислениях на компьютере без разностей часто используется комбинация экстраполяционного и интерполяционного методов Адамса. Сначала вычисляется по экстраполяционному методу Адамса значение y_{k+1}^0 , и оно уточняется по формуле (7). По разности этих двух значений можно судить о пригодности выбранного шага вычислений.

Часто используется понятие порядка метода Адамса (экстраполяционного или интерполяционного). *Порядком* метода Адамса называется число d узлов используемой при его построении квадратурной формулы Адамса. Если имеется в виду формула (1) или (2), то порядок метода $d = p + 1$. Для методов Адамса с конечными разностями порядок метода — это порядок первой отброшенной конечной разности (например, для формулы (5) это по-прежнему $p + 1$). Заметим, что погрешность метода Адамса на одном шаге есть $\mathcal{O}(h^{d+1}) = \mathcal{O}(h^{p+2})$. Это означает, что если правая часть дифференциального уравнения — функция f — имеет достаточную гладкость и все вычисленные на предыдущих шагах значения совпадают со значениями в узлах точного решения, то вычисленное по формуле Адамса новое значение отличается от точного в той же точке на величину, имеющую указанный порядок малости.

Системы уравнений и уравнения высшего порядка.

Методы Адамса применимы и для решения задач Коши для систем дифференциальных уравнений. Пусть дана задача Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$y'_\nu(x) = f_\nu(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_\nu(x_0) = y_{\nu 0}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Если ввести вектор-функции $Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$, $Y'(x) = (y'_1(x), \dots, y'_n(x))$, $F(x, Y) = (f_1(x, Y), \dots, f_n(x, Y))$ и вектор $Y_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0})$, то нашу задачу Коши можно переписать в векторной форме:

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0.$$

Пусть $x_k = x_0 + kh$ система равноотстоящих точек, в которых мы ищем приближенные значения решения поставленной задачи: $y_{\nu k} \approx y_\nu(x_k)$. Поскольку при выводе формулы Адамса для одного дифференциального уравнения использовалось лишь то обстоятельство, что $\eta_k = hf(x_k, y_k) \approx hy'(x_k)$, то те же соображения приводят к способу построения приближенных значений решения и в случае системы дифференциальных уравнений:

$$y_{\nu k+1} = y_{\nu k} + h \sum_{j=0}^p \alpha_j^p f_\nu(x_{k-j}, y_{1k-j}, \dots, y_{nk-j})$$

для экстраполяционного метода Адамса и

$$y_{\nu k+1} = y_{\nu k} + h \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p f_\nu(x_{k-j}, y_{1k-j}, \dots, y_{nk-j})$$

в случае интерполяционного метода. При этом предполагается, что начальные значения $y_{\nu k}$ (при $k = 0, \dots, p$ для экстраполяционного метода и $k = 0, \dots, p-1$ для интерполяционного) найдены каким-либо другим способом. С использованием введенных обозначений формулы методов Адамса, если положить еще $Y_k = (y_{1k}, \dots, y_{nk})$, могут быть переписаны в векторной форме:

$$Y_{k+1} = Y_k + h \sum_{j=0}^p \alpha_j^p F(x_{k-j}, Y_{k-j})$$

или

$$Y_{k+1} = Y_k + h \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p F(x_{k-j}, Y_{k-j}).$$

Последнее векторное равенство, относящееся к интерполяционному методу Адамса, следует рассматривать как систему уравнений относительно компонент вектора Y_{k+1} , которая, как и в случае одного дифференциального уравнения, обычно легко решается методом итерации.

Методы Адамса применимы и для решения задачи Коши для уравнений высшего порядка:

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)},$$

поскольку эта задача легко сводится к задаче Коши для системы введением новых неизвестных функций $z_l = y^{(l)}$ ($l = 1, \dots, m-1$):

$$\left. \begin{aligned} y' &= z_1 \\ z_1' &= z_2 \\ &\dots \\ z_{m-2}' &= z_{m-1} \\ z_{m-1}' &= f(x, y, z_1, \dots, z_{m-1}) \end{aligned} \right\}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad z_1(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad z_{m-1}(x_0) = y_0^{(m-1)}.$$

Два заключительных замечания. Во-первых, еще раз напомним, что оба метода Адамса требуют, чтобы начало таблицы было построено каким-либо другим способом. Во-вторых, если в процессе счета нам потребовалось изменить шаг интегрирования, то это связано с необходимостью построения нового начала таблицы, что может быть сделано, например, с помощью интерполяции.

Задача. Объяснить связь между коэффициентами A_p и B_p остаточных членов формул Адамса с коэффициентами формул (3) и (4):

$$A_p = a_{p+1}, \quad B_p = b_{p+1}.$$

§ 3. Способы построения начала таблицы

В этом параграфе излагаются некоторые способы построения начала таблицы, т.е. вычисления приближенных значений $y_j \approx y(x_j)$ ($x_j = x_0 + jh$) решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

при малых j . Построения этих начальных значений требуют методы Адамса.

1. Разложение решения в ряд Тейлора.

Пусть $y(x)$ — решение нашей задачи: $y'(x) = f(x, y(x))$. Дифференцируя это тождество (считая, что функция f имеет нужные производные), мы получим:

$$\begin{aligned} y''(x) &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x), \\ y'''(x) &= f''_{xx}(x, y(x)) + 2f''_{xy}(x, y(x))y'(x) + f''_{yy}(x, y(x))[y'(x)]^2 + \\ &\quad + f'_y(x, y(x))y''(x) \end{aligned}$$

и, продолжая дифференцирование, представление следующих производных. Учитывая, что $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, и подставляя x_0 в приведенные формулы, мы можем найти в этой точке значения производных решения $y^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)}$. После этого приближенные значения решения в интересующих нас точках находятся из формулы Тейлора:

$$y(x_j) \approx y_j = y_0 + (jh)y_0' + \frac{(jh)^2}{2!}y_0'' + \dots + \frac{(jh)^n}{n!}y_0^{(n)}.$$

При построении начала таблицы начальные точки выгодно брать как правее, так и левее точки x_0 . Например, если мы собираемся применять метод Адамса пятого

порядка и нам требуется знать пять начальных значений, то в качестве их аргументов берут $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$. Это лучше, чем x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 , поскольку позволяет брать меньше членов в разложении Тейлора.

