ЗАДАЧИ (I семестр).

1. Пусть $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция, $y_k = x_{\omega(k)}$. Доказать, что если $x_n \to L \in \widehat{\mathbb{R}}$, то $y_k \to L$.
2. Пусть $y_n = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Доказать, что если $x_n \to L \in \mathbb{R}$, то $y_n \to L$.
3. То же самое в случае, когда $L = +\infty$ $(-\infty)$.
4. Пусть $y_n = (x_1 + 2x_2 \cdots + n\,x_n)/(1 + 2 + \cdots + n)$. Доказать, что если $x_n \to L \in \mathbb{R}$, то $y_n \to L$.
5. Доказать, что из всякой последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность.
6. Пусть $x_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$. Доказать, что
   а) 1 есть частичный предел этой последовательности (т.е. предел некоторой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$);
   б) $1/2$ есть частичный предел этой последовательности.
7. Доказать, что если множество частичных пределов последовательности содержит интервал (a, b), то точки a и b также частичные пределы.
8. Пусть L_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — частичные пределы некоторой последовательности. Доказать, что если $L_n \to L$, то L также частичный предел.
9. Пусть числовые последовательности $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ таковы, что $|a_{n+p} - a_n| \leqslant b_n$ при всех $n, p \in \mathbb{N}$. Доказать, что если $\inf_n b_n = 0$, то последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ фундаментальна.
10. Доказать, что в теореме о характеристике предела функции на языке последовательностей достаточно рассматривать монотонные последовательности (рассмотреть односторонние пределы).
11. Пусть g — возрастающая функция, заданная на некотором интервале, $h(x) = \lim_{t\to x-} g(t)$. Доказать, что функция h непрерывна слева.
12. Доказать, что непрерывная на (произвольном) промежутке взаимно однозначная функция строго монотонна.
13. Пусть непрерывная функция $f : [0, 1] \to [0, 1]$ удовлетворяет условию $f(f(x)) = x$ при всех $x \in [0, 1]$. Доказать, что эта функция строго монотонна. Описать все такие возрастающие функции. Построить убывающую функцию f, отличную от $1 - x$.
14. Найти все непрерывные функции, удовлетворяющие одному из условий
   $$|f(x)| = |x| \quad (x \in \mathbb{R}) \ \text{ или } \ x^2 + f^2(x) = R^2 \quad (|x| \leqslant R).$$
   Есть ли разрывные функции, удовлетворяющие этим условиям?
15. Опираясь на теорему Ферма, доказать, что производная дифференцируемой на $[a, b]$ функции f обращается в нуль, если $f'(a) \cdot f'(b) < 0$.
16. Существует ли такая дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция f, что $f(x) \geqslant 1$ и $f'(x) \geqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$?
17. Пусть P и Q — произвольные полиномы. Предположим, что $a > 1$ — простой корень уравнения $P(x) = 0$. Рассмотрим "возмущенное" уравнение $x^n P(x) + Q(x) = 0$. Требуется доказать, что оно имеет корень в произвольно малой окрестности точки a, если n достаточно велико.
18. Доказать, что всякая функция из класса $C^1([a, b])$ есть сужение функции из $C^1(\mathbb{R})$. Доказать, что сужение можно считать ограниченным. Обобщить на функции класса C^r при $r > 1$.
19. Построить ограниченную на полуоси $[0, +\infty)$ функцию класса $C^2(\mathbb{R})$, которая совпадала бы на $(-\infty, 0]$ с заданным полиномом (например, с $1 + x + 2x^2 + 3x^3$.)
20. Пусть определенная на $< a, b >$ функция f дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) \neq 0$. Доказать, что функция $g(x) = (f(x) - f(x_0))(x - x_0)$ имеет в точке x_0 строгий экстремум.
21. Доказать, что при $|x| \leqslant 1$ справедливо неравенство $e^x \leqslant 1 + x + x^2$.
22. Пусть $p > 1$. Доказать, что при $x > -1$ справедливо обобщенное неравенство Бернулли $(1 + x)^p \geqslant 1 + px$ (равенство возможно лишь при $x = 0$). Что будет при $p < 1$?
23. Найти производную в нуле функции $x \mapsto f(x) = xe^{ax}/(e^x - 1)$, $f(0) = 1$.
24. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ и
   $$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} \quad \text{при} \quad x \neq 0.$$
   Доказать, что эта функция
   а) имеет пределы при $x \to 0$, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ и найти их;
   б) дифференцируема в нуле при условии, что мы положим $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.
   Найти $f'(0)$.
25. Исходя из разложений для $\sin x$ и $\cos x$, найти полином Маклорена пятой степени для $\operatorname{tg} x$.
26. До какого порядка совпадают производные в нуле у функций f, g, если $f \in C^\infty(-1, 1)$, а $g(x) = f(x)(1 + x^{10})^{-1}$?
27. Найти полином Маклорена пятой степени для функции $f(x) = e^{\sin x}$.
28. Найти полином Маклорена шестой степени для функции $f(x) = \ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)$.
29. Доказать, что все корни полинома $[(x^2 - 1)^n]^{(n)}$ содержится в интервале $(-1, 1)$.
30. Доказать, что при рациональном r числа e^r, $\sin r$, $\cos r$ иррациональны.