Глава 2
Приближенное вычисление интегралов

§1 Интерполяционные квадратурные формулы

Основной способ приближенного вычисления интегралов — это квадратурные формулы. Другое их название, несколько устаревшее, хотя в некоторых случаях и используемое, — формулы механических квадратур.

Определение. *Квадратурной формулой* называется формула приближенного вычисления интеграла
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \tag{1}$$
Здесь *узлы* x_k и *коэффициенты (веса)* A_k не зависят от интегрируемой функции (можно сказать, что квадратурная формула — это набор узлов и коэффициентов).

Все узлы квадратурной формулы считаются различными*, и чаще всего они принадлежат промежутку интегрирования: $x_k \in [a, b]$, но делать такое предположение, если не оговорено противное, мы не будем.

Более общее понятие — квадратурная формула с весом (весовой функцией) $w(x)$. Это
$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \tag{2}$$
Здесь x_k и A_k не зависят от функции f, но определяются весом w.

Смысл введения весовых функций состоит в том, что часто приходится вычислять много интегралов от функций, которые содержат общий множитель, который удобно считать весом. При этом главной особенностью является то, что формула (2) обычно может давать достаточно хорошее приближение к интегралу, если функция f обладает хорошей гладкостью (например, многократно непрерывно дифференцируема), а что касается весовой функции $w(x)$, то она может иметь особенности, например, в некоторых точках обращаться в бесконечность. Так что введение весовых функций — это один из способов учитывать особенности интегрируемой функции. В частности, это будет видно из доказываемой ниже теоремы 3. В этом параграфе рассматривается более общая формула (2) — формулу (1) можно считать частным случаем формулы (2) при $w(x) \equiv 1$.

Будем называть правую часть формулы (2) квадратурной суммой и обозначать ее через $Q_n(f)$, а погрешность формулы (остаток) через $R_n(f)$:
$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \quad R_n(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx - Q_n(f).$$
Заметим, что Q_n и R_n обладают свойством линейности:
$$Q_n(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 Q_n(f_1) + a_2 Q_n(f_2), \qquad R_n(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 R_n(f_1) + a_2 R_n(f_2).$$

*Как и в предыдущей главе, называя точки некоторой системы узлами, мы всегда будем считать их попарно различными.

[* На языке функционального анализа Q_n и R_n — это линейные функционалы, рассматриваемые обычно как функционалы в пространстве $C[A,B]$ непрерывных на промежутке $[A,B]$ функций (промежуток $[A,B]$ содержит $[a,b]$ и все узлы квадратурной формулы).*]

Простейший способ построения формулы (2) состоит в следующем: произвольно выбираются узлы, и значение интеграла от каждой функции считается приближенно равным интегралу от интерполяционного полинома P_{n-1} этой функции, построенного по выбранным узлам. Если интерполяционный полином записать в форме Лагранжа

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x) f(x_k), \quad l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}\,,$$

где $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, то приближенное равенство, о котором идет речь, принимает вид

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx \approx \int_a^b w(x)P_{n-1}(x)\,dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_a^b w(x)l_k(x)\,dx \cdot f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \qquad A_k = \int_a^b w(x)l_k(x)\,dx.$$

Последнее равенство и принимается за формальное определение интерполяционной квадратурной формулы:

Определение. Формула (2) называется *интерполяционной квадратурной формулой* (ИКФ), если ее коэффициенты выражаются через узлы формулами

$$A_k = \int_a^b w(x)l_k(x)\,dx = \int_a^b w(x)\,\frac{\omega(x)\,dx}{(x-x_k)\omega'(x_k)}\,. \tag{3}$$

Здесь $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, а $l_k(x)$ — фундаментальные полиномы интерполяции по выбранным узлам.

Таким образом, ИКФ при заданном весе $w(x)$ полностью определяется указанием ее узлов.

Определение. Пусть $d \geq 0$ целое число. Говорят, что формула (2) имеет алгебраическую степень точности (АСТ) d, если она точна для всех алгебраических полиномов степени не выше d ($R_n(p_d) = 0$ для всех $p_d \in \mathbb{P}_d$) и существует хотя бы один полином $p_{d+1} \in \mathbb{P}_{d+1}$, для которого она не точна ($R_n(p_{d+1}) \neq 0$).

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что для того чтобы формула (2) имела АСТ d, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для степеней x^k при $k = 0, \dots, d$ и не была точна для x^{d+1} ($R_n(x^k) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, d$, $R_n(x^{d+1}) \neq 0$).

Теорема 1. *Для того чтобы формула (2) была интерполяционной необходимо и достаточно, чтобы ее АСТ d удовлетворяла неравенству $d \geq n-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Необходимость. Пусть (2) — ИКФ и $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ — некоторый полином степени не выше $n-1$. Интерполяционный полином для p, построенный по узлам $\{x_k\}$ обязан совпадать с ним самим, и представив его в форме Лагранжа и проинтегрировав с весом w, воспользовавшись формулой (3), мы придем к равенству $R_n(p) = 0$. Итак, формула (2) точна для всех полиномов степени не выше $n-1$, и потому $d \geq n-1$.

2) Достаточность. Если АСТ формулы (2) $d \geq n-1$, то она точна, в частности, для полиномов $l_k(x)$, которые имеют степень $n-1$, откуда и вытекают формулы (3), поскольку $Q_n(l_k) = A_k$. ■

З а м е ч а н и е 2. Формула (2) может иметь АСТ $d > n-1$. Но если вес $w(x)$ сохраняет на $[a,b]$ знак, то $d \leq 2n-1$. Действительно, формула заведомо не точна для полинома $\omega^2(x)$ степени $2n$, поскольку $Q_n(\omega^2) = 0$.

Обозначим через $[A,B]$ наименьший промежуток, содержащий $[a,b]$ и все узлы квадратурной формулы x_k.

Определение. Говорят, что квадратурная формула (2) *имеет представление остатка в форме Лагранжа*, если существуют такое натуральное m и такая постоянная C, что для любой m раз непрерывно дифференцируемой на $[A,B]$ функции $f(x)$ ($f \in C^{(m)}[A,B]$) найдется такая точка $\xi \in [A,B]$, что $R_n(f) = Cf^{(m)}(\xi)$.

З а м е ч а н и е 3. Квадратурная формула может и *не иметь* представления остатка в форме Лагранжа.

Теорема 2. *Если квадратурная формула имеет представление остатка в форме Лагранжа с производной порядка m, то для ее АСТ выполняется равенство $d = m-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Теорема 3. *Если АСТ формулы (2) есть d, то для любой функции $f \in C[A,B]$ выполняется оценка*

$$|R_n(f)| \leq \left[\int_a^b |w(x)|\,dx + \sum_{k=1}^{n} |A_k|\right] E_d(f), \tag{4}$$

где $E_d(f)$ — наилучшее приближение функции f полиномами степени d на промежутке $[A,B]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P_d \in \mathbb{P}_d$ есть полином наилучшего приближения функции f, так что при всех $x \in [A,B]$ $|f(x) - P_d(x)| \leq E_d(f)$. Тогда так как $R_n(P_d) = 0$, то

$$|R_n(f)| = |R_n(f) - R_n(P_d)| = |R_n(f - P_d)| =$$
$$= \left| \int_a^b w(x)\big(f(x) - P_d(x)\big)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k\big(f(x_k) - P_d(x_k)\big) \right|,$$

откуда легко следует доказываемая оценка. ■

Будем считать, что дана последовательность квадратурных формул

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^n f(x_k^n).$$

(квадратурный процесс). АСТ формулы с номером n считаем равной d_n и сохраним для этих формул обозначения $Q_n(f)$ и $R_n(f)$.

Следствие. *Если все узлы x_k^n лежат на промежутке $[a,b]$, при некоторой постоянной C и всех n $\sum_{k=1}^n |A_k^n| \le C$ и $d_n \to \infty$, то для любой непрерывной функции $f \in C[a,b]$*

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^n A_k^n f(x_k^n) \to \int_a^b w(x) f(x)\, dx$$

(говорят, что квадратурный процесс сходится для всех непрерывных функций).

[* З а м е ч а н и е 4. На языке функционального анализа утверждение следствия означает, что при выполнении указанных условий последовательность действующих в пространстве $C[a,b]$ линейных функционалов Q_n *слабо сходится.* Сходимость этих функционалов *по норме* невозможна (см. задачу 4 в конце этого параграфа).***]**

Сделаем к теореме 3 еще одно замечание.

З а м е ч а н и е 5. Если $d \ge 0^*$, то ввиду равенства

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b w(x)\, dx$$

в случае $w(x) \ge 0$ и $A_k^n > 0$ оценку (4) можно переписать в виде

$$|R_n(f)| \le 2 \int_a^b w(x)\, dx\, E_d(f).$$

Пусть $w(x) \ge 0$. Если среди коэффициентов A_k есть отрицательные, то в случае $d \ge 0$

$$\sum_{k=1}^n |A_k| > \int_a^b w(x) dx,$$

и оценка (4) хуже, чем в случае положительных коэффициентов. Поэтому в рассматриваемом случае желательно использовать квадратурные формулы, все коэффициенты которых положительны. Это требование существенно еще в одном отношении. Если значения $f(x_k)$ мы вычисляем с погрешностями ε_k, про которые известно лишь, что $|\varepsilon_k| \le \varepsilon$, то вызванная этими погрешностями ошибка в квадратурной сумме оценивается через $\sum_{k=1}^n |A_k|\varepsilon$, причем эта оценка неулучшаема. Формулами, у которых при положительном весе среди коэффициентов имеются отрицательные, обычно не пользуются.

