Производные регулярных мер

Е.С. Дубцов*

Резюме. Пусть μ — положительная сингулярная мера на евклидовом пространстве. Если μ достаточно регулярна, то для всех $a \in [0, +\infty]$ производная меры μ равна a на массивном (в смысле размерности по Хаусдорфу) множестве.

1 Введение

Производные регулярных сингулярных мер на окружности

Рассмотрим вещественную борелевскую меру μ на единичной окружности $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$. Зафиксируем точку $\zeta \in \mathbb{T}$. Пусть I — произвольная дуга на окружности, а $|I|$ обозначает ее длину. Если предел

$$\lim_{\zeta \in I,\ |I| \to 0} \frac{\mu(I)}{|I|}$$

существует, то его называют производной меры μ в точке $\zeta \in \mathbb{T}$ и обозначают $\mathcal{D}\mu(\zeta)$.

Теперь предположим, что мера μ положительна и сингулярна (здесь и далее "сингулярна" подразумевает "сингулярна относительно соответствующей меры Лебега"). Настоящая работа мотивирована поиском конкретных проявлений следующего эвристического принципа:

Если сингулярность меры μ сочетается с достаточной регулярностью, то для всех $a \in [0, +\infty]$ множество

$$E_a(\mu) = \{\zeta \in \mathbb{T} : \ \mathcal{D}\mu(\zeta) = a\}$$

имеет большой размер.

Донайре и Кармона [3] получили следующую реализацию данного общего принципа. Пусть $\dim_{\mathcal{H}}$ обозначает размерность по Хаусдорфу. Тогда

$$\dim_{\mathcal{H}} E_a(\mu) = 1$$

для всех $a \in [0, +\infty]$, если положительная сингулярная мера μ удовлетворяет условию

$$\lim_{|I| \to 0} \frac{\mu(I) - \mu(I')}{|I|} = 0, \tag{1.1}$$

где I и I' обозначают произвольные *соседние* дуги. По определению дуги $I, I' \subset \mathbb{T}$ называются соседними, если они имеют общую граничную точку и $|I| = |I'|$.

*Работа поддержана грантом РФФИ No. 05-01-00924.

Отметим, что для мер, обладающих свойством (1.1), Донайре [4] также доказал более сильное утверждение о верхних и нижних производных.

Напомним, что рассуждения в статье [3] используют одну теорему Родэ о *внутренних* функциях. По определению аналитическая в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ функция f называется внутренней, если радиальные пределы $f^*(\zeta)$ удовлетворяют условию $|f^*(\zeta)| = 1$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$. Далее, аналитическая функция g принадлежит малому пространству Блоха $\mathcal{B}_0(\mathbb{D})$, если

$$\lim_{\delta\to 0+} \sup_{|z|\ge 1-\delta} (1-|z|^2)|g'(z)| = 0.$$

Теорема 1.1 (Родэ [12]) *Пусть f — внутренняя функция, которая не является конечным произведениям Бляшке. Если $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$, то*

$$\dim_{\mathcal{H}}\{\zeta \in \mathbb{T}:\ f^*(\zeta) = w\} = 1$$

для всех $w \in \mathbb{D}$.

Прежде всего, покажем, что с помощью теоремы 1.1 можно получить искомое свойство $\dim_{\mathcal{H}} E_a(\mu) = 1$ для некоторых мер, неудовлетворяющих условию (1.1).

Итак, пусть μ — положительная сингулярная мера на $\mathbb{T}$. Тогда ассоциированная сингулярная внутренняя функция задается равенством

$$S[\mu](z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta)\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Следствие 1.2 *Предположим, что*

$$S[\mu] \in \mathcal{B}_0(\mathbb{D}). \tag{1.2}$$

Тогда $\dim_{\mathcal{H}} E_a(\mu) = 1$ для всех $a \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Так как голоморфная функция $S[\mu]$ является ограниченной, то в силу классической теоремы Линделёфа из существования радиального предела

$$\lim_{r\to 1-} S[\mu](re^{i\phi})$$

следует существование некасательного предела

$$\lim_{z \to\!> e^{i\phi}} S[\mu](z) = \lim_{re^{i\theta}\to e^{i\phi},\ |\theta-\phi|\le c(1-r)} S[\mu](re^{i\theta}),$$

где c — положительная константа. Таким образом, теорема 1.1 для $w = \exp(-a) \in \mathbb{D}$ гарантирует, что $\dim_{\mathcal{H}} E(a) = 1$, где

$$E(a) = \{\zeta \in \mathbb{T}:\ \lim_{z\to\!>\zeta} S[\mu](z) = \exp(-a)\}.$$

Теперь рассмотрим интеграл Пуассона

$$P[\mu](\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2}\, d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Имеем
$$\lim_{z \to\!> \zeta} S[\mu](z) = \exp(-a) \ \Rightarrow \ \lim_{z \to\!> \zeta} P[\mu](z) = a.$$
Далее, так как мера μ положительна, то по тауберовой теореме Люмиса [8]
$$\lim_{z \to\!> \zeta} P[\mu](z) = a \ \Rightarrow \ \mathcal{D}\mu(\zeta) = a.$$

Иными словами, $E_a(\mu) \subset E(a)$; следовательно, $\dim_{\mathcal{H}} E_a(\mu) = 1$. $\square$

Хорошо известно, что (1.1) $\Rightarrow$ (1.2). Однако обратная импликация неверна. На самом деле, в работе [2] дано полное описание положительных сингулярных мер μ, обладающих свойством (1.2). Например, (1.2) следует из равенства

$$\lim_{|I| \to 0} \frac{\mu(I)}{\mu(I')} = 1, \tag{1.3}$$

где предел вычисляется относительно всех соседних дуг I и I' (см. [1] и [2]). Для удобства дальнейших ссылок сформулируем соответствующее утверждение.