2. Итеративный метод (метод А.Н.Крылова)

Для определенности будем считать, что требуется построить (кроме известного y_0) еще три первых значения решения задачи (1) y_1, y_2, y_3 . Нетрудно построить интерполяционные квадратурные формулы

$$\int_k^{k+1} g(x) dx \approx \sum_{j=0}^3 A_j^k g(j), \quad k = 0, 1, 2. \quad (2)$$

Приведем таблицу их коэффициентов A_j^k :

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 0$	3/8	19/24	-5/24	1/24
$k = 1$	-1/24	13/24	13/24	-1/24
$k = 2$	1/24	-5/24	19/24	3/8

Тогда, используя квадратурные формулы, подобные (2), для решения $y(x)$ имеем

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx \approx h \sum_{j=0}^3 A_j^k f(x_j, y_j) = \Delta y_k.$$

Таким образом для неизвестных Δy_k ($k = 0, 1, 2$) мы получаем (учитывая, что y_0 известно) систему уравнений

$$\Delta y_k = \varphi_k(\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2), \quad k = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Здесь

$$\varphi_k(\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2) = h \sum_{j=0}^3 A_j^k f(x_j, y_j), \quad \text{где } y_j = y_0 + \sum_{l=0}^{j-1} \Delta y_l.$$

При малых h производные функций φ_k малы, и для решения системы быстро сходится метод итерации. В терминах приближений $y_k \approx y(x_k)$ итеративный процесс решения системы уравнений (3) выглядит так (верхний индекс у y — номер приближения):

$$y_0^{s+1} = y_0, \quad y_k^{s+1} = y_{k-1}^{s+1} + h \sum_{j=0}^3 A_j^k f(x_j, y_j^s), \quad k = 1, 2, 3.$$

Начальное приближение y_1^0, y_2^0, y_3^0 может быть построено, например, методом Эйлера.

Оба изложенных метода применимы и в случае задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, а значит, и для уравнений высшего порядка.

Для построения начала таблицы можно применять также излагаемый в следующем параграфе метод Рунге - Кутта.

Задача. Объяснить связь при $k = 0$ и $k = 2$ коэффициентов A_j^k , приведенных в таблице, с коэффициентами квадратурной интерполяционной формулы Адамса.

§4 Метод Рунге - Кутта

Начнем сразу с вычислительных формул. Пусть для задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

уже найдено приближенное значение решения в точке x_n : $y(x_n) \approx y_n$, и требуется найти решение в точке $x_{n+1} = x_n + h$. Согласно методу Рунге - Кутта это делается по формулам:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (2)$$

Это — некоторый аналог применения для вычисления интеграла в равенстве

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(t) dt$$

квадратурной формулы Симпсона. Действительно, $k_1 \approx hy'(x_n)$, k_2 и k_3 — некоторые приближения к $hy'(x_n + h/2)$, а k_4 — к $hy'(x_{n+1})$.

Основным и неочевидным свойством метода Рунге - Кутта является то, что его погрешность на одном шаге имеет порядок малости $\mathcal{O}(h^5)$. Это означает, что если функция f имеет нужное число производных, а y_n точно совпадает с $y(x_n)$ и мы разложим $y(x_{n+1})$ и правую часть равенства (2) по степеням h , то расхождения в этих разложениях начнутся лишь с членов, содержащих h^5 . Связанные с этим выкладки чрезвычайно громоздки* и мы их приводить не будем.

Метод Рунге - Кутта применим и для систем дифференциальных уравнений, а значит, и для уравнений высшего порядка. Формулы метода в случае задачи Коши для системы уравнений

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0$$

мы приведем сразу в векторной форме. Те величины k_j , которые появились в формулах метода для одного уравнения, станут теперь векторными, и будут обозначаться заглавными буквами. Итак, пусть приближенное значение решения $Y_k \approx Y(x_k)$ уже найдено. Тогда для получения $Y_{k+1} \approx Y(x_{k+1})$, где $x_{k+1} = x_k + h$, используются формулы

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(x_k, Y_k), \\ K_2 &= hF(x_k + h/2, Y_k + K_1/2), \\ K_3 &= hF(x_k + h/2, Y_k + K_2/2), \\ K_4 &= hF(x_k + h, Y_k + K_3), \\ Y_{k+1} &= Y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \end{aligned}$$

*Их можно найти в книге *И.П.Мысовских*.

Отметим некоторые свойства метода Рунге - Кутта в сравнении с методами Адамса. На одном шаге метод Рунге - Кутта имеет погрешность того же порядка, что и методы Адамса четвертого порядка ($p = 3$). В то же время в экстраполяционном методе Адамса на одном шаге требуется вычислять лишь одно значение правой части f , в интерполяционном — в зависимости от числа итераций, в среднем можно считать 2-3 значения, а в методе Рунге - Кутта 4 значения. Если использовать методы Адамса при $p = 4, 5$, то и шаг в этих методах можно выбирать больше. Так что метод Рунге - Кутта существенно более трудоемок, чем методы Адамса. По этой причине до появления компьютеров метод Рунге - Кутта рассматривался в основном как способ построения начала таблицы. Но с появлением компьютеров на первый план вышли некоторые преимущества метода Рунге - Кутта, о которых будет сказано ниже, и этот метод применяется для решения задач Коши на больших промежутках. Впрочем, если решение задач Коши является составной частью больших вычислений, и таких задач требуется решить очень много, то фактор трудоемкости может оказаться очень существенным.

Метод Рунге - Кутта имеет два важных преимущества перед методами Адамса. Во-первых, он не требует предварительного построения начала таблицы и сам пригоден для такого построения. Во-вторых, шаг в этом методе не обязательно постоянный, и его изменение в любой момент не связано с дополнительными трудностями. Напомним, что в методах Адамса переход к новому шагу связан с необходимостью строить новое начало таблицы.

Для контроля за выбором шага в методе Рунге - Кутта иногда применяется просчет одной задачи с разными шагами.

Задача. Доказать основное свойство метода Рунге - Кутта (порядок точности на одном шаге) для случая простейшего дифференциального уравнения $y' = f(x)$.

§5. Вопросы устойчивости. Жесткие системы уравнений

Целью данного параграфа является краткое знакомство с теми проблемами устойчивости, которые возникают при численном решении дифференциальных уравнений, и жесткими системами дифференциальных уравнений, при решении которых такие вопросы являются наиболее существенными. Но сначала следует обратиться к *разностным уравнениям*, сведения о которых вскоре нам потребуются.

Разностным уравнением порядка m называется уравнение вида

$$y_k = f(k, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-m}), \quad k = m, m+1, m+2, \dots$$

Очевидно, что если заданы *начальные значения* y_0, y_1, \dots, y_{m-1} , то разностное уравнение определяет все значения y_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), если только все аргументы функции f попадают в область ее задания. Разностные уравнения в значительной степени аналогичны дифференциальным. Это становится особенно наглядным, если рассматривать члены последовательности y_k как значения некоторой функции в целочисленных точках и воспользоваться известной формулой для конечных разностей (при шаге $h = 1$) $y_{k-\nu} = \sum_{i=0}^{m-\nu} C_{m-\nu}^i \Delta^i y_{k-m}$. Это позволит переписать разностное уравнение в виде

$$\Delta^m y_j = g(j, \Delta^{k-1} y_j, \Delta^{k-2} y_j, \dots, y_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

причем задание начальных значений y_0, y_1, \dots, y_{m-1} равносильно заданию значений $y_0, \Delta y_0, \dots, \Delta^{m-1} y_0$. Впрочем, записью разностных уравнений в таком виде мы пользоваться не будем.

