Лектор **А.Н.Подкорытов**

Программа экзамена по математическому анализу.

151, 153 группы. Весна 2016 года.

Знание вопросов, помеченных знаком !, НЕОБХОДИМО для сдачи экзамена. Знание вопросов, помеченных знаком $*$, необходимо лишь для получения оценки "отлично". В вопросах, помеченных знаками !$*$, первый знак относится к формулировке, а второй — к доказательству.

1! Первообразная, описание множества всех первообразных. Неопределённый интеграл.

2. Линейность первообразной, замена переменной и интегрирование по частям.

3! Таблица первообразных.

4. Плоские фигуры и площадь.

5! Определение интеграла от непрерывной функции. Его простейшие свойства: неотрицательность, умножение на (-1), интегрирование постоянной функции. Аддитивность определённого интеграла.

6! Монотонность интеграла, его двусторонняя оценка, оценка абсолютной величины и теорема о среднем.

7! Теорема Барроу об интеграле с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница.

8! Линейность определённого интеграла, интегрирование по частям и замена переменной.

9$*$ Вычисление интегралов $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$. Формула Валлиса.

10! Формула Тейлора с интегральным представлением остатка. Представление остатка по Лагранжу.

11$*$ Приближённое вычисление и иррациональность числа e.

12. Равномерная непрерывность функции — определение и примеры. Модуль непрерывности функции.

13. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции нескольких переменных.

14! Дробление промежутка, его ранг и оснащение. Интеграл как предел интегральных сумм.

15. Кусочно непрерывные функции и их интегрирование.

16$*$ Теорема о погрешности формулы трапеций (включая случай равномерного дробления).

17. Формула Эйлера – Маклорена. Поведение сумм $1^p + 2^p + \ldots + n^p$ при $n \to \infty$ для $p > -1$.

18. Поведение сумм $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$. Константа Эйлера.

19!$*$ Формула Стирлинга для факториала.

20! Аддитивные функции промежутка — определение, примеры и теорема о плотности.

21. Вычисление площади криволинейного сектора и объёма тела вращения (вокруг осей OX и OY).

22! Путь в $\mathbb{R}^2$, его координатные функции. Длина пути, спрямляемые пути. Аддитивность длины пути.

23!$*$ Вычисление длины гладкого пути. Длина графика гладкой функции.

24. Носитель пути, простой путь и кривая. Теорема о двух параметризациях кривой.

25! Длина кривой, вычисление длины с помощью полярных координат.

26. Работа переменной силы вдоль пути.

27. Масса, статические моменты и центр масс неоднородного прямолинейного стержня.

28. Масса, статические моменты и центр масс однородной плоской кривой.

29! Определение несобственного интеграла. Примеры $\int_0^\infty a^x dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$, $\int_{\to 0}^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^p x}\,dx$.

30. Линейность, интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле.

31! Критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. Теорема сравнения, следствия из неё (включая замену функции на эквивалентную).

32. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы.

33. Признак Дирихле сходимости интегралов вида $\int_a^{\to b} fg$, их оценка. Тригонометрические интегралы.

34. Признак Абеля сходимости несобственных интегралов.

35. Критерий Больцано – Коши сходимости несобственного интеграла (сходимость в себе).

36! Числовой ряд, его сумма, сходимость, остаток. Линейность суммы ряда.

37! Исследование сходимости рядов $\sum q^n$, $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$, $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

38$*$ Пример — перестановка слагаемых может изменить сумму ряда.

39! Необходимое условие сходимости ряда.

40! Критерий сходимости неотрицательного ряда. Теорема сравнения. Замена слагаемых на эквивалентные.

41. Теорема об абсолютно сходящихся рядах.

42! Интегральный признак Коши. Обобщённый гармонический ряд.

43. Связь абсолютно сходящихся рядов с неотрицательными. Перестановка слагаемых.

44! Признак Коши сходимости неотрицательного ряда. Следствия.

45. Признак Даламбера для положительных рядов.

46. Преобразование Абеля конечных сумм и рядов.

47! Признак Дирихле сходимости рядов вида $\sum a_n b_n$. Тригонометрические ряды.

48. Признак Лейбница. Оценка суммы.

49* Исследование абсолютной сходимости тригонометрических рядов.

50. Предел последовательности в $\mathbb{C}$ — определение, связь с покоординатной сходимостью, линейность.