Следствие 1.3 *Предположим, что положительная сингулярная мера μ обладает свойством (1.3). Тогда $\dim_{\mathcal{H}} E_a(\mu) = 1$ для всех $a \in (0, +\infty)$.*

Меры на евклидовых пространствах

Условия (1.1) и (1.3) имеют чисто вещественную природу, поэтому возникает естественный вопрос о возможности отказаться от аппарата комплексного анализа в доказательствах теоремы Донайре-Кармоны и следствия 1.3. В настоящей статье дан положительный ответ на этот вопрос и получены соответствующие утверждения о мерах, заданных на евклидовых пространствах.

Организация статьи

В разделе 2 даны определения, сформулированы искомые результаты (теоремы 2.1 и 2.4) и изложены их доказательства, основанные на соответствующих утверждениях о радиальных пределах для функций из малых пространств Блоха (теоремы 2.2 и 2.5). Оставшаяся часть статьи посвящена теоремам 2.2 и 2.5. Необходимые вспомогательные результаты собраны в разделе 3. Теоремы 2.2 и 2.5 доказаны с помощью техники моментов остановки Н.Г. Макарова [9] в разделах 4 и 5 соответственно. Также в разделе 5 обсуждаются некоторые обобщения теорем 2.1 и 2.4.

Комментарии и замечания

1. Отметим, что вышеупомянутый метод Макарова позволяет получить альтернативное доказательство теоремы 1.1 (см. [11]) и обобщить теорему 1.1 (см. [4]). Также данный подход был использован в статье [10] при исследовании гармонических функций, заданных на $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и не имеющих конечных радиальных пределов почти всюду.

2. Свойство (1.3) можно рассматривать как мультипликативный вариант классического аддитивного свойства (1.1), поэтому многие рассуждения для симметричных и гладких мер имеют сходный характер (ср. [5]). Так как технические детали

при изучении свойства (1.1) более стандартны, то в дальнейшем симметричные меры рассматриваются в первую очередь.

3. Если рассматриваемая мера μ сингулярна, то равенство $\dim_{\mathcal{H}} E_a(\mu) = 1$ тривиально для $a = 0$, так как $\mathcal{D}\mu = 0$ почти везде. Случай $a = +\infty$ обычно также следует из известных результатов, поэтому основное внимание будет сосредоточено на множествах $E_a(\mu)$ при $a \in (0, +\infty)$.

4. В дальнейшем, если μ — положительная мера на $\mathbb{R}^n$, то случай $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$ не исключается.

2 Основные результаты

Пусть $|E|$ обозначает меру Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$. При $x \in \mathbb{R}^n$ и $h > 0$ равенство

$$Q_h(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |x_j - \xi_j| < h/2, \ j = 1, 2, \dots, n\}$$

задает куб с центром x и длиной ребра $h > 0$. Символ Q_h будет использоваться для куба, центр которого не задан явно.

Пусть μ — вещественная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$. Производная меры μ в точке x определяется равенством

$$\mathcal{D}\mu(x) = \lim_{x \in Q_h,\, h \to 0} \frac{\mu(Q_h)}{|Q_h|}$$

при условии, что указанный предел существует. Положим

$$E_a(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathcal{D}\mu(x) = a\}.$$

2.1 Симметричные меры

Кубы $Q_h(x)$ и $Q_h(x')$ называются *соседними*, если $|x_p - x'_p| = h$ ровно для одного индекса p и $x_j = x'_j$ при $j \neq p$.

Определение. Положительная мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется *симметричной*, если

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(Q)}{\mu(Q')} = 1,$$

где Q и Q' — произвольные соседние кубы с длиной ребра h.

Первый результат — непосредственный аналог следствия 1.3 в случае нескольких вещественных переменных.

Теорема 2.1 *Предположим, что μ — сингулярная симметричная мера на $\mathbb{R}^n$. Тогда $\dim_{\mathcal{H}} E_a(\mu) = n$ для всех $a \in [0, +\infty]$.*

Основной технический момент в доказательстве сформулированной теоремы — соответствующее утверждение о радиальных пределах для функций из малого логарифмического множества Блоха $\mathcal{B}_0^{\log}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. По определению $\mathcal{B}_0^{\log}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ состоит из гармонических функций $u : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to (0, +\infty)$ таких, что

$$\lim_{t \to 0+} \sup_{0 < y \leq t} y |\nabla \log u(x, y)| = 0.$$

Теорема 2.2 *Рассмотрим функцию $u \in \mathcal{B}_0^{\log}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ и куб $Q^0 \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что*

$$\lim_{y\to 0+} u(\xi, y) = 0 \quad \text{для почти всех } \xi \in Q^0, \tag{2.1}$$

а также

$$\lim_{y\to 0+} u(\xi', y) = +\infty \quad \text{для некоторой точки } \xi' \in Q^0. \tag{2.2}$$

Тогда для каждого числа $a \in (0, +\infty)$ имеем $\dim_{\mathcal{H}} E(a) = n$, где

$$E(a) = \{x \in Q^0 : \lim_{y\to 0+} u(x, y) = a\}.$$

В данном разделе будет показано, что теорема 2.1 следует из теоремы 2.2. Доказательство теоремы 2.2 отложено до раздела 4.

Напомним, что гармоническое продолжение (интеграл Пуассона) меры μ задается на полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ с помощью равенства

$$P[\mu](x, y) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{(\|x-t\|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0,$$

где c_n — положительная нормировочная константа.

Также нам потребуется описание ω-симметричных мер, полученное в статье [5].

