Chair of Math. Analysis, SPb. State University. A.V.Potepun, 2011

Исследование сходимости несобственных интегралов

Методические указания для решения задач

А. В. Потепун

Как известно (см. [1], глава III, §7), если функция f непрерывна на промежутке $[a, b)$ (здесь a — конечное, $a < b \leqslant +\infty$) и F — ее первообразная, то *несобственный интеграл* от f на промежутке $[a, b)$ определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-0} F(x) - F(a) \tag{1}$$

если указанный предел, конечный или бесконечный (определенного знака) существует. Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*; если же $\int_a^b f(x)\,dx = \pm\infty$ или предел не существует, то интеграл *расходится*. По поводу подынтегральной функции, непрерывной на $[a, b)$, принято говорить, что она имеет особенность в точке b. Аналогично определяется несобственный интеграл и для функции f, имеющей особенность в точке a, т. е. непрерывной на промежутке $(a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x) \tag{2}$$

(здесь $-\infty \leqslant a < b < +\infty$). Обе формулы (1) и (2) можно записать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \tag{3}$$

(подстановку $x = a$ или $x = b$ нужно понимать, как вычисление соответствующего предела). Если же f непрерывна на интервале

(a, b), за исключением, может быть, конечного числа его точек (эти точки вместе с концами интервала (a, b) мы называем особенными для f), то мы разбиваем интервал (a, b) на конечное число промежутков так, что в каждом из них функция f имеет *только одну особенность* (на одном из концов). Например, если $a < c < b$ и a, c, b — особые точки для f, то вставляем произвольные точки между a и c и между c и b:

$$a < d_1 < c < d_2 < b$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ тогда определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{d_1} f + \int\limits_{d_1}^{c} f + \int\limits_{c}^{d_2} f + \int\limits_{d_2}^{b} f$$

если сумма интегралов справа имеет смысл (каждый из несобственных интегралов в правой части формулы имеет особенность только на левом или на правом конце). Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся, если сходятся *все* интегралы в правой части формулы, и расходящимся, если *хоть один* из интегралов справа расходится.

Пример 1. *Доказать, что интеграл* $\int\limits_0^\infty \frac{(1-x^2)\ln x}{(x^2+1)^2}dx$ *сходится, и вычислить его.*

Решение. Для вычисления первообразной применим формулу интегрирования по частям:

$$\int \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\ln x\,dx = \int u\,dv, \quad \text{где} \quad u = \ln x,\ dv = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx.$$

Разлагая функцию $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ на простейшие дроби и интегрируя их, получим:

$$v = \int \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{x^2+1} + C \qquad (\text{можно взять } C = 0).$$

Тогда

$$\int \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\ln x\,dx = \int \ln x\,d\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x\ln x}{x^2+1} - \int \frac{x}{x^2+1}d(\ln x)$$
$$= \frac{x\ln x}{x^2+1} - \int \frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x\ln x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x + C.$$

Подынтегральная функция имеет особые точки в нуле (поскольку $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$) и в бесконечности. Поэтому исходный интеграл сходится, если сходятся $\int\limits_0^1 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \ln x\, dx$ и $\int\limits_1^\infty \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \ln x\, dx$.

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0+} F(x)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. Применяя правило Лопиталя, получим: $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$, тогда $\lim\limits_{x\to 0+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{x\ln x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x\right) = 0$ и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \ln x\, dx$ сходится.

Снова по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{\ln x}{x}}{1+1/x^2} - \operatorname{arctg} x\right) = -\frac{\pi}{2}$ и интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \ln x\, dx$ сходится. Тогда исходный интеграл сходится и

$$\int\limits_0^\infty \frac{(1-x^2)\ln x}{(x^2+1)^2} dx = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty = F(1) - \lim_{x\to 0+} F(x) + \lim_{x\to\infty} F(x) - F(1) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to 0+} F(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

В тех случаях, когда первообразная не выражается через элементарные функции, вычисление предела $F(x)$ в особых точках становится невозможным. Тогда для вычисления интеграла используются различные приближенные методы. Но для применения этих методов необходимо установить сходимость интеграла, не используя первообразную. В случае, если подынтегральная функция сохраняет постоянный знак, используют признаки сравнения (см. [1], стр. 126).

