

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Мальцева Любовь Сергеевна

ЭЛАСТОМЕРНЫЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ:  
ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2017

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики - процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Колпак Евгений Петрович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Бригаднов Игорь Альбертович**, профессор кафедры информационных систем и вычислительной техники Санкт-Петербургского горного университета

доктор технических наук, доцент, **Мельников Виталий Геннадьевич**, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики

Ведущая организация: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Защита состоится «\_\_»\_\_\_\_\_2017 г. в \_\_ ч. \_\_ мин. на заседании диссертационного совета Д212.232.30 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский проспект, дом 28, ауд.405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. А. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте <https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/details/14/1232.html>

Автореферат разослан «\_\_»\_\_\_\_\_2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д212.232.30, доктор физ.-мат. наук



Кустова Е.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность исследования.** Начиная с 50-х годов XX века интенсивное освоение и широкое применение в практической деятельности получили изделия из эластомеров. Эти материалы используются при изготовлении пневматических сооружений, антенн, амортизаторов, различного рода мембран и оболочек, уплотнителей. Постоянно создаются новые высоко эластичные материалы. Эти материалы обладают специфическими механическими свойствами — они могут испытывать большие обратимые деформации. Наиболее широко в промышленности и в быту нашли свое применение различные марки резин, изготовленные из каучуков, искусственных и натуральных.

Эксплуатация изделий из полимерных материалов происходит, как правило, в условиях воздействия механических нагрузок. Поэтому специалистам, занимающимся расчетом и эксплуатацией резинотехнических изделий, важно не только знать специфические механические свойства высоко эластичных материалов, но и уметь рассчитывать напряженно-деформированные состояния изделий из них. Расчет, как правило, сводится к решению нелинейных краевых задач, аналитическое решение которых построить в большинстве случаев не удастся. Применение численных методов не позволяет выявить особенности поведения как материалов конструкции, так и самой конструкции. Не всегда удается сопоставить теоретические результаты с экспериментальными данными.

Экспериментальные исследования по определению механических свойств резиноподобных материалов стали интенсивно проводиться в 1940-е годы. Основную методику проведения экспериментов по одноосному и двуосному растяжению эластомеров заложил L. R. G. Treloar. Впоследствии эту методику использовали В. П. Никифоров, Г. М. Бартенев, Л. М. Зубов и А. М. Колесников, Kawabata S., M. Matsuda, R. Rivlin, Saunders, Alexander H, Hart-Smith, A.P.S Selvadurai, Albrecht и Ravi-Chandar, а также K.Y.Volokh и K. Balakhovsky, I. Muller. Ставились эксперименты по растяжению мембран и оболочек нормальным давлением. По результатам экспериментальных исследований были предложены различные варианты упругих потенциалов для описания зависимостей между нагрузкой и деформацией.

Основы нелинейной теории упругости стали закладываться в начале XX века. Одним из первых был английский математик А. Ляв, в России основоположником нелинейной теории был В. В. Новожилов. Варианты нелинейной теории упругости и нелинейной теории оболочек в разных трактовках предлагались и предлагаются сейчас. Авторами были К. Ф. Черных, С. А. Алексеев, А. С. Григорьев, И. И. Ворович, К. З. Галимов, П. А. Жилин, Л. М. Зубов, В. Н. Паймушин, Н. Ф. Морозов, С. Б. Филиппов, П. Е. Товстик, В. А. Еремеев, И. А. Бригаднов, В. Г. Баженов, Е. И. Михайловский, С. А. Кабриц, В. Ф. Терентьев, В. И. Феодосьев, В. А. Шамина, S. Antman, A. E. Green, W. T. Koiter, A. Libai, J. G. Simmonds.

Конкретные задачи по растяжению различных мембран и оболочек решались Л. М. Зубовым, С. А. Кабрицем, В. А. Троценко, В. И. Кузнецовым, А. М. Колесниковым, С. Feng, L.Yu, W. Zhang, Н. А. Erbay, V. Н. Tuzel, Saccomandi, Lecce, Wineman, J.B.Suh, A.N. Gent, S.G. Kelly. Несмотря на многочисленные, на первый взгляд, экспериментальные и теоретические исследования, практически отсутствуют экспериментальные исследования различных конструкций, изготовленных из одной и той же резины и сопоставления экспериментальных результатов с теоретическими.

**Целью работы** является проведение экспериментальных исследований по деформированию различных пластин и оболочек для определения механических характеристик материалов в различных конструкциях; разработка численных методов решения нелинейных задач, имеющих неединственное решение; построение аналитических и численных решений нелинейных краевых задач для криволинейных стержней и безмоментных оболочек; сопоставление теоретических результатов с экспериментальными.

**Методы исследования.** Используются теоретические методы исследования напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек с применением аппарата нелинейной теории упругости. Экспериментальные методы исследования основываются на методиках, описанных в литературных источниках и на авторских методиках. При обработке теоретических и экспериментальных результатов применяются современные компьютерные технологии. Основная масса расчетов производилась в среде программирования математического пакета MATLAB.

