

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ

(1-й семестр, 2021/23 г.)

А. А. Лодкин

1. ! Инъективность, сюръективность, биективность отображения. Обратное отображение, композиция отображений.
2. !!! Аксиома полноты. \sup и \inf . Свойства.
3. ! Определение множества \mathbb{N} . Его неограниченность. Принцип Архимеда.
4. Плотность \mathbb{Q} в \mathbb{R} .
5. ! Теорема о вложенных отрезках.
6. ! Эквивалентные множества. Конечные, счётные и несчётные множества. Примеры.
7. Счётность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и \mathbb{Q} .
8. Несчётность множества \mathbb{R} .
9. !!! Окрестности. Точки сгущения. Различные определения предела.
10. Расширенная числовая прямая. Пределы в $\overline{\mathbb{R}}$.
11. !! Предел последовательности.
12. Свойства предела (единственность, ограниченность, локальность).
13. Свойства предела (предельный переход в неравенстве, стабилизация знака, принцип двух полицейских).
14. ! Бесконечно малые и их свойства. Бесконечно большие. Арифметические операции над пределами.
15. ! Предел монотонной функции и последовательности.
16. Приближенное вычисление \sqrt{A} .
17. ! Число e .
18. Определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей).
19. ! Принцип выбора Больцано – Вейерштрасса.
20. ! Сходимость в себе, принцип сходимости Больцано – Коши.
21. !!! Непрерывность функции, виды разрывов.
22. ! Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях. Примеры.
23. Разрывы монотонной функции.
24. ! Теоремы о монотонной функции на промежутке.
25. Определение и свойства функции «корень».
26. Показательная функция (экспонента).
27. Логарифмическая и степенная функции.
28. ! Символы O , o , \sim . Различные формы записи замечательных пределов.
29. ! Теорема Вейерштрасса.
30. ! Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

31. Задачи, приводящие к понятию производной.
32. ! Дифференцируемость функции, связь с наличием производной и непрерывностью. Дифференциал. Примеры.
33. Свойства дифференцируемых функций. Дифференцируемость суммы, произведения, частного.
34. ! Дифференцируемость суперпозиции и обратной функции.
35. ! Таблица производных.
36. ! Теоремы Ферма́ и Рóбля.
37. ! Теоремы Коши и Лагранжа.
38. ! Производные и монотонность.
39. Признак строгой монотонности.
40. Доказательство неравенств.
41. ! Правила Лопиталя.
42. ! Многочлен Тейлора. Формула Тейлора для многочлена.
43. !!! Асимптотическая формула Тейлора.
44. ! Разложение по Тейлору элементарных функций.
45. ! Условия экстремума (с применением производных первого порядка).
46. Условия экстремума (с применением производных высшего порядка).
47. ! Теорема об остатке в форме Лагранжа.
48. Выпуклость функции (геометрические факты и характеристика в терминах неравенств).
49. Неравенство Енсена.
50. ! Дифференциальные условия выпуклости.
51. ! Неравенство Гёльдера.

52. ! Первообразная и ее простейшие свойства. Неопределенный интеграл.
53. Замена переменной и интегрирование по частям. Примеры.
54. Таблица неопределенных интегралов.
55. «Берущиеся» и «неберущиеся» интегралы.

Примечание. Кроме того, необходимо разбираться в следующих вопросах, не вошедших в билеты:

Операции с высказываниями, множества и операции над ними, образ и прообраз, понятие вещественного, натурального и рационального числа, индукция, неполнота \mathbb{Q} , представимость вещественных чисел бесконечными дробями по основанию p .

Знание формулировок в вопросах, помеченных восклицательным знаком, необходимо (но не достаточно) для получения положительной оценки.

Интернет-адрес этой программы: <http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/pm/pm1-21.pdf>

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ

(прикладная математика и информатика, 2-й семестр, 2021/22 уч. г.)