Нас будут интересовать *однородные линейные* разностные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y_k + a_{m-1}y_{k-1} + a_{m-2}y_{k-2} + \dots + a_0y_{k-m} = 0, \quad k = m, m+1, m+2, \dots \quad (1)$$

Коэффициент a_0 считается отличным от нуля — иначе это уравнение более низкого порядка. Полином $P_m(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_0$ называется характеристическим полиномом этого уравнения. Нас будет интересовать вопрос, при каких условиях при любом задании начальных значений y_0, y_1, \dots, y_{m-1} решение уравнения (1) стремится к нулю: $y_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Введём в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -a_{m-1} & -a_{m-2} & -a_{m-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $|\det A| = |a_0| \neq 0$, и потому все собственные числа этой матрицы отличны от нуля.

Лемма. Для того чтобы число λ было корнем характеристического полинома $P_m(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было собственным числом матрицы A .

Доказательство. Пусть λ — собственное число матрицы A , а соответствующий ему собственный вектор — $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$. Тогда выполняются равенства $\lambda\zeta_1 + a_{m-1}\zeta_1 + a_{m-2}\zeta_2 + \dots + a_0\zeta_m = 0$ и при $\nu = 1, 2, \dots, m-1$ $\zeta_\nu = \lambda\zeta_{\nu+1}$. Это позволяет выразить все компоненты ζ_k через ζ_m : $\zeta_k = \lambda^{m-k}\zeta_m$ и, подставляя эти значения в равенство, выписанное выше для первых компонент векторов z и Az , сделать вывод, что $P_m(\lambda) = 0$. Та же связь между компонентами векторов z и Az позволяет заключить, что если $P_m(\lambda) = 0$, то $(\lambda^{m-1}, \lambda^{m-2}, \dots, 1)$ есть собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному числу λ . ■

Замечание. Вид матрицы A тесно связан с так называемой первой естественной нормальной формой матрицы (см. *Ф.Р.Гантмахер*, с.126). В действительности полином $P_m(\lambda)$ является одновременно и характеристическим полиномом матрицы A .

Теорема 1. Для того чтобы при любых начальных данных y_0, y_1, \dots, y_{m-1} для решения разностного уравнения (1) оказалось $y_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома $P_m(\lambda)$ были по модулю меньше единицы.

Доказательство. Введём m -мерные векторы $Y_k = (y_{k+m-1}, y_{k+m-2}, \dots, y_k)$. В силу разностного уравнения для этих векторов выполняется равенство $Y_{k+1} = AY_k$, где A — введённая выше матрица, и потому $Y_k = A^k Y_0$. Очевидно, что соотношение $y_k \rightarrow 0$ равносильно тому, что $Y_k \rightarrow 0$, и нам остаётся воспользоваться теоремой 1 из § 2 главы 3 и доказанной леммой. ■

Рассмотрение вопросов устойчивости мы начнем с простейшей задачи

$$y' + ay = 0, \quad y(0) = A, \quad (2)$$

где a - некоторая комплексная постоянная, такая что $\Re a > 0$. Решение этой задачи $y = Ae^{-ax}$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. Будем считать, что приближенное решение задачи (2) мы ищем в равноотстоящих точках $x_k = kh$ ($h > 0$) одним из разностных методов:

$$y(x_k) \approx y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^m \gamma_j f_{k-j}. \quad (3)$$

Здесь f_ν — значение правой части дифференциального уравнения в точке (x_ν, y_ν) , для нашей задачи $f_\nu = -ay_\nu$. Если $\gamma_0 = 0$, то метод называется экстраполяционным, а в противном случае интерполяционным. Считается, что начальные значения y_0, y_1, \dots, y_{m-1} нам заданы. В частности, такими разностными методами являются рассмотренные в § 2 методы Адамса. В экстраполяционном случае (3) есть линейное разностное уравнение рассмотренного выше вида, а в интерполяционном — в предположении, что $h\gamma_0 \neq 1$, оно приводится к такому виду путем разрешения относительно y_k . Заметим, что дифференциальное уравнение *первого* порядка мы приближенно заменили разностным уравнением *порядка* m .

Для задачи (2) разностное уравнение (3) перепишем в виде

$$y_k - y_{k-1} + ah \sum_{j=0}^m \gamma_j y_{k-j} = 0$$

или, введя обозначение $H = ah$,

$$(1 + H\gamma_0)y_k - (1 - H\gamma_1)y_{k-1} + H \sum_{j=2}^m \gamma_j y_{k-j} = 0. \quad (4)$$

Метод (3) решения задачи (2) при заданном шаге h называется *устойчивым*, если все решения разностного уравнения (4) стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Называя корни характеристического полинома разностного уравнения характеристическими числами этого уравнения и используя доказанную теорему, мы немедленно приходим к утверждению:

Теорема 2. Для того чтобы метод (2) для решения задачи (1) при шаге h был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы модули всех характеристических чисел разностного уравнения (4) были меньше единицы.

Еще раз подчеркнём, что характеристические числа уравнения (4) — это корни характеристического полинома

$$P_m(\lambda) = (1 + H\gamma_0)\lambda^m - (1 - H\gamma_1)\lambda^{m-1} + H \sum_{j=2}^m \gamma_j \lambda^{m-j}.$$

Поясним неформальный смысл приведенного определения устойчивости. Коэффициенты γ_j применяемого метода выбираются с таким расчетом, чтобы по меньшей

мере при малых h можно было рассчитывать на близость значений y_k к значениям точного решения дифференциального уравнения $y(x_k)$. Так что можно рассчитывать, что среди решений разностного уравнения имеется такое, которое близко к таблице значений в точках $x_k = kh$ решения дифференциального уравнения. Но выбранные нами начальные значения y_0, y_1, \dots, y_{m-1} обычно не совпадают точно со значениями $y(x_k)$. Кроме того, при вычислении каждого следующего значения y_k неизбежны ошибки округления. Таким образом, от решения разностного уравнения (4), близкого к решению дифференциального уравнения, мы с каждым шагом переходим к некоторому другому решению с начальными условиями, заданными в точках $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m}$. Устойчивость, как она была определена выше, гарантирует, что при стремлении аргумента к бесконечности разность между этими двумя решениями разностного уравнения стремится к нулю. С другой стороны, неустойчивость разностного метода означает, что допущенная на каком-то шаге малая ошибка приводит, вообще говоря, к стремящимся к бесконечности ошибкам в последующих значениях при стремлении к бесконечности аргументов (номеров точек).

Точное решение задачи (2) известно, и поэтому применение к нему разностных методов приближенного решения само по себе не интересно. Мы остановились на задаче (2) потому, что эта задача (2) является простой *моделью* задач Коши для более сложных дифференциальных уравнений, применение к которым приближенных методов неизбежно. Эта модель, будучи достаточно простой для исследования, позволяет понять, какие трудности могут возникнуть при применении разностных методов к решению “сложных” дифференциальных уравнений и, в частности, как следует выбирать шаг в разностном методе, чтобы допущенные при вычислениях малые ошибки не приводили к существенному искажению приближенного решения.