Пример 2. *Найти все значения p, при которых сходится интеграл* $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p-1}}$.

Решение. Особые точки — это $-\infty$ и корни уравнения $|x|^p = 1$. Если $p = 0$, то это верно для любого x, поэтому подынтегральная функция нигде не определена и интеграл не имеет смысла. Если же $p \neq 0$, то $|x|^p = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1$. Поэтому исследуем сходимость

интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p - 1}}, \qquad \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p - 1}}, \qquad \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p - 1}}.$$

I) Пусть $p < 0$. Тогда при $|x| > 1$ будет $|x|^p - 1 < 0$ и подынтегральная функция на промежутке $(-\infty, -2)$ — отрицательна. Поэтому рассмотрим интеграл от функции $(-f)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{-2} -\frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p - 1}} = \int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - |x|^p}}.$$

При исследовании сходимости несобственных интегралов часто бывает полезно сделать замену переменной. Если функция $x = \varphi(t)$ строго монотонна на промежутке (α, β), непрерывна на нем вместе со своей производной, $\lim\limits_{t \to \alpha+0} \varphi(t) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta-0} \varphi(t) = b$ и функция f непрерывна на (a, b), то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt \tag{4}$$

(интегралы в формуле (4) сходятся или расходятся одновременно, см. [1], стр. 131–132). В нашем интеграле — единственная особая точка $-\infty$, в этом случае, как правило, удобна замена $t = -x \iff x = -t$. Тогда $x = -2 \iff t = 2$, $x \to -\infty \iff t \to \infty$, $dx = -dt$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - |x|^p}} = \int\limits_{\infty}^{2} \frac{-dt}{\sqrt[3]{1 - t^p}} = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{1 - t^p}}.$$

При $p < 0$ $\lim\limits_{t \to \infty} t^p = 0$, поэтому $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - t^p}} = 1$, $\int\limits_{2}^{\infty} \mathbf{1}\, dt = +\infty$, и по второму признаку сравнения интеграл $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{1 - t^p}}$ расходится, а тогда исходный интеграл примера 2 тоже расходится.

II) Пусть $p > 0$. Снова рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p - 1}} = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^p - 1}}.$$

При $p > 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} t^p = \infty$, $\quad t^p - 1 \sim t^p$ (эквивалентны как бесконечно большие при $t \to \infty$), а подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt[3]{t^p-1}} \sim \frac{1}{t^{p/3}}$. Интеграл $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dt}{t^{p/3}}$ сходится при $\frac{p}{3} > 1$ (см. [1], стр. 124) и расходится при остальных p, а тогда по второму признаку сравнения интеграл $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^p-1}}$ тоже сходится только при $p > 3$.

III) Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p-1}}$. Он имеет конечную особую точку -1 на правом конце промежутка. В случае конечной особой точки $x = b$ и положительной подынтегральной функции удобна замена $t = b - x$, она переводит особую точку в 0 и промежуток интегрирования будет справа от нуля. В нашем случае

$$t = -1 - x \Longleftrightarrow x = -1 - t, \quad x = -2 \Longleftrightarrow t = 1, \quad x = -1 \Longleftrightarrow t = 0,$$
$$|x| = |-1-t| = 1 + t, \quad dx = -dt \quad \text{и}$$
$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p - 1}} = \int\limits_{1}^{0} \frac{-dt}{\sqrt[3]{(1+t)^p - 1}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt[3]{(1+t)^p - 1}}.$$

По формуле Тейлора $(1+t)^p = 1 + pt + O(t^2)$ $(t \to 0)$, поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1+t)^p - 1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{pt + O(t^2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{p + O(t)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{p}}.$$

Интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}$ сходится, поэтому и $\int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt[3]{(1+t)^p-1}}$ сходится при любом p.