Задача 1. Пусть АСТ формулы (2) есть d. Найдется ли полином p_{d+2} степени $d+2$, для которого она точна?

Задача 2. Пусть $w(x) \ge 0$ и k узлов формулы (2) принадлежат (a,b), а остальные лежат вне этого промежутка. Показать, что тогда АСТ $d \le n + k - 1$.

Задача 3. Показать, что квадратурная формула

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx f(a),$$

где $a \in (0,1)$ и $a \ne 1/2$, не имеет представления остатка в форме Лагранжа.

---

*Мы будем так писать, если квадратурная формула *имеет* некоторую алгебраическую степень точности, т.е. она точна для постоянных.

Задача 4. Доказать, что при $w(x) \geq 0$* коэффициент при $E_d(f)$ в правой части оценки (4) есть *норма линейного функционала* R_n, действующего в пространстве $C[a,b]$, т.е. $\sup\{\, R_n(f) \;\big|\; \|f\| \leq 1\,\}$ равен этому коэффициенту.

§2 Квадратурные формулы с постоянным весом. Формулы Котеса

Пусть квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = Q_n^1(f) \tag{1}$$

мы хотим использовать для вычисления интеграла от функции $g(y)$ по промежутку $[c,d]$. Сделав в интеграле по $y \in [c,d]$ линейную замену переменной интегрирования $y = \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ и применив для вычисления полученного интеграла по $[a,b]$ квадратурную формулу (1), мы придем к приближенному равенству (квадратурной формуле)

$$\int_c^d g(y)\,dy \approx \sum_{k=1}^{n} B_k g(y_k) = Q_n^2(g), \tag{2}$$

где

$$B_k = \frac{d-c}{b-a}\,A_k, \qquad y_k = \frac{d-c}{b-a}\,(x_k-a)+c. \tag{3}$$

Определение. Квадратурная формула (2) называется *подобной* формуле (1), если узлы и коэффициенты этих формул связаны равенствами (3).

Отметим основные свойства квадратурных формул с постоянным весом и, в частности, свойства подобных формул.

$\langle \mathbf{1} \rangle$ Если формула (1) точна для постоянных (т.е. имеет некоторую алгебраическую степень точности), то $\sum_{k=1}^n A_k = b-a$.

$\langle \mathbf{2} \rangle$ Соотношение подобия *рефлексивно*, т.е. каждая квадратурная формула подобна самой себе, *симметрично*, т.е. если вторая квадратурная формула подобна первой, то и первая подобна второй, и *транзитивно*, т.е. если две квадратурные формулы порознь подобны третьей, то они подобны и между собой.

$\langle \mathbf{3} \rangle$ Алгебраические степени точности подобных формул совпадают.

Свойства $\langle 1 \rangle$ - $\langle 3 \rangle$ очевидны.

$\langle \mathbf{4} \rangle$ Если одна из подобных квадратурных формул — интерполяционная, то и другая тоже.

Это свойство немедленно следует из $\langle 3 \rangle$ и теоремы 1 предыдущего параграфа. Таким образом, если *узлы* интерполяционных квадратурных формул (1) и (2) связаны формулой (3), то эти формулы подобны — соотношения (3) для коэффициентов выполняются автоматически.

$\langle \mathbf{5} \rangle$ Если формула (1) — интерполяционная и все ее узлы расположены симметрично (при всех k $\;x_k + x_{n+1-k} = a+b$), то при всех k $\;A_k = A_{n+1-k}$.

*В действительности это условие является излишним.

Предыдущее свойство позволяет доказывать это лишь для промежутка $[-1,1]$, а в этом случае достаточно сослаться на очевидное равенство для фундаментальных полиномов интерполяции в случае симметрично расположенных на $[-1,1]$ узлов: $l_k(x) = l_{n+1-k}(-x)$.

$\langle \mathbf{6} \rangle$ Если узлы интерполяционной квадратурной формулы расположены симметрично, то ее АСТ есть нечетное число.

Действительно, сводя задачу опять к случаю промежутка $[-1,1]$ и используя предыдущее свойство, легко заметить, что наша формула точна для всех нечетных полиномов.

$\langle \mathbf{7} \rangle$ Если квадратурная формула (1) имеет представление остатка в форме Лагранжа: $R_n^1(f) = C_1 f^{(m)}(\xi)$, то и (2) имеет такое представление: $R_n^2(g) = C_2 g^{(m)}(\eta)$, где

$$C_2 = \left(\frac{d-c}{b-a}\right)^{m+1} C_1.$$

Действительно, полагая для m раз непрерывно дифференцируемой функции g $f(x) = g\left(\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c\right)$, имеем

$$\int_c^d g(y)\,dy = \frac{d-c}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}\left[Q_n^1(f) + R_n^1(f)\right] =$$
$$= Q_n^2(g) + \frac{d-c}{b-a} C_1 f^{(m)}(\xi) = Q_n^2(g) + \left(\frac{d-c}{b-a}\right)^{m+1} C_1 g^{(m)}(\eta),$$

где $\eta = \frac{d-c}{b-a}(\xi - a) + c$.

$\langle \mathbf{8} \rangle$ Если АСТ подобных формул (1) и (2) равны μ и $R_n^1(x^{\mu+1}) = r$, то

$$R_n^2(y^{\mu+1}) = \left(\frac{d-c}{b-a}\right)^{\mu+2} r.$$

Достаточно доказать это свойство при $[a,b]=[0,1]$. Ввиду линейности R_n^2 имеем:

$$\begin{aligned} R_n^2(y^{\mu+1}) =& R_n^2\big((y-c)^{\mu+1}\big) = \\ =& (d-c)\left[\int_0^1 (d-c)^{\mu+1} x^{\mu+1} dx - \sum_{k=1}^n (d-c)^{\mu+1} A_k x_k^{\mu+1}\right] = \\ =& (d-c)^{\mu+2} R_n^1(x^{\mu+1}). \end{aligned}$$

Прежде чем переходить к конкретным квадратурным формулам с постоянным весом, докажем лемму, которая полезна при выводе представления остаточных членов.

Лемма. *Пусть $q(x)$ – интегрируемая функция, причем $q(x) \geq 0$, функция $u(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $\xi(x)$ – произвольное (без каких-либо предположений о непрерывности) отображение промежутка $[a,b]$ в себя. Если написанный ниже интеграл I существует, то найдется такая точка $\eta \in [a,b]$, что*

$$I = \int_a^b q(x) u\big(\xi(x)\big)\,dx = \int_a^b q(x)\,dx \cdot u(\eta).$$

Доказательство. Положим $M = \max u(x)$, $m = \min u(x)$. Тогда

$$m \le I \Big/ \int_a^b q(x)\,dx = G \le M.$$

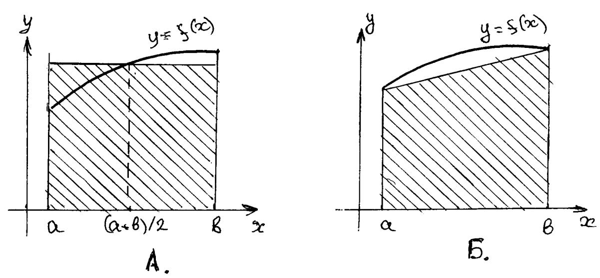
Будучи непрерывной, функция u принимает в некоторой точке η значение, равное G. $\blacksquare$

Обратимся к некоторым конкретным формулам.

Формулой средних прямоугольников называется интерполяционная квадратурная формула с единственным узлом — серединой промежутка интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{4}$$

Формула имеет очевидный геометрический смысл — ее правая часть есть площадь прямоугольника со сторонами $b-a$ и $f\big((a+b)/2\big)$ (см. рисунок А), отсюда происходит



название формулы. Из самого определения видно, что формулы средних прямоугольников для всех промежутков подобны. Легко видеть, что АСТ этих формул $d \ge 1$ (они точны для постоянных, являются ИКФ и “узел расположен симметрично”, так что d нечетно). Представление остатка получим сначала для промежутка $[-1,1]$. Для $f \in C^{(2)}[-1,1]$, используя лемму, имеем:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 \big(f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(\xi(x))\big)dx = 2f(0) + \frac{1}{3}f''(\eta).$$

Здесь $2f(0)$ — это "квадратурная сумма" формулы прямоугольников, и потому для промежутка $[-1,1]$ представление остатка в форме Лагранжа получено. Согласно свойству $\langle 7 \rangle$ в случае промежутка $[a,b]$ остаточный член формулы (4) имеет представление

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta).$$

Отсюда, в частности, следует, что АСТ формулы прямоугольников равна 1.

Формулами Котеса называются ИКФ, узлами которых являются концы промежутка интегрирования и точки деления промежутка на $(n-1)$ равных частей (число узлов n). Формула полностью определяется промежутком и числом узлов. Все формулы Котеса с одним числом узлов подобны. Для АСТ d согласно теореме 1 из §1 и свойству $\langle 6 \rangle$ получаются оценки: при четном n $d \geq n-1$, при нечетном — $d \geq n$. В действительности в этих неравенствах можно поставить знак равенства (доказывать это, кроме случаев $n = 2, 3$, не будем).