А. А. Лодкин

1. Определенный интеграл Ньютона – Лейбница и его свойства. Теорема Барроу.
2. Среднее значение функции. Теорема о среднем.
3. ! Интеграл как предел интегральных сумм Римана. Некоторые формулы приближенного вычисления интеграла.
4. Интегральная форма остаточного члена формулы Тейлора.
5. Интегральные неравенства.
6. Формула Валлиса.
7. ! Аддитивная функция промежутка и её плотность. Примеры аддитивных функций.
8. Тесты на плотность.
9. ! Площадь криволинейного сектора.
10. ! Объём тела вращения.
11. Приложения интеграла к задачам механики и физики.
12. Длина пути и кривой, аддитивность длины.
13. ! Гладкий путь и вычисление его длины.
14. Геометрический смысл функций \arccos и arsh .
15. ! Несобственный интеграл для промежутков различных типов, его общие свойства.
16. ! Признак Больцано – Коши сходимости интеграла.
17. ! Свойства несобственного интеграла от положительных функций. Признаки сравнения.
18. ! Эталонные интегралы $\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{1}{x^p} dx$, $\int_1^{\rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} dx$,
19. ! Абсолютная и условная сходимость интеграла.
20. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственного интеграла.
21. ! Числовой ряд, его сумма, сходимость, остаток. Примеры.
22. Общие свойства числовых рядов. Критерий сходимости Больцано – Коши.
23. ! Положительные ряды и их свойства. Признаки сравнения.
24. ! Признак Даламбера.
25. ! Признак Коши.
26. Верхний и нижний пределы последовательности. Теорема о трех пределах.
27. Теорема о множестве частичных пределов.
28. Усиленный признак Коши.
29. Интегральный признак сходимости ряда. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
30. ! Признак Лейбница.
31. Преобразование Абеля, признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.
32. ! Группировка слагаемых.
33. ! Перестановки положительных рядов.
34. ! Перестановки абсолютно и условно сходящихся рядов.
35. Понятие о двойных и повторных рядах.

36. ! Произведение рядов. Пример (экспонента).
37. Асимптотика частичных сумм гармонического ряда. Постоянная Эйлера.
38. Формула Стирлинга (без вычисления константы).
39. Вычисление константы в формуле Стирлинга.
40. ! Основные структуры в \mathbb{R}^n (скалярное произведение, норма, метрика, топология). Покоординатный характер сходимости.
41. ! Открытые и замкнутые множества в \mathbb{R}^n .
42. ! Свойство Больцано-Вейерштрасса (секвенциальная компактность) множеств в \mathbb{R}^n .
43. Понятие полного метрического пространства. Полнота \mathbb{R}^n .
44. ! Непрерывность отображения и его координатных функций. Теоремы о непрерывных отображениях (дополнительная лекция № 28).
45. Соотношение между непрерывностью по каждому аргументу и непрерывностью по совокупности переменных.
46. ! Линейное отображение и его норма. Свойства нормы.
47. Теорема об оценке нормы линейного отображения.
48. ! Дифференцируемость отображения и её связь с непрерывностью. Покоординатный характер дифференцируемости. Существование частных производных.
49. ! Единственность линейной части приращения. Матрица Якоби. Дифференциал.
50. Свойства дифференцируемых функций и отображений.
51. ! Дифференцируемость суперпозиции. Правило цепочки.
52. Достаточное условие дифференцируемости.
53. Касательная плоскость и нормаль к поверхности $z = f(x, y)$. Касательные к кривым, лежащим на этой поверхности.
54. Признак постоянства функции в области.
55. ! Производная по вектору, градиент, связь между ними.
56. Оценка приращения дифференцируемого отображения.
57. ! Производные высших порядков. Классы C^p . Равенство смешанных производных.
58. Обобщение биномиальных коэффициентов и формулы бинома.
59. Дифференциал k -го порядка. Различные формы его записи.
60. ! Многомерная формула Тейлора.
61. ! Понятие экстремума. Необходимое условие. Пример.
62. ! Теорема о достаточном условии наличия (отсутствия) экстремума.
63. Применение критерия Сильвестра для исследования второго дифференциала. Пример решения задачи на экстремум.

Знание вопросов, помеченных знаком !, необходимо для получения удовлетворительной оценки.

Адрес этой программы в Интернете:

<http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/pm/pm2-22.pdf>

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ

(прикладная математика и информатика, 3-й семестр, 2022/23 уч. г.)