IV) Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p-1}}$. При $p > 0$ подынтегральная функция отрицательна (поскольку $|x|^p < 1$ при $|x| < 1$). Поэтому рассматриваем интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-|x|^p}}$. В случае, когда в интеграле

$\int_a^b f(x)\,dx$ особая точка $x = a$ и $f \geqslant 0$, для применения признаков сравнения удобно бывает сделать замену $t = x - a$. При этом особая точка перейдет в 0 и новый промежуток интегрирования будет находиться справа от нуля. В нашем случае

$$t = x + 1 \Longleftrightarrow x = -1 + t, \quad x = -1 \Longleftrightarrow t = 0, \quad x = 0 \Longleftrightarrow t = 1,$$

$$dx = dt, \quad |x| = |-1+t| = 1 - t, \quad \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-|x|^p}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt[3]{1-(1-t)^p}}.$$

По формуле Тейлора $(1-t)^p = 1 - pt + O(t^2) \quad (t \to 0)$, поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-(1-t)^p}} = \frac{1}{\sqrt[3]{pt - O(t^2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{t}\cdot\sqrt[3]{p - O(t)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{t}\cdot\sqrt[3]{p}}.$$

Аналогично случаю (III) получим, что $\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{1-(1-t)^p}}$ сходится при любом p.

В итоге $\Big(\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p-1}}$ сходится только при $p > 3$, $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p-1}}$ и $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p-1}}$ сходятся при любом $p\Big)$ получим, что $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|^p-1}}$ сходится при $p > 3$ и расходится при остальных p.

Пример 3. *Исследовать сходимость* $\int\limits_1^\infty \big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x^2\big)dx$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x^2 = \frac{\pi}{2}$, оба интеграла $\int\limits_1^\infty \operatorname{arctg} x^2 dx$ и $\int\limits_1^\infty \frac{\pi}{2}\,dx$ расходятся. Однако отсюда нельзя сделать вывод о расходимости исходного интеграла (в отличие от случая, когда разбивается промежуток интегрирования). Здесь необходимо рассматривать интеграл, не разделяя его на части. Поскольку $\operatorname{arctg} x^2 < \frac{\pi}{2}$, подынтегральная функция положительна.

Найдем функцию $g(x) = \frac{1}{x^p}$ такую, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$ и конечен. Если $p > 0$, то по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x^2}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2x}{1+x^4}}{-px^{-p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{p-2}}{p\left(\frac{1}{x^4}+1\right)} = 1 \text{ при } p = 2.$$

Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится, поэтому по второму признаку сравнения и интеграл $\int\limits_1^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x^2\right) dx$ сходится.

Пример 4. *Исследовать сходимость интеграла* $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x\, dx}{(x-1)^p}$.

Решение. Особые точки: $x = 1$ и $x = \infty$. Рассмотрим, при каких p сходятся интегралы $\int\limits_1^2 \frac{\ln x\, dx}{(x-1)^p}$ и $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x\, dx}{(x-1)^p}$.

I) В интеграле $\int\limits_1^2 \frac{\ln x\, dx}{(x-1)^p}$ делаем замену переменной $t = x - 1$ (особая точка $x = 1$ переходит в 0):

$$x = 1 + t, \quad x = 1 \Longleftrightarrow t = 0, \quad x \to +\infty \Longleftrightarrow t \to +\infty, \quad \text{поэтому}$$

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x\, dx}{(x-1)^p} = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+t)\, dt}{t^p}.$$

$$\ln(1+t) \sim t, \quad \frac{\ln(1+t)}{t^p} \sim \frac{1}{t^{p-1}} \quad (t \to 0).$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{p-1}}$ сходится при $p-1 < 1$ (т. е. при $p < 2$) и расходится при остальных p, поэтому $\int\limits_1^2 \frac{\ln x\, dx}{(x-1)^p}$ тоже сходится только при $p < 2$ (второй признак сравнения).

