На правах рукописи

Попов Сергей Альбертович

Локализация инвариантных множеств и аттракторов эволюционных систем, связанных с одно и двух-фазовой задачами нагрева и их численная реконструкция с помощью метода Такенса

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	**Райтманн Фолькер,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета
Официальные оппоненты:	**Буркин Игорь Михайлович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Тульского государственного университета
	Иванов Борис Филиппович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В.И. Ульянова (Ленина)

Защита состоится «__» ____________ 2018 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте: https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/details/14/1680.html.

Автореферат разослан «__» ____________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.49,
доктор физико-математических наук — Чурин Ю.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

В диссертации изучаются условия существования и локализации инвариантных множеств и аттракторов для эволюционных систем, которые, в частности, порождаются одно- и двухфазовыми задачами нагрева и задачей нагрева стержня. Кроме того, в диссертации изучаются вопросы ограниченности решений эволюционных систем. На основе этой теории формулируются условия ограниченности решений микроволновой задачи нагрева. Также рассматривается лакализация множества аменабельных по Смиту [5] решений с помощью построения конечномерного проектора. Численные эксперименты проводятся с помощью модифицированного метода вложения Такенса-Робинсона.

Актуальность темы. Эволюционные системы, порожденные задачей микроволнового нагрева [3], широко используются в настоящее время в различных областях медицины и промышленности. Часто в прикладных процессах играет важную роль вопрос существования и локализации инвариантных множеств и аттракторов таких эволюционных систем. Под локализацией таких множеств мы подразумеваем построение положительно инвариантных множеств, которые содержат в себе данные множества. В книге [1] для определенных классов эволюционных уравнений предлагаются методы построения и локализации таких инвариантных множеств и аттракторов. Также актуальным является использование частотной теоремы Лихтарникова-Якубовича [2] для исследования устойчивости и локализации эволюционных систем, порожденных задачей микроволнового нагрева.

Зачастую, вместо того чтобы рассматривать аттрактор, оказывается удобнее рассматривать класс так называемых аменабельных (допустимых) решений, который впервые был введен Р. А. Смитом [5] для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Кроме изучения заданных в явной форме уравнений, в практической деятельности часто встречаются ситауции, когда имеется только некоторая последовательность наблюдений за состоянием системы. В данном случае актуальной является задача построения вспомогательной системы путем вложения исходного фазового пространства в некоторое конечномерное пространство. Данная задача впервые была рассмотрена Ф. Такенсом для семейства топологически типичных гладких динамических систем, заданных на конечномерных многообразиях. Позднее результаты Такенса были обобщены для случая систем на произвольном банаховом пространстве Робинсоном [4]. Актуальным является модификация этого метода на случай эволюционных систем, связанных с задачей нагрева. Также Робинсоном было введено понятие превалентности - метрического аналога свойства топологической типичности для таких систем.

Актуальность темы подтверждается так же тем, что она входит в число исследований, поддержанных Немецко-Российским научным центром (G-RISC). Диссертант получал поддержку от G-RISC в виде стажировки в Германии, Дрезден, Институт Физики Комплексных Систем имени Макса Планка в ноябре 2012 г.

Цель работы. Целью работы является развитие метода локализации инвариантных множеств и аттракторов, основанного на методе Ляпунова для эволюционных систем, включающих задачу одно- и двухфазового микроволнового нагрева. В частности, ставится задача построения конечномерных проекторов для таких систем и разработка эффективного численного подхода, основанного на модификации метода Такенса-Робинсона.

Методы исследования. В диссертации используются следующие методы исследования:

- Построение функционалов типа Ляпунова в виде квадратичных форм в функциональных пространствах.
- Частотный метод для построения функционала типа Ляпунова для эволюционных систем на основе частотной теоремы Лихтарникова-Якубовича.
- Численная аппроксимация аттрактора задачи микроволнового нагрева методом Такенса-Робинсона с использованием языка программирования Python.

Результаты, выносимые на защиту.

- Доказано существование положительно инвариантного выпуклого множества для эволюционных систем с нелинейностью типа Клейна-Гордона.
- Получены достаточные условия ограниченности решений эволюционных систем с нелинейностью типа Клейна-Гордона.
- Приведены условия ограниченности решений двухфазовой задачи нагрева.
- Предложен метод построения проекторов для эволюционной системы, порожденной системой микроволнового нагрева.
- Доказано существование проектора из множества аменабельных решений эволюционных уравнений на некоторое подмножество конечномерного пространства

- Проведены численные исследования одномерной задачи микроволнового нагрева с помощью модифицированного метода вложения Такенса-Робинсона.