Заметим еще, что предположение $a > 0$ связано с тем, что при $a < 0$ само решение задачи (2) стремится к бесконечности; таково же должно быть и хорошее приближенное решение, а тогда среди характеристических чисел разностного уравнения (4) неизбежно должно быть большее единицы по модулю. На связанной с этим проблематикой мы останавливаться не будем.

Итак, рассмотрим теперь задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0. \quad (5)$$

Будем предполагать, что в некоторой окрестности точного решения $y^*(x)$ выполняется неравенство $f'_y(x, y) < 0$. Если решение этой задачи интересует нас на промежутке $[0, X]$, то в последнем неравенстве также $x \in [0, X]$. Пусть для решения нашей задачи применяется разностный метод (3). Нас интересует вопрос, как небольшая ошибка, допущенная в значении y_{k_0} , скажется на последующих значениях приближенного решения. В точках (x, y) , близких к (x_{k_0}, y_{k_0}) выполняется приближенное равенство

$$f(x, y) \approx f(x_{k_0}, y_{k_0}) + f'_x(x_{k_0}, y_{k_0})(x - x_{k_0}) + f'_y(x_{k_0}, y_{k_0})(y - y_{k_0}),$$

и разностное уравнение (3) окажется при k , близких к k_0 , близким к линейному, для которого соответствующее ему однородное уравнение совпадает с (4), в котором $H = ah$, $a = f'_y(x_{k_0}, y_{k_0})$. Эти соображения вместе с проведенным исследованием разностного метода для уравнения (3) позволяют сделать вывод, что если в некоторой окрестности точного решения выполняется неравенство $-a \leq f'_y(x, y) < 0$ и

наш разностный метод устойчив для уравнения (2), то следует ожидать, что допущенные в процессе вычислений малые ошибки не будут катастрофическим образом сказываться на нашем приближенном решении *.

Согласно теореме 2 устойчивость или неустойчивость метода (3) для задачи (2) зависит не от коэффициента a и шага h по отдельности, а только от их произведения[†] $H = ah$. Это позволит нам говорить об устойчивости или неустойчивости метода (3) как такового безотносительно к тому, к какому уравнению вида (2) и с каким шагом h мы собираемся его применять. Условимся в следующей терминологии. Будем говорить, что метод (3) *абсолютно устойчив*, если он устойчив при любом H ($\Re H > 0$). Это означает, что он устойчив для *любого* уравнения вида (2) ($\Re a > 0$) *при любом* выборе шага h . Метод *абсолютно неустойчив*, если он неустойчив при всех H (и тем самым для любых a при всех h). Метод называется *условно устойчивым*, если при некоторых H он устойчив, а при других неустойчив. В последнем случае множество Ω тех H , для которых он устойчив, называется *областью устойчивости* метода (3). В этом случае выбор шага при решении конкретного уравнения (2) определяется требованием $ah \in \Omega$. Очевидно, что Ω — это открытое множество, лежащее в правой комплексной полуплоскости (для $\lambda \in \Omega$ $\Re \lambda > 0$).

Займемся теперь исследованием устойчивости (для задачи (2)) некоторых методов.

1⁰. Метод Эйлера. Вычислительная формула этого метода $y_k = y_{k-1} + hf_{k-1}$, и для задачи (2)

$$y_k = (1 - ah)y_{k-1}, \quad y_k - (1 - H)y_{k-1} = 0, \quad \text{где } H = ah.$$

Характеристический полином этого разностного уравнения имеет первую степень, и его корень есть $\lambda = 1 - H$. Поэтому метод Эйлера условно устойчив и область его устойчивости определяется неравенством $|1 - H| < 1$, т.е. есть круг на комплексной плоскости с центром в точке 1 и единичным радиусом. Попутно заметим, что нетрудно установить сходимость метода Эйлера для задачи (2) при $h \rightarrow 0$. Действительно, предполагая для простоты, что для точки X шаг h принимает дискретную последовательность значений $h = X/N$ и учитывая, что $y_0 = A$, имеем

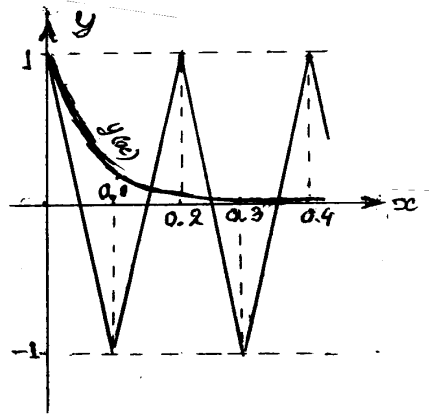
$$y_N = (1 - ah)^N y_0 = A \left(1 - \frac{aX}{N}\right)^N \rightarrow Ae^{-aX} = y^*(X).$$

Здесь $y^*(x)$ — точное решение задачи.

Посмотрим на примере (см. рисунок), как может проявлять себя неустойчивость. Пусть мы решаем задачу Коши $y' + 20y = 0$, $y(0) = 1$, точное решение которой $y^* = e^{-20x}$ очень быстро стремится к нулю, методом Эйлера с шагом $h = 0.1$. Тогда $H = 2$, и условие устойчивости не выполнено. Если воспользоваться приведенной выше формулой, то получится, что $y_k = (1 - H)y_{k-1} = -y_{k-1}$, так что $y_k = (-1)^k$.

*С этой проблематикой связана задача 3 к § 2 главы 3.

[†]Это свойство естественно, поскольку величина H инвариантна (так же как устойчивость или неустойчивость) относительно линейной замены независимой переменной в уравнении (2), если соответственно изменить и h .



На рисунке изображены графики точного и приближенного решения (приближенное решение в промежуточных между узлами точках восстанавливается с помощью линейной интерполяции).

Графики, подобные графику построенного приближенного решения, обычно называют “пилообразными”. Если бы мы взяли шаг h (или коэффициент уравнения $a = 20$) немного больше, то “высота зубьев пилы” с каждым шагом увеличивалась и стремилась к бесконечности. Появление “пилообразных” решений довольно часто в случае неустойчивости и является характерным ее признаком.

2⁰. *Обратный метод Эйлера.* Вычислительная формула этого метода для уравнения (2) такова:

$$y_k = y_{k-1} + hf_k = y_{k-1} - ah y_k = y_{k-1} - H y_k, \quad y_k = \frac{1}{1+H} y_{k-1}.$$

Характеристическое число этого разностного уравнения есть $\lambda = 1/(1+H)$. Поскольку $\Re H > 0$, то при любом шаге h $|\lambda| < 1$, так что метод абсолютно устойчив. В этом и состоит отмечавшееся без пояснений в § 1 существенное преимущество обратного метода Эйлера перед методом Эйлера, хотя последний реализуется значительно проще. Напомним, что в случае общего уравнения и обратного метода Эйлера значение приближенного решения в каждой следующей точке находится путем решения некоторого уравнения.

