На правах рукописи

**Растегаев Никита Владимирович**

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧАХ С САМОПОДОБНЫМ ВЕСОМ

Специальность 01.01.02 —

«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А.Стеклова РАН

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук, профессор<br>**Назаров Александр Ильич** |
| Официальные оппоненты: | **Борзов Вадим Васильевич,**<br>доктор физико-математических наук, доцент,<br>Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича,<br>профессор кафедры высшей математики |
| | **Владимиров Антон Алексеевич,**<br>кандидат физико-математических наук,<br>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,<br>старший научный сотрудник |
| Ведущая организация: | Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» |

Защита состоится 14 июня 2018 г. в 12 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212. 232. 49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., дом 28, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, а также на сайте https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/1Qg1W7wwkC.pdf.

Автореферат разослан «___» ______________ 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212. 232. 49, доктор физико-математических наук, доцент Чурин Ю. В.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Анализ асимптотики спектра краевых задач с сингулярным весом — классическая задача, изучение которой ведется с середины прошлого века и восходит к работам М. Г. Крейна (см. напр. [8]), в которых для распределения собственных значений задачи

$$- y'' = \lambda\mu y, \qquad y(0) = y(1) = 0, \tag{1}$$

в случае неотрицательной весовой меры $\mu$ была получена формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{P'_{ac}}\,dx, \tag{2}$$

где $P_{ac}$ — абсолютно непрерывная составляющая первообразной меры $\mu$.

В случае чисто сингулярной меры $\mu$ из соотношения (2) следует, что считающая функция $N(\lambda) = \#\{n : \lambda_n < \lambda\}$ собственных значений задачи (1) допускает оценку $o(\sqrt{\lambda})$ вместо обычной асимптотики $N(\lambda) \sim C\sqrt{\lambda}$ в случае меры, содержащей абсолютно непрерывную составляющую.

В [1] получены похожие результаты для операторов произвольного четного порядка в многомерном случае и лучшие оценки сверху на считающую функцию собственных значений для некоторых специальных классов мер.

В последние 20 лет наблюдается новый интерес к этим задачам, а также к близким задачам о спектре краевых задач с сингулярным потенциалом. В работах [7] и др. рассматривается случай индефинитного самоподобного веса в задаче Штурма-Лиувилля. В этом случае для положительной и отрицательной составляющей спектра имеет место асимптотика, аналогичная (3), однако показатель $D \in (0{,}1)$. В работе [9] асимптотика (3) обобщается на случай дифференциального оператора произвольного четного порядка. Кроме того, показано, что функция $s$ в этой асимптотике является непрерывной. В работах [5] (для уравнения Штурма-Лиувилля) и [18; 4] (для уравнения произвольного четного порядка) рассматривается случай дискретного самоподобного веса. В этом случае собственные числа растут экспоненциально. В работе [11] для уравнения Штурма-Лиувилля рассматриваются самоподобные веса из пространства мультипликаторов в пространствах Соболева. Во многих работах рассматривается задача Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева, в том числе с потенциалами-распределениями (см. [10] и упомянутую там литературу). Операторы Крейна-Феллера, являющиеся обобщением весовых операторов Штурма-Лиувилля, рассматриваются в серии работ (см. [13] и ссылки в ней, а также [2]) в случае, когда хотя бы одна из входящих в определение оператора мер является самоподобной.

**Степень разработанности темы исследования.** Точный степенной порядок $D$ роста считающей функции $N(\lambda)$ для задачи (1) в случае сингулярной самоподобной меры $\mu$ был установлен в [14].

В работах [20] и [16] был выделен главный член спектральной асимптотики в случае сингулярной самоподобной меры $\mu$, и показано, что считающая функция собственных значений задачи (1) имеет асимптотику

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot \bigl(s(\ln\lambda) + o(1)\bigr), \quad \lambda \to +\infty, \tag{3}$$

где $s$ — некоторая ограниченная и отделенная от нуля $T$-периодическая функция, а степенной показатель $D \in (0,\frac{1}{2})$. Как функция $s$ (в частности, период $T$), так и показатель $D$ определяются параметрами самоподобия веса $\mu$. В случае неарифметического самоподобия (см. Определение 1 ниже) канторовой лестницы — первообразной меры $\mu$ — функция $s$ вырождается в константу.

