

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Группы 141-144, МОиАИС, 1-й семестр, 2011/2012 уч. год

Лекторы О.Л.Виноградов, Б.М.Макаров

1. Множества и операции над ними.
2. Аксиомы вещественных чисел.
3. Метод математической индукции. Бином Ньютона.
4. Существование максимума и минимума конечного множества, следствия.
5. Целая часть числа. Плотность множества рациональных чисел.
6. Две теоремы о "бедности" счетных множеств.
7. (!) Теорема об объединении не более чем счетных множеств (с леммой).
8. (!) Счетность множества рациональных чисел.
9. (!) Несчетность отрезка.
10. (!) Определение предела последовательности, его единственность. Ограниченность сходящейся последовательности.
11. (!) Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой последовательности.
12. (!) Бесконечно малые. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.
13. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Норма, порожденная скалярным произведением.
14. Неравенства Коши – Буняковского в \mathbb{R}^m . Сходимость и покомпонентная сходимость.
15. Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия над бесконечно большими.
16. Свойства открытых множеств. Открытость шара. Внутренность.
17. (!) Предельные точки. Связь открытости и замкнутости. Свойства замкнутых множеств. Замыкание.
18. Открытость и замкнутость относительно пространства и подпространства.
19. Компактность относительно пространства и подпространства.
20. (!) Компактность, замкнутость и ограниченность.
21. Две леммы о подпоследовательностях.
22. Лемма о вложенных параллелепипедах. Компактность куба.
23. (!) Характеристика компактов в \mathbb{R}^m . Принцип выбора.
24. (!) Сходимость и сходимости в себе. Полнота \mathbb{R}^m .
25. (!) Теорема о стягивающихся отрезках. Существование точной верхней границы.
26. (!) Предел монотонной последовательности.
27. (!) Неравенство Я.Бернулли, $\lim z^n$, число e .
28. Верхний и нижний пределы последовательности.
29. (!) Равносильность определений предела отображения по Коши и по Гейне.
30. (!) Простейшие свойства отображений, имеющих предел (единственность предела, локальная ограниченность, арифметические действия).
31. (!) Предельный переход в неравенстве для функций. Теорема о сжатой функции.
32. (!) Предел монотонной функции.
33. Критерий Больцано – Коши для функций.
34. (!) Непрерывность. Точки разрыва и их классификация, примеры.
35. Арифметические действия над непрерывными отображениями. Стабилизация знака непрерывной функции.
36. Непрерывность и предел композиции.
37. Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов.
38. (!) Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях, следствия.
39. (!) Теорема Больцано – Коши о непрерывных функциях.
40. Сохранение промежутка (с леммой о характеристике промежутков). Сохранение отрезка.
41. Теорема Больцано – Коши о непрерывных отображениях.
42. Разрывы и непрерывность монотонной функции.
43. (!) Существование и непрерывность обратной функции.
44. Степень с произвольным показателем.
45. Свойства показательной функции и логарифма.
46. Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций.
47. (!) Замечательные пределы.
48. Замена на эквивалентную при вычислении пределов.
49. (!) Определение дифференцируемости, дифференциала и производной. Необходимое условие дифференцируемости. Теорема об условиях дифференцируемости функции. Односторонние производные.
50. Определение касательной к множеству. Единственность касательной. Теорема о касательной к графику дифференцируемой функции.
51. Дифференцирование суммы, произведения и частного.

52. (!) Теорема о дифференцировании суперпозиции.
53. Теорема о дифференцировании обратной функции. Вычисление производных функций $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$.
54. (!) Теорема Ферма.
55. (!) Теорема Ролля.
56. (!) Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений.
57. (!) Теорема Коши. Геометрический смысл теоремы Коши (касательная к графику параметрически заданной функции).
58. Правило Лопиталя (доказательство для неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Следствие о пределе производной. Разрывы производной.
59. Теорема о пределе $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x}$, где $p > 0$, $a > 1$. Следствия.
60. (!) Теоремы об условиях постоянства и монотонности функции.
61. Теорема об условиях строгой монотонности дифференцируемой функции.
62. (!) Определение локального экстремума. Теорема о необходимых условиях экстремума.
63. (!) Теорема о достаточных условиях экстремума.
64. Обобщенное неравенство Бернулли. Неравенства $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ при $x > -1$, $x \neq 0$.
65. Производные высших порядков. Правило Лейбница.
66. Классы C^r ($0 \leq r \leq \infty$). Сохранение класса гладкости при арифметических действиях и суперпозиции. Гладкость обратной функции.
67. Пример ненулевой финитной функции класса $C^\infty(\mathbb{R})$ (с леммой).
68. (!) Определение и единственность полинома Тейлора.
69. (!) Теорема Пеано о виде полинома Тейлора функции, n раз дифференцируемой в данной точке.
70. (!) Вычисление многочленов Маклорена для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^p$.
71. (!) Многочлены Тейлора для производной и первообразной. Вычисление многочленов Маклорена для функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$.
72. Вычисление многочлена Маклорена для $\arcsin x$.
73. (!) Теорема об остаточном члене формулы Тейлора по Лагранжу.
74. Схема приближенного вычисления и иррациональность числа e .
75. Достаточные условия экстремума (с использованием производных высших порядков).
76. Характеристика кратности корня многочлена с помощью производных высшего порядка.
77. Производная векторнозначной функции, ее механический и геометрический смысл. Формулы дифференцирования скалярного и векторного произведений.
78. Теорема о движении материальной точки в центральном силовом поле.

ПРИМЕЧАНИЕ.

Особо важные вопросы программы помечены знаком (!). Знание этих вопросов (в частности, формулировок соответствующих теорем) НЕОБХОДИМО для получения положительной отметки.

При сдаче экзамена необходимо также владение техникой дифференцирования, знание формул Маклорена для основных элементарных функций и умение исследовать точки, подозрительные на экстремум.

АДРЕС САЙТА КАФЕДРЫ МАТ. АНАЛИЗА:

<http://www.math.spbu.ru/analysis/members/makarov/students.html>