3⁰. *Пример абсолютно неустойчивого метода.* Рассмотрим разностный метод, имеющий вычислительную формулу $y_k = y_{k-2} + 2hf_{k-1}$. Это явный метод, требующий задания, кроме начального значения y_0 , еще и y_1 . Нетрудно убедиться, что (при соответствующих предположениях о гладкости решения) он имеет на одном шаге погрешность порядка малости h^3 . Для уравнения (2) разностное уравнение и его характеристический полином таковы:

$$y_k = y_{k-2} - 2H y_{k-1}, \quad P_2(\lambda) = \lambda^2 + 2H\lambda - 1.$$

Произведение корней этого полинома есть -1, так что по меньшей мере один из них по модулю не меньше единицы, и метод неустойчив при любом выборе шага h . Будучи абсолютно неустойчивым, рассмотренный метод практически никогда не применяется, хотя он не сложнее метода Эйлера и имеет на одном шаге лучшую точность.

Метод Эйлера и обратный метод Эйлера можно рассматривать как соответственно экстраполяционный и интерполяционный метод Адамса первого порядка. Обратимся теперь к методам Адамса более высокого порядка.

4⁰. *Интерполяционный метод Адамса 2-го порядка.* Вычислительная формула этого метода в случае уравнения (2):

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}(f_k + f_{k-1}) = y_{k-1} - \frac{H}{2}(y_k + y_{k-1}), \quad y_k = \frac{2-H}{2+H} y_{k-1}.$$

Характеристическое число этого разностного уравнения $\lambda = (2-H)/(2+H)$ по модулю всегда меньше единицы (модуль вещественной части числителя меньше модуля вещественной части знаменателя, а мнимые части отличаются лишь знаком). Так что этот метод абсолютно устойчив.

Заметим еще, что сходимость для задачи (2) этого метода и обратного метода Эйлера доказывается точно так же, как это было сделано выше в случае метода Эйлера.

Следующие два метода Адамса мы будем рассматривать лишь при дополнительном предположении, что число $a > 0$ вещественно.

5⁰. *Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка.* Вычислительная формула метода для задачи (2) и характеристическое уравнение соответствующего разностного уравнения:

$$y_k = y_{k-1} - H \left(\frac{3}{2} y_{k-1} - \frac{1}{2} y_{k-2} \right), \quad P_2(\lambda) = \lambda^2 - \left(1 - \frac{3H}{2} \right) \lambda - \frac{H}{2} = 0.$$

Для предельного значения $H = 0$ корни этого уравнения 0 и 1, а при положительных H они вещественны и разных знаков. Если положительный корень этого уравнения рассматривать как неявную функцию λ аргумента H (причем $\lambda(0) = 1$), то, как нетрудно убедиться, $\lambda'(0) < 0$, и потому при достаточно малых H $\lambda(H) < 1$. Но $H = 0$ — это единственное значение, при котором $P(1) = 0$, так что положительных корней, больших единицы, полином $P(\lambda)$ не имеет. Отрицательный корень, как непрерывная функция H , при $H = 0$ имеет предельное значение 0 и значения -1 достигает в единственной точке $H = 1$. Поэтому при $H < 1$ он больше -1. Итак, при $H < 1$ характеристические числа нашего разностного уравнения по модулю меньше единицы, и лишь при $H < 1$ рассматриваемый метод устойчив.

6⁰. *Интерполяционный метод Адамса 3-го порядка.* Для этого метода вычислительная формула и характеристическое уравнение таковы:

$$y_k = y_{k-1} - H \left(\frac{5}{12} y_k + \frac{2}{3} y_{k-1} - \frac{1}{12} y_{k-2} \right),$$

$$\left(1 + \frac{5}{12} H \right) \lambda^2 - \left(1 - \frac{2}{3} H \right) \lambda - \frac{1}{12} H = 0.$$

Как и в предыдущем пункте и теми же средствами показывается, что корни характеристического уравнения вещественны и имеют разные знаки, положительный корень меньше единицы, а отрицательный равен -1 при $H = 6$, оставаясь при $H < 6$ больше -1. Таким образом метод устойчив при $H < 6$.

Итак, экстраполяционный метод Адамса второго порядка и интерполяционный метод третьего порядка условно устойчивы, и область устойчивости первого из них включает в себя отрезок вещественной оси $(0, 1)$, а второго — $(0, 6)$.

Заметим, что явные разностные методы (3) ($\gamma_0 = 0$) не могут быть абсолютно устойчивыми. Это следует из того, что при $H \rightarrow \infty$ для тех j при которых $\gamma_j \neq 0$, соответствующие коэффициенты характеристического полинома стремятся к бесконечности, и формул Виета. Что касается методов Адамса, то с увеличением их порядка область устойчивости уменьшается и для интерполяционных методов эта область больше, чем для экстраполяционных.

Рассмотренные в §1 усовершенствованные методы Эйлера и в §4 метод Рунге-Кутты не укладываются в формулу (3), но задача (2) и для этих методов может служить модельной для дифференциальных уравнений первого порядка, правая часть которых в окрестности решения удовлетворяет условию $f'_y(x, y) < 0$. Метод из этой группы (или подобный им метод) естественно считать устойчивым при шаге h для задачи (2), если при любом начальном условии $y(0) = A$ построенное этим методом приближенное решение $\{y_k\}$ стремится к нулю. Для задачи (2) последовательность $\{y_k\}$ в перечисленных выше методах (как, видимо, и в любых разумных их обобщениях) зависит лишь от произведения $H = ah$, но не от каждого из этих параметров в отдельности. Это позволяет перенести на рассматриваемый случай понятия безусловной и условной устойчивости и безусловной неустойчивости, а также области устойчивости. Для задачи (2) построение приближенного решения в рассматриваемых методах сводится к формуле $y_k = \varphi(H)y_{k-1}$, где φ — определяемая методом функция, областью задания которой мы считаем правую комплексную полуплоскость: $\Re H > 0$. Очевидно, что если при всех H из области задания $|\varphi(H)| < 1$, то метод абсолютно устойчив, если при всех H $|\varphi(H)| \geq 1$, то абсолютно неустойчив, а в случае условной устойчивости область устойчивости определяется неравенством $|\varphi(H)| < 1$. Продемонстрируем сказанное на примере первого усовершенствованного метода Эйлера.

7⁰. *Первый усовершенствованный метод Эйлера.* Напомним вычислительные формулы этого метода:

$$y_{k-1/2} = y_{k-1} + \frac{h}{2}f_{k-1}, \quad y_k = y_{k-1} + hf_{k-1/2},$$

где для задачи (2)

$$f_{k-1} = -ay_{k-1}, \quad f_{k-1/2} = -ay_{k-1/2}$$

и таким образом

$$y_k = y_{k-1} - ha \left(y_{k-1} - \frac{ah}{2}y_{k-1} \right) = y_{k-1} \left(1 - H + \frac{H^2}{2} \right) = \varphi(H)y_{k-1}.$$

При исследовании устойчивости этого метода ограничимся, как и в некоторых случаях выше, лишь вещественными значениями H . При $0 < H < 2$ $0 < \varphi(H) < 1$, а при $H \geq 2$ $\varphi(H) \geq 1$, так что первый усовершенствованный метод условно устойчив, причем область устойчивости включает в себя отрезок вещественной оси $(0, 2)$.