Обратимся к частным случаям формул Котеса. Начнем с $n = 2$. Узлы этой формулы — a и b, и поскольку коэффициенты равны (свойство $\langle 5 \rangle$) и в сумме дают $b-a$, то сама она имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big[f(a) + f(b)\big]$$

и ввиду очевидного геометрического смысла (см. рисунок Б выше — квадратурная сумма есть площадь трапеции с высотой $b-a$ и основаниями $f(a)$ и $f(b)$) называется *формулой трапеций*. Представление остатка этой формулы получим сначала для промежутка $[0,1]$. Для $f \in C^{(2)}[0,1]$, используя теорему о представлении остаточного члена интерполяции, имеем

$$f(x) = P_1(x) - \frac{x(1-x)f''(\xi)}{2},$$

где P_1 — интерполяционный полином функции f, построенный по узлам 0 и 1. Поэтому, опять используя лемму и равенство

$$Q_2(f) = Q_2(P_1) = \int_0^1 P_1(x)\,dx,$$

имеем

$$R_2(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - Q_2(f) = -\int_0^1 \frac{x(1-x)}{2}\, f''(\xi(x))\,dx = -\frac{1}{12}f''(\eta).$$

В случае произвольного промежутка $[a,b]$, используя свойство $\langle 7 \rangle$, имеем

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta).$$

Этим, в частности, для алгебраической степени точности формулы трапеций доказано равенство $d = 1$.

При $n = 3$ формула Котеса называется *формулой Симпсона*. Построим ее сначала для промежутка $[-1,1]$. В этом случае узлы формулы -1, 0 и 1, а коэффициенты удовлетворяют равенствам: $A_1 = A_3$, $A_1 + A_2 + A_3 = 2$. Поскольку

$$A_2 = \int_{-1}^1 l_2(x)\,dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx = \frac{4}{3},$$

то $A_1 = A_3 = 1/3$, и для произвольного промежутка формула Симпсона выглядит так:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Выведем представление остаточного члена сначала для промежутка $[-1,1]$. Для функции $f \in C^{IV}[-1,1]$ построим эрмитовский интерполяционный полином $P_3(x)$ по узлам -1 и 1 первой кратности и 0 — второй. Тогда

$$f(x) = P_3(x) + \frac{1}{4!}\Omega(x) f^{IV}(\xi), \quad \Omega(x) = -x^2(1-x^2),$$

и так как

$$Q_3(f) = Q_3(P_3) = \int_{-1}^{1} P_3(x)\,dx,$$

то*

$$R_3(f) = -\frac{1}{4!}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2) f^{IV}(\xi(x))dx = -\frac{1}{90}\, f^{IV}(\eta),$$

а в случае произвольного промежутка $[a,b]$

$$R_3(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{IV}(\eta).$$

Этим определяется и алгебраическая степень точности формулы Симпсона — $d = 3$.

Приведем еще без вывода формулу Котеса при $n = 4$, называемую *правилом 3/8 Ньютона*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right),$$
$$R_4(f) = -\frac{2}{405}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{IV}(\eta).$$

Начиная с $n = 9$ среди коэффициентов формул Котеса появляются отрицательные, и при $n \to \infty$ сумма абсолютных величин коэффициентов быстро стремится к бесконечности. Поэтому при больших n формулы Котеса не находят применения.

Задача. Показать, что если ИКФ имеет АСТ, равную $n-1$ (n — число узлов) и имеет представление остатка в форме Лагранжа, то в этом представлении

$$C = \frac{1}{n!}\int_a^b \omega(x)dx, \qquad \omega(x) = \prod (x - x_k).$$

§3 Составные формулы

Рассмотрим ситуацию, когда для вычисления интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

мы хотим применить квадратурную формулу

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} A_j g(x_j) + R(g) = Q(g) + R(g), \tag{2}$$

*Обратим внимание на то, что множитель $x^2(1-x^2)$ неотрицателен, что позволяет использовать лемму.

узлы которой принадлежат промежутку интегрирования: $x_j \in [0,1]$, но формула, подобная (2), не дает нужной точности. Тогда можно разбить промежуток $[a,b]$ на N равных частей и к интегралу по каждой части применить формулу, подобную (2). Это приводит нас к формуле

$$I = h\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{n} A_j f(y_k + hx_j) + R_N(f) = Q_N(f) + R_N(f), \tag{3}$$

где $h = (b-a)/N$, $y_k = a + kh$. Формула (3) называется *составной или большой*, а формула (2) по отношению к ней *исходной*. Составная формула содержит Nn узлов, если хотя бы одна из точек 0, 1 не является узлом для формулы (2), и $N(n-1)+1$ узел в противном случае.

Обратимся к основным свойствам составных формул.

$\langle\mathbf{1}\rangle$ Остаток $R_N(f)$ формулы (3) представим в виде

$$R_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} R_N^k(f), \quad R_N^k(f) = \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x)\,dx - h\sum_{j=1}^{n} A_j f(y_k + hx_j),$$

причем $R_N^k(f)$ — это остатки квадратурных формул, подобных (2).

$\langle\mathbf{2}\rangle$ Если АСТ формулы (2) есть d и $R(x^{d+1}) = r$, то $R_N(x^{d+1}) = (b-a)h^{d+1}r$.

Доказательство немедленно следует из предыдущего свойства и свойства $\langle 8\rangle$ подобных формул (§ 2).

$\langle\mathbf{3}\rangle$. АСТ формул (2) и (3) совпадают.

Доказательство. Очевидно, что АСТ формулы (3) не меньше, чем формулы (2). Обратное немедленно вытекает из предыдущего свойства. ■

$\langle\mathbf{4}\rangle$. Если формула (2) имеет представление остатка в форме Лагранжа:

$$R(g) = Cg^{(m)}(\xi),$$

то и (3) имеет такое представление:

$$R_N(f) = C_N f^{(m)}(\eta),$$

где

$$C_N = C(b-a)h^m.$$

Доказательство. Применяя свойство $\langle 7\rangle$ подобных формул, имеем

$$\begin{aligned} R_N^k(f) =& h^{m+1} C f^{(m)}(\eta_k), \quad \eta_k \in (y_k, y_{k+1}), \\ R_N(f) =& h^{m+1} C \sum_{k=0}^{N-1} f^{(m)}(\eta_k), \end{aligned}$$

и так как найдется такая точка η, что $\sum_{k=0}^{N-1} f^{(m)}(\eta_k) = Nf^{(m)}(\eta)$, (используется непрерывность функции $f^{(m)}$) и $Nh = b-a$), то этим свойство доказано. ■

Далее рассматривается *последовательность* составных формул: исходная формула считается фиксированной, а $N \to \infty$.

⟨**5**⟩. Для того чтобы для любой непрерывной функции f последовательность квадратурных сумм $Q_N(f)$ сходилась к интегралу (т.е. $R_N(f) \to 0$), необходимо и достаточно, чтобы исходная формула (2) была точна для постоянных*.

Доказательство. В представлении квадратурной суммы (формула (3)) переменим порядок суммирования:

$$Q_N(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j \sum_{k=0}^{N-1} hf(y_k + hx_j).$$

Каждая внутренняя сумма здесь есть сумма Римана для рассматриваемого интеграла I и потому при $N \to \infty$ к нему сходится. Таким образом, квадратурные суммы составных формул (при заданной исходной) всегда сходятся: $Q_N(f) \to \sum_{j=1}^{n} A_j\, I$, и для того чтобы предел был равен интегралу I, необходимо и достаточно равенство $\sum_{j=1}^{n} A_j = 1$ ■

Определение Будем говорить, что для функции f последовательность квадратурных формул (3) *сходится с порядком* m, если найдется такая постоянная C, что при всех $N \quad |R_N(f)| \le Ch^m$.

⟨**6**⟩. Для того чтобы для любой m раз непрерывно дифференцируемой функции f ($f \in C^{(m)}$) последовательность квадратурных формул (3) сходилась с порядком m, необходимо и достаточно чтобы для АСТ исходной формулы d выполнялось неравенство $d \ge m - 1$.

Доказательство. 1. Достаточность.†. Пусть $f \in C^{(m)}$ произвольна, $d \ge m-1$. Положим $M = \max_{[a,b]} |f^{(m)}(x)|$ и для каждого промежутка $[y_k, y_{k+1}]$ обозначим через $E_d^k(f)$ наилучшее приближение функции f на этом промежутке:

$$E_d^k(f) = \min_{q_d \in \mathbb{P}_d} \|f - q_d\|_{C[y_k, y_{k+1}]}.$$

Используем оценку остатка квадратурной формулы через наилучшее приближение (теорема 3 из § 1):

$$R_N^k(f) \le \big[h + h \sum |A_j|\big] E_d^k(f).$$

Займемся оценкой этих наилучших приближений. На каждом промежутке $[y_k, y_{k+1}]$ запишем $f(x)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(y_k) + (x - y_k) f'(y_k) + \dots + \frac{(x - y_k)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(y_k) + \\ + \frac{(x - y_k)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_k) = p_{m-1}(x) + \frac{(x - y_k)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_k).$$

Здесь $p_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1} \subseteq \mathbb{P}_d$, причем

$$\|f - p_{m-1}\|_{C[y_k, y_{k+1}]} \le \frac{M}{m!} h^m,$$

*Это может быть выражено также словами: АСТ формулы (2) $d \ge 0$ или $\sum A_j = 1$.

†Если исходная формула имеет представление остатка в форме Лагранжа, то достаточность легко следует из этого представления.

так что и наилучшее приближение $E_d^k(f)$ функции f полиномами степени не выше d на промежутке $[y_k, y_{k+1}]$ удовлетворяет неравенству

$$E_d^k(f) \le \frac{M}{m!} h^m.$$

Подставляя эти неравенства в оценки для $R_N^k(f)$, суммируя их по k и учитывая, что $Nh = b - a$, получаем $R_N(f) \le Ch^m$, где $C = M(b-a)[1 + \sum |A_j|]/m!$.