Достоверность результатов. Все полученные результаты математически строго доказаны.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми. Впервые вводится понятие аменабельных решений для эволюционных систем и доказывается существование проекторов для таких решений.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные условия ограниченности решений для задач микроволнового нагрева могут быть использованы для контроля за температурой нагреваемого материала, в частности, при стерилизации продуктов питания.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались на международных конференциях "The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications"(Орландо, Флорида, США, 2012), "Science and Progress"в рамках научного центра G-RISC (Санкт-Петербург, 2011), “The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations” (Москва, 2017), на семинарах кафедры прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета (2010 – 2013).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 печатных работах, в том числе в четырех статьях. Статьи [1*,2*] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и индексируемых системой Scopus. В работах [1*,3*,4*] соавтору (научному руководителю) принадлежит постановка задачи, диссертанту принадлежат все основные теоретические результаты и численное моделирование. В работе [6*] диссертанту принадлежат результаты по ограниченности решений.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, разбитых на 15 разделов, заключения, списка литературы, включающего 62 наименования, изложена на 112 страницах машинописного текста и содержит 3 рисунка.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе рассмотрены вопросы существования решения для класса эволюционных уравнений с монотонной нелинейностью. Также здесь изучаются эволюционные уравнения с нелинейностью типа Клейна-Гордона. При этом используется метод положительно инвариантных конусов.

Пусть $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1}$ - оснащение вещественного гильбертова пространства $\mathcal{V}_0$ (или так называемая гильбертова тройка) [2]. Обозначим через $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}_j}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_j}$, $j=1,0,-1$, скалярное произведение и норму в $\mathcal{V}_j (j=1,0,-1)$ соответственно, и через $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1}$ - скобку двойственности между $\mathcal{V}_{-1}$ и $\mathcal{V}_1$. Пусть $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_{-1})$ - линейный ограниченный оператор, $b_0 \in \mathcal{V}_{-1}$ - обобщённый вектор, $c_0 \in \mathcal{V}_0$ - вектор и $d_0 \le 0$ - число. Введем линейные ограниченные операторы $C_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_0, \mathbb{R})$ и $B_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{V}_{-1})$, соответствующие векторам c_0 и b_0, которые определяются следующим образом: $C_0\nu = (c_0, \nu)_{\mathcal{V}_0},\ \forall\ \nu \in \mathcal{V}_0$, и $B_0\xi := \xi b_0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - две скалярных функции. Рассмотрим систему непрямого управления

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= A_0\nu + b_0[\phi(t,w) + g(t)]\,, \\ \dot{w} &= (c_0,\nu)_{\mathcal{V}_0} + d_0[\phi(t,w) + g(t)]\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Перепишем систему (1) как систему управления в стандартном виде. Для этого рассмотрим гильбертову тройку пространств $Z_1 \subset Z_0 \subset Z_{-1}$, где $Z_j := \mathcal{V}_j \times \mathbb{R}$, $j = 1,0,-1$. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{Z_j}$ в Z_j вводится соотношением $\big((\nu_1,w_1),(\nu_2,w_2)\big)_{Z_j} := (\nu_1,\nu_2)_{\mathcal{V}_j} + w_1 w_2,\ (\nu_1,w_1),(\nu_2,w_2) \in Z_j$. Скобка двойственности между Z_{-1} и Z_1 определяется следующим образом:

$$((h,\xi),(\nu,\varsigma))_{Z_{-1},Z_1} := (h,\nu)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1} + \xi\,\varsigma,\ \forall\ (h,\xi) \in Z_{-1}, (\nu,\varsigma) \in Z_1.$$

Пусть $\hat{b} := \begin{bmatrix} b_0 \\ d_0 \end{bmatrix} \in Z_{-1}$ и $\hat{c} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in Z_0$, а операторы $\hat{C} \in \mathcal{L}(Z_0,\mathbb{R})$ и $\hat{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Z_{-1})$ задаются как

$$\hat{C}z = (\hat{c}, z)_{Z_0}\,, \quad \forall\, z \in Z_0\,, \qquad \hat{B}\xi = \xi\hat{b}\,, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Также введем оператор $\hat{A} \in \mathcal{L}(Z_1, Z_{-1})$, который определяется следующим образом

$$\hat{A} := \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}\,[\phi(t,w) + g(t)]\,,\ w = \hat{C}z\,. \tag{2}$$

Данная система эквивалентна (1) при $z := \begin{bmatrix} \nu \\ w \end{bmatrix}$.