**Новизна работы.** Построены решения нелинейных задач по сжатию резиновых криволинейных стержней сосредоточенными силами и плоскостями и дано сопоставление теоретических результатов с экспериментальными; решена задача о нелинейных колебаниях плоской мембраны, нагруженной нормальным давлением; построены решения для эластомерных мембран, растягиваемых поверхностными и краевыми нагрузками, в закритической области; решены контактные задачи по растяжению нормальным давлением сферической и цилиндрической оболочек. Поставлены эксперименты и проведено сравнение с результатами, полученными в ходе натуральных экспериментов. Полученное в работе решение задачи о больших деформациях прямоугольной мембраны представлено в виде суперпозиции функций комплексной переменной.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается строгостью постановки задачи, сопоставлением результатов с результатами других авторов и с данными, полученными в ходе поставленных в работе физических экспериментов. Достоверность экспериментальных данных обеспечивается точностью измерений и сопоставлением с результатами других исследователей.

**На защиту выносятся:**

1. Теоретические и экспериментальные результаты по сжатию криволинейных стержней.
2. Теоретические и экспериментальные результаты по растяжению плоских мембран нормальным давлением.

3. Теоретические и экспериментальные результаты по решению контактных задач по растяжению нормальным давлением сферической и цилиндрической оболочек.
4. Численный алгоритм решения задач о нелинейных колебаниях плоской мембраны.

**Практическая значимость.** Разработан метод построения решения нелинейных краевых задач растяжения оболочек в закритической области. Дана оценка критических деформаций, при которых может произойти потеря устойчивости криволинейных стержней при сжатии и безмоментных оболочек при растяжении.

**Апробация работы.** Основные положения научной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. Научная конференция "Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB" г. Санкт-Петербург, 2007.
2. Международная научная конференция «Процессы управления и устойчивость», г. Санкт-Петербург, 2008.
3. Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», г. Дубна, 2012.
4. Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования», г. Воронеж, 2012.
5. Международная научно-практическая конференция «Теория и практика актуальных исследований», г. Краснодар, 2012.
6. Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», г. Пущино, 2013.
7. Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования», г. Воронеж, 2013.
8. Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», г. Дубна, 2014.
9. Международная конференция «Устойчивость и процессы управления», посвященная 85-летию со дня рождения проф., член-корр. РАН В.И. Зубова, г. Санкт-Петербург, 2015.
10. Международная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий», г. Воронеж, 2016.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 16 работ, которые содержатся в списке публикаций по теме диссертации на стр.15-16. Статьи [1], [2], [3] опубликованы в изданиях, входящих в международную реферативную базу Scopus. В работах [1], [2], [3], [10], [11], [13], [15], [16] соавторам принадлежат постановка задачи и проверка правильности полученных автором диссертационной работы результатов посредством решения задач другими численными методами. Работа [12] написана в соавторстве с А. В. Крицкой, которой принадлежит постановка задачи и ее

теоретическое исследование, автору диссертационной работы принадлежит численное решение задачи.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации 132 страницы, общее количество рисунков — 80, таблиц — 2, список литературы содержит 124 наименования.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий обзор экспериментальных и теоретических исследований по теме диссертации.

**В первой главе** дано краткое описание механических свойств эластомеров и приведены наиболее часто встречающиеся упругие потенциалы. Описана методика проведения экспериментов по растяжению мембран и экспериментальная установка. Приведены экспериментальные данные по одноосному растяжению резиновых образцов. По результатам экспериментов в качестве основного используемого в работе потенциала был выбран потенциал следующего вида:

$$\Phi = \frac{2\mu}{n^2} (\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n - 3). \quad (1)$$

**Глава 2** посвящена большим деформациям криволинейных стержней. Дан вывод уравнений сильного изгиба криволинейных стержней:

$$\begin{aligned} T_s' + \varphi' T_n &= 0, & T_n' - \varphi' T_s &= 0, \\ M' - \lambda_s T_n &= 0, \\ x' &= \lambda_s \cos \varphi, & z' &= -\lambda_s \sin \varphi \\ T_s &= \frac{2\mu h}{n} \frac{1}{\lambda_s} (\lambda_s^n - \lambda_s^{-n}), & M &= \frac{1}{3} \mu h^3 \lambda_s^{-n-4} \varphi'. \end{aligned}$$

Здесь  $T_n$  — перерезывающее усилие, а  $T_s$  — усилие, действующее в меридиональном направлении,  $M$  — изгибающий момент;  $x$  и  $z$  — координаты точек срединной поверхности,  $\varphi$  — угол между осью  $z$  и нормалью к срединной поверхности. Дифференцирование осуществляется вдоль дуги меридиана срединной поверхности.

Решались задачи о сжатии прямоугольной пластины и круговых стержней сосредоточенными силами и поверхностной нагрузкой (рис. 2). Получено условие сохранения прямолинейного положения равновесия для пластины (стержня). Для сжатой пластины с применением численных методов построены бифуркационные ветви решения (рис. 1).