2. Необходимость. Согласно свойству $\langle 2 \rangle$ остаток $R_N(f)$ для функции $f(x) = x^{d+1}$ есть $(b-a)h^{d+1}r$, и в случае $d < m-1$ окажется $R_N(f)/h^m \to \infty$ ■

Как видно из доказательства, в части необходимости это утверждение допускает усиление: слова "для любой m раз непрерывно дифференцируемой функции" можно заменить на "для любого полинома".

Наиболее употребительными являются составные формулы средних прямоугольников, трапеций и Симпсона. Выпишем эти формулы. При этом представление остаточного члена сразу же получается из представления остаточного члена исходной формулы применением свойства $\langle 4 \rangle$. Конечно, приводимые формулы для остатка верны лишь в том случае, если подынтегральная функция нужное число раз непрерывно дифференцируема.

Составная формула средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}h\right), \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad R(f) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi).$$

Составная формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} f(a) + h \sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh) + \frac{h}{2} f(b), \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad R(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi).$$

Как видно из представления остатков этих двух формул, если вторая производная функции f сохраняет на $[a,b]$ знак, то квадратурные суммы средних прямоугольников и трапеций дают двухсторонние приближения к интегралу.

Переходя к составной формуле Симпсона, обозначим длины частичных промежутков, на которые делится промежуток $[a,b]$ через $2h$, так что h — это расстояние между двумя соседними узлами (напомним, что в исходной формуле Симпсона узлами являются концы промежутка и его середина). Тогда составная формула Симпсона принимает вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=1}^{N} f\big(a + (2k-1)h\big) + f(b)\right],$$
$$h = \frac{b-a}{2N}, \qquad R(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{IV}(\xi).$$

Задача. Показать, что свойства $\langle 3 \rangle$ и $\langle 4 \rangle$ составных формул (второе из них с изменением представления для C_N) сохраняются и в том случае, если составная формула строится на основе *неравномерного* разбиения отрезка $[a,b]$ на части.

§4 Квадратурные формулы гауссова типа

Вернемся к рассмотрению формул с весом $w(x)$. На всем протяжении параграфа функцию w будем считать суммируемой, неотрицательной и отличной от нуля на множестве положительной меры. Квадратурная формула с n узлами содержит $2n$ параметров — кроме узлов еще и коэффициенты. Требование, чтобы ее АСТ была не ниже d, налагает на эти параметры $d+1$ условие (точность для x^j, $j=0,\dots,d$). Поэтому можно рассчитывать на существование квадратурной формулы с n узлами и АСТ, равной $2n-1$. О таких формулах и идет речь в этом параграфе. Но сначала некоторые вспомогательные сведения.

Для полиномов f, g определим скалярное произведение:

$$(f,g)=\int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx.$$

Оно обладает обычными свойствами скалярного произведения: 1) линейность по каждому аргументу, 2) симметрия: $(g,f)=(f,g)$, 3) $(f,f)\geq 0$, и $(f,f)=0$ тогда и только тогда, когда полином f тождественно равен нулю. Полиномы f и g назовем ортогональными друг другу, если $(f,g)=0$. Если f ортогонален g_1 и g_2, то он ортогонален и их линейной комбинации $\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2$.

Отметим очевидный факт: если q_k — полиномы степени в точности k, то любой полином $p_n\in\mathbb{P}_n$ допускает представление вида $p_n(x)=\sum_{k=0}^n c_k q_k(x)$.

Теорема 1. *Существует и притом единственный с точностью до постоянного множителя полином $\omega_n(x)$ степени n, ортогональный всем полиномам $q_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1}$. Полиномы ω_n называются ортогональными с весом w полиномами.*

Доказательство. Положим $\omega_0=1$.

1) Существование докажем методом индукции. При $n=1$ достаточно положить $\omega_1=x-a$, где $a=(x,1)/(1,1)$. Пусть для $k=1,\dots,n-1$ существование ω_k уже доказано. Полином

$$\omega_n(x)=x^n-a_{n-1}\omega_{n-1}(x)-\dots-a_0\omega_0(x),\quad a_k=(x^n,\omega_k)/(\omega_k,\omega_k),$$

ортогонален полиномам ω_k при всех $k=0,1,\dots.n-1$, а значит, и всем их линейным комбинациям, т.е. всем полиномам $q_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1}$.

2) Единственность докажем от противного. Пусть ω_n и ω_n' — два ортогональных полинома со старшими коэффициентами a_n и a_n'. Тогда $\omega_n/a_n-\omega_n'/a_n'$ — многочлен степени не выше $n-1$, ортогональный сам себе и потому тождественно равный нулю, так что $\omega_n'=(a_n'/a_n)\omega_n$. ■

Доказанная теорема означает, в частности, что ортогональный полином заданной степени со старшим коэффициентом, равным единице, единственный.

Теорема 2. *Все корни ортогонального многочлена $\omega_n(x)$ вещественны, различны и принадлежат интервалу (a,b).*

Доказательство. Убедимся, что ω_n имеет на (a,b) n точек перемены знака (т.е.корней нечетной кратности). Пусть их $m<n$ и это $x_1,\dots,x_m$. Тогда положим $q_m(x)=(x-x_1)\dots(x-x_m)\in\mathbb{P}_{n-1}$. Функция $w(x)\omega_(x)q_m(x)$ сохраняет на (a,b) знак, и потому $(\omega_n,q_m)\neq 0$, что противоречит ортогональности. ■

Теорема 3. *Для того чтобы квадратурная формула*

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = Q_n(f) \tag{1}$$

имела алгебраическую степень точности (АСТ) $2n-1$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) формула (1) интерполяционная (ИКФ),

2) узлы x_k этой формулы суть корни ортогонального полинома ω_n.

Доказательство. 1) Необходимость первого условия следует из теоремы 1 (§ 1) об АСТ интерполяционных квадратурных формул. Докажем необходимость второго. Пусть формула (1) точна для всех полиномов $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Построим полином $\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, и пусть $q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ произволен. Тогда $\omega_n q_{n-1} \in \mathbb{P}_{2n-1}$ и потому

$$(\omega_n, q_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} A_k \omega_n(x_k) q_{n-1}(x_k) = 0,$$

так что ω_n — ортогональный полином.

2) Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2). Покажем, что формула (1) точна для всех полиномов степени не выше $2n-1$. Возьмем любой такой полином $P_{2n-1}(x)$ и по узлам x_k построим для него интерполяционный полином $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$, так что $r_{n-1}(x_k) = P_{2n-1}(x_k)$, $k = 1, \dots, n$. Полином $P_{2n-1} - r_{n-1}$ имеет точки x_k своими корнями, и потому делится на $\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, так что $P_{2n-1}(x) = \omega_n(x)q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)$, где $q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ — соответствующее частное. Учитывая, что (1) как интерполяционная квадратурная формула точна для всех полиномов степени не выше $n-1$, имеем

$$\int_a^b w(x)P_{2n-1}(x)\,dx = \int_a^b w(x)\omega_n(x)q_{n-1}(x)\,dx + \int_a^b w(x)r_{n-1}(x)\,dx =$$
$$= \int_a^b w(x)r_{n-1}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k r_{n-1}(x_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k P_{2n-1}(x_k).$$

Поскольку квадратурная формула с неотрицательным весом и n узлами не может иметь АСТ больше $2n-1$ (см. замечание 2 в § 1), то этим теорема доказана. ■

Определение. Формула (1), имеющая при n узлах АСТ $2n-1$, называется *формулой гауссова типа* или *формулой наивысшей степени точности.*

Следствие 1. *При наложенных на вес $w(x)$ условиях при каждом n формула гауссова типа существует и единственна.*

Доказательство. Действительно, весовая функция w однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяет ортогональный полином ω, корни которого различны и принадлежат промежутку (a, b), так что могут быть взяты в качестве узлов квадратурной формулы, и они, как для всякой ИКФ, однозначно определяют ее коэффициенты. ■

Отметим свойства формул гауссова типа.

$\langle \mathbf{1} \rangle$ Коэффициенты такой формулы положительны: $A_k > 0$.

Доказательство. Для полиномов $l_k^2(x)$, где $l_k(x)$ — фундаментальные полиномы интерполяции по узлам x_k ($l_k(x_j) = \delta_{kj}$), имеющих степень $2n-2$, формула точна. Поэтому

$$0 < \int_a^b w(x) l_k^2(x)\, dx = \sum_{j=1}^n A_j l_k^2(x_j) = A_k. \quad \blacksquare$$

$\langle \mathbf{2} \rangle$ Формула гауссова типа имеет представление остатка в форме Лагранжа:

$$R_n(f) = C_n f^{(2n)}(\xi), \quad C_n = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b w(x) \omega_n^2(x)\, dx,$$

где старший коэффициент ортогонального полинома $\omega_n(x)$ равен единице.

Доказательство. Для функции $f \in C^{(2n)}[a,b]$ построим эрмитовский интерполяционный полином $P_{2n-1} \in \mathbb{P}_{2n-1}$ по узлам x_k кратности 2. Тогда

$$f(x) - P_{2n-1}(x) = \frac{\Omega_{2n}(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta(x)), \quad \big(\Omega_{2n}(x) = \omega_n^2(x)\big)$$

и т.к. $R_n(P_{2n-1}) = 0$, так что $R_n(f) = R_n(f - P_{2n-1})$ и $Q_n(f) = Q_n(P_{2n-1})$, то

$$R_n(f) = \int_a^b w(x) \frac{\Omega_{2n}(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta(x))\, dx = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b w(x) \omega_n^2(x)\, dx \cdot f^{(2n)}(\xi)$$

(мы воспользовались леммой из § 2). $\blacksquare$

$\langle \mathbf{3} \rangle$ Для остаточного члена формулы справедлива оценка

$$R_n(f) \le 2 \int_a^b w(x)\, dx\, E_{2n-1}(f).$$

Это — непосредственное следствие теоремы 3 из § 1.