Для произвольных $-\infty \le T_1 < T_2 \le +\infty$ определим норму для измеримых функций по Бохнеру в $L^2(T_1,T_2;Z_j)$, $j=1,0,-1$ соотношением

$$\|z\|_{2,j} := \left(\int_{T_1}^{T_2} \|z(t)\|_j^2 \, dt \right)^{1/2} \quad . \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{W}(T_1,T_2;Z_1,Z_{-1})$ - пространство функций z таких, что $z \in L^2(T_1,T_2;Z_1)$, $\dot z \in L^2(T_1,T_2;Z_{-1})$. Норму в пространстве $\mathcal{W}(T_1,T_2;Z_1,Z_{-1})$ определим следующим образом

$$\|z\|_{\mathcal{W}(T_1,T_2;Z_1,Z_{-1})} := \left(\|z\|_{2,1}^2 + \|\dot z\|_{2,-1}^2 \right)^{1/2} \ . \tag{4}$$

Далее введём предположения **(A.1.1)** – **(A.1.6)** относительно оператора $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_{-1})$, векторов $b_0 \in \mathcal{V}_{-1}$ и $c_0 \in \mathcal{V}_0$ и функций ϕ и g.

(A.1.1) Для любого $T>0$ и любой $f=(f_1,f_2) \in L^2(0,T;\mathcal{V}_{-1}\times\mathbb{R})$ задача

$$\dot\nu = A_0\nu + f_1(t), \tag{5}$$
$$\dot w = (c_0,\nu)_{\mathcal{V}_0} + f_2(t), \tag{6}$$
$$(\nu(0),w(0)) = (\nu_0,w_0) \tag{7}$$

корректно поставлена, то есть для произвольных $(\nu_0,w_0) \in Z_0$, $(f_1,f_2) \in L^2(0,T;Z_{-1})$ существует единственное решение $(\nu,w) \in \mathcal{W}(0,T;Z_1,Z_{-1})$, удовлетворяющее (5)–(7) в вариационном смысле, и которое непрерывно зависит от начальных данных, то есть для некоторых констант $k_3>0$ и $k_4>0$ выполнено неравенство

$$\|(\nu,w)\|^2_{\mathcal{W}(0,T;Z_1,Z_{-1})} \le k_3\|(\nu_0,w_0)\|^2_{Z_0} + k_4\|(f_1,f_2)\|^2_{2,-1} \ . \tag{8}$$

(A.1.2) Существует $\lambda>0$ такое, что $A_0+\lambda I$ - гурвицев оператор.

(A.1.3) Для любых $T>0$, $(\nu_0,w_0)\in Z_1$, $(\tilde\nu_0,\tilde w_0)\in Z_1$ и $(f_1,f_2)\in L^2(0,T;Z_1)$ решение прямой задачи (5)–(7) и решение двойственной задачи

$$\dot{\tilde\nu} = -(A_0^* + \lambda\, I)\tilde\nu + f_1(t), \tag{9}$$
$$\dot{\tilde w} = -C_0^*\tilde w - \lambda\,\tilde w + f_2(t), \tag{10}$$
$$(\tilde\nu(0),\tilde w(0)) = (\tilde\nu_0,\tilde w_0) \tag{11}$$

непрерывны по t в сильном смысле по норме пространства Z_1.

Здесь $A_0^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_0)$ обозначает сопряженный к A_0 оператор, т. е. $(A_0 y,\eta)_{-1,1} = (y,A_0^*\eta)_{-1,1}$, $\forall y,\eta\in\mathcal{V}_1$.

(A.1.4) Пара (A_0, b_0) - L^2 - *управляема*, то есть для произвольного $\nu_0 \in \mathcal{V}_0$ существует управление $\xi(\cdot) \in L^2(0,\infty;\mathbb{R})$ такое, что задача

$$\dot{\nu} = A_0\nu + b_0\xi\ , \quad \nu(0) = \nu_0$$

корректно поставлена в вариационном смысле на $(0,\infty)$.

Обозначим через A_0^c, b_0^c, c_0^c и Z_0^c комплексификацию A_0, b_0, c_0 и Z_0, соответственно. Введём передаточную функцию для тройки (A_0^c, b_0^c, c_0^c) как

$$\chi(p) = \left(c_0^c, (A_0^c - pI^c)^{-1}\, b_0^c\right)_{Z_0^c}, \quad p \in \rho(A_0^c).$$

(A.1.5) Для $\lambda > 0$ из предположения **(A.1.2)** и некоторого $\kappa_1 > 0$ - выполнено

$$\lambda d_0 + \mathrm{Re}\,(-i\omega - \lambda)\chi(i\omega - \lambda) + \kappa_1\,|\,\chi(i\omega - \lambda) - d_0\,|^2 \le 0\,, \quad \forall\,\omega \ge 0\,. \tag{12}$$