По определению регулярной калибровочной функцией называется неубывающая ограниченная функция $\omega : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такая, что частное $\omega(t)/t^{1-\varepsilon}$ убывает при некотором $\varepsilon > 0$. Положительная мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется ω-симметричной, если существует положительная константа C такая, что

$$\left|\frac{\mu(Q)}{\mu(Q')} - 1\right| \le C\omega\left(|Q|^{1/n}\right)$$

для всех пар соседних кубов $Q, Q' \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 2.3 ([5]) *Рассмотрим конечную положительную меру μ на $\mathbb{R}^n$ и регулярную калибровочную функцию ω такую, что $\omega(0+) = 0$. Пусть u обозначает гармоническое продолжение меры μ. Тогда следующие свойства равносильны:*

$$\mu \text{ является } \omega\text{-симметричной мерой;} \tag{2.3}$$

существует положительная константа $C > 0$ такая, что

$$y\left|\frac{\nabla u(x, y)}{u(x, y)}\right| \le C\omega(y) \quad \text{для всех точек } (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+. \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы 2.1. Зафиксируем $a \in (0, +\infty)$ и сингулярную симметричную меру μ на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим вспомогательную непрерывную функцию $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такую, что $f\big|_{[0,1]} = 1$ и $f(r) = \exp(C_f(1-r))$ при $r \ge 1$, где C_f

— положительная константа. Пусть $\nu = F\mu$, где $F(x) = f(\|x\|)$ для $x \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что $\mu(Q_h(0)) \le A(n)\exp(Bh)$ для некоторых положительных констант $A(n)$ и B. Таким образом, выбирая достаточно большую константу C_f, имеем $\nu(\mathbb{R}^n) < +\infty$. Также отметим, что мера ν является симметричной. Следовательно, в силу леммы 4 из [6] мера ν является ω-симметричной для некоторой регулярной калибровочной функции ω со свойством $\omega(0+) = 0$. Поэтому теорема 2.3 гарантирует, что интеграл Пуассона $u = P[\nu]$ принадлежит множеству $\mathcal{B}_0^{\log}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Далее, зафиксируем куб $Q^0 \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $F|_{Q^0} = 1$. Так как мера ν сингулярна и положительна, то свойства (2.1) и (2.2) имеют место. Рассмотрим множество

$$E(a) = \{x \in Q^0 : \lim_{y\to 0+} u(x,y) = a\}.$$

Так как $E_\nu(a) \cap Q^0 = E_\mu(a) \cap Q^0$, то в силу теоремы 2.2 достаточно показать, что

$$E_\nu(a) \cap Q^0 \supset E(a). \tag{2.5}$$

Итак, пусть $x_0 \in E(a)$. Рассмотрим куб $Q = Q_h(\xi)$ такой, что $x_0 \in Q$. Применяя формулу Грина к паре функций y и $u(x,y)$ на множестве $Q \times (0,h)$ и используя свойство (2.4), получаем

$$\left|\mu(Q) - \int_Q u(x,h)\,dx\right| \le C(n)\omega(h)u(\xi,h)|Q|$$

(детали соответствующего рассуждения приведены в [5]). Далее, так как $x_0 \in Q$, то условие (2.4) гарантирует, что

$$|\log u(x,h) - \log(x_0,h)| \le C(n)\omega(h)$$

для всех $x \in Q$. Таким образом,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(Q_h)}{|Q_h| u(x_0,h)} = 1,$$

где предел вычисляется относительно всех кубов Q_h таких, что $x_0 \in Q_h$. Иными словами, включение (2.5) имеет место. Отметим, что изложенное выше доказательство свойства (2.5) остается в силе при $a = +\infty$ и при $a = 0$.

Наконец, рассмотрим случай $a = +\infty$, используя введенные выше обозначения. Поскольку ν — сингулярная симметричная мера на $\mathbb{R}^n$, то, как хорошо известно, $\nu(E) = 0$, если $\dim_{\mathcal{H}}(E) < n$. С другой стороны, $\nu(E(+\infty)) = \nu(Q^0) > 0$, так как ν — положительная сингулярная мера. Таким образом, $\dim_{\mathcal{H}}(E(+\infty)) = n$. Остается воспользоваться включением (2.5) для $a = +\infty$. $\square$

Комментарии

Рассуждение, использованное при доказательстве свойства (2.5), показывает, что

$$\lim_{y\to 0+} P[\nu](x,y) = a \;\Rightarrow\; \mathcal{D}\nu(x) = a$$

для всех $a \in [0, +\infty]$, если ν — конечная симметричная мера на $\mathbb{R}^n$. Утверждения такого типа называют обратными теоремами Фату. Напомним, что в силу тауберовой теоремы Рудина [13] при $a \in [0, +\infty)$ имеет место более слабая импликация

$$\lim_{y \to 0+} P[\mu](x, y) = a \;\Rightarrow\; \mathcal{D}_{sym}\mu(x) = a,$$

если μ — конечная положительная мера на $\mathbb{R}^n$. Здесь

$$\mathcal{D}_{sym}\mu(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\mu(Q_h(x))}{|Q_h|}$$

(симметричная производная в точке $x \in \mathbb{R}^n$). С другой стороны, Рудин [13] построил положительную меру μ такую, что $\lim_{y \to 0+} P[\mu](x, y) = +\infty$, но $\mathcal{D}_{sym}\mu(0)$ не существует.

2.2 Гладкие меры

Определение. Вещественная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется *гладкой*, если

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(Q) - \mu(Q')}{|Q|} = 0,$$

где Q и Q' — произвольные соседние кубы с длиной ребра h. Для гладких мер также используется термин “малые меры Зигмунда” (ср. [3], [5]).

Аналог теоремы Донайре–Кармоны для мер, заданных на $\mathbb{R}^n$, имеет следующий вид.