$\langle \mathbf{4} \rangle$ Для любой непрерывной функции $f \in C[a,b]$ при $n \to \infty$

$$Q_n(f) \to \int_a^b w(x) f(x)\, dx.$$

Это немедленно следует из $\langle 3 \rangle$.

Перейдем к случаю постоянной весовой функции $w(x) \equiv 1$.

Определение. Квадратурная формула гауссова типа для промежутка $[-1,1]$ с весом $w(x) \equiv 1$ называется *квадратурной формулой Гаусса.*

Замечание 1. Для любого промежутка $[a,b]$ формула, подобная формуле Гаусса, будет иметь ту же АСТ $2n-1$ и потому будет формулой гауссова типа. Обычно формулы, подобные формуле Гаусса, также называют формулами Гаусса.

Определение. *Многочленом Лежандра* степени n называется

$$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Теорема 4. *Многочлен Лежандра есть ортогональный на промежутке $[-1,1]$ с весом $w(x)\equiv 1$ полином. Его старший коэффициент равен единице.*

Доказательство. То, что P_n есть полином степени n со старшим коэффициентом единица, очевидно. Покажем ортогональность. Учитывая, что при $k<n$

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n\,\Big|_{x=\pm 1}=0,$$

и интегрируя по частям, для любого полинома $q_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1}$ имеем

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)q_{n-1}(x)\,dx=\frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n q_{n-1}(x)\,dx=$$
$$=(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}P_n(x)\frac{d^n}{dx^n}q_{n-1}(x)\,dx=0,$$

т.к. $\frac{d^n}{dx^n}q_{n-1}(x)\equiv 0$. ■

Корни многочлена Лежандра являются узлами квадратурной формулы Гаусса. Сам этот многочлен в зависимости от четности или нечетности n является четной или нечетной функцией. Поэтому (см. также свойство $\langle 5\rangle$ из § 2) верна

Теорема 5. *Узлы квадратурной формулы Гаусса симметричны (при нумерации в порядке возрастания $x_k=-x_{n+1-k}$), а коэффициенты при симметричных узлах равны ($A_k=A_{n+1-k}$).*

Вычислим коэффициент в представлении остаточного члена формулы Гаусса в форме Лагранжа.

Лемма. *Справедливо равенство*

$$I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Доказательство. Применяя интегрирование по частям, имеем

$$I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-1}(1-x^2)\,dx=I_{n-1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[2x(1-x^2)^{n-1}]dx=$$
$$=I_{n-1}+\frac{1}{2n}\int_{-1}^{1}x[(1-x^2)^n]'\,dx=I_{n-1}-\frac{1}{2n}I_n,$$

так что $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$ и остается применить метод математической индукции, учитывая, что $I_o=2$. ■

Следствие 2. *Справедливо равенство*

$$J_n=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=2\frac{n!}{(2n)!}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}n!.$$

Доказательство. Интегрируя по частям n раз:

$$J_n=\frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}P_n(x)[(x^2-1)^n]^{(n)}dx=$$
$$=(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}P_n^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx=\frac{n!}{(2n)!}n!I_n$$

(здесь учтено, что $P_n^{(n)}(x) \equiv n!$), и остается воспользоваться леммой. ■

Теорема 6. *Для квадратурной формулы Гаусса при $f \in C^{(2n)}[-1,1]$ справедливо представление остатка*

$$R_n(f) = C_n f^{(2n)}(\xi), \quad C_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}.$$

Доказательство. Согласно свойству $\langle 2 \rangle$ доказываемое представление имеет место при $C_n = \frac{1}{(2n)!} J_n$. Остается воспользоваться доказанным следствием и равенствами

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)(2n)!}{2^n n!} \quad ■$$

Замечание 2. Постоянные C_n очень быстро убывают. Приведем несколько первых из них:

$$C_2 = \frac{1}{135}, \quad C_3 = \frac{1}{15750}, \quad C_4 = \frac{1}{3472875}.$$

Замечание 3. В случае произвольного промежутка $[a,b]$ остаточный член формулы Гаусса имеет вид

$$R_n(f) = \hat{C}_n f^{(2n)}(\xi), \qquad \hat{C}_n = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} C_n.$$

Замечание 4. При $n = 1$ формула Гаусса совпадает с формулой средних прямоугольников.

Замечание 5. При $n = 2$ в представление остаточного члена формулы Гаусса, как и для формулы Симпсона, входит 4-ая производная, но коэффициенты при них имеют противоположные знаки. Поэтому если четвертая производная функции сохраняет знак на промежутке интегрирования, то квадратурные суммы Гаусса (при $n = 2$) и Симпсона дают двусторонние приближения к интегралу. То же относится и к построенным на основе этих формул составным квадратурным формулам.

Для применения квадратурной формулы Гаусса, конечно, не требуется каждый раз вычислять ее узлы и коэффициенты. Таблицы этих узлов и коэффициентов имеются почти в каждом учебнике, где говорится о приближенном вычислении интегралов. Заметим попутно, что имеются очень подробные таблицы узлов и коэффициентов формул гауссова типа для вычисления интегралов по промежутку $[-1,1]$ с весовыми функциями $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, которые естественно использовать при вычислении интегралов от функций, имеющих в некоторых точках промежутка интегрирования особенности степенного типа.

Задача 1. Доказать ортогональность многочленов Чебышева на промежутке $[-1,1]$ с весом $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Задача 2. Пусть $\omega_n(x)$ ортогональный относительно веса w полином со старшим коэффициентом 1, и $p_n(x)$ любой полином степени n с таким же старшим коэффициентом. Доказать, что тогда

$$\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 dx \geq \int_a^b w(x)[\omega_n(x)]^2 dx.$$

Задача 3. Показать, что для постоянной C_n в представлении остаточного члена для формул гауссова типа (свойство $\langle 2\rangle$) в случае промежутка $[a,b]=[-1,1]$ верна оценка

$$C_n \le \frac{1}{2^{2n-2}(2n)!}\int_{-1}^{1} w(x)\,dx.$$

Как изменится эта оценка в случае произвольного промежутка $[a,b]$?

Задача 4. Пусть x_k и A_k $(k=1,\dots,n)$ — узлы и коэффициенты формулы гауссова типа, $\widehat{\omega}_k(x)$ $(k=0,1,\dots)$ — ортогональные полиномы, нормированные условием $(\widehat{\omega}_k,\widehat{\omega}_k)=1$. Доказать, что

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} \sqrt{A_1}\widehat{\omega}_0(x_1) & \sqrt{A_2}\widehat{\omega}_0(x_2) & \dots & \sqrt{A_n}\widehat{\omega}_0(x_n)\\ \sqrt{A_1}\widehat{\omega}_1(x_1) & \sqrt{A_2}\widehat{\omega}_1(x_2) & \dots & \sqrt{A_n}\widehat{\omega}_1(x_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sqrt{A_1}\widehat{\omega}_{n-1}(x_1) & \sqrt{A_2}\widehat{\omega}_{n-1}(x_2) & \dots & \sqrt{A_n}\widehat{\omega}_{n-1}(x_n) \end{pmatrix} \;-$$

ортогональная матрица ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}^T=E$).

Задача 5. Показать, что коэффициенты квадратурной формулы гауссова типа можно вычислять по формулам:

$$A_k=\left(\sum_{j=0}^{n-1}\widehat{\omega}_j^2(x_k)\right)^{-1}.$$

Задача 6. Пусть $w(x)$ положительный вес. Показать, что при любом натуральном n существует и притом единственная квадратурная формула вида

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx \approx Af(a)+\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)+Bf(b),$$

имеющая АСТ $d=2n+1$. Каковы ее узлы и коэффициенты? Такие формулы называются формулами Маркова.

§5 Интегрирование периодических функций

Рассмотрим задачу построения квадратурных формул вида

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k) \tag{1}$$

для интегрирования 2π-периодических функций. Ввиду периодичности стоящий слева интеграл не зависит от a, а узлы формулы можно считать принадлежащими некоторому промежутку длиной 2π: $x_1<x_2<\dots<x_n<x_1+2\pi$.

Периодические функции естественно приближать тригонометрическими полиномами, и мы будем говорить, что (1) имеет тригонометрическую степень точности d, если она точна для всех тригонометрических полиномов порядка не выше d и неточна хоть для одного полинома порядка $d{+}1$, другими словами, она точна для функций $1,\cos x,\sin x,\dots,\cos dx,\sin dx$ и неточна хотя бы для одной из функций $\cos(d+1)x$, $\sin(d+1)x$. Заметим, что если мы требуем, чтобы алгебраическая степень точности была не менее d, то это накладывает на узлы и коэффициенты квадратурной формулы $n{+}1$ условие, а такое же требование по отношению к тригонометрической степени точности — $2n+1$ условие. Поэтому естественно следующее утверждение.

