Глава 1
Приближение функций и интерполяция

§1. Равномерное приближение функций. Полиномы Чебышева.

Идеи приближения функций пронизывают всю вычислительную математику.

Задача приближения состоит в том, что для заданной функции мы ищем близкую к ней более простую. Возникает два вопроса: какие функции считать простыми и что значит близость функций. Что касается первого вопроса, то мы будем рассматривать в основном приближение функций полиномами. Близость функций мы будем понимать как равномерную близость.

Поясним, что это значит. Множество вещественных функций, заданных и непрерывных на промежутке $[a,b]$, обозначим через $C = C[a,b]^*$, и каждой функции $f \in C$ сопоставим число $\|f\| = \|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, называемое нормой функции f (в пространстве C). Отметим очевидные свойства нормы:

$\langle 1 \rangle$ Для любой функции $f \in C$ $\|f\| \geq 0$ и $\|f\| = 0$ в том и только в том случае, если f тождественно равна нулю.

$\langle 2 \rangle$ Для любой функции $f \in C$ и любого вещественного числа α выполняется равенство $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$.

$\langle 3 \rangle$ Для любых функций $f, g \in C$ выполняется так называемое неравенство треугольника: $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Из свойства $\langle 3 \rangle$ следует, что для любых функций $f, g \in C$ выполняется неравенство $\big|\, \|f\| - \|g\| \,\big| \leq \|f - g\|$. Действительно, считая для определенности $\|f\| \geq \|g\|$, имеем $\|f\| = \|g + (f - g)\| \leq \|f - g\| + \|g\|$.

Пусть дана последовательность функций $\{\, f_n \,\} \subset C$. Соотношение $\|f_n - f\| \to 0$ (которое естественно называть сходимостью по норме в C) означает равномерную сходимость последовательности $\{\, f_n \,\}$ к f.

Введем обозначение: $\mathbb{P}_n = \{P_n\}$ — множество всех полиномов степени не выше n.

В терминах нормы известная из курса анализа 1-я теорема Вейерштрасса может быть сформулирована в виде

Теорема (1-я теорема Вейерштрасса). *Для любой функции $f \in C$ по любому $\varepsilon > 0$ найдутся такое n и такой полином $P_n \in \mathbb{P}_n$, что $\|f - P_n\| < \varepsilon$.*

Определение. *Наилучшим приближением* функции $f \in C$ полиномами степени n называется число

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n} \|f - P_n\|.$$

Полином $P_n \in \mathbb{P}_n$ называется *полиномом наилучшего приближения* функции f, если $\|f - P_n\| = E_n(f)$.

З а м е ч а н и е 1. Это определение и введенное обозначение восходят к П.Л.Чебышеву.

Геометрически норму разности $\|f - P_n\|$ можно представлять себе как расстояние от f до P_n, и тогда $E_n(f)$ — расстояние от f до множества $\mathbb{P}_n$, а полином наилучшего приближения — ближайшая к f “точка” множества $\mathbb{P}_n$.

---

*Указание промежутка $[a,b]$, когда из контекста ясно, о каком промежутке идет речь, мы, как правило, будем опускать.

[* З а м е ч а н и е 2. Множество полиномов $\mathbb{P}_n$ можно рассматривать как подпространство пространства C размерности $n+1$, и в этом отношении данное определение допускает широкое обобщение: пусть F — нормированное пространство и $F_n \subset F$ — его конечномерное подпространство. Для $f \in F$ число $E_{F_n}(f) = \inf_{f_n \in F_n} \|f - f_n\|$ — это наилучшее приближение элемента f элементами подпространства F_n, и так же, как выше, определяется элемент наилучшего приближения. Геометрически наилучшее приближение $E_{F_n}(f)$ можно представлять как расстояние элемента f до подпространства F_n, а элемент наилучшего приближения f_n как ближайший к f элемент подпространства F_n.*]

Теорема Вейерштрасса означает, что для любой функции $f \in C$ при $n \to \infty$ выполняется соотношение $E_n(f) \to 0$.

Докажем существование полинома наилучшего приближения. Мы будем рассматривать полином $P_n \in \mathbb{P}_n$ как функцию не только аргумента x, но и его коэффициентов, и обозначая через A вектор $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, писать $P_n = P_n(A, x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$.

Лемма 1. *Функция $n+1$ аргумента $F(A) = F(a_0, \dots, a_n) = \|f - P_n\|_C$ есть непрерывная функция своих аргументов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $c = \max\{|a|,\, |b|\}$. Тогда, обозначая вектор приращений аргументов a_k через $\Delta A = (\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_n)$ и применяя неравенство Коши - Буняковского, имеем

$$|F(A + \Delta A) - F(A)| \le \left\| \sum_{k=0}^{n} \Delta a_k x^k \right\| \le \sum_{k=0}^{n} |\Delta a_k| c^k \le \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \Delta a_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} c^{2k}},$$

что и доказывает непрерывность нашей функции. ■

Лемма 2. *Существует такая постоянная $m > 0$, зависящая лишь от n и промежутка $[a, b]$, что для любого $P_n \in \mathbb{P}_n$ ($P_n = a_0 + \dots + a_n x^n$) выполняется неравенство*

$$\|P_n\| \ge m \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы будет получено позднее, в §1 главы 3, как следствие более общего утверждения.

[*З а м е ч а н и е 3. Это более общее утверждение есть по существу известная теорема о том, что в конечномерном пространстве все нормы эквиваленитны.*]

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C[a, b]$ существует полином наилучшего приближения $P_n \in \mathbb{P}_n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуется доказать, что непрерывная функция $F(A)$, определенная в лемме 1, достигает своего наименьшего значения. Положим $R = 2\|f\|/m$ ($m > 0$ — число из леммы 2). В шаре $S_R = \{\, A \;\big|\; \sum a_k^2 \le R^2 \,\}$ функция $F(A)$ достигает своего наименьшего значения в некоторой точке $A^* \in S_R$ (т.к. S_R — замкнутое ограниченное множество). Если же $A \notin S_R$, то

$$F(A) = \|f - P_n(A, \cdot)\| \ge \|P_n(A, \cdot)\| - \|f\| > mR - \|f\| = \|f\| = F(0) \ge F(A^*),$$

так что A^* — точка глобального минимума. ■

Известно, что для любой непрерывной функции $f \in C$ ее полином наилучшего приближения в классе $\mathbb{P}_n$ единственный, но это утверждение оставим без доказательства.

Рассмотрим одну частную, но очень важную задачу. На промежутке $[-1,1]$ для функции $f(x) = x^n$ требуется построить ее полином наилучшего приближения степени $n-1$. Если полином $Q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ решает поставленную задачу, то полином $P_n(x) = x^n - Q_{n-1}(x)$ есть полином степени n со старшим коэффициентом 1, решающий задачу: среди всех полиномов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, найти тот, для которого норма $\|P_n\|_{C[-1,1]}$ минимальна (эти две задачи эквивалентны). Полином, решающий вторую задачу, называется *полиномом, наименее уклоняющимся от нуля*. Обратимся к решению этой задачи.

Определение. Полиномом Чебышева степени n называется функция, задаваемая на промежутке $[-1,1]$ формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Из формулы $\cos(n+2)\theta = 2\cos\theta\, \cos(n+1)\theta - \cos n\theta$ подстановкой $\theta = \arccos(x)$ легко получается *рекуррентная формула* для многочленов Чебышева:

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x),$$

которая (учитывая, что $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$) позволяет легко доказать методом индукции, что $T_n(x)$ есть полином степени n со старшим коэффициентом (при $n \geq 1$), равным 2^{n-1}. Первоначально заданные лишь на промежутке $[-1,1]$, полиномы Чебышева определены, разумеется, для всех вещественных (или даже комплексных) x, причем их значения в любой точке можно вычислять с помощью указанной рекуррентной формулы.

В широком смысле полиномами Чебышева называют также полиномы, отличающиеся от $T_n(x)$ постоянным не равным нулю множителем.

Непосредственно из определения ясно, что $\|T_n\|_{C[-1,1]} \leq 1$, и легко находятся корни x_k полинома T_n и все те точки $y_k \in [-1,1]$, в которых $|T_n(y_k)| = 1$:

$$y_k = \cos\frac{k\pi}{n} \quad (k = 0,\ldots,n), \qquad x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1,\ldots,n).$$

При этом $1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > -1$, других корней, кроме x_k, полином Чебышева не имеет, и кроме того $y_0 = 1 > y_1 > \cdots > y_n = -1$, $T_n(y_k) = (-1)^k$, так что $\|T_n\|_{C[-1,1]} = 1$.

Теорема 2. *Наименее уклоняющимся от нуля является так называемый приведенный многочлен Чебышева* $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x)$.

Доказательство. $\|\tilde{T}_n\|_{C[-1,1]} = 2^{-(n-1)}$. Доказывая теорему от противного, предположим, что нашелся такой полином $P_n \in \mathbb{P}_n$ со старшим коэффициентом, равным единице, что $\|P_n\|_{C[-1,1]} < 2^{-(n-1)}$. Тогда $\tilde{T}_n(y_k) - P_n(y_k) = (-1)^k 2^{-(n-1)} - P_n(y_k)$, и в этой разности уменьшаемое по модулю больше, чем вычитаемое, и потому знак этой разности есть $(-1)^k$. Так что на концах каждого промежутка $[y_{k+1}, y_k]$ (здесь

$k = 0, 1, \ldots, n-1$) полином $\tilde{T}_n - P_n$ принимает значения противоположных знаков и потому внутри такого промежутка имеет хотя бы один корень, и общее число его корней не менее n. Но степень этого полинома не более $n-1$, и потому он может быть только тождественным нулем, что невозможно. ■

Учитывая указанную выше связь задачи о полиноме наименее уклоняющемся от нуля с задачей о наилучшем приближении функции x^n полиномами степени $n-1$, сразу же получаем

Следствие 1. *Для промежутка* $[-1, 1]$ *выполняется равенство* $E_{n-1}(x^n) = 1/2^{n-1}$.

Полином Чебышева является решением и другой экстремальной задачи. Пусть заданы числа a и A, такие что $|a| > 1$ и $A \neq 0$.

Теорема 3. *Среди всех полиномов* $P_n \in \mathbb{P}_n$, *таких что* $P_n(a) = A$, *наименьшую норму в пространстве* $C[-1, 1]$ *имеет полином Чебышева, нормированный этим условием:* $T_n^*(x) = AT_n(x)/T_n(a)$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что так как все корни полинома Чебышева лежат в интервале $(-1, 1)$, то $T_n(a) \neq 0$. Пусть полином $P_n \in \mathbb{P}_n$ таков, что $P_n(a) = A$. Доказывая теорему от противного, предположим, что при всех $x \in [-1, 1]$ $|P_n(x)| < \|T_n^*\|_{C[-1,1]} = |A|/|T_n(a)|$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 2, в точках y_k знаки разностей $T_n^*(y_k) - P_n(y_k)$ чередуются, и при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ каждый промежуток (y_{k+1}, y_k) содержит хоть один корень полинома $T_n^* - P_n$, а так как точка $x = a$ также является корнем, то этот полином степени не выше n имеет не менее $(n+1)$ корней, так что полиномы P_n и T_n^* тождественны, что невозможно, так как $\|P_n\| < \|T_n^*\|$. ■

Следствие 2. *Для любого полинома* $P_n \in \mathbb{P}_n$ *в любой точке* $a \notin [-1, 1]$ *выполняется оценка*

$$|P_n(a)| \leq |T_n(a)| \, \|P_n\|_{C[-1,1]}.$$

Доказательство. Положив $A = P_n(a)$ и используя доказанную теорему, имеем

$$\|P_n\|_{C[-1,1]} \geq \frac{|A| \, \|T_n\|_{C[1,1]}}{|T_n(a)|} = \frac{|P_n(a)|}{|T_n(a)|},$$

что равносильно доказываемому неравенству. ■

При формулировке и доказательстве теорем 2 и 3 исключительную роль играл промежуток $[-1, 1]$. Однако с помощью линейной замены переменной эти результаты легко могут быть перенесены на случай любого другого промежутка. Так, например, полиномом степени n со старшим коэффициентом, равным единице, наименее уклоняющимся от нуля на промежутке $[a, b]$ (имеющим минимальную норму $\|P_n\|_{C[a,b]}$), является полином

$$P_n(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \tilde{T}_n\left(\frac{2x - (a+b)}{b-a}\right).$$

Сформулируем еще один частный случай перенесения теоремы 3 на другой промежуток. Этот частный случай понадобится нам ниже, в главе 3.