В работе [9] сформулирована следующая гипотеза.

**Гипотеза 1.** *Функция $s$ в* (3) *является непостоянной для произвольного неравномерного веса $\mu$ с арифметически самоподобной первообразной.*

В работе [7] при помощи компьютерных вычислений доказано, что функция $s$ действительно не может являться постоянной в том простейшем случае, когда первообразная веса $\mu$ — классическая канторова лестница.

В работе [6] гипотеза 1 была подтверждена для т.н. “ровных” лестниц. Для таких лестниц была доказана следующая характеризационная теорема.

**Теорема А.** *Коэффициент $s$ из асимптотики* (3) *допускает представление*

$$\forall t \in [0,T] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t), \tag{4}$$

*где $\sigma$ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция (т.е. ее обобщенная производная есть мера, сингулярная относительно меры Лебега).*

Отсюда утверждение $s(t) \neq const$ следует немедленно. Этот результат позднее был обобщен в работе [3] на случай уравнения четвертого порядка.

**Цели и задачи.** В главах 1 и 2 данной диссертации доказывается формула (4) из теоремы A и, следовательно, подтверждается гипотеза 1 для более широкого класса лестниц.

Заметим, что асимптотика (3) является частным случаем *почти регулярной* спектральной асимптотики

$$N(\lambda) \sim \lambda^D \varphi(\lambda) s(\ln \lambda), \qquad \lambda \to +\infty,$$

где $D \in (0,1)$, $\varphi$ — медленно меняющаяся, а $s$ — $T$-периодическая функция.

В главе 3 рассматривается асимптотика спектра тензорного произведения компактных операторов с почти регулярной спектральной асимптотикой.

**Научная новизна.** Выносимые на защиту положения являются новыми и получены автором самостоятельно.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Работа носит теоретический характер. Известные приложения результатов данной диссертации встречаются в задачах, касающихся асимптотик квантования случайных величин и векторов (см. например [17]), сложности в среднем линейных задач, то есть задач приближения непрерывного линейного оператора (см. например [19]), а также в рамках интенсивно развивающейся теории малых уклонений случайных процессов, а именно, для малых уклонений гауссовских случайных процессов в $L_2$-норме (см. например [15]).

**Методология и методы исследования.** При доказательстве основных результатов данной диссертации были использованы: классические методы спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах; асимптотические методы; методы анализа асимптотики спектра тензорного произведения операторов, разработанные в [15]; методы анализа асимптотики спектра, основанные на связи между спектрами задач на отрезке и его подотрезках, в том числе свойство спектральной периодичности и специально введенное в данной работе свойство спектральной квазипериодичности; свертка Меллина, а также введенная в данной работе обобщающая ее почти меллиновская свертка и ее свойства.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. В случае резонанса 1:1:...:1 доказана спектральная квазипериодичность для задачи Робена, обобщающая свойство спектральной периодичности, выполненное в случае “ровной” лестницы.
2. В случае общего резонанса доказаны теоремы, описывающие связь между спектрами задачи на отрезке и подотрезках, содержащих носитель меры.
3. Теорема A доказана для лестниц с ненулевыми промежуточными интервалами в случаях резонанса 1:1:...:1 и общего резонанса.
4. Исследованы асимптотические свойства почти меллиновской свертки, обобщающей свертку Меллина на случай функций с периодической компонентой.
5. Получен главный член спектральной асимптотики тензорного произведения компактных операторов с почти регулярной спектральной асимптотикой для всех возможных комбинаций параметров маргинальных асимптотик.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Все результаты снабжены подробными доказательствами, опубликованы в ведущих научных изданиях и докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Семинар им. В.И. Смирнова по математической физике в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А.Стеклова РАН (Санкт-Петербург, 2014, 2017, рук: Н. Н. Уральцева, А. И. Назаров, Т. А. Суслина).
– Seminar at the Institute of Stochastics and Applications, University of Stuttgart (Штутгарт, Германия, 2016, 2017, рук: U. R. Frieberg).
– Семинар «Операторные модели в математической физике» лаборатории операторных моделей и спектрального анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2017, рук: А. А. Шкаликов).
– Конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвящённая столетию Б. М. Левитана (Москва, 2014).
– 6th St.Petersburg Conference in Spectral Theory dedicated to the memory of M.Sh.Birman (СПб, 2014).
– Конференция Days on Diffraction (СПб, 2016).
– 8th St.Petersburg Conference in Spectral Theory dedicated to the memory of M.Sh.Birman (СПб, 2016).
– 26th St.Petersburg Summer Meeting In Mathematical Analysis (СПб, 2017).
– Symposium on Probability Theory and Random Processes (СПб, 2017).