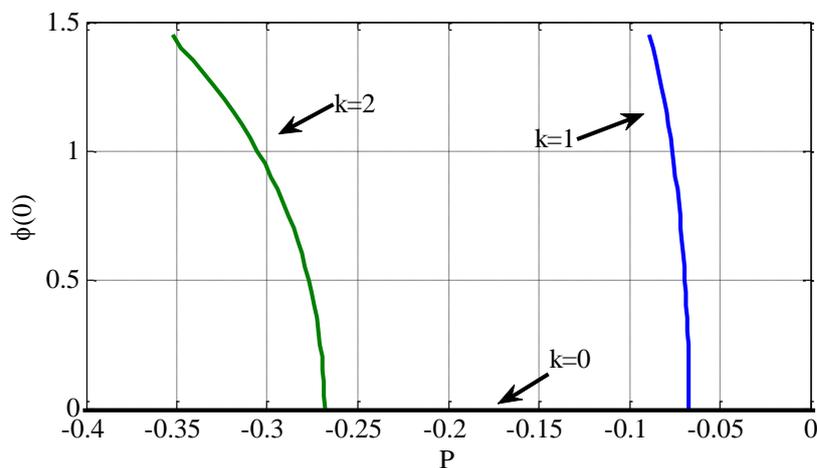


Рисунок 1

Решения задачи о сжатии колец представлены в квадратурах:

$$x = R\varphi^* + R\lambda \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{2(\kappa^2 \sin \varphi + c)}}, \quad z = z_0 - R\lambda \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{2(\kappa^2 \sin \varphi + c)}},$$

$$\varphi = \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\kappa^2 \sin \varphi + c)}}.$$

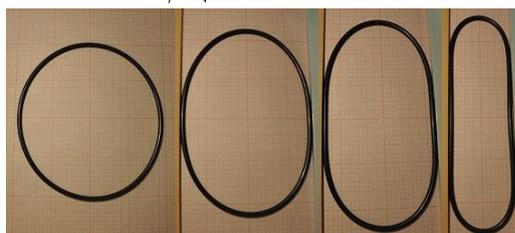


Рисунок 2

Проведены и описаны эксперименты по сжатию пластин и стержней и по сжатию резиновых колец кругового сечения сосредоточенными силами и плоскостями, проведено сопоставление экспериментальных результатов с теоретическими.

**Третья глава** посвящена безмоментной теории оболочек, за основу взята следующая система разрешающих уравнений

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^i}, \quad \alpha_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j,$$

$$I = A + \lambda_3^2, \quad II = A\lambda_3^2 + B, \quad III = B\lambda_3^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^1} \left( \sqrt{a} \mathbf{T}^1 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left( \sqrt{a} \mathbf{T}^2 \right) + \sqrt{a} \mathbf{q} = h^0 \rho^0 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}. \quad T^{ij} = T^{ij}(a_{ij}) = 2h^0 \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}}.$$

$$\mathbf{r}|_{\Gamma_u}^0 = \mathbf{r}_0^0 \quad \mathbf{T}_\nu|_{\Gamma_\sigma}^0 = \nu_\alpha^0 \mathbf{T}^\alpha = \nu^\alpha \times \mathbf{T}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha^0 \mathbf{r}_\beta^0 = \mathbf{T}_\nu^0.$$

Здесь  $r^0$  и  $r$  — радиус-векторы срединной поверхности оболочки до и после деформации соответственно,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — главные кратности удлинения, вектор нормали к срединной поверхности после деформации —  $n$ , орт

касательной к кривой  $t$  и орт тангенциальной нормали (нормали к кривой, лежащей в касательной плоскости)  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{T}^i = T^{i1}\mathbf{r}_1 + T^{i2}\mathbf{r}_2$  — векторы усилий, действующие в сечениях  $\alpha^1 = const$  и  $\alpha^2 = const$ ,  $h$  — толщина недеформированной оболочки, а  $\rho$  — плотность её материала,  $t$  — время.  $\Gamma_u^0$  — часть граничного контура, на котором заданы перемещения, а  $\Gamma_\sigma^0$  — граничного контура, на котором заданы усилия,  $\mathbf{T}_v$  — главный вектор усилий в расчёте на единицу длины срединной линии недеформированного нормального сечения,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(s_i)$ ,  $\mathbf{T}_v^0 = \mathbf{T}_v^0(s_i)$  — заданные векторные функции.

В этой главе решены задачи о действии сосредоточенной силы и сжимающих плоскостей на растянутые равномерным давлением балку-полоску и цилиндрическую оболочку, а также рассмотрена динамическая задача о растяжении нормальным давлением балки-полоски. Динамические уравнения для балки-полоски имеют вид:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x_1^0} + \lambda_1 q_x = \rho h \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2},$$

$$\frac{\partial T_z}{\partial x_1^0} + \lambda_1 q_z = \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2},$$

здесь  $q_x, q_z$  — проекции поверхностной нагрузки на оси  $x, z$ .

Для динамических уравнений проведено исследование зависимости частот малых колебаний в окрестности стационарного положения равновесия от нагрузки для различных потенциалов. На рисунке 3 отражена зависимость первых частот собственных колебаний от максимального статического прогиба для различных потенциалов.

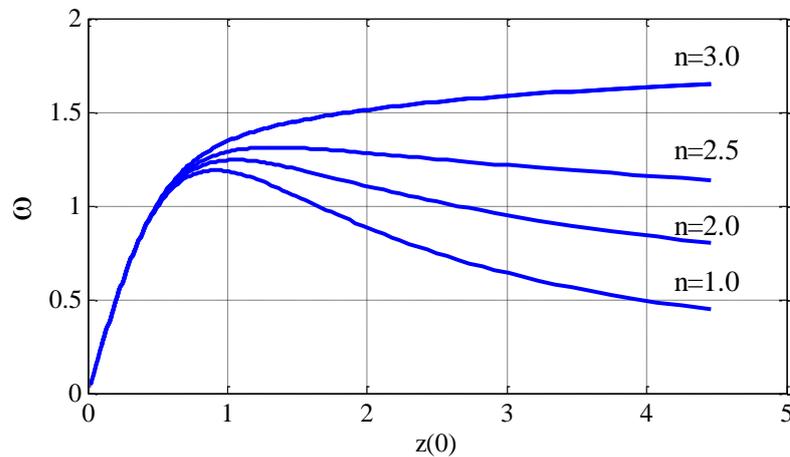


Рисунок 3

Таким образом, было показано, что нелинейные динамические модели дают более сложную картину колебаний мембран, чем линейные.