Следствие 3. *Пусть $0 < m < M$. Среди всех полиномов $P_n \in \mathbb{P}_n$, таких, что $P_n(0) = 1$, наименьшую норму в пространстве $C[m, M]$ имеет полином**

$$Q_n(x) = (-1)^n T_n\left(\frac{2x-(M+m)}{M-m}\right) \Big/ T_n\left(\frac{M+m}{M-m}\right)$$

Следствие 2 позволяет, зная оценку полинома $P_n \in \mathbb{P}_n$ на некотором промежутке $[a, b]$, получить оценку его значения в любой другой точке.

В заключение параграфа сформулируем без доказательства некоторые утверждения, касающиеся наилучших полиномиальных приближений. Доказательства этих утверждений можно найти в книгах *И.П.Натансон* или *И.К.Даугавет [1]*.

Как видно из доказательства теоремы 2, для функции x^n и ее полинома наилучшего приближения степени $n-1$ нашлись такие $n+1$ точки (это точки y_k), в которых разность между ними достигает максимального по абсолютной величине значения с чередующимися знаками. Это — общее явление. Верна

Теорема П.Л.Чебышева. *Пусть $f \in C$, $P_n \in \mathbb{P}_n$. Для того чтобы P_n был полиномом наилучшего приближения функции f, необходимо и достаточно существование чебышевского альтернанса: таких точек $a \le x_1 < \cdots < x_{n+2} \le b$, что*

1) $|f(x_k) - P_n(x_k)| = \|f - P_n\|$,

2) $\mathrm{sign}\big(f(x_k) - P_n(x_k)\big) = -\mathrm{sign}\big(f(x_{k+1}) - P_n(x_{k+1})\big)$.

В теореме Вейерштрасса ничего не говорится о том, насколько велико должно быть n, чтобы ниилучшее приближение заданной непрерывной функции оказалось меньше некоторого ε. Оказывается, что для функций, обладающих большой гладкостью, наилучшие приближения стремятся к нулю очень быстро. В начале прошлого века Д.Джексоном (D.Jackson) было показано, что если функция f на некотором промежутке p раз непрерывно дифференцируема, то ее наилучшие приближения на этом промежутке убывают не медленнее, чем $1/n^p$. Более поздний результат (H.F.Sinwel, 1981) таков:

Теорема. *Если функция $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ p раз непрерывно дифференцируема, то при $n \ge p - 1$*

$$E_n(f) \le \frac{\pi}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^p \frac{(n+1-p)!}{(n+1)!}\|f^{(p)}\|_{C[a,b]}.$$

Задача 1. Доказать достаточность в теореме Чебышева об альтернансе.

Задача 2. Доказать теорему о единственности полинома наилучшего приближения, используя теорему об альтернансе.

§2. Конечные и разделенные разности

В этом параграфе дается определение конечных и разделенных разностей функции и изучаются их свойства. Конечные и разделенные разности являются аппаратом работы с таблицами функций.

---

*В приводимой формуле учитывается, что при четных n полином Чебышева T_n четный, а при нечетном n — нечетный

Определение. Дано число $h>0$. *Конечной разностью* с шагом h непрерывной функции $f \in C[a,b]$ называется функция $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$.

Конечные разности высших порядков определяются рекуррентно. *Конечной разностью порядка* k функции $f(x)$ называется $\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)$.

Конечная разность $\Delta^k f$ задана на промежутке $[a, b-kh]$.

Слово "конечная" в названии разности противопоставляет ее не мифической (несуществующей) "бесконечной разности" , а бесконечно-малой разности — дифференциалу.

Конечные разности — аппарат работы с функциями, заданными таблично в равноотстоящих точках, называемых обычно узлами. Если нам известны значения функции f в точках $x_j = x_0 + jh$, $j = 0,\ldots,N$, то в тех же узлах при $j = 0,\ldots,N-k$ могут быть вычислены и значения $\Delta^k f$. В таблицах функций в случае равноотстоящих узлов наряду со значениями самих функций часто указываются и значения конечных разностей до некоторого порядка. В этом случае обычно принято размещать значение разности порядка k на полстроки ниже, чем значение разности порядка $k-1$ для того же аргумента. Значение функции в узле x_n мы будем помечать индексом n, так что $\Delta^k f_n = \Delta^k(x_n) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n$, так что $\Delta^k f_n$ получается как разность чисел, стоящих в столбце слева на полстроки ниже и на полстроки выше. Таблица в которой нвряду со значениями функции приводятся и значения ее конечных разностей выгдядит обычно так (если приводятся конечные разности до третьего порядка):

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}$	
		Δf_{n-1}		$\Delta^3 f_{n-2}$
x_n	f_n		$\Delta^2 f_{n-1}$	
		Δf_n		$\Delta^3 f_{n-1}$
x_{n+1}	f_{n+1}		$\Delta^2 f_n$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Отметим основные свойства конечных разностей.

$\langle \mathbf{1} \rangle$ Если $f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$, то $\Delta^k f = \alpha_1 \Delta^k g_1 + \alpha_2 \Delta^k g_2$. Это свойство очевидно и называется линейностью.

$\langle \mathbf{2} \rangle$ Если $P_n \in \mathbb{P}_n$ — полином степени n, то ΔP_n — полином степени $n-1$, $\Delta^k P_n$ — полином степени $n-k$, в частности, $\Delta^n P_n$ — постоянная, а разности более высоких порядков тождественно равны нулю. Ввиду первого свойства доказательство этого свойства сводится к случаю $P_n(x) = x^n$, для которого оно очевидно.

$\langle \mathbf{3} \rangle$ Непосредственно через значения самой функции конечные разности выражаются формулой:

$$\Delta^k f_0 = f_k - C_k^1 f_{k-1} + C_k^2 f_{k-2} + \cdots + (-1)^k f_0.$$

Здесь C_k^j — биномиальные коэффициенты. Формула легко доказывается методом индукции с учетом известного равенства $C_{k-1}^j + C_{k-1}^{j-1} = C_k^j$.

Если ввести “оператор сдвига” $Ef(x) = f(x+h)$, то приведенная формула может быть записана в символической форме $\Delta^k = (E-1)^k$. Имеется в виду, что правая часть раскрывается по формуле бинома Ньютона. Эта символическая формула позволяет легко запомнить сформулированное свойство конечных разностей. Впрочем, при некотором навыке работы с линейными операторами ее можно рассматривать и как доказательство свойства $\langle 3\rangle$.

$\langle\mathbf{4}\rangle$ Значение функции f в точке x_n может быть выражено через значения ее разностей в точке x_0:

$$f_n = f_0 + C_n^1\Delta f_0 + C_n^2\Delta^2 f_0 + \dots + \Delta^n f_0.$$

Формула также легко доказывается методом индукции. При $n = 1$ она очевидна. Для индуктивного перехода от $n-1$ к n воспользуемся равенством $f_n = f_{n-1} + \Delta f_{n-1}$ и индуктивным предположением для функций f и Δf:

$$\begin{aligned} f_{n-1} &= f_0 \quad + C_{n-1}^1\Delta f_0 + C_{n-1}^2\Delta^2 f_0 \quad + \ldots + \Delta^{n-1} f_0 \\ \Delta f_{n-1} &= \qquad\qquad\quad \Delta f_0 + C_{n-1}^1\Delta^2 f_0 \quad + \ldots + C_{n-1}^{n-2}\Delta^{n-1} f_0 \quad + \Delta^n f_0, \end{aligned}$$

и для завершения доказательства остается сложить эти равенства, опять учитывая, что $C_{n-1}^j + C_{n-1}^{j-1} = C_n^j$.

Запомнить доказанное свойство помогает символическое равенство $E^n = (1+\Delta)^n$

$\langle 5\rangle$ Если функция f r раз непрерывно дифференцируема ($f \in C^{(r)}$), то таковы же и ее конечные разности, причем $(\Delta^k f)^{(r)}(x) = (\Delta^k f^{(r)})(x)$. Это свойство очевидно.

$\langle\mathbf{6}\rangle$ Если функция f k раз непрерывно дифференцируема, то для любой точки $x \in [a, b-kh]$ найдется такая точка $\xi \in (x, x+kh)$, что $\Delta^k(x) = h^k f^{(k)}(\xi)$. При $k = 1$ доказываемое свойство есть формула Лагранжа. Возможность индуктивного перехода следует из цепочки равенств:

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) = h(\Delta^{k-1} f)'(\eta) = h\Delta^{k-1} f'(\eta) = h^k f^{(k)}(\xi).$$

Здесь $\eta \in (x, x+h)$, $\xi \in (\eta, \eta+(k-1)h) \subset (x, x+kh)$.

При работе с таблично заданными функциями при неравноотстоящих узлах конечные разности заменяются разделенными.

Определение. *Разделенной разностью (разностным отношением)* первого порядка функции $f(x)$ называется функция двух переменных

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (x_1 \neq x_0).$$

Разделенные разности высших порядков определяются рекурсивно, причем разделенная разность k-го порядка есть функция $(k+1)$ попарно не совпадающих аргументов:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \frac{f(x_1, \ldots, x_k) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})}{x_k - x_0}.$$

Перечислим основные свойства разделенных разностей.

$\langle\mathbf{1}\rangle$ Если $f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$, то

$$f(x_0, \ldots, x_k) = \alpha_1 g_1(x_0, \ldots, x_k) + \alpha_2 g_2(x_0, \ldots, x_k).$$

Это свойство очевидно и называется линейностью.

$\langle\mathbf{2}\rangle$ Справедливо представление:

$$f(x_0,\dots,x_k)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_k)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_k)}+$$
$$+\dots+\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится методом индукции. При $k=1$ формула очевидна. Возможность индуктивного перехода от k к $k+1$ покажем только для $k=1$ — общий случай не сложнее в идейном отношении, но громоздок. Итак,

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}=$$
$$=\frac{1}{x_2-x_0}\left[\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}\right]-\frac{1}{x_2-x_0}\left[\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}\right]=$$
$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{x_2-x_0}\left[\frac{1}{x_1-x_2}-\frac{1}{x_1-x_0}\right]+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

и остается заметить, что

$$\frac{1}{x_1-x_2}-\frac{1}{x_1-x_0}=\frac{x_2-x_0}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}. \quad \blacksquare$$

$\langle\mathbf{3}\rangle$ Разделенная разность $f(x_0,\dots,x_k)$ есть симметричная функция своих аргументов, т.е. от перестановки аргументов ее значение не меняется. Это свойство есть непосредственное следствие предыдущего.

Теперь можно сказать, что разделенная разность k-го порядка есть первая разделенная разность от $(k-1)$-ой по любому из ее аргументов.

$\langle\mathbf{4}\rangle$ Если $P_n\in\mathbb{P}_n$ — полином степени n, то разделенная разность порядка k есть полином степени $n-k$ от $k+1$ аргументов. Доказательство достаточно провести лишь для первой разделенной разности и, используя линейность, лишь для $P_n(x)=x^n$, а этот случай очевиден.

В частности, $P_n(x_0,x_1,\dots,x_n)$ есть постоянная, а разделенные разности более высокого порядка — тождественные нули.

$\langle\mathbf{5}\rangle$ Справедливо представление

$$f(x_n)=f(x_0)+(x_n-x_0)f(x_0,x_1)+(x_n-x_0)(x_n-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+\dots+$$
$$+(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})f(x_0,\dots,x_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится методом индукции. При $n=1$ формула очевидна. Покажем возможность индуктивного перехода от $n-1$ к n. Используя индуктивное предположение для точек $x_0,\dots,x_{n-2},x_n$, имеем

$$f(x_n)=f(x_0)+(x_n-x_0)f(x_0,x_1)+\dots+$$
$$+(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-2})f(x_0,\dots,x_{n-2},x_n),$$

и остается воспользоваться тем, что

$$f(x_0,\dots,x_{n-2},x_n)=f(x_0,\dots,x_{n-2},x_{n-1})+f(x_0,\dots,x_{n-1},x_n)(x_n-x_{n-1}).$$

$\langle 6\rangle$ Пусть $\alpha = \min x_k$, $\beta = \max x_k$. Если на промежутке $[\alpha, \beta]$ функция f n раз непрерывно дифференцируема ($f \in C^{(n)}$), то найдется такая точка $\xi \in (\alpha, \beta)$, что

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Доказательство. Рассмотрим полином степени n

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0, \dots, x_n)$$

и функцию $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$. Очевидно, что $\varphi \in C^{(n)}$. При $x = x_k$ сумма, которой представляется P_n, обрывается на k-ом слагаемом, и согласно предыдущему свойству $P_n(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, \dots, n)$, так что функция φ имеет на $[\alpha, \beta]$ не менее чем $n+1$ различных корней. По теореме Ролля φ' имеет на (α, β) не менее n корней, φ'' — не менее, чем $n-1$, и $\varphi^{(n)}$ по меньшей мере один корень ξ. Остается воспользоваться тем, что $0 = \varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - n! f(x_0, \dots, x_n)$. ■

Доказанное свойство позволяет нам доопределить по непрерывности разделенную разность порядка n на случай, когда все или некоторые из ее аргументов совпадают.