Теорема 1. *Тригонометрическая степень точности формулы (1) не более, чем $n-1$.*

Доказательство. Функция

$$T_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \bigl(1 - \cos(x - x_k)\bigr)$$

есть тригонометрический полином порядка n. Он принимает лишь неотрицательные значения, и интеграл от него положителен. В то же время во всех узлах он обращается в нуль, и квадратурная сумма равна нулю, так что формула (1) не точна для этого тригонометрического полинома. ■

Теорема 2. *Квадратурная формула*

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha + kh) = Q_n(f) \quad (h = 2\pi/n) \tag{2}$$

при любом α имеет тригонометрическую степень точности $n-1$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что (2) точна для функций e^{imx} при $m = 0, \ldots, n-1$. При $m = 0$ ($e^{i0x} = 1$) интеграл и квадратурная сумма равны 2π. Пусть $1 \le m \le n-1$. Тогда интеграл равен нулю. Подсчитаем квадратурную сумму.

$$\frac{1}{h}\, Q_n(e^{imx}) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{im(\alpha+kh)} = e^{im\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} e^{imkh} = e^{im\alpha} \frac{1 - e^{inmh}}{1 - e^{imh}} = 0,$$

т.к. $e^{imnh} = e^{i2\pi m} = 1$, а поскольку $0 < mh < 2\pi$, то $e^{imh} \neq 1$. ■

Замечание 1. Формулу (2) называют *формулой наивысшей тригонометрической степени точности.* В отличие от алгебраического случая, формула наивысшей тригонометрической степени точности не единственна — в нашем распоряжении находится параметр α.

Замечание 2. Как уже отмечалось, для периодических функций интеграл, стоящий в левой части формулы (2), не зависит от a. Если считать $a = \alpha - h/2$, то (2) есть составная формула средних прямоугольников. Если считать $a = \alpha$ и переписать квадратурную сумму в виде

$$Q_n(f) = h \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{1}{2} f(a + 2\pi) \right),$$

то (2) предстанет, как составная формула трапеций. Таким образом, при интегрировании 2π-периодических функций по промежутку длиной 2π составные формулы прямоугольников и трапеций имеют наивысшую тригонометрическую степень точности.

С интегрированием периодических функций связана *квадратурная формула Мелера*, к рассмотрению которой мы сейчас переходим.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} f(x)\,dx$$

и сделаем в нём замену переменной $x = \cos\theta$. Тогда получим

$$I = \int_0^\pi f(\cos\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta)\, d\theta$$

(мы учли чётность подынтегральной функции). Для вычисления последнего интеграла применим составную формулу средних прямоугольников с $2n$ узлами, эта формула точна для тригонометрических полиномов порядка не выше $2n-1$. Тогда получим

$$I \approx \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f(\cos\theta_k),$$

где $\theta_k = -\pi + (2k-1)\pi/(2n)$. Узлы $\cos\theta_k$ этой квадратурной формулы удовлетворяют равенствам $\cos\theta_{n+1-k} = \cos\theta_k$, так как $\theta_{n+1-k} = -\theta_k$. Поэтому сумма первых n слагаемых в квадратурной сумме совпадает с суммой последних n, и заменяя квадратурную сумму на удвоенную сумму последних n слагаемых и учитывая, что $\theta_{n+k} = (2k-1)\pi/(2n)$, окончательно получаем

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right).$$

Эта квадратурная формула и называется формулой Мелера.

Если функция f есть полином степени не выше $2n-1$, то функция $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $2n-1$, и тогда примененная для вычисления интеграла от этой функции составная формула прямоугольников с $2n$ узлами даёт точный результат. Поэтому формула Мелера точна для всех полиномов степени не выше $2n-1$ и является таким образом формулой гауссова типа с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Узлы этой формулы — корни полинома Чебышева $T_n(x)$, как и должно быть в формулах гауссова типа, поскольку полиномы Чебышева ортогональны с рассматриваемым весом (см. задачу 1 в предыдущем параграфе; кстати, по этой причине рассматриваемый вес называется чебышевским). А вот тот факт, что у формулы гауссова типа с чебышевским весом все коэффициенты одинаковы, нетривиален.

Задача 1. Найти коэффициент в представлении остаточного члена формулы Мелера в форме Лагранжа.

Задача 2*. Указать все составные квадратурные формулы (число промежутков, на которые разбит промежуток интегрирования, $N \geq 2$), которые являются интерполяционными.

[* §6. Приближение линейных функционалов. Оценка погрешности

Заметим, что в этой и предыдущей главах уже рассматривались задачи приближения линейных функционалов: приближение значения функции в некоторой точке значением в этой точке интерполяционного полинома, аналогичная задача численного дифференцирования, приближение интеграла квадратурной суммой.

В этом параграфе мы рассмотрим принадлежащий Пеано метод оценки погрешности приближения линейных функционалов, заданных на пространстве функций.

*Эта задача относится не к данному параграфу, но ко всей главе.

Пусть F — линейный функционал, определённый на некотором линейном множестве функций, заданных и непрерывных на промежутке $[a,b]$, и $\tilde{F}$ — другой такой функционал, причём $\tilde{F}f$ рассматривается как приближение к Ff. Положим $Rf = Ff - \tilde{F}f$. Задача состоит в оценке Rf при некоторых предположениях о функционале R и функции f. Но предварительно мы докажем две леммы.

Пусть $\Phi(x,t)$ непрерывная функция, заданная на квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Введем функции одной переменной $\varphi_x(t) = \Phi(x,t)$ (мы буде писать также $\varphi_x = \Phi(x,\cdot)$). Ввиду равномерной непрерывности функции Φ семейство функций $\{\varphi_x\}$ обладает следующими свойствами. 1) При $x \to x_0$ $\|\varphi_x - \varphi_{x_0}\|_{C[a,b]} \to 0$. 2) Функции этого семейства равностепенно непрерывны, т.е. по всякому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $|t' - t''| < \delta$ *для всех* функций семейства влечет за собой неравенство $|\varphi_x(t') - \varphi_x(t'')| < \varepsilon$.

Будем обозначать через $Q_N f$ квадратурные суммы формулы средних прямоугольников:

$$Q_N f = h\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j), \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad t_j = jh + \frac{h}{2}.$$

Лемма 1. *При $n \to \infty$ имеет место равномерная по x сходимость $Q_N\varphi_x$ к соответствующим интегралам:*

$$\left\| Q_N(\varphi_x) - \int_a^b \varphi_x(t)\,dt \right\|_{C[a,b]} \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме о среднем для любых x, N и j найдется такая точка $\tau_j \in [t_j, t_{j+1}]$, что

$$\int_{a+jh}^{a+(j+1)h} \varphi_x(t)\,dt = h\varphi_x(\tau_j),$$

и тогда

$$\int_a^b \varphi_x(t)\,dt - Q_n\varphi_x = h\sum_{j=0}^{N-1}\bigl(\varphi_x(\tau_j) - \varphi_x(t_j)\bigr),$$

причем $|\tau_j - t_j| \le h/2$. Остается по заданному $\varepsilon > 0$, используя равностепенную непрерывность функций φ_x, выбрать N настолько большим, чтобы из неравенства $|t' - t''| \le h/2$ при всех x следовало $|\varphi_x(t') - \varphi_x(t'')| < \varepsilon/(b-a)$ ■

З а м е ч а н и е 1. Доказанная лемма является частным случаем общей теоремы: если последовательность линейных функционалов в банаховом пространстве слабо сходится к некоторому функционалу, то эта сходимость равномерна на любом компактном множестве.

Лемма 2. *Пусть $k \ge 0$ — целое число, R — линейный функционал, заданный на множестве $C^{(k)}[a,b]$ k раз непрерывно дифференцируемых функций и удовлетворяющий условию: для всех $f \in C^{(k)}$ $|Rf| \le C(\|f\|_C + \|f^{(k)}\|_C)$. Пусть непрерывная функция $u(x,t)$ $(x,t \in [a,b])$ k раз непрерывно дифференцируема по x, и функция $g(x)$ задается равенством*

$$g(x) = \int_a^b u(x,t)\,dt.$$

Тогда

$$Rg = \int_a^b U(t)\,dt, \quad \text{где} \quad U(t) = Ru(\,\cdot\,, t).$$

Доказательство. Положим $S_N(x) = Q_N(u_x) = Q_N\big(u(x,\,\cdot\,)\big)$. Как легко видеть,

$$RS_N = R\left(h\sum_{j=0}^{N-1} u(x,t_j)\right) = h\sum_{j=0}^{N-1} Ru_x(t_j) = Q_N(U). \tag{1}$$

Применяя лемму 1 к функции $\Phi(x,t) = u(x,t)$ и функции $\Phi(x,t) = \partial^k u(x,t)/\partial x^k$, мы получим, что $\|S_N - g\|_C \to 0$ и $\|S_N^{(k)} - g^{(k)}\|_C \to 0$. Поэтому ввиду наложенного на функционал R условия $RS_N \to Rg$. Остается совершить предельный переход в левой и правой части равенства (1). ■

Теорема. *Пусть m — натуральное число и на линейном множестве $\mathcal{D} \subseteq C[a,b]$ определен линейный функционал R, удовлетворяющий условиям:*

1) $\mathcal{D} \supseteq C^{m-1}$ и для всех $f \in C^{(m-1)}$ $|Rf| \le C(\|f\|_C + \|f^{(m-1)}\|_C)$,

*2) R обращается в нуль на всех полиномах степени не выше m ($Rp_m = 0$ для всех $p_m \in \mathbb{P}_m$) *.*

Пусть функция f $m+1$ раз непрерывно дифференцируема. Тогда

$$Rf = \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)\,dt,$$

где

$$K_m(t) = R\big(k_m(\,\cdot\,, t)\big), \qquad k_m(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{m!}(x-t)^m & \text{при } t \le x, \\ 0 & \text{при } t > x. \end{cases}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора для представления функции f: $f(x) = p_m(x) + r_m(x)$, где

$$\begin{aligned} p_m(x) =& f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m, \\ r_m(x) =& \int_a^b k_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Поскольку $Rp_m = 0$, то $Rf = Rr_m$. Для завершения доказательства остаётся воспользоваться леммой 2, положив $u(x,t) = k_m(x,t) f^{(m+1)}(t)$. ■

Замечание 2. Условия теоремы можно несколько ослабить, в частности, в отношении непрерывности $f^{(m+1)}$.