**Публикации.** Результаты данной диссертации опубликованы в работах [21—23], [24—27]. Работы [23] и [21] опубликованы в журналах из перечня ВАК. Работа [22] опубликована в издании, удовлетворяющем достаточному условию включения в перечень ВАК (переводная версия этого издания “Journal of Mathematical Sciences” входит в систему цитирования Scopus).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 13 параграфов, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 88 страниц с 1 рисунком. Список литературы содержит 75 наименований.

Работа поддержана совместным грантом СПбГУ и DFG 6.65.37.2017 и грантом РФФИ 16-01-00258a.

## Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследований, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи, кратко сформулированы результаты работы и их практическая значимость.

В главе 0 изложены определения основных объектов исследования, их свойства, а также некоторые вспомогательные утверждения, не принадлежащие автору, со ссылками на первоисточники. В числе прочего, в главе 0 изложены следующие определения.

Пусть $m \geqslant 2$, $\{I_i = [a_i,b_i]\}_{i=1}^m$ — подотрезки [0,1], не пересекающиеся по внутренности, $b_j \leqslant a_{j+1}$, $\{\rho_i\}_{i=1}^m$ — набор положительных чисел, таких что $\sum\limits_{i=1}^m \rho_i = 1$, $\{e_i\}_{i=1}^m$ — булевские величины. Определим семейство аффинных преобразований

$$S_i(t) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i)\, t, & e_i = 0, \\ b_i - (b_i - a_i)\, t, & e_i = 1, \end{cases}$$

сжимающих [0,1] на $I_i$ и меняющих ориентацию, если $e_i = 1$.

Определим оператор $\mathcal{S}$, действующий в $L_\infty[0,1]$ следующим образом:

$$\mathcal{S}(f) = \sum_{i=1}^m \left(\chi_{I_i}(e_i + (-1)^{e_i} f \circ S_i^{-1}) + \chi_{\{x>b_i\}}\right) \rho_i.$$

Оператор $\mathcal{S}$ сжимает график $f$ на отрезки $I_i$ и продолжает функцию константами на промежуточных интервалах.

**Предложение 1. ([12, Лемма 2.1])** *Оператор* $\mathcal{S}$ *— сжатие в* $L_\infty[0,1]$.

Отсюда по теореме Банаха о неподвижной точке существует (единственная) функция $\mathscr{C} \in L_\infty[0,1]$ такая, что $\mathcal{S}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.

Функция $\mathscr{C}(t)$ называется *обобщенной канторовой лестницей* с $m$ ступеньками. Ее можно искать как равномерный предел последовательности $\mathcal{S}^k(f)$ для $f(t) \equiv t$, что позволяет считать ее непрерывной и монотонной, причем $\mathscr{C}(0) = 0$, $\mathscr{C}(1) = 1$. Обобщенная производная функции $\mathscr{C}(t)$ — сингулярная мера $\mu$ без атомов, самоподобная по Хатчинсону, т.е. для любого измеримого множества $E$ удовлетворяющая соотношению