$\langle \mathbf{7}\rangle$ Если функция f n раз непрерывно дифференцируема на промежутке $[a, b]$, то при $k \le n$ разделенная разность $f(x_0, \dots, x_k)$ может быть продолжена по непрерывности на весь "куб" $[a, b]^{k+1}$, причем если $x_0 = x_1 = \dots = x_k$, то

$$f(x_0, x_0, \dots, x_0) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \tag{1}$$

а если среди аргументов $x_0, \dots, x_k$ имеются хоть два различных (для определенности $x_0 \ne x_k$), то*

$$f(x_0, \dots, x_k) = \frac{f(x_1, \dots x_k) - f(x_0, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0}. \tag{2}$$

Для доопределенных таким образом по непрерывности разделенных разностей сохраняются свойства $\langle 1\rangle$, $\langle 3\rangle$-$\langle 6\rangle$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $f(x_0, \dots, x_k)$ доопределена по непрерывности на случай хотя бы нескольких совпадающих аргументов, то для нее выполняются свойства $\langle 1\rangle$, $\langle 3\rangle$-$\langle 6\rangle$. Это легко доказывается предельным переходом. Непрерывность доопределенной формулами (1)-(2) на случай совпадающих аргументов разделенной разности доказывается индукцией по k и следует из непрерывности производных $f^{(k)}$ $(k \le n)$. ■

Аргументы разделенной разности часто называют узлами. Если некоторый узел встречается среди аргументов разделенной разности k раз, то его называют узлом кратности k. Для того чтобы вычислить $f(x_0, \dots, x_n)$, согласно формулам (1)-(2) достаточно знать в каждом узле x_k значение самой функции f и ее производных до порядка $m-1$ включительно, если кратность этого узла есть m. Если функция f n раз непрерывно дифференцируема, то ее разделенные разности порядка выше n определены и непрерывны для тех значений аргументов, когда кратность каждого узла не превышает n.

*Обратим внимание, что это *рекуррентное* (по k) определение.

$\langle \mathbf{8} \rangle$ Если точки x_k равноотстоящи: $x_k = x_0 + kh$, то очевидна связь между конечными и разделенными разностями:

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{h^n n!} \Delta^n f(x_0).$$

Таблица разделенных разностей обычно выглядит так:

x	$f(x)$	$f(x,y)$	$f(x,y,z)$	$f(x,y,z,t)$
x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0,x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0,x_1,x_2)$	
		$f(x_1,x_2)$		$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1,x_2,x_3)$	
		$f(x_2,x_3)$		$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2,x_3,x_4)$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Заметим, что если аргументы расположены в порядке возрастания и среди этих узлов имеются кратные, причем в кратных узлах нам известны необходимые значения производных функции f, то вычисление всех находящихся в таблице значений разделенных разностей не составляет труда и в этом случае.

Задача. Пусть $N > M \geq 0$ целые. Доказать:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{(N+k)!}{(M+k)!} = \begin{cases} 0 & \text{при } N - M < n \\ n! & \text{при } N - M = n. \end{cases}.$$

§3. Алгебраическая интерполяция

Общая постановка задачи интерполяции такова. На промежутке $[a,b]$ задана система непрерывных функций $\{\varphi_k(x)\}$ $(k = 0, \dots, n)$. Линейные комбинации этих функций называются обобщенными полиномами (по системе $\{\varphi_k\}$). Заданы попарно различные точки $x_0, \dots, x_n$ промежутка $[a,b]$, называемые узлами*. Ставится задача: для произвольно заданной на $[a,b]$ функции $f(x)$ построить такой "полином" $q = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k$, который удовлетворял бы равенствам $q(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, \dots, n)$.

Можно отметить два случая, когда решение поставленной задачи находит практическое применение. Во-первых, часто возникает необходимость замены некоторой "сложной" функции f более простой. Нам часто приходится вычислять значения этой "сложной" функции в различных точках, и это требует большой затраты труда. Тогда можно по относительно небольшому числу ее значений построить интерполяционный "полином" q, который близок на всем промежутке $[a,b]$ к функции f, и в дальнейшем заменять значения функции f значениями этого просто вычисляемого полинома.

---

*Когда точки некоторой системы точек будут называться узлами, то всегда будет иметься в виду, что они попарно различны.

Во-вторых, часто бывает так, что некоторая функция известна нам лишь в конечном числе точек (например, эти значения получены из эксперимента), а нас интересуют ее значения и в других точках. Тогда естественно заменить эту функцию на некотором промежутке $[a, b]$ интерполяционным полиномом, построенным по ее известным значениям. Таково применение интерполяции и при работе с таблицами функций.

Следует заметить, что идеи интерполяции пронизывают всю вычислительную математику. Дальше это будет видно на примерах дифференцирования, вычисления интегралов, решения дифференциальных уравнений.

Обратимся к вопросам разрешимости поставленной задачи интерполяции.

Определение. Система функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ называется *чебышевской* на $[a, b]$, если любой нетривиальный "полином" $q = \sum_{k=0}^n a_k\varphi_k$ (т.е. такой, что хоть один из его коэффициентов a_k отличен от нуля) имеет на $[a, b]$ не более n корней.

Теорема 1. *Для того чтобы система $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ была чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора попарно различных точек $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ определитель*

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля.

Доказательство. Докажем, что для того чтобы наша система *не была* чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие попарно различные точки x_k, что $\Delta(x_0, \ldots, x_n) = 0$. Действительно, если система *не* чебышевская, то найдется нетривиальный "полином" q, который имеет по меньшей мере $n + 1$ корень. Пусть $x_0, \ldots, x_n$ — его корни. Тогда его коэффициенты удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{array}{rl} a_0\varphi_0(x_0) + \cdots + a_n\varphi_n(x_0) & = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_0\varphi_0(x_n) + \cdots + a_n\varphi_n(x_n) & = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Итак, система однородных уравнений (1) имеет ненулевое решение и, значит, ее определитель $\Delta(x_0, \ldots, x_n) = 0$. Обратно, пусть нашлись такие попарно различные точки $x_0, \ldots, x_n$, что $\Delta(x_0, \ldots, x_n) = 0$. Тогда система однородных уравнений (1) имеет ненулевое решение, и компоненты этого решения будут коэффициентами "полинома", который имеет все точки $x_0, \ldots, x_n$ своими корнями. ■

Теорема 2. *Для того чтобы для любой системы узлов $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ интерполяционная задача $q(x_k) = f_k$ была однозначно разрешима, необходимо и достаточно, чтобы система $\{\varphi_k\}$ была чебышевской.*

Доказательство. Если искать полином в форме $q(x) = \sum_{k=0}^n a_k\varphi_k(x)$ с неопределенными коэффициентами a_k, то требования $q(x_k) = f_k$ дадут систему $(n+1)$ линейных уравнений относительно его $(n+1)$ коэффициентов с определителем $\Delta(x_0, \ldots, n)$. Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости этой системы является отличие от нуля ее определителя. Поэтому остается сослаться на предыдущую теорему. ■

Поскольку любой полином $P_n \in \mathbb{P}_n$ имеет не более n попарно различных корней, то система $\{1, x, \ldots, x^n\}$ является чебышевской на любом промежутке $[a, b]$, и из теоремы 2 немедленно вытекает

Следствие. *Каковы бы ни были узлы $x_0, \ldots, x_n$ и числа $f_0, \ldots, f_n$ существует и притом единственный полином $P_n \in \mathbb{P}_n$, такой что при $k = 0, \ldots, n$ $\;P_n(x_k) = f_k$.*

Если f_k — это значения в узлах некоторой функции $f(x)$, то P_n называется интерполяционным полиномом функции f.

Дальше будем рассматривать задачу построения алгебраического интерполяционного полинома.

Обозначим через $l_k(x)$ полином, решающий интерполяционную задачу*

$$l_k(x_j) = \delta_{kj}. \tag{2}$$

Легко видеть, что тогда полином $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f_k$ удовлетворяет равенствам $P_n(x_j) = f_j$. Поэтому интерполяционный полином функции $f(x)$ может быть записан в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k). \tag{3}$$

Эта формула называется *интерполяционной формулой Лагранжа*, а полиномы $l_k(x)$ — фундаментальными полиномами интерполяции или полиномами влияния Лагранжа. Для этих полиномов нетрудно указать явное представление:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)},$$

где $\omega(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)$. То, что полином $l_k(x)$, задаваемый первым из этих представлений, удовлетворяет равенствам $l_k(x_j) = \delta_{kj}$, очевидно. Числитель в этом представлении есть $\omega(x)/(x - x_k)$, а знаменатель — $\omega'(x_k)$. Последнее видно, например, из того, что при $x \to x_k$ $\;\omega(x)/(x - x_k) \to \omega'(x_k)$ (т.к. $\omega(x_k) = 0$). Этим доказано и второе представление полинома $l_k(x)$. Итак, интерполяционная формула Лагранжа может быть записана в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\;\omega'(x_k)}\, f(x_k).$$

Другое представление интерполяционного полинома принадлежит Ньютону:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \cdots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) f(x_0, \ldots, x_n).$$

Это — интерполяционная формула Ньютона. Полином P_n использовался при доказательстве свойства $\langle 6 \rangle$ разделенных разностей, там и было показано, что он удовлетворяет равенствам $P_n(x_k) = f(x_k)$.

Сравним эти две записи интерполяционного полинома. Формула Ньютона удобна, в частности, тем, что мы можем не решать заранее, сколько узлов и какие именно

*δ_{kj} — символ Кронекера: $\delta_{kk} = 1$ и при $j \neq k$ $\;\delta_{kj} = 0$.

мы выберем из тех точек, в которых нам известны значения интерполируемой функции, а последовательно выбирать их один за другим, учитывая уже достигнутый результат. Кстати, при этом не обязательно строить заранее таблицу разделенных разностей. Если полином P_n уже построен, и мы хотим привлечь еще один узел x_{n+1}, то для коэффициента $f(x_0, \ldots, x_n, x_{n+1})$ в следующем члене формулы Ньютона можно воспользоваться формулой

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \frac{f(x_{n+1}) - P_n(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) \ldots (x_{n+1} - x_n)}$$

(разделенная разность порядка $n+1$ функции f совпадает с разделенной разностью $f - P_n$, так как разделенная разность полинома P_n равна нулю).

Формула Лагранжа удобна в теоретических вопросах интерполяции. В практических применениях она удобнее формулы Ньютона, если в одной и той же точке требуется вычислить значения интерполяционных полиномов многих функций по одной и той же системе узлов, поскольку фундаментальные полиномы интерполяции не зависят от интерполируемой функции.

Рассмотрим случай равноотстоящих узлов: $x_k = x_0 + kh$. В этом случае при применении интерполяционной формулы Ньютона естественно, согласно свойству $\langle 8 \rangle$ разделенных разностей, заменить их на конечные разности. Как обычно при применении формулы Ньютона, мы не будем называть все используемые узлы, а будем указывать лишь порядок их привлечения.

1. Пусть значения функции $f(x)$ известны в узлах $x_0, x_1, \ldots$ и точка x, в которой нам нужно найти ее значение, лежит вблизи x_0. Тогда привлекая узлы в порядке $x_0, x_1, \ldots$, делая замену $x = x_0 + th$ и учитывая, что $x - x_k = h(t-k)$ и $f(x_0, \ldots, x_k) = \frac{1}{h^k k!}\Delta^k f_0$, имеем

$$P(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots.$$

Это — формула Ньютона для начала таблицы. Из выписанных членов этой формулы нетрудно понять, каковы будут последующие. Так же обстоит дело и с двумя другими формулами, которые приводятся ниже.

2. Пусть значения функции $f(x)$ известны в точках $\ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$, и точка интерполяции x лежит вблизи точки x_n. Естественный порядок привлечения узлов $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$. Так же, как в предыдущем случае, учитывая при этом, что при замене разделенной разности конечной аргументом у конечной разности будет наименьший из аргументов разделенной, имеем:

$$P(x_n + th) = f_n + t\Delta f_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 f_{n-3} + \ldots.$$

Это — формула Ньютона для конца таблицы.

3. Пусть значения функции $f(x)$ известны в узлах $\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ и точка интерполяции x лежит между x_0 и x_1. Будем привлекать узлы интерполяции в по-

рядке $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \ldots$. Тогда так же как в двух предыдущих случаях получим

$$P(x_0+th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 f_{-1} + \\ + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 f_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 f_{-2} + \ldots .$$

Это — формула Ньютона - Гаусса для середины таблицы.