II) При $x \to \infty$ функция $\ln x$ — бесконечно большая, но не эквивалентна никакой степенной функции, поэтому в интеграле $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x\, dx}{(x-1)^p}$ подынтегральная функция тоже не эквивалентна степенной функции. Тем не менее можно сравнить подынтегральную функцию со степенными, используя то, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда, поскольку $(x-1)^p \sim x^p$ $(x \to \infty)$, получим:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{(x-1)^p}}{1/x^{p-\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x^\varepsilon} \cdot \frac{x^p}{(x-1)^p} \right) = 0 \cdot 1 = 0. \qquad (*)$$

Интеграл $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^{p-\varepsilon}}$ сходится при $p-\varepsilon > 1$, т. е. при $p > 1+\varepsilon$, а тогда по

второму признаку сравнения $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x-1)^p}$ тоже сходится при $p > 1+\varepsilon$. Поскольку ε в равенстве $(*)$ может быть сколь угодно малым (хотя и больше нуля), число $1+\varepsilon$ может быть сколь угодно близким к 1 (оставаясь больше 1). Отсюда делаем вывод, что интеграл $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x-1)^p}$ сходится при *любом* $p > 1$.

Отметим, что если $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (во втором признаке сравнения), то из сходимости $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)\,dx$, а не *одновременная* сходимость или расходимость интегралов $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ (в отличие от случая $0 < \lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$). Поэтому из оценки $(*)$ мы получили, что интеграл сходится при $p > 1$, но *не доказали его расходимости* при остальных p (сравните с предыдущими примерами, где сходимость и расходимость доказывались одновременно).

Для доказательства расходимости $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x-1)^p}$ при $p \leqslant 1$ заметим, что $\ln x \geqslant \ln 2$ при $x \geqslant 2$. Получаем:

$$\int\limits_2^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x-1)^p} \geqslant \ln 2 \int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^p} = +\infty \text{ при } p \leqslant 1.$$

Поэтому $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x-1)^p}$ тоже расходится при $p \leqslant 1$.

Объединяя результаты в (I) и (II), получаем, что $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x-1)^p}$ сходится при $1 < p < 2$ и расходится при остальных значениях p.

Сформулируем следствия из второго признака сравнения, полезные при доказательстве *расходимости* несобственных интегралов:

Если $f(x),\ g(x) > 0$ *на* $[a,b)$, $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, *то из расходимости* $\int_a^b f(x)\,dx$ *следует расходимость* $\int_a^b g(x)\,dx$ (в самом деле, если бы $\int_a^b g(x)\,dx$ сходился, то по 2-му признаку, сходился бы и $\int_a^b f(x)\,dx$). *Если же* $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, *то из расходимости* $\int_a^b g(x)\,dx$ *следует расходимость* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Пример 5. *Исследовать сходимость интеграла* $\int\limits_0^\infty \frac{(1+2\cos x)\,dx}{(2+\sin x)e^{\sqrt{x}}}$.

Решение. Подынтегральная функция принимает значения разных знаков в любой окрестности особой точки $+\infty$. Поэтому нельзя применять признаки сравнения ни к исходному интегралу, ни к интегралу от функции $(-f)$. Тем не менее можно использовать признаки сравнения, применяя их к интегралу от функции $|f|$, поскольку имеет место теорема (см. [2], гл. XVII, п° 286): если $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то и $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится (в этом случае говорят, что $\int_a^b f(x)\,dx$ *абсолютно сходится*).