А. А. Лодкин

1. Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
2. Метод последовательных приближений Ньютона.
3. Формулировка теоремы об обратимости гладкого отображения (с мотивировкой ответа).
4. ★ Теорема о локальной обратимости.
5. ★ Теорема о дифференцируемости обратного отображения.
6. ★ Теорема о гладкости обратного отображения.
7. Гладкая зависимость корней многочлена от коэффициентов.
8. ★ Теорема о неявной функции.
9. ★ Теорема о неявном отображении.
10. ★ Функциональная зависимость семейства функций.
11. ★ Геометрический смысл ранга матрицы Якоби.
12. Эквивалентность трех способов локального задания поверхности.
13. Условные экстремумы. Определение и геометрическая мотивировка ответа.
14. ★ Теорема об условном экстремуме. Множители Лагранжа.
15. Равномерная сходимость последовательности функций. Примеры.
16. Теорема о непрерывности предельной функции.
17. Полнота пространства $C[a, b]$.
18. Предельный переход под знаком интеграла и производной.
19. Равномерная сходимость функционального ряда. Признаки равномерной сходимости (Больцано – Коши, Вейерштрасса), формулировки признаков Дирихле и Абеля.
20. Теоремы о перемене порядка операций, одна из которых — суммирование.
21. Пределы и ряды в комплексной области.
22. Область сходимости степенного ряда.
23. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда.
24. Теорема о непрерывности и дифференцируемости суммы степенного ряда.
25. Теорема об интегрировании степенного ряда. Примеры.
26. Ряд Тейлора. Две леммы. Разложение \exp , \sin , \cos , \ln .
27. Разложение степенной функции.
28. Применения степенных рядов.
29. Функции \exp , \sin , \cos комплексного аргумента. Их свойства. Формулы Эйлера.
30. Логарифм комплексного числа и его главное значение.
31. Непрерывная ветвь логарифма и корня.
32. C -дифференцируемость (голоморфность). Условия Коши – Римана. Примеры голоморфных функций.
33. Криволинейный интеграл от дифференциальной формы на плоскости. Поведение интеграла при замене параметра.
34. Точные формы и интегралы от них. Формула Ньютона – Лейбница. Криволинейные интегралы от точных форм.

35. Достаточное условие точности.
36. Замкнутые формы. Дифференциальное условие замкнутости.
37. Первообразная вдоль пути. Формула Ньютона – Лейбница.
38. Интегралы по гомотопным путям.
39. Интеграл от комплексной формы как предел римановых сумм. Оценка интеграла.
40. Теорема Коши для голоморфной функции.
41. Варианты теоремы Коши для почти голоморфной функции и для ориентированной границы компакта.
42. Интегральная формула Коши.
43. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.
44. Неравенство Коши. Целые функции, теоремы Лиувилля и Даламбера.
45. Понятие аналитической функции. Теорема Мореры. Свойства функции, эквивалентные голоморфности.
46. Теорема об исчезновении аналитической функции.
47. Изолированность нулей и теорема о продолжении тождеств. Аналитическое продолжение.
48. Теорема о среднем.
49. Гармонические функции. Восстановление голоморфной функции по ее вещественной/мнимой части.
50. Ряды Лорана: их область сходимости и свойства суммы.
51. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана в кольце.
52. Классификация изолированных особых точек.
53. Теорема Сохоцкого. Формулировка теоремы Пикара.
54. Вычет в конечной и бесконечной точках. Две теоремы о вычетах.

Примечание. Знак * означает, что сдавшие коллоквиум могут сообщить лишь формулировки, относящиеся к соответствующему вопросу, опуская доказательства.

Адрес этой программы в интернете:

<http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/students.html>

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ

IV семестр (2022/2023 уч. г.)

Специальности *фундаментальная математика, прикладная математика и информатика*

Лектор *А. А. Лодкин*

1. Дробно-линейные преобразования и их свойства. Стереографическая проекция.
2. Гидромеханические применения конформных отображений.
3. Классические односвязные области. Формулировка Теоремы Римана. Лемма о подгруппе группы автоморфизмов.
4. Автоморфизмы \mathbb{C} и $\overline{\mathbb{C}}$.
5. Автоморфизмы \mathbb{D} .
6. Основные понятия, связанные с плоскостью Лобачевского.
7. Мероморфные функции. Мероморфность рациональных и рациональность (некоторых) мероморфных функций.
8. Логарифмический вычет мероморфной функции.
9. Число нулей и полюсов. Принцип аргумента.
10. Теорема Руше.
11. Поведение голоморфной функции в окрестности кратной точки.
12. Принцип максимума модуля.
13. Лемма Шварца.
14. Теоремы об однолистных функциях.
15. Алгебра, σ -алгебра. Борелевская оболочка системы множеств.
16. Ячейки в \mathbb{R}^n , порожденная ими алгебра. Системы множеств, порождающие борелевскую σ -алгебру.
17. Мера (определение и примеры).
18. Простейшие свойства меры.
19. Непрерывность меры снизу и сверху.
20. Теорема о стандартном продолжении меры (схема построения).
21. Объём на ячейках. Определение меры Лебега.
22. Свойства меры Лебега в евклидовом пространстве. Её регулярность.
23. Инвариантность меры Лебега относительно сдвига. Измеримость образа множества при линейном отображении.
24. Постоянство коэффициента искажения меры и его вычисление для линейных отображений.
25. Измеримые функции. Их свойства.
26. Аппроксимируемость измеримой функции простыми.
27. Определение интеграла по мере.
28. Свойства интеграла от неотрицательных функций. Теорема Беппо Лёви.
29. Свойства интеграла от суммируемых функций.
30. Счетная аддитивность интеграла.
31. Абсолютная непрерывность интеграла.
32. Интеграл от комплекснозначной функции.
33. Вычисление интеграла от непрерывной функции по мере Лебега.
34. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