Задача 1. Показать, что если функция $g(x)$ такова, что на промежутке $[a,b]$ $g^{(n)}(x) > 0$, то на этом промежутке система функций $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, g(x)$ чебышевская.

Задача 2. Показать, что система функций $1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}$ чебышевская на любом промежутке.

§4 Погрешность интерполяции

В этом параграфе мы считаем заданным некоторый промежуток $[a,b]$, которому принадлежат узлы интерполяции и точки x, в которых мы рассматриваем интерполяционный полином

Пусть на $[a,b]$ заданы узлы $x_0, \ldots, x_n$. Для функции $f \in C[a,b]$ ее интерполяционный полином, построенный по этим узлам, условимся обозначать через $Q_n f$, а значение этого полинома в точке x через $Q_n(f;x)$. Отметим очевидные свойства:

1. Для любой функции $f \in C$ $\; Q_n f \in \mathbb{P}_n$;

2. свойство линейности: для любых функций $f_1, f_2 \in C$ и любых чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $Q_n(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 Q_n f_1 + \alpha_2 Q_n f_2$;

3. для любого полинома $P_n \in \mathbb{P}_n$ $\quad Q_n P_n = P_n$.

Разность $R_n(f;x) = f(x) - Q_n(f;x)$ есть погрешность (остаточный член) интерполяции. Остаток $R_n(f;x)$ обладает следующими очевидными свойствами:

1. Линейность: $R_n(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 R_n(f_1;x) + \alpha_2 R_n(f_2;x)$;

2. для любого полинома $P_n \in \mathbb{P}_n$ $\; R_n(P_n) = 0$;

3. для любого узла x_k и любой функции f $\; R_n(f;x_k) = 0$.

[*З а м е ч а н и е 1. В терминах функционального анализа Q_n и R_n — это *линейные операторы*, действующие в пространстве C. Оператор Q_n — это *проекционный оператор*, проектирующий пространство C на подпространство $\mathbb{P}_n$.***]**

Следующая теорема дает некоторую оценку погрешности интерполяции.

Теорема 1. *Если функция f $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на промежутке $[a,b]$, ($f \in C^{(n+1)}[a,b]$), то для каждой точки $x \in [a,b]$ найдется такая точка $\xi \in (a,b)$, что*

$$R_n(f;x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \text{где } \omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если x совпадает с одним из узлов, то (1) очевидно — левая и правая части равны нулю. При x отличном от всех узлов воспользуемся свойством $\langle 5 \rangle$ разделенных разностей для узлов $x_0, \ldots, x_n, x$ (включив точку x в число узлов разделенной разности). Тогда имеем:

$$f(x) = Q_n(f;x) + \omega(x) f(x_0, \ldots, x_n, x),$$

и для завершения доказательства остается воспользоваться свойством $\langle 6 \rangle$ разделенных разностей. $\blacksquare$

Остановимся на двух задачах выбора узлов интерполяции. Пусть задан некоторый класс непрерывных функций $U \subset C[a,b]$. При заданных узлах интерполяции введем обозначения:

$$R_n(U;x) = \sup_{f\in U} |R_n(f;x)|, \quad R_n(U) = \sup_{f \in U} \|R_n f\|_C \ -$$

погрешности (остатки) интерполяции на классе U. Для класса функций

$$KC^{(n+1)} = \{ \, f \in C^{(n+1)} \ \big| \ \|f^{(n+1)}\|_C \le K \, \} \quad (K > 0)$$

эти погрешности легко вычисляются:

Теорема 2. *Справедливы равенства:*

$$R_n(KC^{(n+1)};x) = \frac{K|\omega(x)|}{(n+1)!}, \qquad R_n(KC^{(n+1)}) = \frac{K\|\omega\|_C}{(n+1)!}\,.$$

Доказательство. То, что левая часть первого из этих равенств не превосходит правой, сразу же следует из теоремы 1. Докажем обратное неравенство. Рассмотрим функцию $f_0(x) = \frac{K}{(n+1)!}\omega(x)$. Так как $f_0^{(n+1)} \equiv K$, то $f_0 \in KC^{(n+1)}$. Очевидно, что $Q_n f_0 \equiv 0$, и потому

$$|R_n(f_0;x)| = |f_0(x)| = \frac{K|\omega(x)|}{(n+1)!},$$

что и завершает доказательство первого равенства. Второе следует из первого ввиду очевидного тождества $R_n(KC^{(n+1)}) = \sup_x R_n(KC^{(n+1)};x)$. $\blacksquare$

При заданном классе U (или заданных классе U и точке x) величина $R_n(U)$ (соответственно $R_n(U;x)$) есть функция узлов, и можно ставить задачу о минимизации этой функции. Те узлы, на которых функция $R_n(U)$ достигает минимального значения, называются *оптимальными* узлами для класса U (или класса U и точки x).

Задача 1. Пусть на промежутке $[a,b]$ задано большое количество узлов $N > n+1$, в которых нам известны значения каких-то функций. Нас интересуют значения этих функций в некоторой точке x, отличной от всех узлов. Для вычисления этих значений мы хотим использовать интерполяцию по $n+1$ узлу. Задача состоит в таком выборе этих узлов из числа данных, чтобы для некоторого заданного класса функций U величина $R_n(U;x)$ была минимальной. Эта задача легко решается для класса $U = KC^{(n+1)}$. Действительно, в полученном в теореме 2 представлении остатка от узлов зависит только множитель $|\omega(x)|$, его-то и нужно минимизировать, а для этого следует выбрать из наших N узлов ближайшие к точке x. Заметим, что этот принцип учитывался для выбора порядка привлечения узлов при построении интерполяционных формул с равноотстоящими узлами в § 3.

Задача 2 — это задача о выборе оптимальных узлов для класса U, т.е. таких узлов, для которых величина $R_n(U)$ минимальна. Эта достаточно сложная в общем случае задача относительно легко решается для класс $KC^{(n+1)}[-1,1]$. Этим случаем мы сейчас и займемся.

Теорема 3. *Оптимальными узлами для класса функций* $KC^{(n+1)}[-1,1]$ *являются корни полинома Чебышева* $T_{n+1}(x)$*:* $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ $(k = 0,\ldots,n)$*, называемые узлами Чебышева. Для этих узлов*

$$R_n(KC^{(n+1)}[-1,1]) = \frac{K}{2^n(n+1)!}. \tag{2}$$

Доказательство. Для узлов Чебышева $\omega(x) = \tilde{T}_{n+1}(x)$, и равенство (2) немедленно следует из теоремы 2 и равенства $\|\tilde{T}_{n+1}\|_C = \frac{1}{2^n}$. Поскольку полином Чебышева наименее уклоняется от нуля и для любых узлов $\omega(x)$ есть полином степени $n+1$ со старшим коэффициентом, равным 1, то всегда $\|\omega\|_C \geq \|\tilde{T}_{n+1}\|_C = \frac{1}{2^n}$, и потому для любых узлов $R_n(KC^{(n+1)} \geq \frac{K}{2^n(n+1)!}$ ■

Замечание 2. В случае произвольного промежутка $[a,b]$ оптимальные узлы для класса $KC^{(n+1)}[a,b]$ можно получить, если с помощью линейной замены переменной промежуток $[a,b]$ свести к промежутку $[-1,1]$ — образы узлов Чебышева

$$x_k = a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$$

и будут оптимальными узлами для этого класса, и для этих узлов

$$R_n(KC^{(n+1)}[a,b]) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\frac{K}{2^n(n+1)!}.$$

Другой подход к оценке погрешности интерполяции связан с понятием функций и постоянных Лебега.

Определение. Функцией Лебега узлов $x_0,\ldots,x_n$ называется

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)|.$$

Здесь $l_k(x)$ — фундаментальные полиномы интерполяции. Постоянной Лебега узлов называется $\lambda_n = \max_{x\in[a,b]}\lambda_n(x)$.

[*Замечание 3. Легко видеть, что $\lambda_n(x)$ есть норма действующего в пространстве C линейного функционала, который функции $f \in C$ ставит в соответствие число $Q_n(f;x)$, а λ_n — норма оператора Q_n.***]**

Лемма 1. *Для любой функции* $f \in C[a,b]$ *выполняются неравенства*

$$|Q_n(f;x)| \leq \lambda_n(x)\|f\|_C, \quad \|Q_nf\|_C \leq \lambda_n\|f\|_C. \tag{3}$$

Доказательство. Первое из неравенств (3) есть очевидное следствие интерполяционной формулы Лагранжа. Для доказательства второго достаточно взять максимум по x от левой и правой части первого. ■

Теорема 4. *Для любой функции* $f \in C[a,b]$ *выполняются неравенства**

$$|R_n(f;x)| \leq \big(\lambda_n(x)+1\big)E_n(f), \quad \|R_n(f)\| \leq (\lambda_n+1)E_n(f).$$

*Напомним, что $E_n(f)$ — это наилучшее приближение функции f полиномами класса $\mathbb{P}_n$, см. § 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P_n \in \mathbb{P}_n$ — полином наилучшего приближения функции f $(\|f-P_n\| = E_n(f))$. Тогда имеем

$$|R_n(f;x)| \le |f(x)-P_n(x)| + |P_n(x)-Q_n(f;x)| = |f(x)-P_n(x)| + \\ + |Q_n(P_n-f;x)| \le E_n(f) + \lambda_n(x)\|P_n-f\|_C = \big(\lambda_n(x)+1\big)E_n(f).$$

Этим доказано первое неравенство. Второе получается из первого, если в левой и правой его части перейти к максимумам по x. ■

С функцией и постоянной Лебега связаны вопросы сходимости интерполяционных полиномов к функции. Будем говорить, что для промежутка $[a,b]$ задан интерполяционный процесс, если при каждом n на этом промежутке заданы узлы $x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n$. Тогда $Q_n(f;x)$ — интерполяционные полиномы функции f, построенные по этим узлам. Говорят, что интерполяционный процесс для функции f сходится в точке x, если при $n \to \infty$ будет $Q_n(f;x) \to f(x)$. Интерполяционный процесс для функции f сходится равномерно, если $\|f - Q_n f\|_C \to 0$, (т.е. $Q_n f$ сходятся к f равномерно на $[a,b]$). Из теоремы 4 сразу же вытекает

Следствие 1. *Если для некоторой непрерывной функции f выполняется соотношение $\lambda_n(x)E_n(f) \to 0$, то интерполяционный процесс для этой функции сходится в точке x. Если же $\lambda_n E_n(f) \to 0$, то интерполяционный процесс для нее сходится равномерно.*

Известно, что для любого интерполяционного процесса $\lambda_n \to \infty$. С этим связана теорема Фабера (оба этих утверждения оставляем без доказательства):

Теорема (Фабер). *Для любого интерполяционного процесса найдется такая непрерывная функция, для которой этот процесс не сходится равномерно.*

С функцией и постоянной Лебега связана еще оценка погрешности в интерполяционном полиноме, возникающей вследствие неточного вычисления значений функции в узлах. Пусть при вычислении значений функции $f(x_k)$ мы допустили ошибки ε_k, для которых нам известны лишь оценки $|\varepsilon_k| \le \varepsilon$. Тогда вместо интерполяционного полинома $Q_n(f;x)$ мы получим

$$\overline{Q_n(f;x)} = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)\big(f(x_k)+\varepsilon_k\big),$$

так что

$$|Q_n(f;x) - \overline{Q_n(f;x)}| = \left|\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\varepsilon_k\right| \le \lambda_n(x)\varepsilon$$

и $\|Q_n f - \overline{Q_n f}\| \le \lambda_n \varepsilon$. Обе эти оценки являются точными в том смысле, что если при всех k $|\varepsilon_k| = \varepsilon$ и ε_k имеют соответствующим образом выбранные знаки (для первой из этих оценок $\operatorname{sign}\varepsilon_k = \operatorname{sign} l_k(x)$), то эти неравенства обращаются в равенства.

Простейшими узлами являются равноотстоящие: $x_k = a + kh$, где $h = (b-a)/n$, а $k = 0, \dots, n$. Покажем, что эти узлы являются плохими в том отношении, что для них постоянная Лебега растет чрезвычайно быстро с ростом n — с быстротой геометрической прогрессии со знаменателем, большим единицы.