Теорема 2.4 *Пусть μ — положительная сингулярная гладкая мера на $\mathbb{R}^n$. Тогда $\dim_{\mathcal{H}} E_a(\mu) = n$ для всех $a \in [0, +\infty]$.*

Гладким мерам соответствует малое пространство Блоха $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, которое состоит из гармонических функций $u : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\lim_{t \to 0+} \sup_{0 < y \le t} y|\nabla u(x, y)| = 0.$$

Теорема 2.5 *Рассмотрим положительную функцию $u \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ и куб $Q^0 \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что*

$$\lim_{y \to 0+} u(\xi, y) = 0 \quad \text{для почти всех } \xi \in Q^0, \tag{2.6}$$

а также

$$\lim_{y \to 0+} u(\xi', y) = +\infty \quad \text{для некоторой точки } \xi' \in Q^0. \tag{2.7}$$

Тогда для каждого числа $a \in (0, +\infty)$ имеем $\dim_{\mathcal{H}} E(a) = n$, где

$$E(a) = \{x \in Q^0 : \lim_{y \to 0+} u(x, y) = a\}.$$

Выведем теорему 2.4 из теоремы 2.5.

Доказательство теоремы 2.4. Пусть $a \in (0, +\infty)$ и μ — положительная сингулярная гладкая мера на $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем куб $Q^0 \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\mu(Q^0) > 0$. Рассмотрим вспомогательную меру $\nu = f\mu$, где f — неотрицательная C^1-функция с компактным носителем такая, что $f|_{Q^0} = 1$. Так как ν является конечной гладкой мерой, то интеграл Пуассона $u = P[\nu]$ принадлежит пространству $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ (в [6] показано, что данная импликация следует из результатов статьи [5]). Далее, свойства (2.6) и (2.7) имеют место, так как ν — сингулярная положительная мера и $\nu(Q^0) > 0$. Таким образом, с помощью теоремы 2.5 получаем множество $E(a)$ такое, что $\dim_{\mathcal{H}} E(a) = n$. В силу предложения 2 из [6] имеем $E_\nu(a) \cap Q^0 \supset E(a)$ при $a \in [0, +\infty]$. Так как $E_\nu(a) \cap Q^0 = E_\mu(a) \cap Q^0$, то окончательно имеем $\dim_{\mathcal{H}} E_\mu(a) = n$.

Поскольку ν — положительная сингулярная гладкая мера на $\mathbb{R}^n$, то $\nu(E) = 0$, если $\dim_{\mathcal{H}}(E) < n$ (см. [9], где получены более точные количественные результаты). Следовательно, как в доказательстве теоремы 2.1, при $a = +\infty$ можно воспользоваться свойством $E_\nu(+\infty) \cap Q^0 \supset E(+\infty)$. $\square$

Оставшаяся часть настоящей статьи посвящена доказательствам теорем 2.2 и 2.5.

3 Вспомогательные результаты

Логарифмические функции Блоха

Пусть $Q = Q_h \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим $\widehat{Q} = Q \times (0, h] \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$. Если x_Q — центр куба Q, то обозначим $z_Q = (x_Q, h)$. Для гармонической функции $u : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to (0, +\infty)$ положим

$$\|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})} = \sup\{y|\nabla \log u(x, y)| : (x, y) \in \widehat{Q}\}.$$

Первая лемма следует из определения величины $\|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})}$ и свойств экспоненциальной функции.

Лемма 3.1 *Рассмотрим куб $Q = Q_h \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что $\|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})} \leq 1$. Тогда существует константа $C_{3.1}(n)$ такая, что*

$$\left| \frac{u(z)}{u(z')} - 1 \right| < C_{3.1}(n) \|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})}$$

для всех $z, z' \in Q \times [h/2, h]$.

Пусть $Q = Q_h \subset \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}$. Стандартное разбиение куба Q на 2^{kn} попарно дизъюнктных кубов с длиной ребра $2^{-k}h$ будем называть диадическим поколением с номером k. Диадическое разбиение куба Q — это набор всех диадических поколений.

Лемма 3.2 *Зафиксируем куб $Q = Q_h \subset \mathbb{R}^n$ и рассмотрим его диадическое разбиение. Пусть набор $\mathcal{F} = \{P\}$ состоит из попарно непересекающихся диадических кубов $P \subset Q$ и удовлетворяет условию*

$$\sum_{P \in \mathcal{F}} |P| = |Q|.$$

Предположим, что положительная функция и гармонична на $\mathbb{R}^{n+1}_+$*, а также*

$$\frac{u(z)}{u(z')} \le 4 \text{ для всех } z, z' \in E, \text{ где } E = \widehat{Q} \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{F}} \widehat{P}.$$

Тогда существует положительная константа $C_{3.2}(n)$ *такая, что*

$$\left| 1 - \sum_{P \in \mathcal{F}} \frac{u(z_P)|P|}{u(z_Q)|Q|} \right| \le C_{3.2}(n) \|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})}.$$

Доказательство. Пусть $\ell(P)$ обозначает длину ребра куба P. Положим

$$\mathcal{F}_k = \{P \in \mathcal{F} : \ \ell(P) \ge 2^{-k} h\}$$

(кубы из первых k поколений диадического разбиения куба Q_h). Если k достаточно велико, то

$$\sum_{P \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_k} \frac{u(z_P)|P|}{u(z_Q)|Q|} \le \|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})}.$$

Зафиксируем такое k. Добавим к семейству $\mathcal{F}_k$ все диадические кубы с длиной ребра $2^{-k-1}h$, содержащиеся в множестве $\bigcup_{P \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_k} P$. Полученное *конечное* семейство обозначим $\mathcal{F}_0$. Отметим, что $\sum_{P \in \mathcal{F}_0} |P| = |Q|$.

Положим $E_0 = \widehat{Q} \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{F}_0} \widehat{P}$. Имеем $E_0 \subset E$; в частности, если $P \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathcal{F}_k$, то $z_P \in E$. Следовательно,

$$\sum_{P \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathcal{F}_k} \frac{u(z_P)|P|}{u(z_Q)|Q|} \le 4 \sum_{P \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_k} \frac{u(z_P)|P|}{u(z_Q)|Q|} \le 4 \|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})}.$$

Таким образом, не умаляя общности, можно предположить, что семейство $\mathcal{F}$ конечно.