Простые выкладки, аналогичные только что проведенным, показывают, что для задачи (2) второй усовершенствованный метод Эйлера совпадает с первым усовершенствованным, а тем самым совпадают и условия устойчивости.

8°. *Метод Рунге - Кутты*. На этом методе остановимся совсем коротко. Для него, как нетрудно показать, функция $\varphi(H)$ такова: $\varphi = 1 + \frac{1}{6}(\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + 2\vartheta_3 + \vartheta_4)$, где

$$\vartheta_1 = -H, \quad \vartheta_2 = -H(1 + \frac{1}{2}\vartheta_1), \quad \vartheta_3 = -H(1 + \frac{1}{2}\vartheta_2), \quad \vartheta_4 = -H(1 + \vartheta_3).$$

Так что $\varphi(H)$ есть полином 4-й степени со свободным членом 1 и коэффициентом при H , равным -1. Поэтому метод Рунге-Кутты устойчив при достаточно малых положительных H и следовательно также условно устойчив. Расчеты показывают, что при вещественных $H \leq 2.78$ метод устойчив, а при $H = 2.79$ уже неустойчив.

Обратимся теперь к вопросам устойчивости численных методов решения систем дифференциальных уравнений первого порядка. Существует понятие жестких систем таких уравнений. Система дифференциальных уравнений

$$Y' = F(x, Y) \quad (Y = (y_1, \dots, y_n), \quad F(x, Y) = (f_1(x, Y), \dots, f_n(x, Y)))$$

называется жесткой, если в интересующей нас области изменения x и Y собственные числа Λ_k матрицы Якоби $F' = \{\partial f_k / \partial y_j\}$ таковы, что $\Re \Lambda_k < 0$ при всех k и разброс этих собственных чисел велик, а именно велико число

$$\frac{\max_k(-\Re \Lambda_k)}{\min_k(-\Re \Lambda_k)}$$

(это отношение можно считать критерием жесткости). При решении таких уравнений возникают определенные трудности, связанные с устойчивостью. Такие трудности можно наблюдать и в уже рассмотренном нами случае одного дифференциального уравнения, если коэффициент a в уравнении (3) велик или (что то же самое ввиду возможной линейной замены независимой переменной) нам требуется решить задачу Коши на очень большом промежутке; условие устойчивости требует выбора очень маленького шага в сравнении с длиной промежутка, и число необходимых шагов метода может оказаться очень большим. Эти вопросы мы рассмотрим на модельной задаче — системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Итак, пусть дана задача Коши для системы n линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$Y' + AY = 0, \quad Y(0) = Y_0. \quad (7)$$

Обозначим через Λ_ν собственные числа матрицы A и будем считать, что при всех ν $\Re \Lambda_\nu > 0$ (это связано с жесткостью системы). Тогда все решения нашей системы уравнений стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$. Соответствующие собственные векторы обозначим через U_ν : $AU_\nu = \Lambda_\nu U_\nu$, причем будем считать, что матрица A имеет полную систему собственных векторов.

Пусть для решения задачи (7) мы применяем разностный метод: выбрав шаг h , строим приближенные значения решения в точках $x_k = kh$ по формулам

$$Y(x_k) \approx Y_k = Y_{k-1} + h \sum_{j=0}^m \gamma_j F_{k-j} = Y_{k-1} - h \sum_{j=0}^m \gamma_j AY_{k-j}, \quad k = m, m+1, \dots \quad (8)$$

Начальные значения Y_k ($k = 0, 1, \dots, m-1$) считаются заданными.

Как и в случае одного дифференциального уравнения, указанный метод решения системы (7) будем называть *устойчивым*, если все решения векторного разностного уравнения (8) стремятся к нулю: $Y_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для исследования этого метода преобразуем нашу систему дифференциальных уравнений, перейдя в n -мерном пространстве к новому базису, выбрав в качестве такового собственные векторы U_ν . Это равносильно приведению матрицы A к диагональной форме с помощью невырожденной матрицы G : $G^{-1}AG = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица с числами Λ_k на главной диагонали. Сделаем линейную замену искомых функций, положив $Y = GZ$. Подставляя это выражение в (7) и умножая на матрицу G^{-1} , мы получим, что $Z(x)$ есть решение задачи Коши

$$Z' + \Lambda Z = 0, \quad Z(0) = Z_0. \quad (9)$$

Здесь $Z_0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) = G^{-1}Y_0$. Но задача Коши (9) для системы дифференциальных уравнений распадается на n отдельных задач Коши для уравнений первого порядка:

$$z'_\nu + \Lambda_\nu z_\nu = 0, \quad z_\nu(0) = z_\nu^0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Точно так же мы поступим с разностным уравнением (8). Тогда полученное для векторов $Z_k = GY_k$ векторное разностное уравнение также распадется на n числовых разностных уравнений относительно искомых компонент векторов $Z_k = (z_1^k, \dots, z_n^k)$:

$$z_\nu(x_k) \approx z_\nu^k = z_\nu^{k-1} - h\Lambda_\nu \sum_{j=0}^m \gamma_j z_\nu^{k-j}, \quad k = m, m+1, \dots,$$

что является при каждом ν результатом применения нашего разностного метода к уравнению (10). Поскольку векторы Y_k и Z_k одновременно стремятся к нулю или нет, то из сказанного следует вывод: для того чтобы заданный разностный метод был устойчив для решения задачи (7), необходимо и достаточно, чтобы он был устойчив для всех n задач (10).

Отсюда следует, что если область устойчивости метода есть Ω , то для задачи (7) он будет устойчив в том и только в том случае, если при всех $\nu = 1, 2, \dots, n$ числа $H_\nu = h\Lambda_\nu$ принадлежат этой области: $H_\nu \in \Omega$. В частности, если метод абсолютно устойчив, то он устойчив для решения любой задачи вида (7), если только $\Im \Lambda_\nu < 0$ для всех ν , при любом выборе шага h .

Обратимся теперь к вопросам устойчивости усовершенствованных методов Эйлера и метода Рунге-Кутты при применении их к задаче (7) и покажем, что результат здесь тот же, что и выше. А именно, для того чтобы метод был устойчив для задачи (7) необходимо и достаточно, чтобы все числа $H_\nu = h\Lambda_\nu$ принадлежали области

устойчивости этого метода для задач (2). На примере первого усовершенствованного метода Эйлера покажем, что решение этим методом задачи (7) равносильно применению его к системе дифференциальных уравнений (9) для $Z = G^{-1}Y$, а это равносильно применению метода к каждому из n дифференциальных уравнений первого порядка, на которые распадается эта система и которые имеют вид (2) при $a = \Lambda_\nu$.