Теорема 5. *Для постоянной Лебега равноотстоящих узлов выполняется неравенство*

$$\lambda_n > \frac{1}{3n}\left(\frac{3}{2}\right)^n .$$

Доказательство. Имеем $\lambda_n \geq \lambda_n(x^*)$, где $x^* = a + h/2$. Легко видеть, что

$$|l_k(x^*)| = \frac{\prod_{j\neq k}|x^* - x_j|}{\prod_{j\neq k}|x_k - x_j|} = \frac{(2n-1)!!}{2^n k!(n-k)!|2k-1|} > \frac{1}{2n}\frac{(2n-1)!!}{2^n k!(n-k)!}.$$

Отсюда

$$\lambda_n > \frac{1}{2n}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{2n}\frac{(2n-1)!!}{n!}.$$

Произведя очень грубую оценку:

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\dots\frac{2n-1}{n} \geq \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n ,$$

придем к требуемому. ■

Доказанная в теореме оценка правильно отражает характер поведения λ_{n+1}, хотя и очень груба, что показывает следующая таблица:

n	оценка	$\lambda_n(x^*)$
10	1.92	24.6
20	55.4	7391
40	92144	$2.57 \cdot 10^9$

Быстрый рост постоянной Лебега заставляет предполагать, что равномерная сходимость интерполяционного процесса по равноотстоящим узлам имеет место лишь для узкого класса функций. Действительно, как может быть показано (См.*Е.Л.Рабкин, Е.П.Шапиро*) этот процесс в случае промежутка $[-1, 1]$ не сходится равномерно для функций

$$g_p(x) = \begin{cases} x^p & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

при любом натуральном p, хотя функция g_p $p-1$ раз непрерывно дифференцируема.

Замечание 2. Известно более сильное в некотором смысле утверждение, чем теорема 5: для каждой точки x, такой что $x \in (a, b)$ и $x \neq (a+b)/2$, найдутся такая последовательность номеров n_k и число $q > 1$, что $\lambda_{n_k}(x) > q^{n_k}$ (см., например, *И.П.Натансон* или *И.К.Даугавет[1]*).

Возникает вопрос, а существуют ли узлы, для которых постоянная Лебега существенно меньше, чем для равноотстоящих? Оказывается, что такими узлами являются, в частности, узлы Чебышева. В случае узлов Чебышева в качестве промежутка $[a, b]$ мы будем рассматривать $[-1, 1]$ и, кроме того, удобнее оценивать не λ_n, а λ_{n-1}, так что узлы — корни полинома Чебышева $T_n(x)$:

$$x_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \dots n,$$

а фундаментальные полиномы интерполяции имеют вид:

$$l_k(x) = \frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Мы воспользовались тем, что для рассматриваемых узлов $\omega_n(x) = \tilde{T}_n(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$, а множители 2^{n-1}, стоящие и в числителе, и в знаменателе приводимого представления l_k, взаимно сокращаются. Поскольку

$$T_n'(x) = n\,\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |T_n'(x_k)| = \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{n}{\sin\theta_k},$$

то выбрав $\theta \in [0,\pi]$ из условия $x = \cos\theta$, имеем

$$|l_k(x)| = \frac{|\cos n\theta|}{n|\cos\theta - \cos\theta_k|} \cdot \sin\theta_k.$$

Докажем несколько лемм.

Лемма 2. *При* $0 \le \alpha \le \pi/2$

$$\sin\alpha \ge \frac{2}{\pi}\,\alpha.$$

Доказательство. Ограничимся указанием, что это неравенство означает, что для промежутка $[0,\pi/2]$ график функции $\sin x$ лежит выше хорды, соединяющей начало координат с вершиной синусоиды. ■

Лемма 3. *Если* $0 \le x < x+h \le \pi$, *то*

$$\cos x - \cos(x+h) \ge \frac{2}{\pi^2}h^2.$$

Доказательство. На промежутке $[0,\pi-h]$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = \cos x - \cos(x+h)$. Очевидно, что $\varphi(x) > 0$ и $\varphi''(x) = -\varphi(x) < 0$, так что φ не имеет на открытом промежуте $(0,\pi-h)$ точек локального минимума. В то же время

$$\varphi(0) = \varphi(\pi-h) = 1 - \cos h = 2\sin^2\frac{h}{2} \ge 2\left(\frac{h}{\pi}\right)^2.$$

Этим лемма доказана. ■

Лемма 4. *При всех* $k = 1, 2, \ldots, n$ *и* $x \in [-1,1]$ $\ |l_k(x)| \le 2$.

Доказательство. Положим $x = \cos\theta$ ($\theta \in [0,\pi]$). Учитывая, что $\cos n\theta_k = 0$ и что при любом τ $|\sin n\tau| \le n|\sin\tau|$, имеем

$$\begin{aligned} |l_k(x)| &= \left|\frac{\cos n\theta - \cos n\theta_k}{n(\cos\theta - \cos\theta_k)}\right| \sin\theta_k = \\ &= \left|\frac{\sin\frac{n}{2}(\theta-\theta_k)\cdot\sin\frac{n}{2}(\theta+\theta_k)}{n\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_k)\cdot\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta_k)}\right| \sin\theta_k \le \\ &\le \frac{\sin\theta_k}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta_k)} \le \frac{\sin\theta_k + \sin\theta}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta_k)} = 2\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_k) \le 2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Из доказанной леммы сразу же следует, что $\lambda_{n-1} \leq 2n$, но мы хотим показать, что при $n \to \infty$ постоянная Лебега λ_n стремится к бесконечности еще существенно медленнее.

Теорема 6. *Для постоянной Лебега узлов Чебышева верна оценка*

$$\lambda_{n-1} \leq 8 + \frac{4}{\pi} \ln n.$$

Доказательство. Для произвольной точки $x = \cos\theta$, считая $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$, имеем

$$\lambda_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| = \sum_{1}^{m-2} + \sum_{m-1}^{m+2} + \sum_{m+3}^{n} = S_1 + S_2 + S_3.$$

Если $\theta < \theta_2$ или $\theta > \theta_{n-3}$, то сумма S_1 или S_3 отсутствует, а S_2 может содержать меньше, чем четыре, слагаемых, что приведет лишь к улучшению доказываемой оценки. Из леммы 4 сразу же следует, что $S_2 \leq 8$. Суммы S_1 и S_2 оцениваются одинаково. Оценим первую из них.

$$S_1 \leq \frac{1}{n} \sum_{1}^{m-2} \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k - \cos\theta}.$$

Функция $\sin u/(\cos u - \cos\theta)$ при $0 < u < \theta$ возрастает. Поэтому

$$\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k - \cos\theta} \leq \frac{\sin u}{\cos u - \cos\theta} \qquad \text{при} \quad u \in [\theta_k, \theta_{k+1}].$$

Интегрируя это неравенство по $[\theta_k, \theta_{k+1}]$, имеем

$$S_1 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_{m-1}} \frac{\sin u}{\cos u - \cos\theta}\, du = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta_{m-1} - \cos\theta} \leq \frac{1}{\pi} \ln \frac{2}{\cos\theta_{m-1} - \cos\theta_m},$$

и по лемме 3 (при $h = \pi/n$)

$$S_1 \leq \frac{1}{\pi} \ln n^2 = \frac{2}{\pi} \ln n.$$

Сумма S_3 допускает такую же оценку, и для завершения доказательства остается сложить полученные оценки для S_1, S_2 и S_3. ■

Полученная оценка правильно отражает характер роста постоянной Лебега для узлов Чебышева, хотя и немного завышена. Для сравнения с таблицей нижних оценок постоянных Лебега для равноотстоящих узлов (см. выше) приведем для тех же номеров $n = 10$, 20, 40 значения постоянных Лебега узлов Чебышева, сохраняя три знака после запятой:

$$\lambda_{10} = 2.489, \qquad \lambda_{20} = 2.901, \qquad \lambda_{40} = 3.327.$$

Из теоремы 6 и теоремы Джексона (см. §1) легко получить, что интерполяционный процесс по узлам Чебышева равномерно сходится для всех непрерывно дифференцируемых функций; в действительности такая сходимость имеет место для гораздо более широкого класса функций.

Интерполяция по узлам Чебышева довольно эффективный способ приближения непрерывных функций полиномами. При не слишком больших n погрешность приближения, полученного таким способом, может отличаться от наилучшего приближения лишь в небольшое число раз. Даже для приближения полиномами такой высокой степени, как 40, выполняется неравенство $R_{40}(f) \leq 4.4E_{40}(f)$ (см. теорему 4). Заметим еще, что построение полинома наилучшего приближения гораздо труднее, чем интерполяционного полинома по заданным узлам.

Задача 1. Показать, что постоянная Лебега инвариантна относительно линейной замены независимой переменной, т.е. если линейной заменой переменной мы переводим промежуток $[a, b]$ в $[c, d]$ и той же заменой переносим на $[c, d]$ заданные на $[a, b]$ узлы интерполяции, то постоянная Лебега полученных узлов совпадает с постоянной Лебега исходных.

Задача 2. Доказать, что при $n \geq 3$ интерполяционный полином по узлам Чебышева на промежутке $[-1, 1]$ приближает функцию $\cos x$ лучше, чем отрезок ряда Тейлора той же степени.

Задача 3. Показать, что в случае любых узлов для функции Лебега выполняется неравенство $\lambda_n(x) \geq 1$, причем при $n \geq 2$ знак равенства имеет место в том и только в том случае, если x совпадает с одним из узлов.

Задача 4. Показать, что при $n \geq 2$ между двумя соседними узлами функция Лебега имеет единственную точку максимума.

§5 Эрмитовская интерполяция

Пусть на промежутке $[a, b]$ заданы узлы $x_0, \ldots, x_n$. Припишем каждому узлу некоторое натуральное число α_k, называмое кратностью узла x_k. Положим $N = \sum \alpha_k - 1$. Пусть для некоторой функции f в каждом узле x_k нам известны значения ее самой и ее производных до порядка $\alpha_k - 1$ включительно. Задача эрмитовской интерполяции состоит в том, что требуется построить полином $P_N \in \mathbb{P}_N$, который при $k = 0, \ldots, n$ удовлетворял бы равенствам

$$P_N^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k), \quad j = 0, \ldots, \alpha_k - 1. \tag{1}$$

Заметим, что число условий, которые мы наложили на P_N, есть $N+1$, т.е. их столько же, сколько коэффициентов у полинома степени N. Поэтому если искать этот полином с неопределенными коэффициентами, то условия (1) приведут к системе $(N+1)$ линейных уравнений относительно $(N + 1)$ его коэффициентов.

Докажем однозначную разрешимость поставленной задачи.

Теорема 1. *Каковы бы ни были числа b_k^j существует и притом единственный полином $P_N \in \mathbb{P}_N$, для которого выполняются равенства*

$$P_N^{(j)}(x_k) = b_k^j, \quad k = 0, \ldots, n, \quad j = 0, \ldots, \alpha_k - 1$$

Доказательство. Как уже отмечалось, задача построения такого полинома сводится к решению системы $(N + 1)$ линейных уравнений относительно $(N + 1)$ коэффициентов этого полинома. Требуется доказать, что эта система однозначно разрешима. Для этого достаточно убедиться, что соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. Пусть $\tilde{P}_N$ — полином, коэффициенты которого удовлетворяют этой однородной системе уравнений. Это означает выполнение равенств $\tilde{P}_N^{(j)}(x_k) = 0$ при $k = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, \alpha_k - 1$, т.е. x_k является корнем полинома $\tilde{P}_N$ кратности α_k, и с учетом кратностей этот полином степени не выше N имеет $(N+1)$

корней. Но тогда он тождественно равен нулю, и равны нулю все его коэффициенты. Итак, наша однородная система уравнений имеет только нулевое решение. ■

Отметим частный случай поставленной задачи, когда имеется всего лишь один узел x_0 кратности α_0. Тогда $N = \alpha_0 - 1$ и, как легко видеть, P_N есть отрезок ряда Тейлора функции f:

$$P_N(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^N}{N!} f^{(N)}(x_0).$$

Значения производных функции f в точке x_0 могут быть выражены через разделенные разности этой функции с кратным узлом x_0 (свойство $\langle 7 \rangle$ разделенных разностей), и тогда полином P_N запишется в виде

$$P_N(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_0) + \dots + (x - x_0)^N f(x_0, \dots, x_0)$$

(в последнем слагаемом разделенная разность имеет порядок N). Здесь эрмитовский интерполяционный полином предстал в том виде, какой дает формула Ньютона при обычной интерполяции, когда все узлы имеют первую кратность. Оказывается, что и в общем случае эрмитовский интерполяционный полином может быть представлен в форме Ньютона.