35. Сравнение интеграла по мере с несобственным интегралом.
36. Интеграл по дискретной мере.
37. Интеграл по мере, задаваемой плотностью.
38. Меры Лебега – Стильбеса и интегрирование по ним.
39. Пример непрерывной сингулярной меры.
40. Вероятностный смысл меры и интеграла.
41. Простейшая замена переменной в интеграле. Сведение интеграла по мере к интегралу Лебега – Стильбеса «по распределению».
42. Принцип Кавальери. Мера подграфика.
43. Сведение кратного интеграла к повторному.
44. Интеграл Эйлера – Пуассона.
45. Свертка суммируемых функций.
46. Мера образа измеримого множества при гладком отображении. Гладкая замена переменной в интеграле.
47. Сходимость по мере и почти всюду.
48. Теорема Фату.
49. Теорема Лебега об ограниченной сходимости.
50. Непрерывность интеграла по параметру. Дифференцирование и интегрирование интеграла по параметру (суммируемый случай).
51. Равномерная сходимость интеграла, зависящего от параметра. Признаки равномерной сходимости (формулировки).
52. Теоремы о несобственном интеграле с параметром (формулировки). Вычисление $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
53. Г-функция Эйлера. Ее свойства.
54. В-функция, ее вычисление.
55. Объем n -мерного шара.
56. Асимптотический метод Лапласа (лемма).
57. Метод Лапласа (теорема). Пример: формула Стирлинга для Г-функции.
58. Свойства производящих функций. Примеры.
59. Задача о числе счастливых билетов.

Примечание.

На экзамене студенту направления ПМИИ предлагаются три вопроса: задача и, в случае ее решения, два вопроса по теории. Студенты, отчитавшиеся по контрольным и домашним заданиям, от первого вопроса освобождаются.

Эту программу можно взять на странице

<http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/students/pm>

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ

(прикладная математика и информатика, 5-й семестр, 2023 г.)

А. А. Лодкин

1. Многообразия, карты, параметризации.
2. Мера k -мерного параллелепипеда в \mathbb{R}^n .
3. Определение меры простого k -многообразия.
4. Мера (Лебега) и интеграл по ней на k -поверхности. Формулы для малых размерностей. Примеры.
5. Ориентация \mathbb{R}^n и многообразия, способы ее задания.
6. Многообразия с краем и индуцированная ориентация края.
7. Кососимметрические формы. Примеры. Пространство форм и его базис.
8. Дифференциальные формы и их свойства.
9. Дифференцирование форм. Точные и замкнутые формы. Замена переменной в формах.
10. Теорема Пуанкаре.
11. Разбиение единицы в \mathbb{R}^n и на компактном множестве.
12. Интеграл от дифференциальной формы и его вид в малых размерностях.
13. Общая формула Стокса.
14. Классические интегральные теоремы.
15. Дифференцирование векторных полей: определение, правила дифференцирования и таблица производных (по пособию).
16. Соответствие между формами и векторными полями.
17. Интегральные теоремы в терминах полей.
18. Физический смысл дивергенции и ротора.
19. Точность и замкнутость формы в терминах полей (потенциальное, безвихревое, соленоидальное, несжимаемое поля).
20. Задача о несжимаемом центральном поле (по пособию).
21. Ряд Фурье по тригонометрической системе и по системе экспонент.
22. Лемма Римана – Лебега.
23. Свойства коэффициентов Фурье.
24. Ядро Дирихле.
25. Теорема Дини и ее следствия.
26. Вычисление $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
27. Теорема Фейера.
28. Изопериметрическое неравенство.
29. Задача о колебании струны.
30. Преобразование Фурье и его свойства.
31. Интегральная формула Фурье.
32. Решение уравнения теплопроводности.

Эта программа имеется на странице
<http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/pm/2020-23/>