Были решены задачи о круговой цилиндрической оболочке под внутренним давлением и о растяжении в плоскости круглой мембраны. Решение представлено в квадратурах. Для случая потенциала Черныха для плоской мембраны получено аналитическое решение.

**Глава 4** посвящена осесимметричным деформациям оболочки вращения. За основу взяты следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\lambda_1} T_1 \frac{dr}{dr} \right) - T_2 - qr \frac{dz}{dr} &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\lambda_1} T_1 \frac{dz}{dr} \right) + qr \frac{dr}{dr} &= 0, \\ \frac{dr}{dr} &= \lambda_1 \cos \varphi, \quad \frac{dz}{dr} = -\lambda_1 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

В этих соотношениях  $\varphi$  — угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности в деформированной конфигурации,  $T_1, T_2$  — усилия, действующие в срединной поверхности в меридиональном и окружном направлениях, а  $\lambda_1, \lambda_2$  — кратности удлинений,  $x$  и  $r$  — координаты срединной поверхности. Для случая потенциала (1) связь между напряжениями и деформациями будет иметь следующий вид:

$$T_1 = \frac{2h\mu}{n\lambda_1} (\lambda_1^n - \lambda_3^n), \quad T_2 = \frac{2h\mu}{n\lambda_2} (\lambda_2^n - \lambda_3^n)$$

Решение уравнений (2) строилось с применением численных методов. Проведено исследование влияния параметра  $n$  в упругом потенциале (1) на зависимость «нагрузка-максимальный прогиб». Эта зависимость имеет точку экстремума для всех  $n < 3$ . Для случая  $n = 2$  эта зависимость представлена на рисунке 4 сплошной линией. Символом «0» отмечены экспериментальные точки.

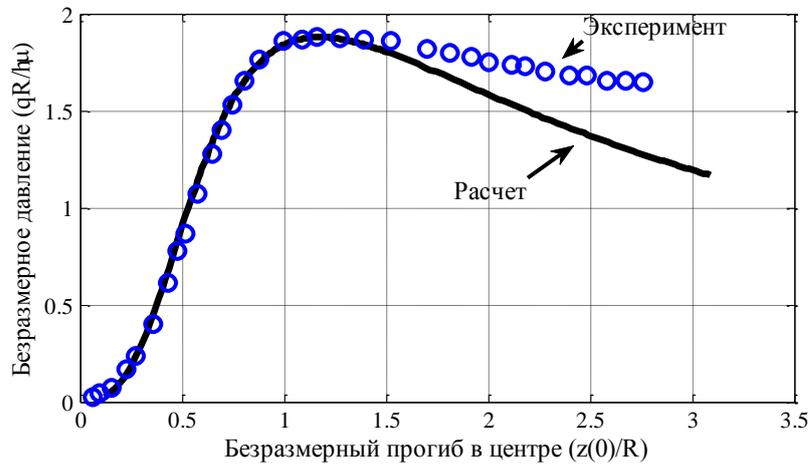
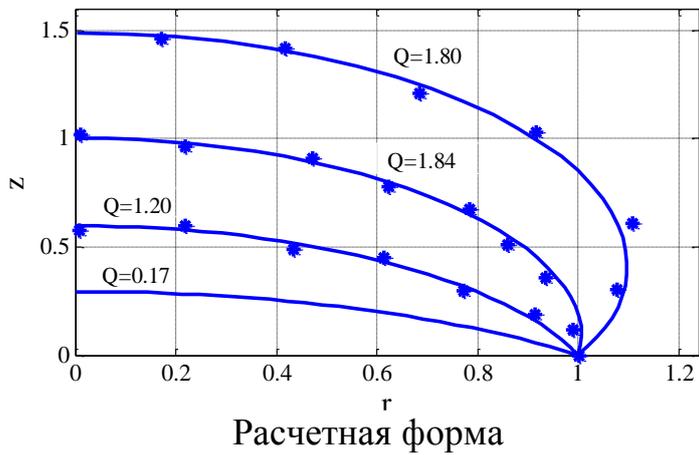


Рисунок 4

Вид сбоку деформированной мембраны, полученный расчетным путем отображен на рисунке 5 в виде сплошных линий. Символом «звездочка» отмечены экспериментальные точки.



Реальный объект

Рисунок 5

Аналогичные результаты получены для *кольцевой мембраны, заземленной по внешнему и внутреннему контуру*. Для случая мембраны с жестким центром, нагруженной нормальным давлением (конструкция рассматривается как амортизирующее устройство) построены зависимости «осадка-вертикальная нагрузка на жестком центре». Для различных значений давления эти зависимости отображены на рисунке 6.