Итак, исследуем сходимость $\int\limits_0^\infty \left|\frac{1+2\cos x}{(2+\sin x)e^{\sqrt{x}}}\right| dx$. Для любого $x \in \mathbb{R}$ $|1+2\cos x| \leqslant 1+2|\cos x| \leqslant 3$, $\quad |2+\sin x| \geqslant 2-|\sin x| \geqslant 1$ (чтобы оценить дробь сверху, числитель нужно оценить сверху, а знаменатель — снизу). Тогда

$$\left|\frac{1+2\cos x}{(2+\sin x)e^{\sqrt{x}}}\right| \leqslant \frac{3}{e^{\sqrt{x}}}, \quad \int\limits_0^\infty 3e^{-\sqrt{x}}dx = 3\int\limits_0^\infty e^{-t}d(t^2) = 6\int\limits_0^\infty te^{-t}dt$$

(в интеграле сделали замену переменной $x = t^2$ $(t > 0)$, при этом $x = 0 \Longleftrightarrow t = 0$, $\quad x \to +\infty \Longleftrightarrow t \to +\infty$).

Еще один прием вычисления и исследования сходимости несобственных интегралов — интегрирование по частям. Если функции $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$, $v'(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-0} u(x)v(x)$, то интегралы $\int_a^b u\,dv$ и $\int_a^b v\,du$ сходятся или расходятся одновременно и имеет место формула

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx \tag{5}$$

Интегрируем по частям:

$$\int\limits_0^\infty te^{-t}dt = \int\limits_0^\infty t\,d(-e^{-t}) = -te^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^\infty e^{-t}dt =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}(-te^{-t}) + 0 + (-e^{-t})\Big|_0^{+\infty} = 1 \quad (\text{поскольку } \lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0).$$

Получили: $\int\limits_0^\infty 3e^{-\sqrt{x}}dx$ сходится, тогда и $\int\limits_0^\infty \left|\frac{1+2\cos x}{(2+\sin x)e^{\sqrt{x}}}\right| dx$ сходится (по первому признаку сравнения), а тогда и $\int\limits_0^\infty \frac{(1+2\cos x)\,dx}{(2+\sin x)e^{\sqrt{x}}}$ сходится.

Пример 6. *Исследовать, при каких p сходится* $\int\limits_3^\infty \frac{\cos x\,dx}{(\ln x)^p}$.

Решение. Попробуем оценить $|f|$ сверху и исследовать сходимость $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{(\ln x)^p}$. При $p \leqslant 0$ и $x \geqslant 3$ $(\ln x)^p \leqslant 1$, поэтому $\frac{1}{(\ln x)^p} \geqslant 1$. Интеграл $\int\limits_3^\infty \mathbf{1}\,dx$ расходится, поэтому и $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{(\ln x)^p}$ расходится (это следует из первого признака сравнения: если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то и $\int_a^b g(x)\,dx$ расходится).

При любых $p > 0$ и $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^\varepsilon}\right)^p = 0$ (см. пример 4), поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1/(\ln x)^p}{1/x^{p\varepsilon}} = +\infty$. Для любого $p > 0$ существует ε такое, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{p}$. Тогда $p\varepsilon < 1$ и интеграл $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^{p\varepsilon}}$ расходится, а тогда, по следствию из второго признака сравнения (см. пример 4) и $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{(\ln x)^p}$ расходится. В этом случае никаких выводов о сходимости или расходимости исходного интеграла сделать нельзя. Если интеграл от $|f|$ сходится, то и интеграл от f сходится; но если интеграл от $|f|$ расходится, необходимо применять более тонкие признаки, например, признак из [2], гл. XVII, п° 287: если функции f, g непрерывны на $[a, b)$ и выполнены условия:

1) для любого $A \in [a, b)$ $\left|\int\limits_a^A f(x)\,dx\right| \leqslant K$ (K не зависит от A);

2) функция g монотонна на $[a, b)$;

3) $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$

то интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится. В нашем случае монотонной будет функция $1/(\ln x)^p$, поэтому положим

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = 1/(\ln x)^p.$$

Проверяем условия:

1) $\left|\int\limits_3^\infty \cos x\,dx\right| = \left|\sin A - \sin 3\right| \leqslant \left|\sin A\right| + \left|\sin 3\right| \leqslant 2$ при любом A;

2) $\dfrac{1}{(\ln x)^p}$ монотонна на промежутке $[3, +\infty)$ при любом p;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(\ln x)^p} = 0$ при $p > 0$.