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \cdot \mu(S_i^{-1}(E \cap I_i)).$$

**Замечание 1.** Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 = 0$, $b_m = 1$.

**Определение 1.** Самоподобие будем называть *арифметическим*, если логарифмы величин $\rho_i(b_i - a_i)$ соизмеримы. Иначе говоря,

$$\rho_i(b_i - a_i) = \tau^{k_i}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

для некоторой постоянной $\tau$ и $k_i \in \mathbb{N}$, таких, что НОД$(k_i, i = 1, \ldots, m) = 1$. Будем говорить, что имеет место резонанс $k_1{:}k_2{:}\ldots{:}k_m$.

В противном случае самоподобие называется *неарифметическим.*

Будем называть обобщенную канторову лестницу *ровной*, если

$$\rho_i = \rho_1 = \frac{1}{m}, \quad b_i - a_i = b_1 - a_1, \quad a_i - b_{i-1} = a_2 - b_1 > 0, \qquad i = 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Именно такой класс лестниц рассмотрен в работе [6].

В главе 1 формула (4) из теоремы A доказывается для арифметически самоподобных лестниц в случае резонанса $1 : 1 : \ldots : 1$ с ненулевыми промежуточными интервалами:

$$a_i - b_{i-1} > 0, \quad k_i = k_1 = 1, \qquad i = 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Заметим, что в доказательстве теоремы A для "ровных" лестниц важную роль играет *спектральная периодичность* для задач Неймана и Робена.

Для рассматриваемого в данной главе класса мер спектральная периодичность имеет место для задачи Неймана. Для задачи же Робена доказывается более слабое свойство *спектральной квазипериодичности.*

Основные результаты главы 1 следующие:

**Теорема 1.** ***(Спектральная периодичность для задачи Неймана)*** *Пусть самоподобная мера* $\mu$ *удовлетворяет условиям* (6), *и* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений задачи* (1). *Тогда при всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\tau\lambda_{mn} = \lambda_n, \tag{7}$$

*где* $\tau$ *введена в определении 1.*

**Теорема 2.** ***(спектральная квазипериодичность для задачи Робена)*** *Пусть самоподобная мера* $\mu$ *удовлетворяет условиям* (6). *Пусть* $\{\mu_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ — *занумерованные в порядке возрастания собственные значения задачи*

$$-y'' = \lambda\mu y, \qquad y'(0) - \gamma^{(1)}y(0) = y'(1) + \gamma^{(1)}y(1) = 0,$$

*а* $\{\mu_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ — *собственные значения задачи*

$$-y'' = \lambda\mu y, \qquad y'(0) - \gamma^{(2)}y(0) = y'(1) + \gamma^{(2)}y(1) = 0.$$

*Тогда существуют значения* $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)} \geqslant 0$, *определяемые параметрами самоподобия, такие что при всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\tau\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} \leqslant \mu^{(1)}_n.$$

**Теорема 3.** *Пусть самоподобная мера* $\mu$ *удовлетворяет условиям* (6). *Тогда коэффициент* $s$ *из асимптотики* (3) *допускает представление*

$$\forall t \in [0,T] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

*где* $\sigma$ — *некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.*

В главе 2 формула (4) доказывается для случая общего резонанса, то есть для арифметически самоподобных мер с единственным ограничением:

$$a_i - b_{i-1} > 0, \qquad i = 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Для таких мер в общем случае не выполняется свойство спектральной квазипериодичности, поэтому схема доказательства существенно меняется.

Обозначим через $\lambda_n([a,b])$, $n \geqslant 0$, собственные числа задачи Неймана

$$-y'' = \lambda\mu y, \qquad y'(a) = y'(b) = 0,$$

а через $N(\lambda, [a,b]) = \#\{n : \lambda_n([a,b]) < \lambda\}$ их считающую функцию.

Следующие утверждения позволяют связать спектр задачи на отрезке со спектрами задач на подотрезках, содержащих носитель меры.