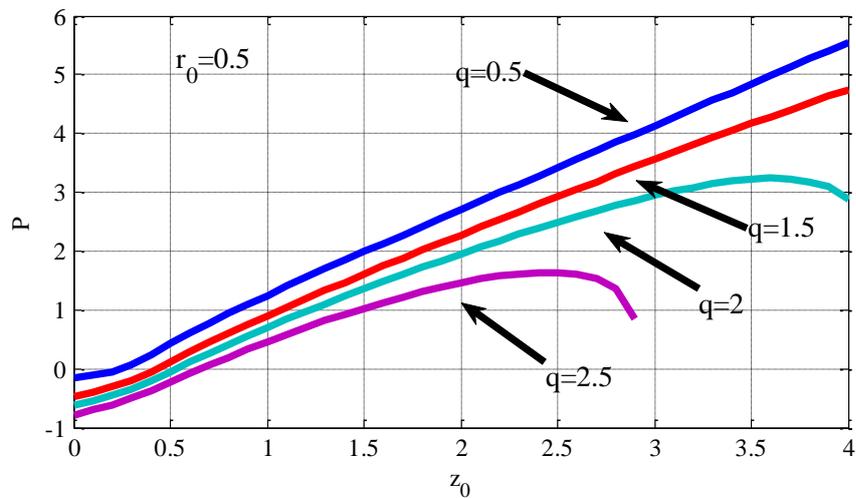
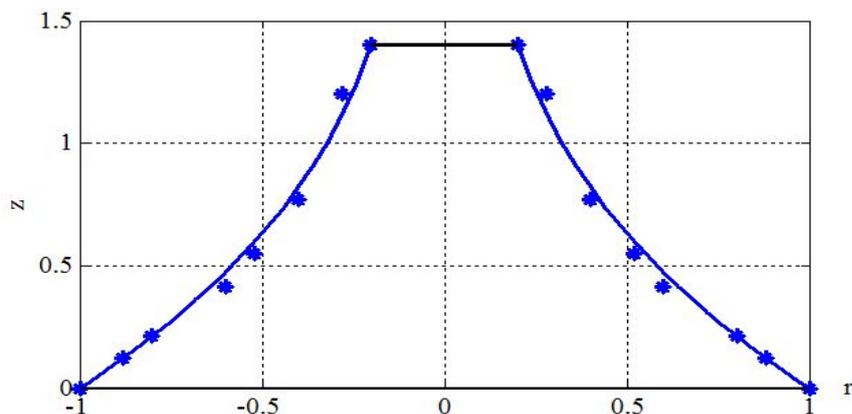


Рисунок 6

В задаче о растяжении мембраны с жестким центром без поверхностной нагрузки расчетные зависимости между осадкой и вертикальной нагрузкой были линейными, в отличие от результатов, представленных на рисунке 6. Форма растянутой мембраны представлена на рисунке 7. Символом «звездочка» отмечены экспериментальные данные.



Расчетная форма



Реальный объект

Рисунок 7

*Сферическая оболочка.* Для замкнутой сферической оболочки зависимость между внутренним давлением и относительным изменением радиуса определяется из соотношения  $2T_1(\lambda, \lambda) = R^0 q \lambda^2$ .

Эта зависимость имеет точку экстремума для случая  $n < 3$ . Для случая  $n=2$  на рисунке 8 эта зависимость изображена сплошной линией, символом «звездочка» отмечены экспериментальные точки. Аналогичные зависимости получены и для эллипсоидальных оболочек.

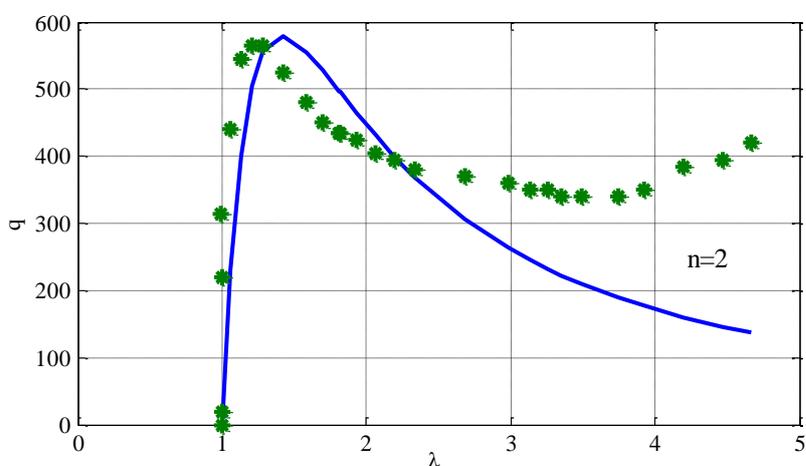


Рисунок 8

Задача о сжатии сферической оболочки растянутой нормальным давлением между двумя плоскостями и задача о растяжении сферической оболочки в цилиндрической трубке решались с применением численных методов. Зависимость между относительным изменением радиуса оболочки и внутренним давлением для задачи о контакте с плоскостями отражена на рисунке 9. Символом «звездочка» отмечены экспериментальные точки.