(A.1.6) Функция $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\phi(t,0) = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывна. Существуют числа $\kappa_1 > 0$ (из **(A.1.5)**), $0 \le \kappa_2 < \kappa_3 < +\infty, \beta_1 < \beta_2$ и $\zeta_2 < \zeta_1$ такие, что

a) $$\beta_1 < g(t) < \beta_2\,,\ \text{п. в. } t \in \mathbb{R};$$

b) $$(\phi(t,w) + \beta_i)(w - \zeta_i) \le \kappa_1 (w - \zeta_i)^2,\ i = 1,2,$$
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\,;$$

c) $$\kappa_2 (w_1 - w_2)^2 \le (\phi(t,w_1) - \phi(t,w_2))(w_1 - w_2) \le \kappa_3 (w_1 - w_2)^2,$$
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, w_1, w_2 \in [\zeta_2, \zeta_1]\,.$$

Замечание 1. *Гиперболические уравнения с нелинейностью, обладающей свойствами* b) *и* c)*, называются уравнениями типа Клейна-Гордона. Параболические уравнения с такими нелинейностями называются уравнениями типа Чэфи-Инфанте. Для конечномерного случая такие нелинейности называются нелинейностями типа Дуффинга.*

(A.1.7) Пространство Z_0 можно разложить в виде $Z_0 = Z_0^+ \oplus Z_0^-$ так, что верно следующее:

a) Для каждого $z_0 \in Z_0^+$ мы имеем $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,z_0) = 0$, и для каждого $z_0 \in Z_0^-$ существует единственное решение $z_-(t) = z(t,z_0)$ системы (1), определённое на $(-\infty,0)$, такое, что $\lim\limits_{t\to-\infty} z_-(t) = 0$ и $(c, z(t,z_0))_0 = 0, \forall\, t \ge 0$ тогда и только тогда, когда $z_0 = 0$.

b) Для каждого $z_0 \in Z_0^+$ равенство $(c, z(t, z_0))_0 = 0, \forall\, t \le 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $z_0 = 0$, и для каждого $z_0 \in Z_0^-$ равенство $(c, z(t, z_0))_0 = 0, \forall t \le 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $z_0 = 0$.

Доказывается следующая теорема, которая дает существование положительно инвариантного выпуклого множества для системы (1).

Теорема 1. *Предположим, что для системы (1) выполнены* **(A.1.1)** – **(A.1.7)**. *Тогда существует замкнутое, положительно инвариантное и выпуклое множество* $\mathscr{G}$ *такое, что*

$$\{(\nu, w) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R} \,|\, \nu = 0, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\} \subset \mathscr{G} \subset \{(\nu, w) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R} \,|\, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\}\,.$$

Далее в первой главе рассматривается задача нагрева стержня.

$$\theta_t = \delta_1 \theta_{xx} - \delta_2 \theta, \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{13}$$
$$\theta_{x_{|x=0}} = 0, \theta_{x_{|x=1}} + \delta_3 \theta_{|x=1} = \delta_4[\phi(t,w) + g(t)], \qquad t > 0, \tag{14}$$
$$\theta_{|t=0} = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{15}$$
$$\dot{w} = \int_0^1 \theta(x,t) k(x) dx + \delta_5[\phi(t,w) + g(t)], \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{16}$$
$$\phi(t,w) = w - \delta_6 w^3, \qquad t > 0, \tag{17}$$

где $\theta(x,t)$ - температура стержня в точке x в момент времени t, δ_1 - положительный коэффициент теплопроводности, δ_2 - положительный коэффициент оттока тепла. Величину $-\delta_2\theta$ можно интерпретировать как охлаждение вдоль стержня. $\delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}, \delta_5 < 0, \delta_6 \ge 0$, w - мощность теплового источника, k - некоторая непрерывная скалярная неотрицательная функция, g - непрерывная скалярная функция, ϕ - некоторая гладкая функция.

Для данной задачи проверяются условия полученных теоретических результатов.

В конце первой главы приведены условия ограниченности решений эволюционных систем с периодической нелинейностью и рассматривается локализация инвариантного множества данной системы на конусной сетке.

Во второй главе рассматриваются дважды нелинейные эволюционные уравнения с нелинейностями в правой и левой частях. Для таких систем приведены достаточные условия ограниченности решений.

