САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Ваганян Артур Суренович

Обобщенные нормальные формы гамильтоновых и контактных систем

Специальность 01.01.02
«Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2016

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Басов Владимир Владимирович
Официальные оппоненты:	Садовский Антон Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, профессор кафедры дифференциальных уравнений
	Иванов Борис Филиппович, кандидат физико-математических наук, доцент, Высшая школа технологии и энергетики (СПбГУПТД) заведующий кафедрой высшей математики
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Защита состоится «___» __________ 201__ г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9 и на сайте http://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/BmjVTwJ74z.pdf.

Автореферат разослан «___» __________ 201__ г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор Чурин Ю.В.

Общая характеристика работы

Предметом исследования диссертации являются *обобщенные нормальные формы* гамильтоновых и контактных систем с заданной не обязательно линейной невозмущенной частью и произвольным формальным возмущением.

Метод обобщенных нормальных форм — это продолжение сформировавшейся к семидесятым годам XX века теории резонансных нормальных форм, или нормальных форм Пуанкаре, на случай сильно вырожденной линейной части нормализуемой системы, когда переход к резонансной нормальной форме не дает достаточного упрощения. В отличие от обычных обобщенные нормальные формы учитывают не только собственные значения линейной части, но и жордановы клетки, соответствующие нулевым собственным значениям, а также нелинейные слагаемые в невозмущенной части системы. Сам термин «обобщенная нормальная форма» был введен сравнительно недавно В.В. Басовым. Однако простейшие обобщенные нормальные формы встречались уже у Ф. Такенса. В дальнейшем данное направление получило развитие в работах Г.Р. Белицкого, А. Байдера и Я. Сандерса и других авторов.

Идея обобщенной нормальной формы состоит во введении квазиоднородной градуировки на алгебрах формальных рядов и векторных полей посредством присвоения каждой переменной своего веса и включении таким образом дополнительных слагаемых в невозмущенную часть системы, что приводит к более простой по сравнению с классической нормальной форме.

В рамках метода обобщенных нормальных форм рассматриваются только вопросы формальной эквивалентности систем дифференциальных уравнений, но не сходимости нормализующего преобразования. В то же время приведение к обобщенной нормальной форме вплоть до любой наперед заданной обобщенной степени всегда можно осуществить при помощи полиномиального преобразования.

Актуальность исследования обусловлена прежде всего важностью нормальных форм гамильтоновых и контактных систем с нелинейной невозмущенной частью с точки зрения приложений.

Изучение гамильтоновых и контактных систем занимает значительное место в теории нормальных форм. Среди основоположников теории гамильтоновых нормальных форм упомянем Дж.Д. Биркгофа, Т.М. Черри, К.Л. Зигеля и А.Д. Брюно. Что касается контактных нормальных форм, наиболее значительный вклад в развитие данного направления внес В.В. Лычагин.

К вопросу о важности изучения контактного случая процитируем В.И. Арнольда: «На нечетномерных многообразиях не бывает симплектических структур, но зато бывают контактные. Контактная геометрия играет для оптики и теории распространения волн такую же роль, как симплектическая для механики. <...> Вся симплектическая теория (включая, например, теорему Гивенталя) имеет контактные аналоги, чрезвычайно полезные для исследования особенностей в вариационных задачах.» [1] Первоначально контактные векторные поля и преобразования исследовались С. Ли и Э. Картаном в связи с вопросами интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Сегодня контактные системы наряду с гамильтоновыми возникают в механике, геометрической оптике, термодинамике, задачах теории оптимального управления и других.

Стоит отметить, что помимо метода обобщенных нормальных форм существуют и другие подходы к анализу особенностей с вырожденной линейной частью, например *локальный метод*, предложенный А.Д. Брюно, а также различные определения «неупрощаемых» нормальных форм, или нормальных форм «бесконечного порядка». Однако нахождение таких неупрощаемых нормальных форм представляет собой очень трудную задачу, полностью решаемую лишь для некоторых частных случаев.

Предлагаемый в диссертации метод обобщенных нормальных форм оказывается полезен там, где, например, важна сама по себе структура невозмущенной части, или обобщенная нормальная форма достаточно проста, или же может быть дополнительно упрощена из физических или иных соображений. Все вышесказанное демонстрируется в заключительном разделе диссертации.

Целью исследования диссертации является разработка эффективных методов нахождения обобщенных нормальных форм и построение единого гибкого подхода к классификации нелинейных гамильтоновых и контактных систем в окрестности неэлементарной особой точки. В рамках рассматриваемой работы решаются следующие **задачи**:

[1] Арнольд В.И. Теория катастроф. 3 изд. М.: Наука, 1990. С. 75

1) дать универсальное определение обобщенной нормальной формы для случая гамильтоновых и контактных систем;

2) предложить конструктивные методы нахождения обобщенной нормальной формы;

3) выявить связь с обобщенными нормальными формами в смысле В.В. Басова и Г.Р. Белицкого;

4) привести примеры приложений обобщенных гамильтоновых и контактных нормальных форм.