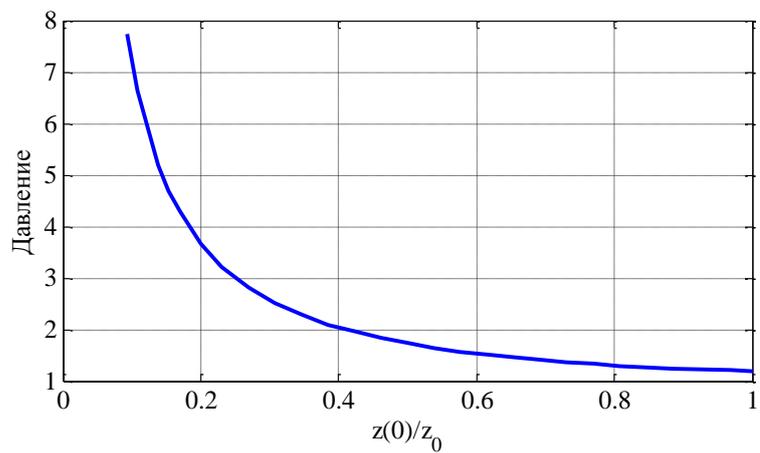


Рисунок 9

Вид сжатой плоскостями сферической оболочки при конкретном давлении отображен на рисунке 10.

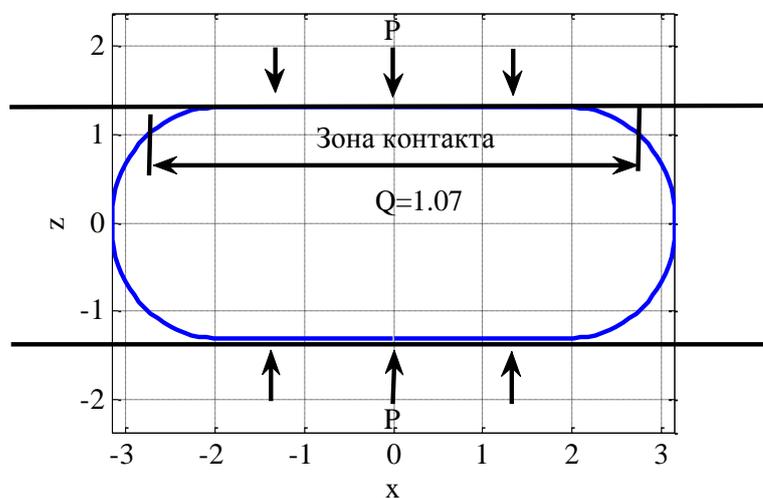


Рисунок 10

Зависимость между поперечными размерами и зоной контакта отображена на рисунке 11.

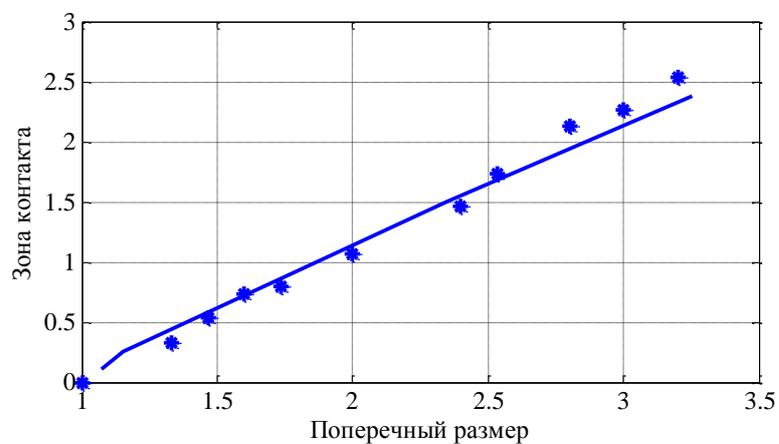


Рисунок 11

Зависимость между внутренним давлением и максимальным поперечным размером при растяжении сферической оболочки в трубке отображена на рисунке 12.

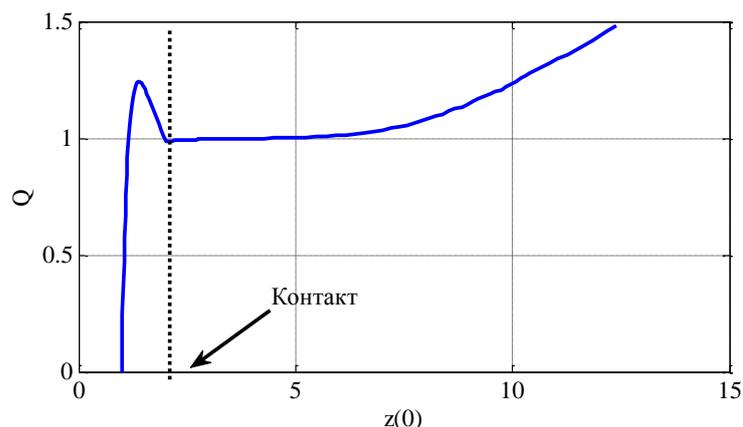


Рисунок 12

Зависимость между поперечными размерами и зоной контакта также является линейной. Расчетные данные с точностью до 10% согласуются с экспериментальными.

Также в этой главе описана методика проведения эксперимента по растяжению *сферической оболочки с отверстием* нормальным давлением, решена соответствующая задача и проведено сопоставление теоретических результатов с экспериментальными. Приведены численные методы, используемые в работе, а также отмечены некоторые особенности численного решения нелинейных краевых задач.