Рассмотрим следующую эволюционную систему, заданную на парах оснащенных гильбертовых пространств $Y_{1,1} \subset Y_{1,0} \subset Y_{1,-1}$ и $Y_{2,1} \subset Y_{2,0} \subset Y_{2,-1}$:

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1 y_1 + B_1(g_1(z_1) + g_2(z_1, z_2)),\ z_1 = C_1 y_1, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{B}_2 y_2) = A_2 y_2 + B_2 \phi_2(z_1, z_2),\ z_2 = C_2 y_2, \tag{19}$$

$$y_1(0) = y_{01}; y_2(0) = y_{02}, \tag{20}$$

где $y_i \in Y_{i,1},\ A_i : Y_{i,1} \to Y_{i,-1},\ B_i : \Xi_i \to Y_{i,-1},\ C_i : Y_{i,1} \to Z_i,\ i = 1, 2$ - линейные ограниченные операторы, $\mathbb{B}_2 : Y_{2,1} \to Y_{2,1}$ - нелинейный оператор, $g_1 : Z_1 \to \Xi_1,\ g_2 : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_2,\ \phi_2 : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_2$ - нелинейные функции, а Ξ_i и $Z_i,\ i = 1, 2$ - некоторые гильбертовы пространства. Такая система называется *дважды нелинейной парной эволюционной системой*. Важным свойством таких систем является их *гибридность*. Так первая подсистема может порождаться уравнением гиперболического типа, а вторая - параболического типа.

Определим следующие пространства $Y_1 = Y_{1,1} \times Y_{2,1},\ Y_0 = Y_{1,0} \times Y_{2,0},\ Y_{-1} = Y_{1,-1} \times Y_{2,-1}$ со скалярными произведениями

$$((y_1, w_1), (y_2, w_2))_j = (y_1, y_2)_{1,j} + (w_1, w_2)_{2,j},\ j = 1, 0, -1,\ y_1, y_2 \in Y_{1,j}, w_1, w_2 \in Y_{2,j}.$$

и соответствующими нормами. Также пусть $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ будет скобкой двойственности между Y_{-1} и Y_1.

Далее пусть $A := (A_1, A_2) : Y_1 \to Y_{-1},\ B := (B_1, B_2) : \Xi_1 \times \Xi_2 \to Y_{-1}$ и $C := (C_1, C_2) : Y_1 \to Z_1 \times Z_2$ - линейные ограниченные операторы, $\mathbf{B} := (I, \mathbf{B}_2) : Y_1 \to Y_2$ - нелинейный оператор и $\hat{\phi}(\cdot,\cdot) := (g_1(\cdot) + g_2(\cdot,\cdot), \phi_2(\cdot,\cdot)) : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_1 \times \Xi_2$ - некоторая нелинейная функция.

Тогда систему (18) – (20) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{B}y) = Ay + B\hat{\phi}(z),\ z = Cy, \tag{21}$$

$$y(0) = y_0, \tag{22}$$

где $y = (y_1, y_2),\ z = (z_1, z_2),\ y_0 = (y_{01}, y_{02})$.

Решением (21) – (22) будем называть функцию $y \in \mathcal{W}(T_1, T_2, Y_1, Y_{-1}) \cap C(T_1, T_2; Y_0)$, удовлетворяющую уравнению (21) – (22) в вариационном смысле. То есть для почти всех $t \in [T_1, T_2]$ выполнено

$$(\frac{d}{dt}(\mathbf{B}y(t)) - Ay(t) - B\hat{\phi}(z(t)), \eta - y(t))_{-1,1} = 0, \tag{23}$$

$$\forall \eta \in V_1, z(t) = Cy(t), y(0) = y_0. \tag{24}$$

Введем следующие предположения:

(A.2.1) Система (21) – (22) имеет глобальное слабое решение для любого $y_0 \in Y_1$.

(A.2.2) $Z_1 = \Xi_1 = \Xi_2 = \mathbb{R}$.

(A.2.3) Существуют κ_1, κ_2, $\kappa_1 < \kappa_2$ такие, что для функции

$$\tilde{\phi}_1(z_1, t) := g_1(z_1) + g_2(z_1, z_2(t)),$$

где $z_2(t) = C_2 y_2(t)$ и $y_2(t)$ — решение (18) – (20), выполняется

$$\kappa_1 z_1^2 \le \tilde{\phi}_1(z_1, t) z_1 \le \kappa_2 z_1^2,\ \forall z_1 \in \mathbb{R},\ t \ge 0.$$

(A.2.4) Оператор A_1 является *регулярным* [2], т. е. для любых $T > 0, y_{10} \in Y_{1,1}, \tilde{y}_{1T} \in Y_{1,1}$ и $f_1 \in L^2(0, T; Y_{1,0})$ решения прямой задачи

$$\dot{y}_1 = A_1 y_1 + f_1(t),\ \ y_1(0) = y_{10},\ \ \text{п. в. } t \in (0, T)$$

и двойственной задачи

$$\dot{\tilde{y}}_1 = -A_1^* \tilde{y}_1 + f_1(t),\ \ \tilde{y}_1(T) = \tilde{y}_{1T},\ \ \text{п. в. } t \in (0, T)$$

строго непрерывны по t по норме порстранства $Y_{1,1}$.

(A.2.5) Пара (A_1, B_1) является L^2-управляемой [2].