Пусть $y_0, \dots, y_N$ — некоторая перестановка узлов $x_0, \dots, x_n$ с повторениями, в которой каждый узел x_k встречается столько раз, какова его кратность. Располагая значениями $f^{(j)}(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1$), мы имеем возможность вычислить разделенную разность $f(y_0, \dots, y_N)$. Строго говоря, когда вводились разделенные разности с кратными узлами, требовалось, чтобы производная $f^{(\alpha_k - 1)}$ была непрерывна по меньшей мере в окрестности точки x_k, а сейчас мы знаем только существование этой производной в самой точке x_k. Более того, если мы решаем интерполяционную задачу в постановке теоремы 1, то никакой функции f у нас вообще нет, хотя если считать b_k^j значением $f^{(j)}(x_k)$, где f обладает нужными непрерывными производными, то $f(y_0, \dots, y_N)$ мы можем вычислить. Чтобы разрешить эту коллизию, мы будем считать, что $f(y_0, \dots, y_N)$ есть разделенная разность эрмитовского интерполяционного полинома, существование которого доказано в теореме 1. Для него выполняется равенство $P_N(y_0, \dots, y_N) = f(y_0, \dots, y_N)$, если только f достаточно гладкая функция, для которой $f^{(j)}(x_k) = b_k^j$. Так можно понимать $f(y_0, \dots, y_N)$ (и разделенные разности низших порядков) в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $y_0, y_1, \dots, y_N$ — произвольная перестановка узлов $x_0, \dots, x_n$ с повторениями, в которой каждый узел x_k встречается столько раз, какова его кратность. Тогда эрмитовский интерполяционный полином имеет представление*

$$P_N(x) = f(y_0) + (x - y_0)f(y_0, y_1) + \dots + (x - y_0)\dots(x - y_{N-1})f(y_0, \dots, y_N).$$

Эта формула называется представлением эрмитовского интерполяционного полинома в форме Ньютона.

Доказательство. Покажем, что выписанный полином P_N удовлетворяет интерполяционным условиям. Заметим, что если $y_0, \dots, y_N$ различные узлы и $z_0, \dots, z_N$ их произвольная перестановка, то выполняется равенство полиномов

$$\begin{aligned} f(y_0) + (x - y_0)f(y_0, y_1) + \dots + (x - y_0)\dots(x - y_{N-1})f(y_0, \dots, y_N) = \\ = f(z_0) + (x - z_0)f(z_0, z_1) + \dots + (x - z_0)\dots(x - z_{N-1})f(z_0, \dots, z_N), \end{aligned}$$

так как левая и правая части совпадают как интерполяционные полиномы функции f, построенные по одной и той же системе узлов. Поскольку разделенные разности суть непрерывные функции своих аргументов, то это же равенство соблюдается и при наличии кратных узлов. Поэтому при доказательстве равенства $P_N^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k)$ мы вправе считать, что $y_0 = \dots = y_{\alpha_k - 1} = x_k$. Тогда

$$\begin{aligned} P_N(x) =& f(x_k) + (x - x_k) f(x_k, x_k) + \dots + (x - x_k)^{\alpha_k - 1} f(x_k, \dots, x_k) + R(x) = \\ &= f(x_k) + (x - x_k) f'(x_k) + \dots + \frac{(x - x_k)^{\alpha_k - 1}}{(\alpha_k - 1)!} f^{(\alpha_k - 1)}(x_k) + R(x), \end{aligned}$$

где $R(x)$ — полином, содержащий множитель $(x - x_k)^{\alpha_k}$. Отсюда видно, что действительно при $j \le \alpha_k - 1$ будет $P_N^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k)$. ∎

Укажем теперь одно применение доказанной теоремы. Пусть на промежутке $[a, b]$ заданы попарно различные узлы интерполяции, зависящие от параметра $t \in (0, d]$ $x_k(t)$ $(k = 0, 1, \dots, N)$, причем при $t \to 0$ α_0 из этих узлов сходятся к y_0, α_1 — к y_1, и т.д., α_n узлов — к y_n $(\sum \alpha_j = N + 1)$, причем узлы y_j попарно различны. Через $Q_{Nt}(f; x)$ будем обозначать интерполяционный полином функции f, построенный по узлам $x_k(t)$.

Следствие. *Пусть выполнены указанные условия и функция f такова, что в некоторой окрестности каждого узла y_j она $\alpha_j - 1$ раз непрерывно дифференцируема. Тогда при $t \to 0$ полиномы $Q_{Nt}(f; x)$ равномерно на промежутке $[a, b]$ сходятся к $P_N(x)$ — эрмитовскому интерполяционному полиному функции f, построенному по узлам y_j кратностей α_j.*

Доказательство немедленно следует из представления полиномов $Q_{Nt}(f, x)$ и $P_N(x)$ в форме Ньютона и непрерывности при наложенных на функцию f условиях ее разделенных разностей. ∎

Погрешность эрмитовской интерполяции можно оценивать, используя следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть функция f $N+1$ раз непрерывно дифференцируема на некотором промежутке $[a, b]$, содержащем все узлы и точку интерполяции x. Тогда найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$f(x) - P_N(x) = \frac{\Omega(x)}{(N + 1)!} f^{(N+1)}(\xi).$$

Здесь $\Omega(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} \dots (x - x_n)^{\alpha_n}$ — полином степени $N + 1$.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 из предыдущего параграфа. Случай, когда точка x совпадает с одним из узлов, очевиден, и мы будем считать, что при всех k $x \neq x_k$. Используя свойство $\langle 5 \rangle$ разделенных разностей (представление значения функции в последнем узле через разделенные разности), которое, как уже отмечалось, верно и в случае наличия кратных узлов, для узлов $y_0, \dots, y_N, x$ (узлы y_j те же, что в теореме 2, и к ним еще добавлен узел x первой кратности), имеем

$$f(x) = P_N(x) + \Omega(x) f(y_0, \dots, y_N, x),$$

и остается воспользоваться свойством $\langle 6 \rangle$ разделенных разностей. $\blacksquare$

Заметим, что в задаче эрмитовской интерполяции в каждом узле x_k производные заданы "без пропусков", т.е. если для построения интерполяционного полинома используется производная $f^{(m)}(x_k)$, то и все предыдущие $f^{(j)}(x_k)$ при $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Можно ставить задачи, в которых это правило не соблюдается — в некоторых узлах производные заданы с пропусками. Такие задачи могут оказаться неразрешимыми. С этим связаны формулируемые ниже задачи

Задача 1. Показать, что интерполяционная задача $P_3(x_k) = a_k$, $P_3''(x_k) = b_k$ $(k = 0, 1)$ однозначно разрешима.

Задача 2. Показать, что интерполяционная задача $P_2(-1) = a$, $P_2'(0) = b$, $P_2(1) = c$, вообще говоря, неразрешима, и найти условие ее разрешимости, наложенное на числа a, b, c, и тогда задача имеет бесконечно много решений.

§6 Численное дифференцирование

Численное дифференцирование— это приближенное вычисление производных функции, заданной таблично.

Пусть нам известны значения функции f в узлах x_j, лежащих на промежутке $[a, b]$. Требуется найти значение производной этой функции $f^{(k)}(x)$ в некоторой точке x, которая может и совпадать с каким-нибудь из узлов. Способ решения этой задачи таков — по узлам, в которых известно значение функции, (или части из них) строится интерполяционный полином, и за приближенное значение производной в точке x принимается значение в этой точке производной интерполяционного полинома. Если для интерполяции были выбраны узлы $x_0, \ldots, x_n$ и P_n — соответствующий интерполяционный многочлен, то формула численного дифференцирования:

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x).$$

Займемся оценкой погрешности этой формулы.

Теорема. *Пусть функция f $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на промежутке $[a, b]$, содержащем узлы интерполяции и точку x, в которой вычисляется производная. Пусть $k \le n$ и пусть выполняется одно из условий: а) $x \notin (c, d)$, где $c = \min x_j$, $d = \max x_j$, или б) $k = 1$ и x совпадает с одним из узлов x_j. Тогда найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$R(x) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) = \omega^{(k)}(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \omega(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n).$$

Доказательство. Доказываемое представление погрещности формально выглядит так, как будто мы просто продифференцировали формулу представления погрешности интерполяции, указанную в § 4 (теорема 1). Однако, подобное "дифференцирование", разумеется, незаконно, поскольку точка ξ в представлении остатка интерполяции зависит от x. Теперь обратимся непосредственно к доказательству.

Ввиду а) или б) $\omega^{(k)}(x) \neq 0$. Положим $A = [f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)]/\omega^{(k)}(x)$ и определим функцию $\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - A\omega(z)$. Узлы x_j $(j = 0, \ldots, n)$ являются корнями этой функции, так что на $[c, d]$ она имеет $(n+1)$ различных корней. По теореме Ролля $\varphi^{(k)}$ имеет на (c, d) $n+1-k$ корней, не совпадающих с точкой x. Последнее следует из того, что в случае а) $x \notin (c, d)$, а в случае б) — из того, что по теореме Ролля существует корень первой производной функции, лежащий строго между корнями самой этой функции. Итак, точка x есть корень $\varphi^{(k)}$, отличный от сосчитанных ранее $n+1-k$ корней, так что на $[a, b]$ $\varphi^{(k)}$ имеет не менее $n+2-k$ корней. Продолжая применять теорему Ролля, получим, что производная $\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - A(n+1)!$ имеет на (a, b) хотя бы один корень ξ. Остается приравнять $\varphi^{(n+1)}(\xi)$ нулю. ■

З а м е ч а н и е. Условия а), б) теоремы существенны. Например, для тех точек x, в которых $\omega^{(k)}(x) = 0$, доказываемая формула выглядела бы нелепо.

Построим некоторые конкретные формулы численного дифференцирования в случае равноотстоящих узлов и точки дифференцирования, совпадающей с одним из узлов. При этом естественно использовать интерполяционные формулы с конечными разностями, построенные в §3. В этих формулах делалась замена переменной $x = x_0 + th$ (или $x = x_n + th$), и следует иметь в виду, что $\frac{d}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}$.

Дифференцируя формулу Ньютона для начала таблицы, имеем

$$P'(x) = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}P(x_0 + th) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots\right].$$

Полагая в этой формуле $t = 0$, сохраняя в квадратных скобках лишь одно или два слагаемых и используя для остаточного члена R доказанную теорему (здесь выполнено условие б)), имеем для $f'(x_0)$ следующие формулы:

$$\begin{aligned} f'(x_0) =& \frac{1}{h}\Delta f_0 + R = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi), \\ f'(x_0) =& \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right] + R = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + \frac{h^2}{3}f'''(\xi). \end{aligned} \tag{1}$$

Точно так же, дифференцируя формулу Ньютона для конца таблицы, можно получить:

$$f'(x_n) = \frac{f_n - f_{n-1}}{h} + \frac{h}{2}f''(\xi), \quad f'(x_n) = \frac{3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2}}{2h} + \frac{h^2}{3}f'''(\xi).$$

Дифференцирование формулы Ньютона - Гаусса дает:

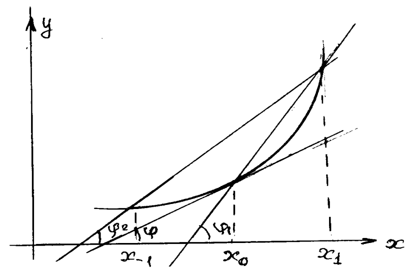
$$\begin{aligned} P'(x) =& \frac{1}{h}\frac{d}{dt}P(x_0 + th) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 f_{-1} + \ldots\right], \\ P''(x) =& \frac{1}{h^2}\frac{d^2}{dt^2}P(x_0 + th) = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 f_{-1} + \ldots]. \end{aligned}$$

Сохраняя в квадратных скобках выписанные члены и используя в случае первой производной теорему о представлении остаточного члена, имеем

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_{-1}\right] + R = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi), \tag{2}$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_{-1} + R = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + R. \tag{3}$$

Интересно сравнить формулу (2) с первой из формул (1). В правых частях той и другой используются два значения функции f, но формула (2) имеет второй порядок точности относительно h, а первая из формул (1) лишь первый. Приближения к производной, даваемые этими формулами, суть угловые коэффициенты хорд, проведенных к графику функции f через точки $\big(x_0, f(x_0)\big) - \big(x_1, f(x_1)\big)$ в одном случае, и через $\big(x_{-1}, f(x_{-1})\big) - \big(x_1, f(x_1)\big)$ — в другом. Из рассмотрения графика (см. рисунок) представляется естественным, что вторая из этих формул обычно должна давать лучший результат, чем первая. На графике, изображенном на рисунке, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$,



приближение, даваемое первой из формул (1) — $\operatorname{tg}\varphi_1$, а формулой (2) — $\operatorname{tg}\varphi_2$.