Методы исследования, используемые в работе, включают в себя как известные, так и новые, предложенные автором в опубликованных им статьях:

1) метод скалярных произведений Г.Р. Белицкого;

2) метод резонансных наборов В.В. Басова и его адаптация на гамильтонов случай из работы [1];

3) метод квазирезонансных полиномов из работы [2];

4) разбиение плоского векторного поля на гамильтонову и негамильтонову составляющие по А. Байдеру и Я. Сандерсу и его обобщение на случай квазиоднородного невозмущенного гамильтониана и полей размерности $2n$ из работ [3–5].

Остановимся подробнее на методах Белицкого и резонансных наборов как на двух наиболее общих и часто используемых в диссертации.

Наиболее популярным подходом к вопросам локальной классификации систем с вырожденной линейной частью сейчас является метод Г.Р. Белицкого. В нем невозмущенная часть может быть представлена произвольным однородным вектор-полиномом. В частности, им было дано определение нормальной формы гамильтоновой системы с однородным невозмущенным гамильтонианом произвольной степени, так называемой неполной нормальной формы Белицкого. В подходе Белицкого с использованием на пространстве полиномов специального скалярного произведения вопрос о нахождении структуры обобщенной нормальной формы гамильтониана сводится к отысканию полиномиальных решений однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных. Сами эти уравнения и их решения (которые в диссертации, следуя традиционной для теории нормальных форм терминологии, названы резонансными полиномами), вообще говоря, ничем не замечательны и лишь косвенно связаны с невозмущенной системой. В этой связи автором совместно с В.В. Басовым в работе [1] было предложено более гибкое определение обобщенной нормальной формы в терминах резонансных наборов. Идея резонансных наборов состоит в том, чтобы в качестве слагаемых возмущения гамильтониана в нормальной форме рассматривать не обязательно сами резонансные полиномы, а полиномы, независимым образом их представляющие. Например, резонансный набор всегда может быть составлен из мономов. Неполная нормальная форма Белицкого также представляется резонансным набором, состоящим из резонансных полиномов.

Теоретическая значимость исследования обусловлена универсальностью вводимых понятий и эффективностью предлагаемого аппарата для нахождения структур обобщенных нормальных форм, который вместе с тем может быть полезен и в других задачах. Так предложенное в работе определение резонансного набора позволяет выбирать ту или иную нормальную форму, исходя из условий задачи, и объединить результаты предшественников для многих специальных случаев (см. примеры 3, 6–13). В частности, этот момент используется в разделе 2 при обобщении нормальной формы Такенса на случай произвольного количества жордановых клеток 2×2. А применяемые в разделе 2 диссертации методы могут использоваться для описания полиномиальных решений широкого класса квазиоднородных дифференциальных уравнений в частных производных, среди которых важнейшие уравнения математической физики, такие как уравнения Лапласа и теплопроводности, волновое уравнение и другие. Также в работе развиты новые методы нахождения обобщенных нормальных форм с гамильтоновой невозмущенной частью и негамильтоновым возмущением в смысле В.В. Басова.

Практическая значимость полученных результатов проиллюстрирована в заключительном разделе диссертации, где на примере известных термодинамических моделей показывается, как обобщенные нормальные формы оказываются полезны при изучении сложных физических систем. А именно, метод обобщенных нормальных форм применяется для анализа критических явлений в термодинамике неидеальных сред на примере уравнений состояния смеси неидеальных газов и классической водородной плазмы. Эта область термодинамики представляет большой практический интерес в связи с многочисленными приложениями физики плазмы. Вместе с тем сфера практического применения обобщенных нормальных форм не ограничивается термодинамикой. Гамильтоновы нормальные формы широко применяются в небесной механике, при исследовании стабильности пучков элементарных частиц в кольцевых ускорителях и в других областях физики и техники. Ввиду того, что в реальных задачах нелинейности могут оказывать значительное влияние на поведение системы, обобщенные нормальные формы могут быть полезны и в этих областях, так как позволяют корректно учесть нелинейные эффекты при исследовании таких систем.