(A.2.6) Обозначим через A_1^c, B_1^c и C_1^c комплексификацию операторов A_1, B_1 и C_1, соответственно. Введем передаточную функцию линейной части системы (18) - $\chi_1(p) = C_1^c(A_1^c - pI_{Y_{1,1}}^c)^{-1} B_1^c,\ p \in \rho(A_1^c)$ и рассмотрим следующую эрмитову форму:

$$\mathcal{F}(\xi_1, z_1) := \mathrm{Re}(\xi_1 - \kappa_1 z_1)^*(\kappa_2 z_1 - \xi_1),\ \xi_1, z_1 \in \mathbb{C},$$

тогда выполнено частотное условие

$$\mathrm{Re}(\kappa_1 \chi_1(i\omega) + I_{\Xi_1})^* \kappa_2 \chi_1(i\omega) + I_{\Xi_1}) \ge 0.$$

(A.2.7) Существует число $\kappa_3 > 0$ такое, что

$$(\mathbb{B}_2(y_2), A_2 y_2)_{2,1} \le -\kappa_3 \|y_2\|_{2,1}^2, \forall y_2 \in Y_{2,1}.$$

(A.2.8) Существует число $\kappa_4 > 0$ такое, что

$$(\mathbb{B}_2(y_2), B_2 \tilde{\phi}_2(t, y_2))_{2,1} \le \kappa_4 \|y_2\|_{2,1}^2,\ \forall y_2 \in Y_{2,1}, t \ge 0$$

для $\tilde{\phi}_2(t, z_2) = \phi_2(z_1(t), z_2)$.

В работе доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* **(A.2.1)** - **(A.2.8)**. *Тогда решения системы (18) - (20) ограничены на* $(0, \infty)$.

Далее во второй главе в качестве частного случая дважды нелинейных систем рассматривается двухфазовая задача микроволнового нагрева. Приводится формальная постанавка задачи в трехмерном случае и ее интерпретация в одномерном случае.

$$\varepsilon w_{tt} - \frac{1}{\mu} w_{xx} + \sigma(\theta) w_t = 0, \qquad (x,t) \in (0,1) \times [0, +\infty), \tag{25}$$

$$b(\theta)_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta) w_t^2 \qquad (x,t) \in (0,1) \times [0, +\infty), \tag{26}$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \qquad t \in [0, +\infty), \tag{27}$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \qquad t \in [0, +\infty), \tag{28}$$

$$w(x,0) = 0, w_t(x,0) = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{29}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in (0,1), \tag{30}$$

где ε - диэлектрическая проницаемость, μ - магнитная проницаемость, $b(\theta)$ - оператор энтальпии:

$$b(s) = \begin{cases} s - 1\,, \quad s < \widehat{\theta}, \\ [\widehat{\theta} - 1\,, \widehat{\theta}]\,, \quad s = \widehat{\theta}, \\ s\,, \quad s > \widehat{\theta}, \end{cases}$$

где $\widehat{\theta}$ – температура плавления материала.

В работе показано, что при предположении о существовании глобальных решений, а также при выполнении некоторых дополнительных предположений на систему (25)–(30) все условия теоремы 2 выполнены, и, следовательно, решения рассматриваемой системы ограничены.

В третьей главе рассматриваются общие системы управления с обратной связью, состоящие из линейной и нелинейной частей, а также рассматривается вопрос построения проекторов для таких систем.

Рассмотрим оснащение вещественного гильбертова пространства Y_0

$$Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1} \tag{31}$$

со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_i$ и нормами $\| \cdot \|_i, i = 1, 0, -1$.

Предположим, что Ξ и W два вещественных гильбертовых пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_\Xi$, $(\cdot,\cdot)_W$ и нормами $\|\cdot\|_\Xi$, $\|\cdot\|_W$, соответственно, и

$$A : Y_1 \to Y_{-1}, \quad B : \Xi \to Y_{-1}, \quad C : Y_{-1} \to W$$

линейные непрерывные операторы. Определим нелинейность следующим образом $\phi : W \to \Xi$.

Рассмотрим задачу Коши для эволюционных вариационных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = Ay(t) + B\phi(Cy(t)), \\ &y(0) = y_0 \in Y_0. \end{aligned} \tag{32}$$

Далее в третьей главе приводится теорема, дающая частотные условия для существования функционалов Ляпунова, которые описывают асимптотическое поведение нормы разницы двух произвольных решений системы (32). Для формулировки этой теоремы необходимы некоторые свойства регулярности.

Предположим, что в дальнейшем $\lambda > 0$ - некоторое фиксированное число.