Для задачи (7) первый усовершенствованный метод Эйлера определяется формулами

$$Y_{k-1/2} = Y_{k-1} - \frac{h}{2}AY_{k-1}, \quad Y_k = Y_{k-1} - hAY_{k-1/2} = (E - hA + \frac{h^2}{2}A^2)Y_{k-1},$$

после замены $Y = GZ$ и домножения левой и правой части полученной формулы на G^{-1} :

$$Z_k = (E - h\Lambda + \frac{h^2}{2}\Lambda^2)Z_{k-1}$$

(мы учли, что $G^{-1}A^2G = \Lambda^2$), причем это векторное равенство распадается на n числовых

$$z_\nu^k = (1 - h\Lambda_\nu + \frac{h^2}{2}\Lambda_\nu^2)z_\nu^{k-1} = (1 - H_\nu + \frac{1}{2}H_\nu^2)z_\nu^{k-1} = \varphi(H_\nu)z_\nu^{k-1}$$

(здесь $H_\nu = h\Lambda_\nu$), а это — формулы применения нашего метода к каждому из дифференциальных уравнений, на которые распадается система (9).

Вообще легко видеть, что если для задачи (2) применяемый приближенный метод сводится к формуле $y_k = \varphi(H)y_{k-1}$, где $\varphi(t)$ — некоторый полином (так обстоит дело, например, и для метода Рунге-Кутты), то применение этого метода к системе уравнений (7) после замены $Y = GZ$ эквивалентно покомпонентному применению этого метода к системе (9): $z_\nu^k = \varphi(H_\nu)z_\nu^{k-1}$.

Кратко перечислим те результаты, которые получаются таким путем для конкретных методов решения системы дифференциальных уравнений (7).

1⁰. Метод Эйлера условно устойчив, и при этом область его устойчивости есть $\Omega = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 1| < 1 \}$, т.е. метод устойчив в том и только в том случае, если шаг h выбран так, что все собственные числа Λ_ν матрицы A таковы, что $H_\nu = h\Lambda_\nu \in \Omega$.

2⁰. Обратный метод Эйлера абсолютно устойчив.

3⁰. Разностный метод, указанный в пункте 3⁰ для уравнений первого порядка, абсолютно неустойчив и для систем.

4⁰. Интерполяционный метод Адамса 2-го порядка абсолютно устойчив.

5⁰. Экстраполяционный метод Адамса второго порядка условно устойчив и область его устойчивости включает отрезок $(0, 1)$.

6⁰. Интерполяционный метод Адамса 3-го порядка условно устойчив и область его устойчивости включает отрезок $(0, 6)$.

7⁰. Усовершенствованные методы Эйлера условно устойчивы, отрезок $(0, 2)$ попадает в область устойчивости.

8⁰. Метод Рунге-Кутта условно устойчив и $(0, 2.78] \subset \Omega$.

Задача. Построить вычислительную формулу разностного метода, в котором значение y_k вычисляется как значение интерполяционного полинома Эрмита с узлами x_{k-1} и x_{k-2} второй кратности. Исследовать устойчивость этого метода.

§ 6. О краевых задачах

Существуют приближенные методы решения краевых задач, общие для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных (метод сеток, проекционные методы). Эти методы не входят в первый круг вопросов, и излагать здесь мы их не будем, ограничившись изложением тех, которые специфичны для обыкновенных дифференциальных уравнений. Это методы сведения краевых задач к задачам Коши. Первый из них так и называется:

Метод сведения к задачам Коши.

Будем рассматривать краевую задачу для *линейного* обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y &= f(x), \\ A_0y'(a) + B_0y(a) &= D_0, \quad A_1y'(b) + B_1y(b) = D_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Общее решение нашего дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1z_1(x) + C_2z_2(x) + y_0(x), \quad (2)$$

где y_0 — какое-либо частное решение ($L(y_0) = f$), а z_1 и z_2 — линейно независимые решения однородного уравнения: $L(z_k) = 0$. Если мы построим y_0 , z_1 и z_2 как решения некоторых задач Коши, то нам останется только подобрать постоянные C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить краевым условиям. Это требование даст нам систему двух линейных уравнений относительно искомых постоянных.

Сказанное выше позволяет свести решение задачи (1) к решению трех задач Коши. В действительности можно обойтись решением двух задач Коши. Выберем какие-нибудь числа y_0 , y'_0 , z_0 и z'_0 , которые удовлетворяют равенствам $A_0y'_0 + B_0y_0 = D_0$, $A_0z'_0 + B_0z_0 = 0$ и найдем решения двух задач Коши:

$$\begin{aligned} L(y_0) &= f, \quad y_0(a) = y_0, \quad y'_0(a) = y'_0, \\ L(z_1) &= 0, \quad z_1(a) = z_0, \quad z'_1(a) = z'_0. \end{aligned}$$

Пусть z_2 какое-то решение уравнения $L(z_2) = 0$, линейно независимое с z_1 , так что $A_0z_2(a) + B_0z_2(a) \neq 0$. Решение задачи (1), если оно существует, должно иметь вид (2) при некоторых постоянных C_1 и C_2 , для определения которых мы имеем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (A_0z'_1(a) + B_0z_1(a))C_1 + (A_0z'_2(a) + B_0z_2(a))C_2 + (A_0y'_0(a) + B_0y_0(a)) &= D_0 \\ (A_1z'_1(b) + B_1z_1(b))C_1 + (A_1z'_2(b) + B_1z_2(b))C_2 + (A_1y'_0(b) + B_1y_0(b)) &= D_1 \end{aligned} \right\}$$

В силу выбора начальных условий для функций y_0 и z_1 первое из этих уравнений есть $(A_0z'_2(a) + B_0z_2(a))C_2 = 0$, т.е. $C_2 = 0$, и из второго уравнения мы сразу же находим C_1 . Нам остается построить решение задачи (1) как линейную комбинацию y_0 и z_1 : $y^*(x) = y_0(x) + C_1z_1(x)$. Поэтому находить функцию z_2 вообще не требуется, и удается ограничиться решением лишь двух задач Коши.

Отметим одну трудность, которая может встретиться при применении этого метода. Если однородное уравнение $L(z) = 0$ имеет быстро- и медленно растущие решения, то может оказаться, что вблизи правого конца b промежутка решения y_0 и z_1 “почти линейно зависимы”, и нам придется строить “небольшое” решение нашей задачи как линейную комбинацию “больших” “почти линейно зависимых” функций, что связано с потерей точности. Приведем

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$L(y) = y'' - y' - 6y = 6, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Мы будем пользоваться тем, что общее решение соответствующего однородного уравнения известно: $C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$, так что нетрудно найти решение поставленной задачи в явном виде, но тем не менее будем считать, что это решение мы ищем численно рассмотренным методом (можно считать, что коэффициенты дифференциального уравнения переменные, но близки к написанным постоянным — качественная картина при этом будет такая же). Найдем y_0 как решение нашего дифференциального уравнения при условиях Коши: $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 1$:

$$y_0(x) = \frac{3}{5}e^{3(1+x)} + \frac{2}{5}e^{-2(1+x)} - 1,$$

а z_1 как решение задачи Коши $L(z_1) = 0$, $z(-1) = 0$, $z'(-1) = 1$:

$$z_1(x) = \frac{1}{5}e^{3(1+x)} - \frac{1}{5}e^{-2(1+x)}.$$

Будем считать, что мы нашли эти функции численно с 5 верными значащими цифрами, так что $y_0(1) = 241.05$, $z_1(1) = 80.682$ и полученное решение нашей задачи есть $y^*(x) = y_0(x) + C_1 z_1(x)$, где $C_1 = -y_0(1)/z_1(1) = -2.9816$. При $x = 1/2$ получаем $y^*(1/2) = 53.030 + 17.993C_1 = -0.619$, и это значение получилось всего лишь с 3 верными знаками.