**Глава 5** посвящена прямоугольной мембране, растягиваемой в плоскости краевыми нагрузками. Решается задача наложения малых деформаций на большие в предположении, что основное напряженное состояние является однородным. Задача сводится к построению решения системы уравнения

$$\begin{aligned} \Phi_{11} \frac{\partial^2 \delta x_1}{\partial x_1^2} + \Phi_A \frac{\partial^2 \delta x_1}{\partial x_2^2} + \alpha \frac{\partial^2 \delta x_2}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\ \alpha \frac{\partial^2 \delta x_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \Phi_A \frac{\partial^2 \delta x_2}{\partial x_1^2} + \Phi_{22} \frac{\partial^2 \delta x_2}{\partial x_2^2} &= 0, \end{aligned}$$

в которой  $\delta x_1, \delta x_2$  — смещения в направлении координатных осей, а постоянные коэффициенты  $\Phi_{11}, \Phi_A, \alpha, \Phi_{22}$  выражаются через частные производные от упругого потенциала. Решение этих уравнений представляется в виде функции комплексной переменной:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \frac{i}{\alpha} \delta_1 (f_1(z_1) - f_1(\bar{z}_1)) + \frac{i}{\alpha} \delta_2 (f_2(z_2) - f_2(\bar{z}_2)), \\ \delta x_2 &= (f_1(z_1) + f_1(\bar{z}_1)) + (f_2(z_2) + f_2(\bar{z}_2)), \\ z_1 &= x_1 + i\gamma_1 x_2 \quad z_2 = x_1 + i\gamma_2 x_2, \\ \delta_1 &= \frac{(\Phi_{22}\gamma_1^2 - \Phi_A)}{\gamma_1} \quad \delta_2 = \frac{(\Phi_{22}\gamma_2^2 - \Phi_A)}{\gamma_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\gamma_1, \gamma_2$  являются корнями уравнения

$$\Phi_A \Phi_{11} + \gamma^4 \Phi_{22} \Phi_A - \gamma^2 (\Phi_{11} \Phi_{22} + \Phi_A^2 - \alpha^2) = 0$$

Построенные таким образом функции  $\delta x_1, \delta x_2$  удовлетворяют системе уравнений (3), а функции  $f_1, f_2$  находятся из удовлетворения граничным условиям.

Для случая круглого жесткого включения решение представляется в виде

$$c_1 = \frac{i(\gamma_1 + 1)}{2\alpha\gamma_1} \left( 1 - \lambda_1 + \frac{\gamma_2(\gamma_1\alpha(1 - \lambda_2) - (1 - \lambda_1)(\Phi_{11} - \Phi_A\gamma_1^2))}{\gamma_2(\Phi_{11} - \Phi_A\gamma_1^2) - \gamma_1(\Phi_{11} - \Phi_A\gamma_2^2)} \right),$$

$$c_2 = \frac{i(\gamma_2 + 1)(1 - \lambda_1)(\Phi_{11} - \Phi_A\gamma_1^2) - \gamma_1\alpha(1 - \lambda_2)}{2\alpha(\gamma_2(\Phi_{11} - \Phi_A\gamma_1^2) - \gamma_1(\Phi_{11} - \Phi_A\gamma_2^2))}.$$

В экспериментах по одноосному растяжению прямоугольной мембраны с отверстием форма отверстия в деформированном виде представляла собой эллиптическое отверстие (рисунок 13).

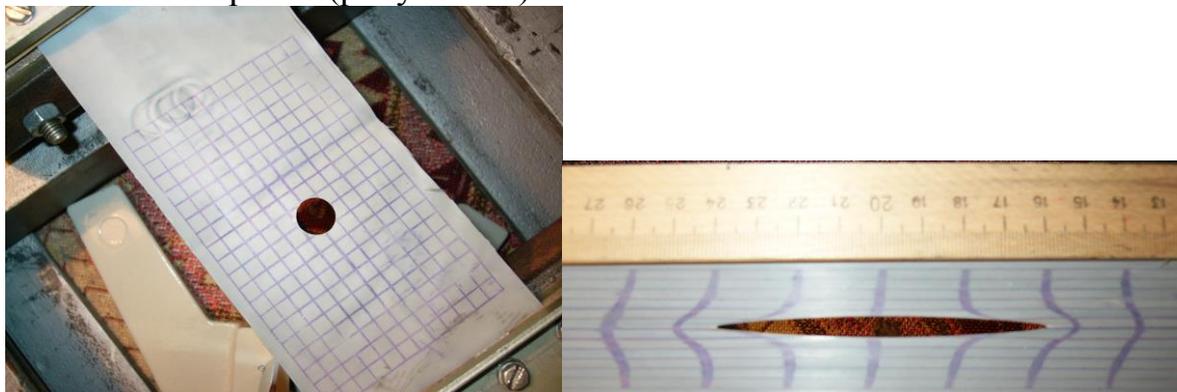


Рисунок 13

Зависимость между полуосями эллипса и продольным растяжением отражена на рисунке 14. Расчетные зависимости практически совпадают с экспериментальными.