Научная новизна настоящего исследования выражается в нескольких аспектах. Необходимость рассмотрения гамильтоновых систем с вырожденной невозмущенной частью и неединственность в выборе обобщенной нормальной формы привела к появлению множества специальных определений, годящихся лишь для некоторых частных случаев. В диссертации впервые дается определение обобщенной нормальной формы для гамильтоновых и контактных систем с произвольным квазиоднородным невозмущенным гамильтонианом. Методы нахождения нормальных форм Белицкого и Басова из первых двух разделов существенно отличаются от традиционных методов линейной алгебры, используемых предшественниками, и позволяют обойти свойственные им вычислительные трудности. Также ранее не рассматривались применения нормальных форм в термодинамике. Таким образом, все основные результаты работы являются новыми.

Публикация результатов. Всего по теме диссертации автором опубликовано шесть статей [1–6], из них четыре, содержащие основные результаты, — в рецензируемых журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК. Работы [1–3] написаны совместно с В.В. Басовым. Постановка задач в них принадлежит

В.В. Басову. Определения гамильтонова резонансного набора и гамильтоновой обобщенной нормальной формы, а также теорема о нахождении обобщенной нормальной формы двумерной системы с гамильтоновой невозмущенной частью предложены совместно с В.В. Басовым. Методы нахождения резонансных наборов и примеры обобщенных нормальных форм в работах [1–3], а также постановка задач и все результаты работ [4–6] принадлежат автору. Результаты статей [1–2] соответствуют первому разделу диссертации, во второй и третий разделы попали результаты работ [3–5] и [6] соответственно.

Апробация результатов. По теме диссертации автором сделано три доклада на международных конференциях «Еругинские чтения» (Новополоцк, 2011; Гродно, 2013) [7, 8] и «Динамика, бифуркации и странные аттракторы» (Нижний Новгород, 2013) [9], а также доклад на семинаре кафедры дифференциальных уравнений математико-механического факультета СПбГУ (Санкт-Петербург, 2016).

Положения, выносимые на защиту:

1) предложено определение обобщенной нормальной формы гамильтоновой и контактной системы в терминах резонансных наборов, обладающее рядом преимуществ по сравнению с предшествующими (неполной нормальной формой Белицкого и различными специальными определениями);

2) представлены эффективные методы нахождения гамильтоновых обобщенных нормальных форм со многими степенями свободы, получены в явном виде неполные нормальные формы Белицкого для невозмущенного гамильтониана с двумя степенями свободы вида $\lambda_1 x_1^{l_1} y_1^{m_1} + \lambda_2 x_2^{l_2} y_2^{m_2}$;

3) представлен новый метод нахождения обобщенных нормальных форм в смысле В.В. Басова, применимый для случая систем с гамильтоновой невозмущенной частью, в частности, получены в явном виде обобщенные нормальные формы систем двух уравнений с невозмущенной частью, представленной бездивергентным вектором с мономиальными компонентами произвольной степени, а также обобщена на случай произвольного количества жордановых клеток 2×2 нормальная форма Такенса;

4) введено понятие термодинамической эквивалентности и на примере двух термодинамических моделей неидеальных сред продемонстрирована его полезность и в целом применимость контактных обобщенных нормальных форм в приложениях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех разделов, заключения, библиографии, включающей в себя 47 наименований, и приложения. Общий объем работы составляет 75 страниц, включая 7 рисунков.

Содержание работы

Во введении формулируются цели и задачи исследования, обосновывается его актуальность и новизна, а также приводится краткий обзор диссертации с указанием результатов и соответствующих им разделов.

Определению обобщенной нормальной формы (контактного) гамильтониана и методам ее нахождения посвящен первый раздел диссертации. В подразделах 1.1–1.3 вводятся основные понятия, использующиеся в диссертации. В подразделе 1.1 приводятся определения обобщенных степеней, порядков, квазиоднородности и канонического веса. В подразделе 1.2 вводится понятие резонансного уравнения для квазиоднородного гамильтониана с каноническим весом, определяются резонансные полиномы и наборы. Определение обобщенной нормальной формы формулируется в подразделе 1.3. Там же доказывается теорема существования нормализующего преобразования в классе формальных симплектических (в контакном случае — контактных) преобразований.

Вкратце, описываемый в разделе метод является усовершенствованным вариантом подхода Г.Р. Белицкого. На линейном пространстве полиномиальных гамильтонианов вводится скалярное произведение

$$\langle P, Q \rangle = P(\partial)Q(z)|_{z=0}$$

и рассматривается оператор $\widehat{H}^*$, двойственный к оператору взятия скобки Пуассона (в контактном случае — Лагранжа) с невозмущенным гамильтонианом H: $\widehat{H}(\,\cdot\,) = \{H, \cdot\,\}$. Ядро $\widehat{H}^*$ называется в работе *пространством резонансных полиномов*. Принципиально новыми являются определения канонического веса, резонансного набора и, собственно, нормальной формы. В подходе Белицкого возмущение в нормальной форме обязательно должно состоять из резонансных полиномов, в то время как в обобщенной нормальной форме это искусственное ограничение на возмущение снято.