51! Определение и основные свойства рядов с комплексными членами (линейность суммы, необходимое условие сходимости, абсолютно сходящиеся ряды).

52. Перестановка слагаемых в неотрицательных, вещественных и комплексных рядах.

53* Лемма и теорема о расстановке скобок в числовом ряде.

54* Суммирование группами в неотрицательном, вещественном и комплексном рядах.

55* Теорема о неотрицательном повторном ряде. Следствие о вещественном и комплексном рядах.

56!* Перемножение неотрицательных рядов по правилу Коши.

57. Перемножение вещественных и комплексных рядов по правилу Коши.

58! Определение ряда Тейлора. Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

59! Разложения экспоненты, синуса и косинуса в ряды Тейлора.

60! Разложение логарифмической функции в ряд Тейлора.

61!* Разложение степенно́й функции в ряд Тейлора.

62! Определение степенного ряда. Лемма Абеля. Круг и радиус сходимости. Радиусы сходимости рядов

$$\sum z^n,\ \sum \tfrac{z^n}{n^2},\ \sum \tfrac{z^n}{n},\ \sum z^n n!,\ \sum (\tfrac{z}{n})^n,\ \sum (nz)^n,\ \sum \big(3+2(-1)^n\big)^n z^n.$$

63!* Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.

64. Лемма о радиусе сходимости формально продифференцированного степенного ряда.

65!* Теорема о почленном дифференцировании суммы степенного ряда.

66! e^z, $\cos z$, $\sin z$ на $\mathbb{C}$. Формулы Эйлера. Геометрическое истолкование e^{x+iy}. Дифференцирование e^z, $\cos z$, $\sin z$ и формулы для $e^{z\pm w}$, $\cos(z\pm w)$, $\sin(z\pm w)$.

67* Определение бесконечного произведения. Простейшие свойства и примеры.

68* Лемма о сходимости вещественных произведений. Следствие о связи с неотрицательными рядами.

69* Лемма о конечном произведении — оценки величин $\left|\prod_{k=1}^n (1+z_k)\right|$ и $\left|\prod_{k=1}^n (1+z_k)-1\right|$.

70* Теорема об абсолютно сходящихся бесконечных произведениях.

71! Пространство $\mathbb{R}^m$, арифметические операции, норма, неравенство треугольника, скалярное произведение, неравенство Коши. Шары в $\mathbb{R}^m$. Двусторонняя оценка нормы вектора через его координаты. Ограниченные множества, связь с покоординатной ограниченностью.

72! Внутренние, внешние и граничные точки множества. $\operatorname{Int}(E)$, ∂E. Открытые и замкнутые множества. Теорема об объединениях и пересечениях открытых и замкнутых множествах.

73! Предел последовательности в $\mathbb{R}^m$ — определение и простейшие свойства.

74. Описание замкнутых множеств с помощью последовательностей.

75. Принцип выбора в $\mathbb{R}^m$.

76! Компактные множества — определение и теорема об описании (доказательство $I \Rightarrow II \Rightarrow III$).

77!* Компактные множества — определение и теорема об описании (доказательство $III \Rightarrow I$).

78! Точка сгущения и предел отображения евклидовых пространств — определения и основные свойства.

79! Непрерывные отображения. Классы $C\big(E;\mathbb{R}^n\big)$, $C(E)$. Теорема о непрерывном образе компактного множества. Теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях нескольких переменных.

80. Теорема Кантора о равномерной непрерывности в многомерном случае.

81. Линейные отображения — определение, матричное представление, оценка.

82. Определение и свойства нормы линейного отображения.

83! Определение дифференцируемого отображения. Дифференциал. Частный случай — функция нескольких переменных. Непрерывность дифференцируемого отображения. Дифференцируемость отображения и его координатных функций. Матрица Якоби и градиент. Примеры.

84. Линейность дифференцирования. Дифференцирование композиции. Необходимое условие дифференцируемости обратного отображения.

85! Частные производные функции нескольких переменных по независимым переменным и по фиксированному направлению. Необходимое условие дифференцируемости. Вычисление градиента и матрицы Якоби. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных ("правило цепочки").

86. Теорема о геометрическом смысле градиента.

87. Дифференцируемость и частные производные — достаточное условие.

88! Теорема Ферма для функций нескольких переменных.