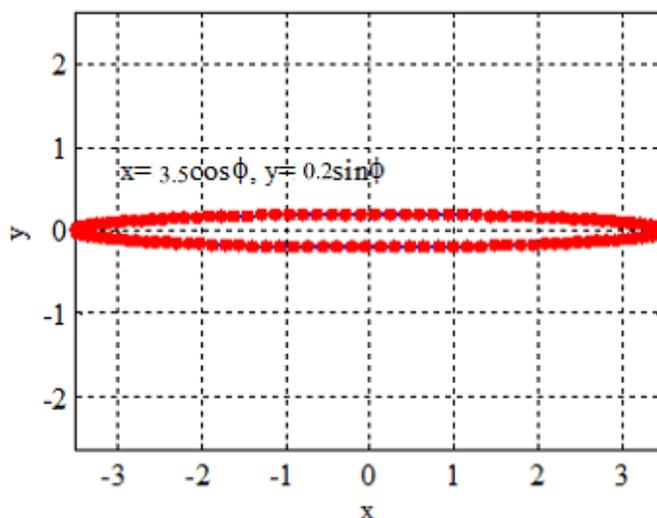


Рисунок 14

Проведены серии экспериментов по растяжению прямоугольных мембран с отверстиями. В ходе экспериментов исследовалось влияние ширины образца на раскрытие отверстия, влияние геометрических параметров образца и размеров отверстия на его раскрытие, влияние напряжений на параметры отверстия. Как следует из экспериментальных данных, в рассматриваемом диапазоне геометрических параметров исходных образцов, относительные поперечные размеры деформируемых отверстий в рамках погрешности измерений от этих параметров практически не зависят.

**В заключении работы** приведены полученные результаты:

1. Построены решения нелинейных задач по сжатию резиновых криволинейных стержней сосредоточенными силами и плоскостями и дано сопоставление теоретических результатов с экспериментальными;

2. Решена задача о нелинейных колебаниях плоской мембраны, нагруженной нормальным давлением;

3. Построены решения для эластомерных мембран в закритической области;

4. С применением численных методов решены задачи по растяжению плоских мембран нормальным давлением. Поставлены соответствующие эксперименты и проведено сопоставление теоретических результатов с экспериментальными.

5. Построены решения контактных задач по растяжению нормальным давлением сферической и цилиндрической оболочек. Поставлены эксперименты и проведено сравнение с данными, полученными в результате натуральных экспериментов.

6. Решена нелинейная краевая задача о растяжении в плоскости прямоугольной резиновой мембраны с жестким включением. Полученное решение представлено в виде суперпозиции функций комплексной переменной.

### **Публикации**

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

- 1. Maltseva, L. S. On the Stability of Compressed Plate. / E. P. Kolpak, L. S. Maltseva, S. E. Ivanov. // Contemporary Engineering Sciences, 2015 — Vol. 8 — no. 20 — pp. 927 – 936.**
- 2. Maltseva, L. S. Rubberlike membranes at inner pressure. / E. P. Kolpak, L. S. Maltseva. // Contemporary Engineering Sciences, 2015 — Vol. 8 — no. 36 — pp. 1731-1742.**
- 3. Maltseva, L. S. Non-linear vibrations of rubber membrane. / E. P. Kolpak, L. S. Maltseva, S. E. Ivanov, S. A. Kabrits // Applied Mathematical Sciences, 2016 — Vol. 10 — no. 36 — pp. 1797-1810.**
4. Мальцева, Л. С. Математическая модель эластичной мембраны. / Л. С. Мальцева. // Материалы 19-й международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Дубна, 2012.

5. Мальцева, Л. С. Резиновые мембраны при больших деформациях. / Л. С. Мальцева. // Материалы V международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». Воронеж, 2012. — С. 184-185.
6. Мальцева, Л. С. О несущей способности резиновой мембраны. / Л. С. Мальцева. // Материалы II международной научно-практической конференции «Теория и практика актуальных исследований». Краснодар, 2012. — Т.2 — С.152-154.
7. Мальцева, Л. С. Резиновое кольцо при больших деформациях. / Л. С. Мальцева. // Материалы 20-й международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Пушкино, 2013 — С. 183.
8. Мальцева, Л. С. Растяжение кольцевой мембраны: теория и эксперимент. / Л. С. Мальцева. // Материалы VI международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». Воронеж, 2013 — С. 142-144.
9. Мальцева, Л. С. Растяжение кольцевой мембраны нормальным давлением. / Л. С. Мальцева. // Материалы 21-й международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Дубна, 2014.
10. Мальцева, Л. С. Круглая плоская мембрана при больших деформациях. / Е. П. Колпак, Л. С. Мальцева. // Приволжский Научный Вестник. — 2014 №11(39) — С. 5-10.
11. Мальцева, Л. С. Большие деформации резиновых мембран. / Е. П. Колпак, Л. С. Мальцева. // Молодой учёный. — 2014 — №16(75) — С. 78-84.
12. Мальцева, Л. С. Математическая модель популяции, подверженной промыслу. / Л. С. Мальцева, А. В. Крицкая. // Молодой учёный. — 2014 — №17(76) — С. 3-10.
13. Мальцева, Л. С. Об устойчивости сжатых пластин. / Е. П. Колпак, Л. С. Мальцева. // Молодой учёный — 2015 — №14(94) — С. 1-8.
14. Maltseva, L. S. Elastic membranes at large deformation. / L. S. Maltseva // Сборник тезисов конференции «Устойчивость и процессы управления». Изд. СПбГУ — 2015 — С. 362-363.
15. Мальцева, Л. С. Нелинейные колебания резиновой мембраны. / Л. С. Мальцева, Е. П. Колпак, С. Е. Иванов // Молодой ученый. — 2016. — №8. — С. 11-21.
16. Мальцева, Л. С. Нелинейные колебания эластомерной балки-полоски. / Л. С. Мальцева, Е. П. Колпак. // Материалы международной научной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий», Воронеж — 2016. — С. 228-231.