Применяя формулу Грина к паре функций y и $u(x, y)$ на множестве E, получаем

$$\int_{\partial E} y \partial_n u \, d\Sigma = \int_{\partial E} u \partial_n y \, d\Sigma = \int_{Q_h} u(x, h) \, dx - \sum_{\mathcal{F}} \int_P u(x, \ell(P)) \, dx,$$

где $d\Sigma$ обозначает соответствующую поверхностную меру на ∂E. Разделим правую и левую части данного равенства на $|Q| u(z_Q)$ и оценим соответствующие слагаемые.

Так как $\Sigma(\partial E) \le C(n)|Q|$, то

$$\int_{\partial E} y \frac{|\partial_n u|}{|Q| u(z_Q)} \, d\Sigma \le \frac{4}{|Q|} \int_{\partial E} y \frac{|\partial_n u|}{u} \, d\Sigma \le C(n) \|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})}.$$

Далее, лемма 3.1 гарантирует, что

$$\left| 1 - \int_{Q_h} \frac{u(x, h) \, dx}{|Q| u(z_Q)} \right| \le C(n) \|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})},$$

а также

$$\left| \sum_{\mathcal{F}} |P| u(z_P) - \sum_{\mathcal{F}} \int_P u(x, \ell(P)) \, dx \right| \le C(n) \|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})} \sum_{\mathcal{F}} |P| u(z_P)$$

и, следовательно,

$$\left|\sum_{\mathcal F}\frac{|P|u(z_P)}{|Q|u(z_Q)}-\sum_{\mathcal F}\frac{\int_P u(x,\ell(P))\,dx}{|Q|u(z_Q)}\right|\le 4C(n)\|u\|_{\mathcal B^{\log}(\widehat Q)}.$$

Воспользовавшись сделанными оценками, получаем искомое неравенство. $\square$

Гармонические функции Блоха

Пусть $Q=Q_h\subset\mathbb R^n$. Для гармонической функции $u:\mathbb R^{n+1}_+\to\mathbb R$ положим

$$\|u\|_{\mathcal B(\widehat Q)}=\sup\{y|\nabla u(x,y)|:(x,y)\in\widehat Q\}.$$

Как в логарифмическом случае, первая лемма следует непосредственно из определения величины $\|u\|_{\mathcal B(\widehat Q)}$.

Лемма 3.3 *Рассмотрим куб $Q=Q_h\subset\mathbb R^n$. Предположим, что $\|u\|_{\mathcal B(\widehat Q)}<\infty$. Тогда существует константа $C_{3.3}(n)$ такая, что*

$$|u(z)-u(z')|<C_{3.3}(n)\|u\|_{\mathcal B(\widehat Q)}$$

для всех $z,z'\in Q\times[h/2,h]$.

Лемма 3.4 *Зафиксируем куб $Q\subset\mathbb R^n$. Рассмотрим набор $\mathcal F=\{P\}$, который состоит из попарно непересекающихся диадических кубов $P\subset Q$ и удовлетворяет условию*

$$\sum_{P\in\mathcal F}|P|=|Q|.$$

Предположим, что функция u гармонична на $\mathbb R^{n+1}_+$ и ограничена на $\widehat Q\setminus\bigcup_{P\in\mathcal F}\widehat P$. Тогда существует положительная константа $C_{3.4}(n)$ такая, что

$$\left|\sum_{P\in\mathcal F}(u(z_Q)-u(z_P))\frac{|P|}{|Q|}\right|\le C_{3.4}(n)\|u\|_{\mathcal B(\widehat Q)}.$$

Доказательство. Применяя формулу Грина к паре функций y и $u(x,y)$, проведем рассуждения по аналогии с доказательством леммы 3.2 (ср. [10]). $\square$

Одна оценка для размерности по Хаусдорфу

Лемма 3.5 (Хангефорд [7], Макаров [9]) *Зафиксируем константы $0<\varepsilon<C<1$. Пусть каждое семейство $\mathcal A_j$, $j\in\mathbb N$, состоит из попарно непересекающихся кубов в $\mathbb R^n$. Предположим, что выполнены следующие два условия.*
(i) *Для каждого куба $Q=Q_h\in\mathcal A_j$, $j\ge 2$, существует куб $R=R_H\in\mathcal A_{j-1}$ такой, что $Q\subset R$; при этом $h<\varepsilon H$.*
(ii) *Если $R\in\mathcal A_{j-1}$, то*

$$\sum_{Q\in\mathcal A_j,\ Q\subset R}|Q|\ge C|R|.$$

Тогда

$$\dim_{\mathcal H}\left(\bigcap_j\bigcup_{Q\in\mathcal A_j}Q\right)\ge n\left(1-\frac{\log C}{\log\varepsilon}\right).$$

4 Доказательство теоремы 2.2

Рассуждения будут выполнены с помощью индукционной конструкции, в основе которой лежит следующая лемма.

Лемма 4.1 *Рассмотрим куб $Q \subset \mathbb{R}^n$ и гармоническую функцию $u : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to (0, +\infty)$ такую, что*

$$\lim_{y\to 0+} u(\xi, y) = 0 \quad \text{для почти всех } \xi \in Q.$$

Зафиксируем числа $\varepsilon \in (0, 1/40)$ и $a \in (0, +\infty)$. Предположим, что для $\delta > 0$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, выполнены условия

$$\|u\|_{\mathcal{B}^{\log}(\widehat{Q})} < \delta, \tag{4.1}$$

$$a \leq u(z_Q) \leq a(1 + 2^{-k}), \tag{4.2}$$

$$\log_2(1 + C_{3.1}\delta) \log_2 \frac{1}{\varepsilon} < \log_2(1 + 2^{-k+1}), \tag{4.3}$$

$$(C_{3.1} + C_{3.2})\delta < 2^{-k-1}, \tag{4.4}$$

где $C_{3.1}$ и $C_{3.2}$ — константы из лемм 3.1 и 3.2 соответственно.