Условия теоремы о представлении остаточного члена не выполнены в случае формулы (3). Более того, $\omega''(x_0) = 0$, и в указанной в теореме форме остаток выражаться не может. Для получения представления остатка формулы (3) мы используем другой прием. Предполагая в окрестности точки x_0 функцию f четырежды непрерывно дифференцируемой, используем для нее формулу Тейлора, в которой значения всех производных, кроме последних, вычисляются в точке x_0:

$$\begin{aligned} f_1 =& f_0 + hf' + \frac{h^2}{2}f'' + \frac{h^3}{6}f''' + \frac{h^4}{24}f^{IV}(\xi_1),\\ f_{-1} =& f_0 - hf' + \frac{h^2}{2}f'' - \frac{h^3}{6}f''' + \frac{h^4}{24}f^{IV}(\xi_2). \end{aligned}$$

Вычтя из суммы этих разложений $2f_0$ и поделив на h^2, придем к равенству

$$\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} = f''(x_0) + \frac{h^2}{24}[f^{(IV)}(\xi_1) + f^{(IV)}(\xi_2)].$$

Заметив, что между точками ξ_1 и ξ_2 найдется такая точка ξ, что выполняется равенство $f^{(IV)}(\xi_1) + f^{(IV)}(\xi_2) = 2f^{(IV)}(\xi)$, окончательно получим:

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(IV)}(\xi). \tag{4}$$

Остановимся теперь на влиянии ошибок, допущенных в значениях функции, на полученные в результате численного дифференцирования результаты на примере формулы (2).

Если для окрестности точки x_0 нам известна оценка $|f'''(x)| \le M$ и известно, что при использовании формулы (2) погрешности в значениях функции f в точках x_1 и x_{-1} по модулю не превосходят некоторого ε, то суммарная погрешность в значении

$f'(x_0)$ оценивается величиной $\varepsilon/h + Mh^2/6$. При малых h влияние ошибок в значениях функции оказывается чрезвычайно большим. Если у нас есть возможность выбора шага h, то целесообразно находить его из условия минимума приведенной оценки погрешности. Таким образом нам следует найти точку минимума функции $\varphi(h) = \varepsilon/h + Mh^2/6$. Приравнивая нулю производную этой функции, легко находим эту точку и оценку E погрешности при таком выборе шага:

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}, \qquad E = \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M\varepsilon^2}.$$

Заметим, что принципиально невозможно получить значение производной функции с погрешностью того же порядка, что в значениях самой этой функции.

Задача 1. Дифференцированием линейного интерполяционного полинома легко получается формула

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + R(f;x). \tag{5}$$

Получить в случае $f \in C^{(2)}$ представление остатка $R(f;x)$:

$$R(f;x) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} K(x,t) f''(t)dt, \quad K(x,t) = \begin{cases} t - x_0 & \text{при } t < x, \\ t - x_0 - h & \text{при } t > x. \end{cases}$$

Задача 2. Показать, что при $x_0 < x < x_0 + h$ найдется такая функция $f \in C^{(2)}$, для которой не существует такой точки $\xi \in (x_0, x_0+h)$, чтобы для формулы (5) оказалось

$$R(f;x) = \frac{\omega'(x)}{2!} f''(\xi), \quad \omega(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h).$$

Задача 3. Определить наилучший шаг h в формуле (4) при наличии ошибок округления в значениях функции.

§7 Тригонометрическая интерполяция. Дискретное преобразование Фурье

Периодические функции естественно приближать периодическими. Простейшими 2π-периодическими функциями являются тригонометрические полиномы:

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Если хоть один из коэффициентов a_n или b_n отличен от нуля, то n называется порядком полинома T_n. Множество тригонометрических полиномов порядка не выше n обозначим через $\mathbb{T}_n$. Основные свойства тригонометрических полиномов:

1) Если $T_n, U_n \in \mathbb{T}_n$, то и их линейная комбинация есть тригонометрический полином порядка не выше n: $\alpha T_n + \beta U_n \in \mathbb{T}_n$ (линейность).

2) Для коэффициентов тригонометрического полинома выполняются равенства ($k = 1, 2, \ldots, n$):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\sin kx\,dx.$$

3) Если $T_n \in \mathbb{T}_n$ есть четная функция, то при всех k $b_k = 0$, а если нечетная, то $a_k = 0$.

Если полином T_n имеет корень x^*, то он имеет бесконечно много корней, таковыми являются $x^* + 2j\pi$. Такие корни называются эквивалентными.

Теорема 1. *Отличный от тождественного нуля тригонометрический полином $T_n \in \mathbb{T}_n$ имеет не более $2n$ попарно неэквивалентных корней.*

Доказательство. Используя формулы Эйлера

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

приведем T_n к виду

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} d_k e^{ikx} = e^{-inx} P_{2n}(z),$$

где c_k и $d_k = c_{k-n}$ — комплексные, вообще говоря, коэффициенты, $P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} d_k z^k$ — полином степени не выше $2n$ и $z = e^{ix}$. Если x_0 — корень T_n, то $z_0 = e^{ix_0}$ — корень P_{2n}, если x_0 и x_1 — неэквивалентные корни T_n, то z_0 и z_1 — различные корни P_{2n}, так что P_{2n} имеет не менее различных корней, чем T_n попарно неэквивалентных. Но P_{2n} имеет не более $2n$ различных корней. ■

Очевидно, что при любом a все корни тригонометрического полинома $T_n \in \mathbb{T}_n$, лежащие на промежутке $a \le x < a + 2\pi$, попарно неэквивалентны, и в то же время для любого корня полинома T_n найдется эквивалентный ему корень на этом промежутке, так что при любом a число корней T_n на $[a, a + 2\pi)$ совпадает с числом попарно неэквивалентных корней этого полинома. В частности, из доказанной теоремы немедленно вытекает

Следствие 1. *Система функций $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$ чебышевская на любом промежутке $[a, b]$, если только $b < a + 2\pi$.*

Следствие 2. *Каковы бы ни были точки $x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < x_0 + 2\pi$ и числа $f_0, \dots, f_{2n}$ существует и притом единственный тригонометрический полином $T_n \in \mathbb{T}_n$, такой что $T_n(x_k) = f_k$ при $k = 0, \dots, 2n$.*

Это следствие непосредственно вытекает из теоремы 2 (§ 3).

При приближении периодической функции с помощью интерполяции тригонометрическим полиномом на промежутке длины 2π (не умаляя общности, будем считать, что это $[0, 2\pi]$) естественно выбрать равноотстоящие узлы, причем их число должно быть нечетно, так что $x_j = jh$ $(j = 0, \dots, 2n)$, $h = 2\pi/N$, где $N = 2n + 1$. В этом случае удается получить явное выражение коэффициентов интерполяционного полинома через значения в узлах интерполируемой функции.

В первой из доказываемых ниже лемм мы не будем предполагать число N нечетным (как и выше, $x_j = 2\pi j/N$).

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\sigma_m = \sum_{j=0}^{N-1} e^{imx_j} = \begin{cases} N & \text{при } m = 0 \\ 0 & \text{при } m = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Доказательство. При $m = 0$ равенство очевидно. Если $1 \le m \le N-1$, то $\sigma_m = 1 + q + \dots + q^{N-1}$, где $q = e^{2\pi i m/N} \ne 1$, и потому $\sigma_m = (1-q^N)/(1-q) = 0$, так как $q^N = e^{2m\pi i} = 1$. $\blacksquare$

Следствие 3. *Справедливы равенства*

$$C_m = \sum_{j=0}^{N-1} \cos m x_j = \begin{cases} N & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m = 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

$$S_m = \sum_{j=0}^{N-1} \sin m x_j = 0, \quad m = 0, \dots, N-1.$$

Доказательство. Достаточно разделить вещественную и мнимую части в равенстве, указанном в лемме 1. $\blacksquare$

Вернемся теперь к случаю, когда число N нечетно: $N = 2n+1$.

Лемма 2. *Пусть* $0 \le k, l \le n$. *Тогда*

$$\sum_{j=0}^{2n} \cos k x_j \cos l x_j = \begin{cases} 2n+1 & \text{при } k = l = 0, \\ (2n+1)/2 & \text{при } k = l \ne 0, \\ 0 & \text{при } k \ne l, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \sin k x_j \sin l x_j = \begin{cases} (2n+1)/2 & \text{при } k = l \ne 0, \\ 0 & \text{при } k \ne l \text{ или } k = l = 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \cos k x_j \sin l x_j = 0.$$

Доказательство. Считая для определенности $k \ge l$ и используя формулу

$$\cos k x_j \cos l x_j = \frac{1}{2}[\cos(k+l)x_j + \cos(k-l)x_j],$$

имеем

$$\sum_{j=0}^{2n} \cos k x_j \cos l x_j = \frac{1}{2}[C_{k+l} + C_{k-l}].$$

Совершенно аналогично

$$\sum_{j=0}^{2n} \sin k x_j \sin l x_j = \frac{1}{2}[C_{k-l} - C_{k+l}],$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \cos k x_j \sin l x_j = \frac{1}{2}[S_{k+l} \pm S_{|k-l|}].$$

Из этих равенств и следствия 3 легко вытекают доказываемые. $\blacksquare$

Теорема 2. *Коэффициенты полинома $T_n \in \mathbb{T}_n$, решающего интерполяционную задачу*

$$T_n(x_j) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_j + b_k \sin kx_j) = f_j, \quad j = 0, \ldots, 2n, \tag{1}$$

даются формулами ($k = 1, \ldots, n$)

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j, \qquad a_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j \cos kx_j, \\ b_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j \sin kx_j. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Достаточно умножить равенства (1) на $\cos lx_j$ или $\sin lx_j$, просуммировать по j от 0 до $2n$ и воспользоваться леммой 2. ■

На формулы (1) и (2) возможна другая точка зрения. Пусть $F = (f_0, \ldots, f_{2n})$ произвольный вектор. Его компоненты можно рассматривать как значения в узлах x_j некоторого тригонометрического полинома, и по формулам (2) поставить ему в соответствие вектор $A = (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ коэффициентов этого полинома. Компоненты вектора F восстанавливаются по компонентам вектора A согласно формулам (1). Вектор A называют *дискретным преобразованием Фурье* вектора F. Процесс построения A можно рассматривать как переразложение вектора F по новому базису в пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$, компоненты нового базисного вектора являются значениями в узлах функций $\cos kx$ или $\sin kx$. Существо доказанной выше леммы 2 состоит в том, что этот базис является ортогональным. Заметим еще, что те суммы, которые придется вычислять при нахождении значений полинома T_n в точках x_j (восстановление вектора F по вектору A) вполне аналогичны суммам формул (2).

В вычислительной практике при работе с некоторым вектором часто оказывается удобнее иметь дело с его дискретным преобразованием Фурье, и это преобразование находит широкое применение.

Например, пусть требуется передать по каналу связи $2n+1$ число $f_0, \ldots, f_{2n}$. Эти числа можно рассматривать как значения в точках x_j тригонометрического полинома: $f_j = T_n(x_j)$. Коэффициенты этого полинома вычисляются по формулам (2), и иногда именно эти коэффициенты оказывается целесообразным передавать по каналу связи вместо чисел f_j (например, среди коэффициентов много очень маленьких, и их можно заменить нулями). Восстановление чисел f_j на другом конце канала связи по полученным коэффициентам также нетрудно.

Существуют и другие преобразования векторов, также называемые дискретным преобразованием Фурье. Некоторые идеи, связанные с дискретными преобразованиями Фурье, мы поясним на одном наиболее простом частном случае, преобразовании векторов с комплексными компонентами. Для $y \in \mathbb{C}^N$ условимся писать $y = (y_0, \ldots, y_{N-1})$. В пространстве $\mathbb{C}^N$ таких векторов скалярное произведение задается формулой $(y, z) = \sum_{k=0}^{N} y_k \overline{z}_k$. ($\overline{z}_k$ — это число, комплексно сопряженное компоненте вектора z). Положим $h = 1/N$ и рассмотрим в $\mathbb{C}^N$ систему векторов

$$e_k = (1, e^{2\pi i(kh)}, e^{2\pi i(2kh)}, \ldots, e^{2\pi i(N-1)kh}) \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Эти векторы оказываются ортогональными:

$$(e_k, e_j) = N\delta_{kj},$$

Действительно, считая для определенности $k \geq j$, имеем

$$(e_k, e_j) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i(k-j)lh},$$

и остается воспользоваться леммой 1. Так что e_k образуют базис в $\mathbb{C}^N$, и любой вектор y может быть разложен по этому базису:

$$y = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e_j \quad \left(y_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{2\pi i(kjh)} \right).$$

Ввиду ортогональности базиса $\{ e_k \}$ коэффициенты a_j легко находятся:

$$a_j = \frac{(y, e_j)}{(e_j, e_j)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i(kjh)},$$

что можно переписать еще в виде

$$a_{N-j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{2\pi i(kjh)}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Вектор $(a_0, \ldots, a_{N-1})$ называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) вектора y.