Поэтому $\int\limits_3^\infty \frac{\cos x\,dx}{(\ln x)^p}$ сходится при любом $p > 0$.

Признак, приведенный выше, дает только *достаточные* условия сходимости $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, поэтому при нарушении этих условий никаких выводов о сходимости или расходимости интеграла сделать нельзя. При нарушении условия $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$ можно попытаться использовать признак сходимости Больцано-Коши ([1], стр. 125; [2], глава XVII, п° 286), который дает *необходимое и достаточное* условие: для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с особой точкой b необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{x'}^{x''} f(x)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad x',\ x'' \to b-0.$$

Оценим $\int\limits_{2\pi n-\pi/2}^{2\pi n+\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(\ln x)^p}$ при $p \leqslant 0$ по теореме о среднем. Эта теорема утверждает (см. [1], гл. III, § 3):

$$\text{при} \quad g(x) \geqslant 0 \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx, \quad \text{где} \quad c \in [a,b].$$

В нашем случае положим $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^p}$, $\quad g(x) = \cos x$. При $p \leqslant 0$ $f(x)$ возрастает, поэтому $\frac{1}{(\ln x)^p} \geqslant \frac{1}{\left(\ln(2\pi n-\pi/2)\right)^p} \geqslant 1$ (так как $p \leqslant 0$ и $\ln(2\pi n - \frac{\pi}{2}) > 1$). Получаем:

$$\int\limits_{2\pi n-\pi/2}^{2\pi n+\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(\ln x)^p} = \frac{1}{(\ln c)^p}\int\limits_{2\pi n-\pi/2}^{2\pi n+\pi/2} \cos x\,dx \geqslant \frac{2}{\left(\ln(2\pi n-\pi/2)\right)^p} \geqslant 2.$$

При $n \to \infty$ $\ 2\pi n - \frac{\pi}{2} \to \infty$ и $2\pi n + \frac{\pi}{2} \to \infty$, но интеграл по промежуткам вида $[2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$ не стремится к 0. Условие Больцано-Коши не выполнено, поэтому интеграл $\int\limits_3^\infty \frac{\cos x\,dx}{(\ln x)^p}$ расходится при $p \leqslant 0$.

Пример 7. *Исследовать, при каких p сходится* $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x+1/x)}{x^p}dx$.

Решение. Особые точки — это 0 и ∞, поэтому исследуем сходимость интегралов на промежутках $(0,1]$ и $[1,\infty)$. По теореме сложения

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x+1/x)}{x^p}dx = \int\limits_1^\infty \frac{\sin x\cos(1/x)+\cos x\sin(1/x)}{x^p}dx.$$

Используем второй признак из [2], гл. XVII, п° 287, который формулируется так: если функции f, g непрерывны на $[a,b)$ и выполнены условия:

1) интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится;
2) функция g монотонна на $[a,b)$;
3) для любого $x\in[a,b)$ $\quad |g(x)|\leqslant L$ (L не зависит от x)

то интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

I) Положим $f(x)=\frac{\sin x}{x^p}$, $g(x)=\cos\frac{1}{x}$. Тогда интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^p}$ сходится при $p>0$ $\Big(\Big|\int\limits_1^A \sin x\,dx\Big|\leqslant 2$, функция $\frac{1}{x^p}$ монотонна на $[1,\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^p}=0$ — используем 1-й признак$\Big)$.

Функция $g(x)=\cos\frac{1}{x}$ возрастает на $[1,\infty)$, поскольку $g'(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}>0$ при $x\in[1,\infty)$ и $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$. По второму признаку, $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}dx$ сходится при $p>0$.