(A.3.1) Для любого $T > 0$ и лобой функции $f \in L^2(0, T; Y_1)$ задача

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y + f(t), \;\; y(0) = y_0 \tag{33}$$

является корректно поставленной, т. е. для произвольного $y_0 \in Y_0$, $f \in L^2(0, T; Y_{-1})$ существует единственное решение $y \in \mathcal{W}(0, T; Y_1, Y_{-1})$ (33) и оно непрерывно зависит от начальных данных и возмущений, т. е.

$$\|y(\cdot)\|^2_{\mathcal{W}(0,T,Y_1,Y_{-1})} \le c_1\|y_0\|^2_0 + c_2\|f\|^2_{2,-1}, \tag{34}$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ - некоторые константы.

(A.3.2) Оператор $A + \lambda I \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$ является регулярным (см. **A.2.4**).

(A.3.3) Пара $(A + \lambda I, B)$ является L^2-управляемой (см. **A.2.5**).

Следующее предположение описывает класс монотонных нелинейностей, которые мы будем рассматривать в дальнейшем. Заметим, что это предположение является обобщением хорошо известного условия сектора из теоремы об абсолютной устойчивости [2].

(A.3.4) Предположим, что $\Xi = W$ и существует оператор $M = M^* \in \mathcal{L}(\Xi, \Xi)$ такой, что

$$\begin{aligned} (\phi(Cy_1) - \phi(Cy_2), &M(\phi(Cy_1) - \phi(Cy_2)))_\Xi \\ &\le (\phi(Cy_1) - \phi(Cy_2), C(y_1 - y_2))_\Xi, \;\; \forall y_1, y_2 \in Y_1. \end{aligned} \tag{35}$$

При введенных предположениях эволюционное уравнение (32) порождает полудинамическую систему $(\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (Y_1, \|\cdot\|_{Y_1}))$ на фазовом пространстве $Y_1 \subset Y_0$ [1].

Ведем понятие множества аменабельных решений системы (32).

Определение 1. *Предположим, что $\kappa > 0$ - некоторое число. Решение $y(\cdot)$ задачи (32) называется аменабельным, если $y(\cdot)$ задано на $\mathbb{R}$ и существует число $\tau \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall\, t \leq \tau$ и $\int_{-\infty}^{\tau} e^{2\kappa t}\|y(t)\|_0^2 dt < +\infty$.*

Обозначим множество всех аменабельных решений уравнения (32) (*аменабельное множество*) через $\mathfrak{A}$. Для случая ОДУ и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом понятие и условия существования аменабельных решений были введены Р. А. Смитом [5] и обобщает понятие глобального $\mathcal{B}$-аттрактора [1].

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия* **(A.3.1)** – **(A.3.4)** *и существует число $\lambda > 0$ такое, что выполняются следующие условия:*

1) Пространство состояний Y_0 системы

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y \tag{36}$$

может быть разложено следующим образом $Y_0 = Y_0^- \oplus Y_0^+$, где $dim Y_0^- =: k < \infty$. Обозначим через $y(\cdot, y_0)$ (глобальное) решение (36), удовлетворяющее $y(0, y_0) = y_0$. Тогда для любого $y_0 \in Y_0^-$ выполнено $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t, y_0) = 0$ и для любого $y_0 \in Y_0^+$ выполнено $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t, y_0) = 0$;

2) Выполнено частотное условие $\mathrm{Re}(\chi(i\omega - \lambda)\xi, \xi)_{\Xi^c} - (\xi, M^c\xi)_{\Xi^c} < 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$ с $i\omega \notin \sigma(A^c)$ и всех $\xi \in \Xi^c$, $\xi \neq 0$, где $\chi(p)$ - передаточная функция линейной части системы (32), которая вводится аналогично тому, как показано в условии **(A.2.6)**.

Пусть $\mathfrak{A}$ - аменабельное множество для системы (32). Тогда существует линейный оператор $\Pi : Y_0 \to Y_0^-$ такой, что $\Pi : \mathfrak{A} \to \Pi\mathfrak{A}$ является гомеоморфизмом.

Данная теорема позволяет свести анализ системы к пространствам более малой размерности.

Далее в главе приводится конечномерная версия теоремы 3, а также описывается алгоритм построения гомеоморфного отображения Π. В заключение, в данной главе приводится частотное условие существования определяющих для диссипативности наблюдений для одномерной задачи микроволнового нагрева [3].

С помощью численного моделирования на основе этого метода и с использованием языка программирования Python для двухфазовой задачи нагрева (25)–(30) показывается, что при предположении превалентности аппроксимация аттрактора одномерной двухфазовой системы нагрева может быть вложена в пространство $\mathbb{R}^3$ при различных значениях параметров системы. Результат вложения показан на рисунках 1 и 2.