Замечание 3. Интегральное представление погрешности Rf можно было бы получить, используя формулу Тейлора с исходной точкой не a, а любой другой из промежутка $[a,b]$. Нетрудно убедиться, что ядро $K_m(t)$ получилось бы при этом тем же самым — K_m инвариантно относительно выбора этой точки.

*Заметим связь этого условия с понятием алгебраической степени точности квадратурных формул.

Следствие 1. *В условиях теоремы справедливы оценки:*

$$|Rf| \le C_1 \|f^{(m+1)}\|_C, \qquad C_1 = \int_a^b |K_m(t)|\,dt,$$

$$|Rf| \le C_2 \|f^{(m+1)}\|_{L_2}, \qquad C_2 = \sqrt{\int_a^b (K_m(t))^2\,dt},$$

$$|Rf| \le C_3 \|f^{(m+1)}\|_L, \qquad C_3 = \max |K_m(t)|.$$

З а м е ч а н и е 4. Приведённые в следствии оценки являются точными в том смысле, что для первой из них

$$\sup\{\,|Rf| \;\big|\; f:\, \|f^{(m+1)}\|_C \le M\,\} = C_1 M,$$

и аналогичные равенства верны и для двух других оценок. Это сразу же следует из известных равенств для норм интегральных функционалов в соответствующих пространствах.

Следствие 2. *Для того чтобы существовала такая постоянная C, что для любой функции $f \in C^{(m+1)}$ найдётся точка $\xi \in [a,b]$, для которой $Rf = Cf^{(m+1)}(\xi)$*[†]*, необходимо и достаточно, чтобы функция $K_m(t)$ не меняла знака на промежутке $[a,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Достаточность вытекает из указанного в теореме представления Rf, если к интегралу в правой части применить теорему о среднем.

2) Необходимость докажем от противного. Если для любой функции $f \in C^{(m+1)}$ $Rf = Cf^{(m+1)}(\xi)$, то, подставляя сюда $f(x) = x^{m+1}$, мы получим, что

$$C = \int_a^b K_m(t)\,dt.$$

Но тогда

$$\sup\{\,|Rf| \;\big|\; f:\, \|f^{(m+1)}\|_C \le 1\,\} = |C| < C_1,$$

что противоречит равенству, указанному в замечании к следствию 1. ■

Следствие 3. *Пусть ν — натуральное число. Тогда для того, чтобы для всех многочленов $p_{m+\nu}$ степени не выше $m+\nu$ выполнялось равенство $Rp_{m+\nu} = 0$, необходимо и достаточно чтобы функция K_m была ортогональна всем многочленам степени $\nu - 1$, т.е. для любого $p_{\nu-1} \in \mathbb{P}_{\nu-1}$ выполнялось равенство*

$$\int_a^b K_m(t) p_{\nu-1} u(t)\,dt = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Приведённые выше оценки погрешности приближения значения функционала F значением функционала $\tilde{F}$ на той же функции позволяют использовать для такой

[†] т.е. чтобы остаточный член Rf приближенной формулы $Ff \approx \tilde{F}f$ имел представление в форме Лагранжа.

оценки не только производную функции максимально возможного порядка (в случае квадратурных формул — порядка на единицу больше алгебраической степени точности), которая у заданной функции может не существовать, но и производные меньших порядков, а также не через максимум модуля такой производной, а через какую-либо другую норму. Приведём некоторые примеры.

Пример 1. В §6 первой главы погрешность формулы численного дифференцирования

$$F(f) = f'(0) \approx \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \tilde{F}(f)$$

оценивалась через максимум модуля третьей производной функции f. Получим теперь оценку через L_2-норму той же производной. У нас $a = -h$, $b = h$, $m = 2$,

$$k_2(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-t)^2 & \text{при } t \le x, \\ 0 & \text{при } t > x, \end{cases}$$

$$F\big(k_2(\,\cdot\,,t)\big) = (k_2(x,t))'_x(0) = \begin{cases} -t & \text{при } t \le 0, \\ 0 & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$$\tilde{F}\big(k_2(\,\cdot\,,t)\big) = \frac{k_2(h,t) - k_2(-h,t)}{2h} = \frac{1}{4h}(h-t)^2.$$

Отсюда легко получаем

$$K_2(t) = R\big(k_2(\,\cdot\,,t)\big) = -\frac{1}{4h}\begin{cases} (t+h)^2 & \text{при } t \le 0, \\ (t-h)^2 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Как и должно быть согласно следствию 2 (существует представление остатка через $f'''(\xi)$), ядро K_2 знакопостоянно. Вычислим интеграл

$$\int_{-h}^{h} \big[K_2(t)\big]^2 dt = 2\int_0^h \big[K_2(t)\big]^2 dt = \frac{1}{8h^2}\int_0^h (h-t)^4 dt = \frac{h^3}{40}.$$

Получаемая отсюда оценка очевидным образом переносится на произвольную точку дифференцирования a:

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \right| \le \frac{h\sqrt{h}}{2\sqrt{10}} \sqrt{\int_{a-h}^{a+h} \big(f'''(t)\big)^2 dt}.$$

Заметим, что в этой оценке совсем не обязательно требовать, чтобы третья производная функции f была непрерывной, достаточно, чтобы вторая была абсолютно непрерывной, а третья принадлежала $L_2(a-h, a+h)$.

Пример 2. Получим оценку погрешности квадратурной формулы Симпсона через максимум второй производной. Алгебраическая степень точности этой формулы равна трём, и классическое представление остаточного члена содержит четвёртую производную, но мы будем предполагать, что подынтегральная функция дифференцируема лишь дважды, и потому положим $m = 1$. Итак, формула Симпсона:

$$F(f) = \int_0^1 f(t)\,dt \approx \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = \tilde{F}(f).$$

При $m = 1$

$$k_1(x,t) = \begin{cases} x - t & \text{при } t \le x, \\ 0 & \text{при } t > x, \end{cases} \quad F\bigl(k_1(\,\cdot\,,t)\bigr) = \int_0^1 k_1(x,t)\,dx = \frac{1}{2}(1-t)^2,$$

и поскольку

$$k_1(0,t) = 0, \quad k_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} - t & \text{при } t \le \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad k_1(1,t) = 1 - t,$$

то

$$K_1(t) = \frac{1}{6} \begin{cases} t(3t-1) & \text{при } t \le \frac{1}{2}, \\ (1-t)(2-3t) & \text{при } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

График этого ядра симметричен относительно прямой $t = 1/2$ (т.е $K_1(1-t) = K_1(t)$) и само это ядро ортогонально полиномам первой степени, как и должно быть согласно следствию 3. Теперь мы имеем:

$$R(f) \le C\|f''\|_C, \quad \text{где} \quad C = \int_0^1 |K_1(t)|\,dt = \frac{1}{81}.$$

Остановимся ещё на вопросе, как связаны оценки остатка подобных и составных квадратурных формул с оценками остатка исходной формулы через различные нормы производных. Итак, пусть для квадратурной формулы

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} A_k g(t_k) + R(g)$$

известны оценки остатка:

$$\begin{aligned} &a) \quad |R(g)| \le C_1 \|g^{(m)}\|_{C[0,1]}, \\ &b) \quad |R(g)| \le C_2 \|g^{(m)}\|_{L_2(0,1)}, \\ &c) \quad |R(g)| \le C_3 \|g^{(m)}\|_{L(0,1)}. \end{aligned}$$

Нас интересуют оценки остатка подобной формулы (поскольку существенную роль играет длина промежутка, верхний предел интеграла мы обозначим через $a + h$):

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = h \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_h(f), \quad x_k = a + t_k h$$

и составной формулы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{n} A_k f(y_j + t_k h) + R_N(f), \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad y_j = a + jh.$$

Сразу же отметим очевидные равенства:

$$\begin{aligned} &R_h(f) = hR(g), \quad \text{где} \quad g(t) = f(a + th), \\ &R_N(f) = \sum_{j=0}^{N-1} R_h(f_j), \quad \text{где} \quad f_j = f\,\Big|_{[y_j, y_j+h]}. \end{aligned}$$

В случае подобной формулы используем равенство $g^{(m)}(t) = h^m f^{(m)}(a+th)$, что даёт

$$|R_h(f)| \le C_1 h^{m+1} \|f^{(m)}\|_{C[a,b]},$$

$$|R_h(f)| \le C_2 h^{m+1} \sqrt{\int_0^1 \big(f^{(m)}(a+th)\,\big)^2\,dt} = C_2 h^{m+1/2} \|f^{(m)}\|_{L_2(a,a+h)},$$

$$|R_h(f)| \le C_3 h^{m+1} \int_0^1 |f^{(m)}(a+th)|\,dt = C_3 h^m \|f^{(m)}\|_{L(a,a+h)}.$$

Перейдём к составным формулам.

$$|R_N(f)| \le C_1 h^{m+1} \sum_{j=0}^{N-1} \|f_j^{(m)}\|_{C[y_j,y_j+h]} \le C_1 N h^{m+1} \|f^{(m)}\|_{C[a,b]} = C_1 (b-a) h^m \|f^{(m)}\|_{C[a,b]}.$$

Далее,

$$|R_N(f)| \le C_2 h^{m+1/2} \sum_{j=0}^{N-1} \|f_j^{(m)}\|_{L_2(y_m,y_m+h)}.$$

Здесь

$$\sum_{j=0}^{N-1} \|f_j^{(m)}\|_{L_2(y_j,y_j+h)} \le \sqrt{N} \cdot \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} \|f_j^{(m)}\|^2_{L_2(y_j,y_j+h)}} = \sqrt{N}\,\|f^{(m)}\|_{L_2(a,b)}$$

и потому

$$|R_N(f)| \le C_2 \sqrt{b-a}\, h^m \|f^{(m)}\|_{L_2(a,b)}.$$

Наконец,

$$|R_N(f)| \le C_3 h^m \sum_{j=0}^{N-1} \|f_j^{(m)}\|_{L(y_j,y_j+h)} = C_3 h^m \|f^{(m)}\|_{L(a,b)}.$$

Задача 1. Получить представление остаточного члена формулы численного дифференцирования (4) (§ 6 главы 1) методом, изложенным в этом параграфе.