II) Аналогично доказываем, что $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x\sin(1/x)}{x^p}dx$ сходится при $p>0$ $\big($положим $f(x)=\frac{\cos x}{x^p}$, $g(x)=\sin\frac{1}{x}\big)$.

Тогда

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x\cos\frac{1}{x}+\cos x\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx = \int\limits_1^\infty \frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx + \int\limits_1^\infty \frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$$

сходится при $p>0$.

III) Расходимость этого интеграла при $p\leqslant 0$ доказываем, используя критерий Больцано-Коши (см. предыдущий пример). Оценим $\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi/2} \frac{\sin x\cos(1/x)+\cos x\sin(1/x)}{x^p}dx$ по теореме о среднем. Положим

$g(x) = \frac{\cos(1/x)}{x^p}$, $f(x) = \sin x$. Функции $\cos\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^p}$ возрастают на промежутке $[2\pi n, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$ (поскольку $p \leqslant 0$) и $\sin x \geqslant 0$. Поэтому

$$g(x) \geqslant \frac{\cos(1/2\pi n)}{(2\pi n)^p} \geqslant \cos\frac{1}{2\pi n}$$

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi/2} \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}dx \geqslant \cos\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi/2} \sin x\,dx \geqslant \cos\frac{1}{2\pi}.$$

$$\text{Поскольку}\quad \frac{\cos x\sin(1/x)}{x^p} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \left[2\pi n, 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi/2} \frac{\sin x\cos(1/x) + \cos x\sin(1/x)}{x^p}dx \geqslant \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi/2} \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}dx \geqslant \cos\frac{1}{2\pi}.$$

При $n \to \infty$ $\quad 2\pi n \to \infty$ и $2\pi n + \frac{\pi}{2} \to \infty$, но интеграл по промежуткам вида $[2\pi n, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$ не стремится к 0. Условие Больцано-Коши не выполнено, поэтому $\int\limits_1^\infty \frac{\sin(x+1/x)}{x^p}dx$ расходится при $p \leqslant 0$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin(x+1/x)}{x^p}dx$ и сделаем замену переменной $x = \frac{1}{t} \Longleftrightarrow t = \frac{1}{x}$. Тогда

$$x \to +0 \Longleftrightarrow t \to +\infty,\ x = 1 \Longleftrightarrow t = 1,\ dx = -\frac{1}{t^2}dt,\ x + \frac{1}{x} = \frac{1}{t} + t.$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin(x+1/x)}{x^p}dx = \int\limits_\infty^1 \frac{\sin(t+1/t)}{1/t^p}\cdot\left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int\limits_1^\infty \frac{\sin(t+1/t)}{t^{2-p}}dt.$$

Получили интеграл, рассмотренный в п° I, поэтому он сходится тогда и только тогда, когда $2 - p > 0 \Longleftrightarrow p < 2$. В итоге исходный интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x+1/x)}{x^p}dx$ сходится при $0 < p < 2$ и расходится при остальных p.

Пример 8. *Исследовать сходимость интеграла* $\int\limits_2^\infty \frac{x\sin(e^x)\,dx}{x+\sin(e^x)}$.

Решение. Применить какой-либо из признаков, использованных в примерах 6 и 7, к этому интегралу нельзя, поскольку при напрашивающемся разложении на множители

$$f(x) = \sin(e^x), \quad g(x) = \frac{x}{x + \sin(e^x)}$$

функция $g(x)$ не монотонна ни на одном промежутке вида $[a, \infty)$. Поэтому рассмотрим "близкую" (эквивалентную исходной при $x \to \infty$) функцию $\sin(e^x)$. Получим:

$$\frac{x\sin(e^x)}{x+\sin(e^x)} = \sin(e^x) - \frac{\sin^2(e^x)}{x+\sin(e^x)}. \tag{1}$$

Исследуем сходимость интегралов

$$\int\limits_2^\infty \sin(e^x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_2^\infty \frac{\sin^2(e^x)\,dx}{x+\sin(e^x)}.$$