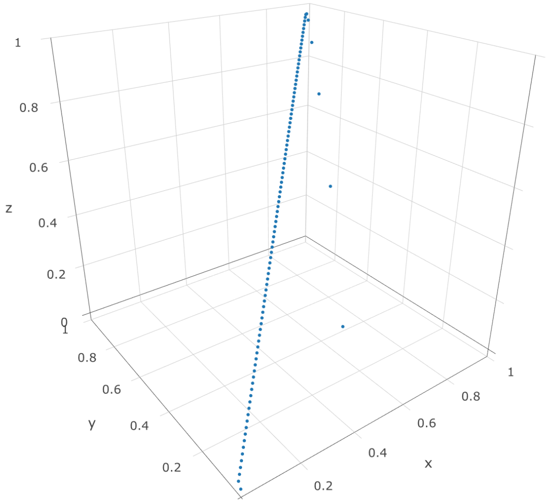

Рис. 1: $\varepsilon = 1$, $\mu = 0.5$

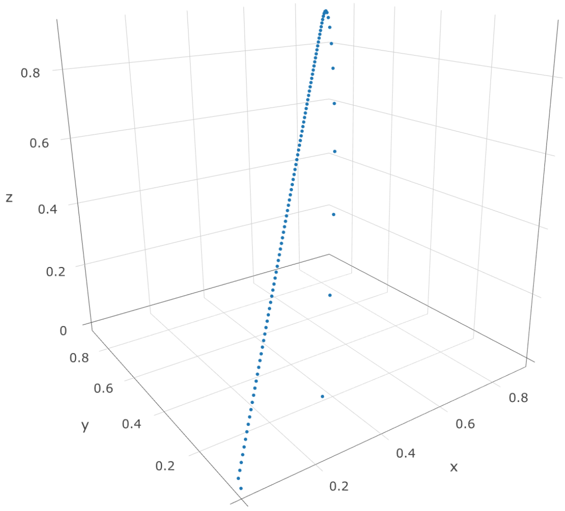

Рис. 2: $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$

В заключении приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

- Доказано существование положительно инвариантного выпуклого множества и получены достаточные условия ограниченности решений для эволюционных систем с нелинейностью типа Клейна-Гордона.
- Доказана ограниченность решений дважды нелинейных парных эволюционных уравнений, включая двухфазовую систему нагрева.
- Предложен метод построения проекторов для эволюционной системы, порожденной системой микроволнового нагрева и доказано существование проектора из множества аменабельных решений эволюционных уравнений на некоторое подмножество конечномерного пространства.
- Описан модифицированный метод вложения Такенса-Робинсона с помощью которого получены численные результаты по аппроксимации аттрактора для одномерной задачи нагрева.

Список цитируемой литературы

1. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений // Наука. 1989. С. 293.

2. Лихтарников А. Л., Якубович В. А. Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // Сибирск. математ. журн. 1976. том 17. №5. С. 1069–1085.

3. Manoranjan R. V., Yin H.-M. On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process // J. Continuous and Discrete Dynamical Systems. vol. 15. 2006. P. 1155 – 1168.

4. Robinson J. C. Taken's embedding theorem for infinite-dimensional dynamical systems // J. Nonlinearity. vol. 18. 2005. P. 2135 – 2143.

5. Smith, R. A., Convergence theorems for periodic retarded functional differential equations // Proc. London Math. Soc. vol. 60. 3. 1990. P. 581–608.

Публикации автора по теме диссертации

1*. Popov S. A., Reitmann V. Frequency domain conditions for finite-dimensional projectors and determining observations for the set of amenable solutions // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2014. Vol. 34. № 1. P. 249–267.

2*. Popov S. A. Method of positively invariant cones for evolution systems with cubic and periodic nonlinearities // Differential Equations. 2015. Vol. 50. № 13. P. 1739–1751.

3*. Popov S., Reitmann V. Embedding of compact invariant sets of dynamical systems on infinite-dimensional manifolds into finite-dimensional spaces // Abstracts of "The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications". 2012. Orlando, Florida, USA. P. 247–248.

4*. Popov S. A., Reitmann V. Frequency domain conditions for the existence of finite-dimensional projectors and determining observations of attractors // Differential equations and control processes. 2013. № 1. P. 1–21.

5*. Popov S. A. Taken's time delay embedding theorem for dynamical systems on infinite-dimensional manifolds // Abstracts of G-RISC International Student's Conference "Science and Progress 2011". 2011. Saint-Petersburg, Russia. P. 79-80.

6*. Popov S., Reitmann V., Skopinov S. Boundedness and finite-time stability for multivalued doubly-nonlinear evolution systems generated by a microwave heating problem // Abstracts of "The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations". 2017. Moscow, Russia. P. 142-143.