**Теорема 4.** *Пусть $J_1 = [c_1, d_1]$, $J_2 = [c_2, d_2]$ — подотрезки $[0,1]$, и пусть $c_2 - d_1 \geqslant 0$, а $\mu|_{[d_1,c_2]} \equiv 0$. Обозначим $J := [c_1, d_2]$. Тогда функция*

$$F(\lambda) := N(\lambda, J) - N(\lambda, J_1) - N(\lambda, J_2) \tag{9}$$

*имеет разрывы в точках $\lambda_n(J)$, $\lambda_n(J_1)$, $\lambda_n(J_2)$. При этом элементы наборов $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^\infty$ и $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^\infty \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^\infty$ нестрого чередуются начиная с элемента второго набора. Более того, в точках из $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^\infty \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^\infty$ функция $F$ меняет значение с 0 на $-1$, а в точках из $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^\infty$, не содержащихся в $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^\infty \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^\infty$, меняет значение с $-1$ на 0.*

**Теорема 5.** *Пусть выполнены условия Теоремы 4, и пусть $c_2 - d_1 > 0$. Обозначим за $\{\mu_n(J)\}_{n=0}^\infty$ элементы набора $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^\infty \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^\infty$, занумерованные в возрастающем порядке. Тогда*

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\ln \lambda_n(J) - \ln \mu_n(J)| < +\infty.$$

**Теорема 6.** *Пусть самоподобная мера $\mu$ удовлетворяет условиям (8). Тогда коэффициент $s$ из асимптотики (3) допускает представление*

$$\forall t \in [0,T] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

*где $\sigma$ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.*

В главе 3 доказываются общие теоремы об асимптотике спектра тензорного произведения компактных операторов с почти регулярной спектральной асимптотикой. Эти теоремы позволяют перенести результаты о виде асимптотики 3 на некоторые компактные операторы типа тензорного произведения, а также в некоторых случаях перенести на полученные асимптотики результат о непостоянстве периодической компоненты (теоремы А, 3, 6).

Рассматриваются компактные неотрицательные самосопряженные операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}$ и $\widetilde{\mathcal{H}}$ соответственно. Через $\lambda_n = \lambda_n(\mathcal{T})$ обозначены собственные числа оператора $\mathcal{T}$, упорядоченные по убыванию с учетом кратности. Определяется считающая функция

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(t, \mathcal{T}) = \#\{n : \lambda_n(\mathcal{T}) > t\}.$$

Аналогично определяются $\widetilde{\lambda}_n$ и $\widetilde{\mathcal{N}}(t)$ для оператора $\widetilde{\mathcal{T}}$.

Имея заданные при $t \to 0$ асимптотики $\mathcal{N}(t, \mathcal{T})$ и $\mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}})$, мы хотим установить асимптотику $\mathcal{N}(t, \mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}})$. Полученные результаты легко обобщаются на случай тензорных произведений нескольких сомножителей.

В диссертации изучаются операторы с почти регулярной асимптотикой

$$\mathcal{N}(t, \mathcal{T}) \sim \frac{\varphi(1/t) \cdot s(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \qquad t \to +0, \tag{10}$$

где $p > 0$, $\varphi$ — медленно меняющаяся, а $s$ — непрерывная $T$-периодическая функция. Примерами таких операторов являются гриновские интегральные операторы с сингулярной арифметически самоподобной весовой мерой.

В главе 3 получен главный член спектральной асимптотики тензорного произведения для всех возможных комбинаций параметров маргинальных асимптотик. Рассматриваются оператор $\mathcal{T}$ со спектральной асимптотикой (10) и оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$, имеющий либо асимптотику

$$\mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) = O(t^{-1/\widetilde{p}}), \quad t \to 0+, \qquad \widetilde{p} > p,$$

либо аналогичную (10) асимптотику

$$\mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) \sim \frac{\widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \widetilde{s}(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \qquad t \to +0, \tag{11}$$

где $\widetilde{\varphi}$ — медленно меняющаяся функция, $\widetilde{s}$ имеет период $\widetilde{T}$. Результаты разделены на несколько случаев:

1. $\widetilde{p} > p$.
2. $\widetilde{p} = p$.
   2.1. $\int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\dfrac{d\sigma}{\sigma} = \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\sigma)\dfrac{d\sigma}{\sigma} = \infty$.
      2.1.1. Периоды $T$ и $\widetilde{T}$ функций $s$ и $\widetilde{s}$ соизмеримы.
      2.1.2. Периоды $T$ и $\widetilde{T}$ несоизмеримы.
   2.2. $\int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\dfrac{d\sigma}{\sigma} < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\sigma)\dfrac{d\sigma}{\sigma} = \infty$.
   2.3. $\int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\dfrac{d\sigma}{\sigma} < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\sigma)\dfrac{d\sigma}{\sigma} < \infty$.

В случаях 1, 2.1.1 спектральная асимптотика для $\mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}}$ оказывается почти регулярной, в случае 2.1.2 – регулярной. В случаях 2.2 и 2.3 получается асимптотика более сложного вида (см. формулы (17), (18)).

**Лемма 1.** *В формуле* (10) *функция $s$ имеет вид $s(\tau) = e^{-\tau/p}\varrho(\tau)$, где $\varrho$ — монотонная функция, и значит $s$ — функция ограниченной вариации.*

**Теорема 7.** *Пусть выполнено соотношение* (10)*, и*

$$\widetilde{\mathcal{N}}(t) := \widetilde{\mathcal{N}}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) = O(t^{-1/\widetilde{p}}), \quad t \to 0+, \qquad \widetilde{p} > p.$$

*Тогда оператор $\mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}}$ в пространстве $\mathcal{H} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}$ имеет асимптотику*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) := \mathcal{N}(t, \mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}}) \sim \frac{\varphi(1/t) \cdot s^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \quad t \to +0, \tag{12}$$

*где*

$$s^*(\tau) := \sum_k s(\tau + \ln(\widetilde{\lambda}_k)) \cdot \widetilde{\lambda}_k^{1/p} \tag{13}$$

*— периодическая функция с периодом $T$ (ряд сходится, поскольку $\widetilde{p} > p$).*

**Замечание 2.** Отметим, что если функция $s$ имеет структуру (4), то такую же структуру имеет и функция $s^*$ в формуле (13). В случае периодической функции $s$ общего вида функция $s^*$ может вырождаться в константу.

**Теорема 8.** *Пусть оператор $\mathcal{T}$ имеет спектральную асимптотику (10), а оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$ — асимптотику (11). Тогда при $\varepsilon > 0$ выполняются оценки*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \lessgtr \frac{\alpha_\pm(\varepsilon)}{t^{1/p}} \cdot \left[ S(t,\varepsilon) + \widetilde{S}(t,\varepsilon) + \int\limits_{\alpha_\mp(\varepsilon)/\varepsilon}^{\varepsilon\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{s}(\ln\sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} \right]$$

*равномерно по $t > 0$. Здесь $\tau = \alpha_\pm(\varepsilon)/t$. Коэффициенты $\alpha_\pm(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, а функции $S(t,\varepsilon)$, $\widetilde{S}(t,\varepsilon)$ имеют следующие асимптотики при $t \to +0$:*

$$S(t,\varepsilon) \sim \varphi(1/t) \cdot \sum_{\widetilde{\lambda}_k \geqslant \varepsilon} s(\ln(1/t) + \ln(\widetilde{\lambda}_k))\widetilde{\lambda}_k^{1/p},$$

$$\widetilde{S}(t,\varepsilon) \sim \widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \Big( \sum_{\lambda_k \geqslant \varepsilon} \widetilde{s}(\ln(\tau) + \ln(\lambda_k))\lambda_k^{1/p} + \varphi(1/\varepsilon) s(\ln(1/\varepsilon))\widetilde{s}(\ln(\tau\varepsilon)) \Big).$$