К первому из них применим 1-й признак из [2], п° 287:

$$\int\limits_2^\infty \sin(e^x)\,dx = \int\limits_{e^2}^\infty \frac{\sin t\,dt}{t} \quad (\text{сделали замену } e^x = t \Longleftrightarrow x = \ln t)$$

Этот интеграл сходится $\Big(\big|\int\limits_{e^2}^A \sin t\,dt\big| \leqslant 2$, функция $\frac{1}{t}$ монотонна и стремится к $0\Big)$. Во втором интеграле сделаем ту же замену:

$$\int\limits_2^\infty \frac{\sin^2(e^x)\,dx}{x+\sin(e^x)} = \int\limits_{e^2}^\infty \frac{\sin^2 t\,dt}{t(\ln t+\sin t)}.$$

Подынтегральная функция положительна, поэтому можно использовать признаки сравнения. Поскольку $\sin^2 t$ колеблется от 0 до 1, невозможно подобрать эквивалентную степенную функцию и придется использовать 1-й признак сравнения.

1) Оценим подынтегральную функцию сверху. Для этого оценим знаменатель снизу:

$$\ln t + \sin t \geqslant \ln t - 1, \qquad \frac{\sin^2 t}{t(\ln t+\sin t)} \leqslant \frac{1}{t(\ln t-1)}$$

$$\int\limits_{e^2}^\infty \frac{dt}{t(\ln t-1)} = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x\big|_1^\infty = +\infty \text{ (сделали замену } x = \ln t - 1).$$

Поскольку интеграл от мажорирующей функции *расходится*, никаких выводов об исходном интеграле сделать нельзя.

2) Оценим подынтегральную функцию снизу. Получим:

$$\ln t + \sin t \leqslant \ln t + 1 \quad \text{(знаменатель оценили сверху)}$$

$$\frac{\sin^2 t}{t(\ln t + \sin t)} \geqslant \frac{\sin^2 t}{t(\ln t + 1)} = \frac{1 - \cos 2t}{2t(\ln t + 1)} \tag{2}$$

$$\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dt}{2t(\ln t + 1)} = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{2(x+1)} = \frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_2^{\infty} = +\infty \quad \text{(расходится).}$$

$\left|\int\limits_{e^2}^{A} \cos 2t\, dt\right| = \left|\frac{\sin 2t}{2}\Big|_{e^2}^{A}\right| \leqslant 1$, функция $\frac{1}{2t(\ln t+1)}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{2t(\ln t+1)} = 0$, поэтому интеграл $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{\cos 2t\, dt}{2t(\ln t+1)}$ сходится. В итоге интеграл $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{1-\cos 2t}{2t(\ln t+1)} dt$ *расходится* (если бы он сходился, то сходился бы и $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dt}{2t(\ln t+1)} = \int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{1-\cos 2t}{2t(\ln t+1)} dt + \int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{\cos 2t\, dt}{2t(\ln t+1)}$ — сумма сходящихся интегралов).

Таким образом, по 1-му признаку сравнения (используем неравенство (2))

$$\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{\sin^2 t\, dt}{t(\ln t + \sin t)} \qquad \text{расходится.}$$

Получили: $\int\limits_{2}^{\infty} \sin(e^x)\, dx$ сходится, $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\sin^2(e^x)\, dx}{x+\sin(e^x)} = \int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{\sin^2 t\, dt}{t(\ln t+\sin t)}$ расходится, а тогда $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x\sin(e^x)\, dx}{x+\sin(e^x)}$ *расходится* (см. равенство (1) — рассуждение такое же, как для $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{1-\cos 2t}{2t(\ln t+1)} dt$).

Литература

1. Вулих Б.З., Коломойцева З.Д., Сафронова Г.П. Математический анализ (учебное пособие для заочников). Л., 1970.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т. II. М., 1956.