Тогда существует конечный набор $\mathcal{A} = \{P\}$, состоящий из попарно непересекающихся кубов $P \subset Q$, обладающих следующими свойствами:

$$\sum_{P\in\mathcal{A}} |P| \geq |Q|/40, \tag{4.5}$$

$$|P| \leq \varepsilon^n |Q|, \tag{4.6}$$

$$a \leq u(z_P) \leq a(1 + 2^{-k}). \tag{4.7}$$

Доказательство. Искомые элементы семейства $\mathcal{A}$ будут выбраны из диадического разбиения куба Q. Соответствующую процедуру удобно разбить на два шага.

Шаг 1. Рассмотрим семейство $\mathcal{E}$, состоящее из максимальных диадических кубов $R \subset Q$ таких, что

$$\text{либо } u(z_R) \geq a(1 + 2^{-k+1}), \text{ либо } u(z_R) \leq a(1 - 2^{-k}). \tag{4.8}$$

Напомним, что $\lim_{y\to 0+} u(\xi, y) = 0$ для почти всех $\xi \in Q$. Таким образом, в силу леммы 3.1 для почти каждой точки $\xi \in Q$ существует диадический куб $\widetilde{R} \subset Q$ такой, что $\xi \in \widetilde{R}$ и $u(z_{\widetilde{R}}) \leq a(1 - 2^{-k})$. Следовательно,

$$\sum_{R\in\mathcal{E}} |R| = |Q|. \tag{4.9}$$

Пусть $R \in \mathcal{E}$, $R \subset R^* \subset Q$ и $R \neq R^*$, где R^* — диадический куб. По построению R^* не обладает свойством (4.8), следовательно, лемма 3.1 и свойство (4.4) гарантируют, что

$$u(z) \leq a(1+2^{-k+1})(1+C_{3.1}\delta) < a(1+2^{-k+2}),$$
$$u(z) \geq a(1-2^{-k})(1-C_{3.1}\delta) > a(1-2^{-k+1})$$

для всех $z \in R^* \times [h^*/2, h^*]$, где h^* — длина ребра куба R^*. Таким образом,

$$\frac{u(z)}{u(z')} \leq 4 \quad \text{для всех } z, z' \in \widehat{Q} \setminus \bigcup_{R\in\mathcal{E}} \widehat{R}.$$

Отдельно отметим, что

$$u(z_R) < a(1+2^{-k+2}). \tag{4.10}$$

Применяя лемму 3.2 к семейству $\mathcal{E}$, имеем

$$\left| 1 - \sum_{R\in\mathcal{E}} \frac{u(z_R)|R|}{u(z_Q)|Q|} \right| < C_{3.2}\delta.$$

В частности,

$$\sum_{R\in\mathcal{E}} \frac{u(z_R)|R|}{a|Q|} > 1 - C_{3.2}\delta. \tag{4.11}$$

Теперь рассмотрим семейство $\mathcal{E}^+ = \{R \in \mathcal{E} : u(z_R) \geq a(1+2^{-k+1})\}$. С одной стороны, если $R \in \mathcal{E}^+ \subset \mathcal{E}$, то имеет место оценка (4.10). С другой стороны, если если $R \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^+$, то $u(z_R) \leq a(1-2^{-k})$. Таким образом, с помощью (4.9) и (4.11) получаем

$$C_{3.2}\delta > 2^{-k}\left(1 - 5\sum_{R\in\mathcal{E}^+} |R|/|Q|\right).$$

Следовательно, в силу (4.4) имеем

$$\sum_{R\in\mathcal{E}^+} |R| > |Q|/10. \tag{4.12}$$

Отбросив все достаточно малые диадические кубы, получаем конечное семейство $\mathcal{E}^+$, обладающее свойством (4.12).

Шаг 2. К каждому кубу $R \in \mathcal{E}^+$ применим следующее рассуждение. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$, состоящее из максимальных диадических кубов $P \subset R$ таких, что

$$\text{либо } u(z_P) \leq a(1+2^{-k}), \text{ либо } u(z_P) \geq a(1+2^{-k+3}).$$

Рассуждая как на первом шаге и используя неравенство (4.4), имеем

$$\sum_{P\in\mathcal{F}} |P| = |R|;$$
$$\left| 1 - \sum_{P\in\mathcal{F}} \frac{u(z_P)|P|}{u(z_R)|R|} \right| < C_{3.2}\delta$$

в силу леммы 3.2. Из последнего неравенства и оценки (4.10) следует, что

$$\sum_{P\in\mathcal{F}} \frac{u(z_P)|P|}{a|R|} < (1 + C_{3.2}\delta)(1 + 2^{-k+2}) < 1 + 3\cdot 2^{-k+1}. \tag{4.13}$$

Положим $\mathcal{A} = \{P \in \mathcal{F} : u(z_p) \le a(1 + 2^{-k})\}$. С одной стороны, применяя лемму 3.1, имеем $u(z_P) \ge a$ при $P \in \mathcal{A}$. С другой стороны, $u(z_P) \ge a(1 + 2^{-k+3})$ при $P \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{A}$. Таким образом, из (4.13) следует, что

$$2^{-k+3} - 3\cdot 2^{-k+1} < 2^{-k+3} \sum_{P\in\mathcal{A}} |P|/|R|.$$

Иными словами,

$$\sum_{P\in\mathcal{A}} |P| > |R|/4. \tag{4.14}$$

Вновь, отбросив все достаточно малые диадические кубы, получаем конечное семейство $\mathcal{A}$, обладающее свойством (4.14).

Проверим, что построенное семейство $\mathcal{A}$ обладает искомыми свойствами. Действительно, из (4.12) и (4.14) следует (4.5). Свойство (4.7) выполнено по построению (см. шаг 2). Наконец, лемма 3.1 и неравенство (4.3) дают оценку $|R| \le \varepsilon^n |Q|$. Следовательно, свойство (4.6) имеет место. $\square$

Доказательство теоремы 2.2. Зафиксируем числа $\varepsilon \in (0, 1/40)$ и $a \in (0, +\infty)$. Положим $k = 2$ и зафиксируем столь малое $\delta = \delta_2 > 0$, что выполнены оценки (4.3) и (4.4).