Задача 2. Пусть $0 < h < \pi$ и для $u \in C[0,h]$ $\;Q(u;t) = a\cos x + b\sin x$ — решение интерполяционной задачи $Q(u;0) = u(0)$, $Q(u;h) = u(h)$. Найти ядро $K(y,t)$, такое что для любой функции $u \in C^{(2)}[0,h]$ имеет место представление остатка интерполяции

$$R_y(u) = u(y) - Q(u;y) = \int_0^h K(y,t)\big(u''(t) + u(t)\big)\,dt.$$

Задача 3. В условиях предыдущей задачи показать существование такой функции $C(y)$, что для любых $u \in C^{(2)}[0,h]$ и $y \in [0.h]$ найдётся такая точка $\xi \in [0,h]$, что остаток интерполяции представим в виде $R_y(u) = C(y)\big(u''(\xi) + u(\xi)\big)$. Найти эту функцию $C(y)$. ***]**

[* § 7. Оценка погрешности квадратурной формулы трапеций в периодическом случае

Как было показано в § 5, при вычислении интеграла от 2π-периодической функции по промежутку длинны 2π формула трапеций имеет наивысшую тригонометрическую степень точности. Однако, если использовать оценку погрешности этой формулы, пригодную и для непериодических функций, то при любой гладкости интегрируемой функции мы установим сходимость квадратурной суммы к интегралу лишь с быстротой $\mathcal{O}(n^{-2})$, где n число узлов. В этом параграфе будет показано, что для периодических функций убывание погрешности может быть существенно быстрее.

Итак, мы рассматриваем формулу трапеций, выбрав в качестве промежутка интегрирования (который в периодическом случае безразличен) $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{2}f(x_n)\right) = Q_n(f).$$

Здесь $h = 2\pi/n$, $x_k = kh$. Для периодической функции $f(x_n) = f(2\pi) = f(x_0)$, и мы перепишем квадратурную сумму, используя это равенство, и введем обычное обозначение для погрешности:

$$Q_n(f) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \qquad R_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx - Q_n(f).$$

Для оценки $R_n(f)$ мы будем применять идею метода Пеано, изложенного в предыдущем параграфе. Непериодическая функция восстанавливается по своей производной порядка r с точностью до полинома степени $r-1$, и в методе Пеано использовалось интегральное представление инвариантной относительно таких полиномов части представления функции через производную. В периодическом случае дело обстоит иначе. Полином — непериодическая функция, и периодическая функция восстанавливается по своей производной любого порядка с точностью до постоянного слагаемого. С этого мы и начнем. Обозначим через $\tilde{C}^{(r)}$ множество r раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций.

Лемма 1. *Функция $f \in \tilde{C}^{(r)}$ имеет интегральное представление*

$$f(x) = a_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_r(t-x)\, f^{(r)}(t)\,dt,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \quad -$$

нулевой коэффициент Фурье, а

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^r} & \text{при } r = 2m \text{ четном},\\ (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^r} & \text{при } r = 2m+1 \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что при $r \geq 2$ ряды, которыми представляются функции φ_r, сходятся равномерно, а при $r = 1$ по меньшей мере в L_2. Функция f разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье. Обозначим через $\sigma_n(f;x)$ частные суммы этого ряда:

$$\sigma_n(f;x) = a_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\, f(t)\,dt.$$

Считая для определенности $r = 2m$ четным и произведя r-кратное интегрирование по частям в написанном интеграле, дифференцируя f и интегрируя первый множитель, и учитывая, что ввиду периодичности все внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, мы придем к равенству

$$\sigma_n(f;x) = a_0 + \frac{(-1)^m}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k(t-x)}{k^r}\, f^{(r)}(t)\, dt.$$

Для завершения доказательства остается перейти к пределу при $n \to \infty$, учитывая, что ряд Фукье функции f сходится к ней равномерно, а под знаком интеграла стоит частная сумма ряда, сходящегося по меньшей мере в $L_2(0, 2\pi)$. ■

Лемма 2. *При натуральном ν выполняются равенства:*

$$Q_n(\sin \nu x) = 0,$$
$$Q_n(\cos \nu x) = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } \nu/n = j \text{ - целое,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно вычислить величину $Q_n(e^{i\nu x})$ и разделить вещественную и мнимую части.

$$Q_n(e^{i\nu x}) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\nu x_k} = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \nu k/n} = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k,$$

где $q = e^{2\pi i\nu/n}$. Если ν не делится на n, то тогда $q \neq 1$ и последняя сумма равна $(1-q^n)/(1-q) = 0$, так как $q^n = 1$. Если же $\nu = nj$, то $q = 1$ и эта сумма есть n. ■

Далее мы ограничимся случаем $r \geq 2$, и потому функция φ_r непрерывна.

Лемма 3. *Если $f \in \tilde{C}^{(r)}$, то*

$$R_n(f) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q_n\big(\varphi_r(t - \,\cdot\,)\big)\, f^{(r)}(t)\, dt.$$

Доказательство. Формула трапеций точна для постоянных, и по этой причине $R_n(f) = R_n(f - a_0)$. Так как интеграл от $f - a_0$ равен нулю, то

$$\begin{aligned} R_n(f) = -Q_n(f - a_o) = -Q_n\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t - \,\cdot\,) f^{(r)}(t)\, dt\right) = \\ = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Q_n\big(\varphi_r(t - \,\cdot\,)\big)\, f^{(r)}(t)\, dt \end{aligned}$$

(мы воспользовались леммой 2 из предыдущего параграфа). ■

Теорема. *Для функции $f \in \tilde{C}^{(r)}$ справедлива оценка*

$$|R_n(f)| \leq \frac{C_r}{n^r}\, \|f^{(r)}\|_{\tilde{C}}, \quad \text{где } C_r = 2\int_0^{2\pi} |\varphi_r(t)|\, dt.$$

Здесь $\|f^{(r)}\|_{\tilde{C}} = \max|f^{(r)}(x)|$.

Доказательство для чётных и нечётных r почти не отличается, и мы для определенности будем считать $r = 2m$ чётным. Тогда

$$\varphi_r(t-x) = (-1)^m \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos kt \, \cos kx}{k^r} + \frac{\sin kt \, \sin kx}{k^r} \right]$$

и, учитывая лемму 2,

$$Q_n\big(\varphi_r(t - \,\cdot\,)\big) = \frac{(-1)^m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^r} \, Q_n(\cos kx).$$

Опять обратимся к лемме 2. В последней сумме отличны от нуля лишь те слагаемые, для которых $k = nj$, и переходя от суммирования по k к суммированию по j, имеем

$$Q_n\big(\varphi_r(t - \,\cdot\,)\big) = (-1)^m \frac{2}{n^r} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jnt}{j^r},$$

и как следствие леммы 3 получаем:

$$R_n(f) \le \frac{2}{n^r} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jnt}{j^r} \right| dt \cdot \|f^{(r)}\|_{\tilde{C}}.$$

Подынтегральная функция здесь имеет период $2\pi/n$, и потому сам этот интеграл равен умноженному на n интегралу по промежутку $[0, 2\pi/n]$. Делая в этом последнем интеграле замену переменной $t = \tau/n$, мы придем к доказываемой оценке. ■

Замечание. То обстоятельство, что при фиксированном n и $r \to \infty$ коэффициент, стоящий при $\|f^{(r)}\|_{\tilde{C}}$ в доказанной оценке, стремится к нулю, не должно вызывать недоумения. Если f есть тригонометрический полином порядка не выше $n-1$, то $R_n(f) = 0$ (см. § 5). Если же функция $f \in \tilde{C}^{(r)}$ отлична от таких полиномов, то, как можно показать, при некоторой постоянной $c > 0$ $\|f^{(r)}\|_{\tilde{C}} \ge cn^r$.

Задача 1. Доказать высказанное в последнем замечании утверждение.

Задача 2. Показать, что при $t \in (0, 2\pi)$ $\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(t - \pi)$.

Задача 3. Доказать формулу дифференцирования: $\varphi'_{r+1} = -\varphi_r$. Показать, что на промежутке $(0, 2\pi)$ φ_r есть алгебраический полином степени r[*]. *]

[*]Эти полиномы лишь линейной заменой переменной и постоянным множителем отличаются от известных полиномов Бернулли.