Рассмотрим теперь этот метод для системы линейных дифференциальных уравнений. Систему сразу же запишем в векторной форме:

$$Y' + A(x)Y = F(x), \quad (3)$$

где $Y(x)$ искомая, а $F(x)$ — заданная вектор-функция размерности n , $A(x)$ — $n \times n$ матрица. Требуется найти решение этой системы, удовлетворяющее краевым условиям

$$B_0 Y(a) = D_0, \quad B_1 Y(b) = D_1, \quad (4)$$

B_0 и B_1 — матрицы размерности $m \times n$ и $(n - m) \times n$ соответственно ($0 < m < n$), $D_0 \in \mathbb{R}^m$ и $D_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ — заданные векторы. Матрица B_0 имеет ранг m , а B_1 — $n - m$.

Возьмем какой-нибудь вектор Y_0 , удовлетворяющий равенству $B_0 Y_0 = D_0$ и построим $Y(x)$ как решение системы уравнений (3) при условиях Коши $Y(a) = Y_0$. Система линейных однородных алгебраических уравнений $B_0 Z = 0$ имеет $n - m$ линейно независимых решений. Пусть $Z_1^0, Z_2^0, \dots, Z_{n-m}^0$ — такие решения. Построим при $k = 1, 2, \dots, n - m$ вектор-функции $Z_k(x)$ как решения задач Коши

$$Z'_k + A(x)Z_k = 0, \quad Z_k(a) = Z_k^0.$$

Будем искать решение задачи (3)-(4) в виде

$$Y(x) = Y_0(x) + \sum_{k=1}^{n-m} c_k Z_k(x). \quad (5)$$

При любых постоянных c_k функция $Y(x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (3) и первому из краевых условий (4). Остается потребовать выполнения второго из краевых условий. Это приводит нас к системе $n - m$ линейных уравнений относительно $n - m$ постоянных c_k :

$$\sum_{k=1}^{n-m} c_k B_1 Z_k(b) = D_1 - B_1 Y_0(b). \quad (6)$$

Если определитель этой системы отличен от нуля, то подставляя найденные из нее значения постоянных c_k в формулу (5), мы получим решение поставленной задачи. Если же этот определитель равен нулю, то соответствующая однородная система имеет ненулевое решение $(c_1^*, c_2^*, \dots, c_{n-m}^*)$, и при любой постоянной c окажется, что $Z(x) = c \sum_{k=1}^{n-m} c_k^* Z_k(x)$ есть решение однородной задачи

$$Z' + A(x)Z = 0, \quad B_0 Z(a) = 0, \quad B_1 Z(b) = 0,$$

так что задача (3)-(4) либо не имеет решения, либо имеет их бесконечно много.

2. Метод дифференциальной прогонки.

Для простоты ограничимся рассмотрением задачи

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (7)$$

$$y'(a) + \alpha_0 y(a) = \beta_0, \quad y'(b) + \alpha_1 y(b) = \beta_1. \quad (8)$$

Лемма. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — решения дифференциальных уравнений

$$\alpha' + p\alpha - \alpha^2 = q, \quad \beta' + (p - \alpha)\beta = f. \quad (9)$$

Тогда любое решение дифференциального уравнения

$$y' + \alpha y = \beta \quad (10)$$

удовлетворяет уравнению (7).

Доказательство. Пусть y — решение уравнения (6). Тогда $y'' = -\alpha'y - \alpha y' + \beta'$ и потому

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (p - \alpha)y' + (q - \alpha')y + \beta' = (p - \alpha)(\beta - \alpha y) + (q - \alpha')y + \beta' = \\ &= (\alpha^2 - p\alpha - \alpha' + q)y + (p\beta - \alpha\beta + \beta') = f, \end{aligned}$$

и этим лемма доказана. ■

Изложим теперь алгоритм метода.

1) Решаем задачу Коши

$$\alpha' + p\alpha - \alpha^2 = q, \quad \alpha(a) = \alpha_0;$$

2) решаем задачу Коши

$$\beta' + p\beta - \alpha\beta = f, \quad \beta(a) = \beta_0;$$

3) находим числа y_1 и y'_1 из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} y'_1 + \alpha(b)y_1 &= \beta(b) \\ y'_1 + \alpha_1 y_1 &= \beta_1 \end{aligned} \right\};$$

4) находим функцию $y_*(x)$ как решение задачи Коши*

$$y' + \alpha(x)y = \beta(x), \quad y(b) = y_1.$$

Теорема. Построенная по указанному алгоритму функция $y_*(x)$ есть решение задачи (7)-(8).

Доказательство. Дифференциальному уравнению (7) функция y_* удовлетворяет ввиду леммы. Первому из условий (8) — поскольку оно эквивалентно равенству $y'(a) + \alpha(a)y(a) = \beta(a)$. Наконец, второму из условий (8):

$$y'(b) = \beta(b) - \alpha(b)y(b) = \beta(b) - \alpha(b)y_1 = y'_1 = \beta_1 - \alpha_1 y(b). \quad \blacksquare$$

Заметим, что дифференциальное уравнение (5) относительно α нелинейно, и его решение может не существовать на промежутке $[a, b]$. Тогда изложенный метод окажется неприменимым. Существуют варианты метода прогонки, которые позволяют избежать этой неприятности[†]. Сам термин “метод прогонки” связан с тем, что пункты 1)-2) алгоритма можно трактовать так, что мы “прогоняем” краевое условие, заданное на левом конце промежутка, на правый его конец (равенство $y'(b) + \alpha(b)y(b) = \beta(b)$ для решения уравнения (7) есть следствие краевого условия на левом конце). Можно показать, что если определитель системы уравнений пункта 3) равен нулю, то это означает отсутствие однозначной разрешимости задачи (7)-(8) — решение либо не существует, либо их бесконечно много (в соответствии с тем, имеет ли решение система уравнений этого пункта).

В методе сведения к задачам Коши для (7)-(8) нам пришлось бы решать две задачи Коши, а в методе дифференциальной прогонки — три. Но в первом случае это задачи Коши для уравнений второго порядка, а во втором — для уравнений первого порядка.

Задача. Показать, что при решении краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_k + \sum_{j=1}^n a_{kj}(x)y_j = f_j(x), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$y_k(a) = y_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad y_k(b) = y_k, \quad k = m+1, \dots, n$$

методом сведения к задачам Коши можно обойтись решением $l+1$ задачи Коши, где $l = \min\{m, n-m\}$.

*Эту задачу Коши нам придется решать “в обратном направлении”, двигаясь от правого конца промежутка b к левому.

[†]См., например, В.И.Крылов, В.В.Бобков, П.И.Монастырский [2]