Вычисление преобразования Фурье вектора y и восстановление этого вектора по его преобразованию Фурье (нахождение компонент y_k) осуществляется по одинаковым (с точностью до множителя $1/N$) формулам и требует вычисления сумм вида

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{2\pi i \frac{kj}{N}}.$$

Если мы располагаем таблицей соответствующих степеней $e^{2\pi i \frac{l}{N}}$, то прямое вычисление всех y_k требует произвести N^2 умножений. Число арифметических действий можно существенно сократить, если N есть произведение нескольких множителей. Ограничимся случаем, когда $N = 2^n$. Тогда полагая $N_1 = N/2 = 2^{n-1}$ и $z = e^{2\pi i/N}$, имеем

$$y_k = \sum_{m=0}^{N_1-1} a_{2m} z^{2mk} + \sum_{m=0}^{N_1-1} a_{2m+1} z^{(2m+1)k} =$$
$$= \sum_{m=0}^{N_1-1} a'_m z_1^{mk} + z^k \sum_{m=0}^{N_1-1} a''_m z_1^{mk} = y'_k + z^k y''_k.$$

Здесь $z_1 = z^2 = e^{2\pi i/N_1}$, $a'_m = a_{2m}$, $a''_m = a_{2m+1}$. Из равенства $z^{kN} = 1$ вытекает, что $y'_{N_1+k} = y'_k$ и $y''_{N_1+k} = y''_k$, так что реально требуется вычислить лишь компоненты векторов $y' = (y'_0, \dots, y'_{N_1-1})$ и $y'' = (y''_0, \dots, y''_{N_1-1})$. Из приведенных выше формул видно, что y' и y'' суть дискретные преобразования Фурье для $(a'_0, \dots, a'_{N_1-1})$ и $(a''_0, \dots, a''_{N_1-1})$ соответственно, и их можно вычислять пользуясь тем же приемом. Обозначим через q_n число умножений, которое потребно при применении такого процесса для вычисления ДПФ вектора размерности $N = 2^n$. Тогда $q_n = 2q_{n-1} + 2^n$. При $n = 0$ $(N = 1)$ ДПФ "вектора" есть он сам, так что $q_0 = 0$. Это позволяет методом индукции легко доказать, что $q_n = nN = N \log_2 N$, так что число умножений по сравнению с применением прямых формул существенно сокращается. Например, при $N = 2^{10} = 1024$ будет $N^2 > 10^6$, а $Nn = 10240$, т.е. более чем в 100 раз меньше. Вычисление ДПФ с использованием приведенного приема называется быстрым преобразованием Фурье — БПФ.

Поясним формулы БПФ на примере $N = 4$. Тогда $z = e^{2\pi i/4} = i, \quad z_1 = z^2 = -1$. Пусть требуется вычислить коэффициенты разложения вектора $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ по новому базису:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \\ y_1 &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3, \\ y_2 &= a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6, \\ y_3 &= a_0 + a_1 z^3 + a_2 z^6 + a_3 z^9. \end{aligned}$$

Тогда формулы БПФ принимают вид:

$$\begin{aligned} y_0 &= (a_0 + a_2) + 1 \cdot (a_1 + a_3) = y'_0 + y''_0, \\ y_1 &= (a_0 + a_2 z_1) + z(a_1 + a_3 z_1) = y'_1 + z y''_1, \\ y_2 &= (a_0 + a_2) + z^2(a_1 + a_3) = y'_0 + z^2 y''_0, \\ y_3 &= (a_0 + a_2 z_1) + z^3(a_1 + a_3 z_1) = y'_1 + z^3 y''_1. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} y'_0 &= a_0 + a_2, \qquad & y''_0 &= a_1 + a_3, \\ y'_1 &= a_0 + a_2 z_1, \qquad & y''_1 &= a_1 + a_3 z_1. \end{aligned} \tag{4}$$

При вычислениях сначала используются формулы (4), а затем (3).

Задача 1. Показать, что система функций $\sin x, \dots, \sin nx$ является чебышевской на промежутке $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$ и не является чебышевской на $[0, \pi - \varepsilon]$ и $[\varepsilon, \pi]$.

Задача 2. Показать, что в случае тригонометрической интерполяции по произвольным попарно неэквивалентным узлам $x_0, \dots, x_{2n}$ фундаментальные полиномы интерполяции могут быть записаны в виде

$$l_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{\sin \frac{x - x_j}{2}}{\sin \frac{x_k - x_j}{2}},$$

(l_k — тригонометрические полиномы, удовлетворяющие равенствам $l_k(x_j) = \delta_{kj}$).

[* § 8. Интерполяция аналитических функций. Теорема В.И.Крылова

В этом параграфе мы будем считать, что функция $f(x)$ $(x \in [a, b])$, для которой рассматривается задача интерполяции по системе узлов $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$, задана в некоторой области комплексной плоскости, содержащей отрезок $[a, b]$, и является аналитической. Нас будет интересовать приближение этой функции интерполяционным полиномом только на промежутке $[a, b]$. Сами значения функции на промежутке мы будем считать вещественными, как это было принято в предыдущих параграфах, хотя, как это можно усмотреть из дальнейшего, ничего по существу не изменится, если и на этом промежутке функция принимает комплексные значения. Мы будем использовать старые обозначения: $Q_n(f; x)$ — интерполяционный полином функции f, построенный по узлам x_k, $R_n(f; x) = f(x) - Q_n(f; x)$ — остаточный член (погрешность) интерполяции.

Пусть $\Omega \supset [a, b]$ — некоторая область в комплексной плоскости, где функция f регулярна, и пусть $L \subset \Omega$ — некоторый контур, причём промежуток $[a, b]$ лежит внутри этого контура.

Теорема 1. *Справедливо следующее представление остатка интерполяции контурным интегралом:*

$$R_n(f; x) = \frac{\omega(x)}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\, dz}{\omega(z)(z - x)} = \frac{\omega(x)}{2\pi i} \mathcal{I}.$$

Здесь $\omega(z) = (z - x_0)(z - x_1) \dots (z - x_n)$.

Доказательство. Вычислим интеграл $\mathcal{I}$. Он равен сумме вычетов подынтегральной функции в особых точках, лежащих внутри контура, умноженной на $2\pi i$. Функция f регулярна, поэтому такими особыми точками являются только корни знаменателя, т.е. x и x_k. Соответствующие вычеты равны

$$\frac{f(x)}{\omega(x)} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_k)}{\prod_{j \neq k}(x_k - x_j)\ (x_k - x)} = -\frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}.$$

Итак,

$$\frac{\omega(x)}{2\pi i} \mathcal{I} = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k) = R_n(f; x),$$

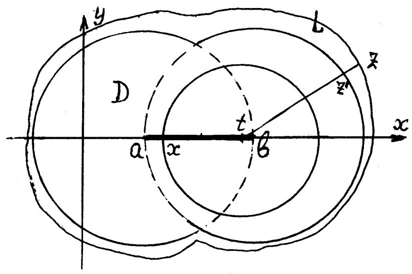
поскольку вычитаемое во второй части равенства и есть интерполяционный полином функции f в форме Лагранжа. ■

Рассмотрим теперь интерполяционный процесс: при каждом натуральном n заданы узлы $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ ($x_k^{(n)} \in [a, b]$, $x_k^{(n)} \neq x_j^{(n)}$ при $k \neq j$). Нас будет интересовать вопрос: какой должна быть функция f, чтобы *любой* такой интерполяционный процесс сходился для неё равномерно на промежутке $[a, b]$.

Введём обозначение $l = b - a$ — длина промежутка $[a, b]$. Радиусом l проведём две окружности на комплексной плоскости с центрами в точках a и b и обозначим через D объединение соответствующих открытых кругов, а $\overline{D}$ — замыкание области D. Пусть $L \subset \Omega$ — некоторый контур, внутри которого лежит $\overline{D}$: $\overline{D} \bigcap L = \varnothing$.

Лемма. *Найдётся такое число $q < 1$, что для любых точек $x, t \in [a, b]$ и $z \in L$ выполняется неравенство $|x - t| \leq q|z - t|$*

Доказательство. Найдётся такое число $d > 0$, что для любых $z \in L$ и $z' \in \overline{D}$ будет $|z - z'| \geq d$ (множества L и $\overline{D}$ компактны). Для определённости будем считать, что $t > x$. Тогда замкнутый круг с центром в точке t и с радиусом $t - x$ будет содержаться в правом из замкнутых кругов, составляющих $\overline{D}$, и потому для любой



точки z', лежащей на границе области D, выполняется неравенство $|z' - t| \geq |x - t|$. Точку $z \in L$ соединим отрезком с точкой t и обозначим через z' точку пересечения этого отрезка с границей области D. Тогда

$$|z - t| = |z' - t| + |z - z'| \geq |x - t| + d \geq |x - t| \left(1 + \frac{d}{l}\right),$$

и остаётся положить $q = (1 + d/l)^{-1}$. ■

Условимся говорить, что функция f регулярна в некоторой замкнутой области, если она регулярна в некоторой открытой области, содержащей эту замкнутую.

Теорема 2 (В.И.Крылов). *Пусть f аналитическая функция. Для того, чтобы любой интерполяционный процесс сходился для неё равномерно на промежутке $[a, b]$, достаточно, чтобы она была регулярна в замкнутой области $\overline{D}$, и необходимо, чтобы она была регулярна в области D.*

Доказательство. 1) Достаточность. Пусть f регулярна в $\overline{D}$. Тогда найдётся такой контур L в области её регулярности, что $\overline{D} \bigcap L = \varnothing$. Пусть $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ — произвольные узлы. Для представления остатка интерполирования функции f по этим узлам воспользуемся теоремой 1, записав соответствующую формулу в виде

$$R_n(f; x) = f(x) - Q_n(f; x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \prod_{k=0}^{n} \frac{x - x_k^{(n)}}{z - x_k^{(n)}} \frac{f(z)\, dz}{z - x}.$$

Отсюда, воспользовавшись леммой, получаем, что при всех $x \in [a, b]$

$$|R_n(f, x)| \leq C q^{n+1},$$

где C — некоторая постоянная, включающая в себя длину контура L, оценку $|f(z)|$ на этом контуре и нижнюю оценку $|z - x|$ при $z \in L$ и $x \in [a, b]$. Поскольку $0 < q < 1$, то достаточность этим доказана.

2) Необходимость. Достаточно показать, что если f не регулярна в D, то узлы интерполяционного процесса можно выбрать так, что он не будет сходиться к f в некоторых точках промежутка $[a, b]$. Итак, пусть f не регулярна в D. Рассмотрим ряды Тейлора функции f с центрами в точках a и b. Если радиус сходимости первого из них не меньше l, то f регулярна в левом из кругов, составляющих область D, а если — второго, то в правом из этих кругов, так что если оба эти радиуса не менее l, то f регулярна в D. Но это не так, так что хотя бы один из этих радиусов (пусть это для точки a) есть $r < l$. Обозначим через $S_n(z)$ частные суммы этого ряда

Тейлора. Для точек $x \in (b-r, b]$ $S_n(x)$ не сходятся к $f(x)$. Выберем точку x^* из $(b-r, b]$. Для нее найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность номеров $n_k \to \infty$, что $|S_{n_k}(x^*) - f(x^*)| > \varepsilon$. Учитывая, что S_{n_k} есть эрмитовский интерполяционный полином функции f, построенный по единственному узлу $x_0 = a$ кратности $n_k + 1$, используя следствие из теоремы 2 (§ 5) и выбрав узлы $x_0^{(n_k)}, x_1^{(n_k)}, \ldots, x_{n_k}^{(n_k)}$ достаточно близкими к a, мы получим

$$|Q_{n_k}(f; x^*) - S_{n_k}(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |Q_{n_k}(f; x^*) - f(x^*)| > \frac{\varepsilon}{2},$$

так что интерполяцонный процесс, имеющий при $n = n_k$ своими узлами $x_j^{(n_k)}$, не сходится к f в точке x^*. ■

Как видно из доказательства достаточности, если выполнено соответствующее условие, то при любом выборе узлов интерполяционные полиномы сходятся к функции по меньшей мере с быстротой геометрической прогрессии, знаменатель которой q (как видно из доказательства леммы) оценивается числом $l/(l+d)$, и поскольку контур L, заключенный в области регулярности функции f, находится в нашем распоряжении, число q может быть выбрано тем меньше, чем шире область регулярности. В частности, для целых функций сходимость интерполяционных полиномов быстрее сходимости геометрической прогрессии со сколь угодно малым знаменателем. Однако не следует думать, что при интерполяции регулярных функций узлы можно выбирать "как попало", следует помнить, что их выбор определяет еще, насколько велико будет влияние ошибок округления, допущенных при вычислении значений функции в узлах. *]