Далее, по условию дан куб $Q^0 \subset \mathbb{R}^n$ и даны точки $\xi, \xi' \in Q^0$ такие, что

$$\lim_{y\to 0+} u(\xi, y) = 0,$$
$$\lim_{y\to 0+} u(\xi', y) = +\infty.$$

Следовательно, при всех достаточно малых $h > 0$ отрезок $[\xi, \xi']$ содержит точку $x_a = x_a(h)$ такую, что $u(x_a, h) = a$. Выбирая достаточно малое число $h > 0$, получаем свойство (4.1) для куба $Q = Q_h(x_a) \subset Q^0$. Отметим, что $u(z_Q) = a$. Таким образом, свойство (4.2) также имеет место.

Итак, все условия леммы 4.1 выполнены. С помощью данной леммы построим семейство $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. Отметим, что свойство (4.1) унаследовано всеми кубами из семейства $\mathcal{A}_1$. Далее, свойство (4.2) для кубов из $\mathcal{A}_1$ — это (4.7). Таким образом, лемма 4.1 применима к кубам из семейства $\mathcal{A}_1$ и т.д.

Продолжим по индукции построение семейств $\mathcal{A}_j$. Зафиксируем столь малое $\delta_3 > 0$, что оценки (4.3) и (4.4) имеют место для $k = 3$ и $\delta = \delta_3$. Напомним, что $u \in \mathcal{B}_0^{\log}(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Следовательно, в силу (4.6) неравенство (4.1) выполнено для $\delta = \delta_3$, если индекс $j = j_1$ достаточно велик. Итак, заменим $k = 2$ на $k = 3$, δ_2 на δ_3 и применим лемму 4.1 ко всем кубам из семейств $\mathcal{A}_{j_1}$, $\mathcal{A}_{j_1+1}$ и т.д. Далее, если индекс $j = j_2$ достаточно велик, то можно заменить $k = 3$ на $k = 4$, δ_3 на δ_4 и продолжить построения с новыми параметрами.

По индукции получаем семейства $\mathcal{A}_j$, $j \in \mathbb{N}$, обладающий свойствами (i) и (ii) из леммы 3.5 с константами $\varepsilon \in (0, 1/40)$ и $C = 1/40$. Лемма 3.1 гарантирует, что искомое равенство

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = a$$

имеет место для всех

$$x \in \bigcap_j \bigcup_{P\in\mathcal{A}_j} P \subset Q^0.$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно сколь угодно малым, то

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x \in Q^0 : \lim_{y\to 0+} u(x,y) = a \right\} = n$$

в силу леммы 3.5. $\square$

5 Доказательство теоремы 2.5

Лемма 5.1 *Рассмотрим положительную функцию $u \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ такую, что*

$$\lim_{y\to 0+} u(\xi,y) = 0 \quad \text{для почти всех } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Зафиксируем куб $Q \subset \mathbb{R}^n$, число $\varepsilon > 0$, а также $a \in (0, +\infty)$ и натуральное число N такое, что $a > 2^{-N+1}$. Наконец, предположим, что для $k \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ выполнены условия

$$\|u\|_{\mathcal{B}(\widehat{Q})} < \delta, \tag{5.1}$$

$$a \le u(z_Q) \le a + 2^{-N-k}, \tag{5.2}$$

$$C_{3.3}\delta \log_2 \frac{1}{\varepsilon} < 2^{-N-k}, \tag{5.3}$$

$$(2C_{3.3} + C_{3.4})\delta < 2^{-N-k-1}, \tag{5.4}$$

где $C_{3.3}$ и $C_{3.4}$ — константы из лемм 3.3 и 3.4 соответственно.

Тогда существует конечный набор $\mathcal{A} = \{P\}$, состоящий из попарно непересекающихся кубов $P \subset Q$, обладающих следующими свойствами:

$$\sum_{P\in\mathcal{A}} |P| \ge |Q|/12, \tag{5.5}$$

$$|P| \le \varepsilon^n |Q|, \tag{5.6}$$

$$a \le u(z_P) \le a + 2^{-N-k}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Построение семейства $\mathcal{A}$ разобьём на два шага.

Шаг 1. Рассмотрим семейство $\mathcal{E}$, состоящее из максимальных диадических кубов $R \subset Q$ таких, что
$$|u(z_R) - a| \geq 2^{-N-k+1}.$$
С одной стороны, в силу условия (5.2) имеем $u(z_Q) \geq a > 2^{-N+1}$. С другой стороны, $\lim_{y\to 0+} u(\xi, y) = 0$ для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,
$$\sum_{R\in\mathcal{E}} |R| = |Q|. \tag{5.8}$$
Применяя к семейству $\mathcal{E}$ лемму 3.4, имеем
$$\left|\sum_{R\in\mathcal{E}} (u(z_R) - u(z_Q))\frac{|R|}{|Q|}\right| < C_{3.4}\delta.$$
В частности,
$$\sum_{R\in\mathcal{E}} (u(z_R) - a)\frac{|R|}{|Q|} > -C_{3.4}\delta. \tag{5.9}$$

Рассмотрим семейство $\mathcal{E}^+ = \{R \in \mathcal{E} : u(z_R) - a \geq 2^{-N-k+1}\}$. Пусть $R \in \mathcal{E}^+$, тогда из свойства максимальности и леммы 3.3 следует, что
$$u(z_R) - a \leq 2^{-N-k+1} + C_{3.3}\delta. \tag{5.10}$$
Далее, если $R \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^+$, то $u(z_R) - a \leq 2^{-N-k+1}$. Таким образом, с помощью (5.8) и (5.9) получаем
$$(C_{3.3} + C_{3.4})\delta > 2^{-N-k+1}\left(1 - 2\sum_{R\in\mathcal{E}^+} |R|/|Q|\right).$$
Следовательно, в силу (5.4) имеем
$$\sum_{R\in\mathcal{E}^+} |R| > |Q|/3. \tag{5.11}$$
Отбросив все достаточно малые диадические кубы, получаем конечное семейство $\mathcal{E}^+$, обладающее свойством (5.11).