В теоремах 9–11 мы предполагаем, что

$$\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty. \tag{14}$$

**Теорема 9.** *Пусть выполнены условия Теоремы 8. Пусть, кроме того, выполняется соотношение (14), а периоды $s$ и $\widetilde{s}$ совпадают и равны $T$. Тогда*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\phi(1/t) \cdot s_\otimes(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

*где $\phi(s) := (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$ — медленно меняющаяся функция,*

$$s_\otimes(\eta) = \frac{(s \star \widetilde{s})(\eta)}{p} + (s \star \widetilde{s})'(\eta) = e^{-\eta/p}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(\eta - \sigma) d\widetilde{\varrho}(\sigma) \tag{15}$$

*— непрерывная положительная $T$-периодическая функция.*

**Теорема 10.** *Пусть выполнены условия Теоремы 8, соотношение (14), а периоды $T$ и $\widetilde{T}$ функций $s$ и $\widetilde{s}$ несоизмеримы. Тогда*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\psi(1/t)\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

*где $\phi(s) = (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$, $\psi(t)$ — некоторая ограниченная и отделенная от нуля медленно меняющаяся функция.*

**Теорема 11.** *Пусть выполнены условия Теоремы 10. Потребуем дополнительно, чтобы для функций $\varphi$ и $\widetilde{\varphi}$ были ограничены следующие величины:*

$$\left|\frac{\sigma \ln(\sigma)\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\right| \leqslant C, \quad \left|\frac{\sigma \ln(\sigma)\widetilde{\varphi}'(\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\sigma)}\right| \leqslant C, \qquad \sigma \geqslant 1. \tag{16}$$

*Тогда*

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{\mathfrak{C}\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

*где $\phi(s) = (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$, а константа $\mathfrak{C}$ определена следующим соотношением:*

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{T} \int\limits_0^T s(t)dt \cdot \frac{1}{\widetilde{T}} \int\limits_0^{\widetilde{T}} \widetilde{s}(t)dt.$$

В случаях 2.2 и 2.3 при некоторых технических ограничениях получены асимптотики

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{h_{\tilde{\varphi},\varphi}(1/t) \cdot s_{\otimes}(\ln(1/t)) + \widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}} \tag{17}$$

и

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{\varphi(1/t) \cdot s^*(\ln(1/t)) + \widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}} \tag{18}$$

соответственно, где $s_{\otimes}$ определена в (15), $s^*$ определена в (13), а

$$\widetilde{s}^*(\tau) = \sum_n \widetilde{s}(\tau + \ln(\lambda_n))\lambda_n^{1/p}.$$

Применение полученных общих теорем продемонстрировано на примере интегральных операторов, отвечающих изученным в главах 1 и 2 задачам.

В § 3 главы 3 полученные результаты применяются к задаче $L_2$-малых уклонений случайных гауссовских полей, в частности, малых уклонений броуновского листа в единичном кубе с нормой $L_2(\mu)$, где $\mu = \bigotimes\limits_{j=1}^{d} \mu_j$, и каждая из мер $\mu_j$ является самоподобной мерой обобщенного канторовского типа.

В заключении перечисляются основные результаты диссертации, а также предлагаются возможные направления для дальнейшей работы.

## Список литературы

1. *Борзов В. В.* О количественных характеристиках сингулярных мер // Проблемы математической физики. — 1970. — Т. 4. — С. 42—47.

2. *Владимиров А. А.* Об одном классе сингулярных задач Штурма–Лиувилля [Электронный ресурс] // arXiv.org. — 2012. — https://arxiv.org/abs/1211.2009.

3. *Владимиров А. А.* Осцилляционный метод в задаче о спектре дифференциального оператора четвертого порядка с самоподобным весом // Алгебра и анализ. — 2015. — Т. 27, № 2. — С. 83—95.

4. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* Асимптотика собственных значений задачи высшего четного порядка с дискретным самоподобным весом // Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24, № 2. — С. 104—119.

5. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* Асимптотика собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с дискретным самоподобным весом // Мат. заметки. — 2010. — Т. 88, № 5. — С. 662—672.

6. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа // Функциональный анализ и его приложения. — 2013. — Т. 47, № 4. — С. 18—29.

7. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом // Мат. сборник. — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 13—30.

8. *Крейн М. Г.* Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру // ДАН СССР. — 1951. — Т. 76, № 3. — С. 345—348.

9. *Назаров А. И.* Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских случайных процессов в $L_2$-норме относительно самоподобной меры // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 311. — С. 190—213.

10. *Савчук А. М.*, *Шкаликов А. А.* Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функциональный анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 4. — С. 34—53.

11. *Тихонов Ю. В.*, *Шейпак И. А.* Об уравнении струны с сингулярным весом из пространства мультипликаторов в пространствах Соболева с отрицательным показателем гладкости // Изв. РАН. Серия матем. — 2016. — Т. 80, № 6. — С. 258—273.

12. *Шейпак И. А.* О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$ // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 924—938.

13. *Freiberg U.* Refinement of the spectral asymptotics of generalized Krein Feller operators // Forum Mathematicum. Т. 23. — 2011. — С. 427—445.

14. *Fujita T.* A fractional dimension, self-similarity and a generalized diffusion operator // Probab. methods on math. physics, Proc. Taniguchi Symp. — 1987. — С. 83—90.

15. *Karol A.*, *Nazarov A.*, *Nikitin Y.* Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators // Trans. AMS. — 2008. — Т. 360, № 3. — С. 1443—1474.

16. *Kigami J.*, *Lapidus M. L.* Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on pcf self-similar fractals // Comm. Math. Phys. — 1993. — Т. 158, № 1. — С. 93—125.

17. *Luschgy H.*, *Pagès G.* Sharp asymptotics of the functional quantization problem for Gaussian processes // Ann. Probab. — 2004. — Т. 32, № 2. — С. 1574—1599.

18. *Nazarov A. I.*, *Sheipak I.* Degenerate self-similar measures, spectral asymptotics and small deviations of Gaussian processes // Bull. LMS. — 2012. — Т. 44, № 1. — С. 12—24.

19. *Papageorgiou A.*, *Wasilkowski G. W.* On the average complexity of multivariate problems // Journal of Complexity. — 1990. — Т. 6, № 1. — С. 1—23.

20. *Solomyak M.*, *Verbitsky E.* On a Spectral Problem Related to Self-Similar Measures // Bull. LMS. — 1995. — Т. 27, № 3. — С. 242—248.

## Публикации автора по теме диссертации

## Публикации в рецензируемых изданиях

21. *Растегаев Н. В.* Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с арифметически самоподобным весом обобщенного канторовского типа // Функ. ан. и прил. — 2018. — Т. 52, № 1. — С. 85—88.

22. *Растегаев Н. В.* Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом обобщенного канторовского типа // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2014. — Т. 425. — С. 86—98. — [J. Math. Sci. (N. Y.), 210:6 (2015), 814—821].

23. *Растегаев Н. В.* Об асимптотике спектра тензорного произведения операторов с почти регулярными маргинальными асимптотиками // Алгебра и анализ. — 2017. — Т. 29, № 6. — С. 197—229.

## Тезисы докладов

24. *Rastegaev N. V.* On spectral asymptotics of the mixed boundary value problems for the Sturm–Liouville equation with generalized Cantor type weight // Междунар. конф. "Спектр. теория и дифф. ур-ния". — Мск, 2014. — С. 30—31.

25. *Rastegaev N. V.* On spectral asymptotics of the Neumann problem for the Sturm-Liouville equation with arithmetically self-similar singular weight // XXVI Summer Meeting in Math. Analysis. — СПб, 2017. — С. 22.

26. *Rastegaev N. V.* On spectral asymptotics of the tensor product of operators with almost regular marginal asymptotics // Int. conf. DD-2016. — СПб, 2016. — С. 107—108.

27. *Rastegaev N. V.* Spectral asymptotics of operators of the tensor product type with almost regular marginal asymptotics // 8th Conf. in Spectral Theory. — СПб, 2016. — С. 18.