Шаг 2. К каждому кубу $R \in \mathcal{E}^+$ применим следующее рассуждение. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$, состоящее из максимальных диадических кубов $P \subset R$ таких, что
$$|u(z_P) - a - 2^{-N-k+1}| \geq 2^{-N-k} \tag{5.12}$$
Как на первом шаге, имеем
$$\sum_{P\in\mathcal{F}} |P| = |R|;$$
$$\left|\sum_{P\in\mathcal{F}} (u(z_P) - u(z_R))\frac{|P|}{|R|}\right| < C_{3.4}\delta.$$

В силу (5.10) из последнего неравенства следует, что

$$\sum_{P\in\mathcal{F}}(u(z_P)-a-2^{-N-k+1})\frac{|P|}{|R|}<(C_{3.3}+C_{3.4})\delta.$$

Положим $\mathcal{A}=\{P\in\mathcal{F}: u(z_p)\le a+2^{-N-k}\}$. Применяя лемму 3.3 получаем

$$2^{-N-k}\left(1-2\sum_{P\in\mathcal{A}}|P|/|R|\right)<(2C_{3.3}+C_{3.4})\delta.$$

Следовательно, в силу (5.4) имеем

$$\sum_{P\in\mathcal{A}}|P|>|R|/4. \tag{5.13}$$

Завершается рассуждение по аналогии с логарифмическим случаем. □

Доказательство теоремы 2.5. Зафиксируем числа $\varepsilon\in(0,1/12)$, $a\in(0,+\infty)$, а также $N\in\mathbb{N}$ такое, что $a>2^{-N+1}$. Положим $k=1$ и зафиксируем столь малое $\delta>0$, что выполнены оценки (5.3) и (5.4).

Теперь, заменяя лемму 4.1 на лемму 5.1, можно практически дословно повторить рассуждение, использованное при доказательстве теоремы 2.2. □

Заключительные комментарии

1. Изложенные выше рассуждения можно повторить в несколько более общих ситуациях. В частности, для вещественных гладких мер μ имеет место следующая теорема, которая в определенном смысле показывает, что множество значений производной $\mathcal{D}\mu$ не имеет лакун.

Теорема 5.2 *Рассмотрим вещественную гладкую меру μ на $\mathbb{R}^n$ и куб $Q\subset\mathbb{R}^n$. Пусть $-\infty\le A_1<A_2\le+\infty$ и*

$$F_1=\{x\in Q:\ \mathcal{D}\mu(x)\in[-\infty,A_1]\},$$
$$F_2=\{x\in Q:\ \mathcal{D}\mu(x)\in[A_2,+\infty]\}.$$

Предположим, что $F_1\ne\varnothing$, $F_2\ne\varnothing$ и $|F_1|+|F_2|=|Q|$. Тогда

$$\dim_{\mathcal{H}}\{x\in Q:\ \mathcal{D}\mu(x)=a\}=n$$

для всех $a\in(A_1,A_2)$.

Так как симметричные меры по определению положительны, то в аналогичной теореме о симметричных мерах предполагается, что $0\le A_1<A_2\le+\infty$.

2. В определении производной можно заменять кубы Q_h на более широкие наборы множеств. Например, положим

$$D\mu(x)=\lim_{x\in Q,\ |Q|\to 0}\frac{\mu(Q)}{|Q|},$$

где Q — произвольное вращение стандартного куба Q_h. Теоремы 2.1, 2.4 и 5.2 остаются в силе, если заменить $\mathcal{D}\mu$ на $D\mu$.

Литература

[1] A.B. Aleksandrov, J.M. Anderson and A. Nicolau, *Inner functions, Bloch spaces and symmetric measures*, Proc. London Math. Soc. **79** (1999), no. 2, 318–352.

[2] C.J. Bishop, *Bounded functions in the little Bloch space*, Pacific J. Math. **142** (1990), no. 2, 209–225.

[3] J.J. Carmona and J.J. Donaire, *The converse of Fatou's theorem for Zygmund measures*, Pacific J. Math. **191** (1999), no. 2, 207–222.

[4] J.J. Donaire, *Radial behaviour of inner functions in $\mathcal{B}_0$*, J. London Math. Soc. (2) **63** (2001), no. 1, 141–158.

[5] E. Doubtsov and A. Nicolau, *Symmetric and Zygmund measures in several variables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 1, 153–177.

[6] Е.С. Дубцов, *Обратная теорема Фату для гладких мер*, Записки науч. семин. ПОМИ **315** (2004), 90–95.

[7] G.J. Hungerford, *Boundaries of smooth sets and singular sets of Blaschke products in the little Bloch class*, Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, 1988.

[8] L.H. Loomis, *The converse of the Fatou theorem for positive harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 239–250.

[9] Н.Г. Макаров, *Вероятностные методы в теории конформных отображений*, Алгебра и анализ **1** (1989), no. 1, 3–59.

[10] A. Nicolau, *Radial behaviour of harmonic Bloch functions and their area function*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), no. 4, 1213–1236.

[11] M.D. O'Neill, *Random walk and boundary behavior of functions in the disk*, Houston J. Math. **25** (1999), no. 2, 379–386.

[12] S. Rohde, *On functions in the little Bloch space and inner functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 7, 2519–2531.

[13] W. Rudin, *Tauberian theorems for positive harmonic functions*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **40** (1978), no. 3, 376–384.

ПОМИ РАН, Фонтанка 27, С.-Петербург 191023
E-mail: dubtsov@pdmi.ras.ru