В качестве иллюстрации введенных понятий в подразделе 1.4 приводятся структуры обобщенных нормальных форм гамильтоновых систем с одной степенью свободы с невозмущенной частью, порожденной гамильтонианами вида $H = x^l y^m$ и $H = x^l \pm y^m$.

Подразделы 1.5–1.6 посвящены проблеме нахождения обобщенных нормальных форм гамильтонианов со многими степенями свободы. В подразделе 1.5 показывается (см. Теорему 2), что для всякого гамильтониана H такого, что $\widehat{H}^*$ понижает обобщенную степень, существует и единственно разбиение пространства полиномов в прямую сумму взаимноортогональных линейных подпространств $\mathfrak{Q}_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, таких, что для каждого ненулевого $Q \in \mathfrak{Q}_j$

$$\widehat{H}^{*\,j}(Q) \neq 0, \qquad \widehat{H}^{*\,j+1}(Q) = 0.$$

Подпространства $\mathfrak{Q}_j$ в работе называются пространствами *квазирезонансных полиномов* индекса j. В качестве примеров введенного определения находятся квазирезонансные разбиения для гамильтониана вида $H = x^l y^m$ для всех возможных сочетаний показателей l и m.

Далее доказывается (см. Теорему 3), что в случае, когда невозмущенный гамильтониан, представлен прямой суммой гамильтонианов от различных групп канонических координат, т. е. $H(x,y) = H_1(x', y') + H_2(x'', y'')$, а операторы $\widehat{H}_1^*$ и $\widehat{H}_2^*$ понижают обобщенную степень, имеет место канонический изоморфизм пространств

$$\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathfrak{Q}'_j \otimes \mathfrak{Q}''_j \cong \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{Q}'_j$, $\mathfrak{Q}''_j$ — квазирезонансные подпространства для H_1 и H_2 соответственно, а $\mathfrak{R}$ — пространство резонансных полиномов для H. Этот изоморфизм задается операцией

$$P' \odot P'' = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i\, \widehat{H}_1^{*\,i}(P'_j)\, \widehat{H}_2^{*\,j-i}(P''_j),$$

где $P'_j \in \mathfrak{Q}'_j$, $P''_j \in \mathfrak{Q}''_j$ — квазирезонансные слагаемые полиномов P' и P''.

В подразделе 1.6 с помощью результатов, полученных в подразделе 1.5, вычисляется неполная нормальная форма Белицкого гамильтоновой системы с невозмущенным гамильтонианом вида $\lambda_1 x_1^{l_1} y_1^{m_1} + \lambda_2 x_2^{l_2} y_2^{m_2}$.

Разделы 2–3 посвящены применениям обобщенных нормальных форм гамильтоновых и контактных систем.

В разделе 2 речь также идет об обобщенных нормальных формах, однако уже не гамильтоновых систем, а систем с гамильтоновой невозмущенной частью и негамильтоновым возмущением. В диссертации рассматривается случай, когда невозмущенная часть порождена гамильтонианом вида $H = \sum_{i=1}^{n} H_i(x_i, y_i)$. В подразделе 2.1 для таких систем вводится специальное разбиение пространства векторных полиномов, аналогичное разбиению на гамильтонову и негамильтонову составляющие в случае двух уравнений:

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F_i}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + G_i \mathcal{E}_{\gamma,i},$$

где $\mathcal{E}_{\gamma,i}$ — обобщенные операторы Эйлера. Далее вводится понятие усеченного резонансного набора и доказывается (Теорема 4), что такая система формально эквивалентна системе, в которой F_i и G_i являются линейными комбинациями элементов произвольно выбранных мономиальных усеченных гамильтоновых резонансных наборов $\mathfrak{T}_i$ и гамильтоновых резонансных наборов $\mathfrak{S}_i$ соответственно.

В подразделе 2.2 показывается, как в случае системы двух уравнений перейти от гамильтоновых резонансных и усеченных резонансных наборов к обычным резонансным наборам в смысле В.В. Басова, и находятся структуры обобщенных нормальных форм системы двух уравнений с невозмущенной частью, представленной бездивергентным вектором с мономиальными компонентами произвольной степени.

В подразделе 2.3 рассматривается система с нильпотентной гамильтоновой невозмущенной частью, порожденной гамильтонианом $y_1^2 + \cdots + y_n^2$. Для случая $n = 1$ соответствующая обобщенная нормальная форма была получена Ф. Такенсом. Используя полученные в предыдущих подразделах результаты, результат Такенса практически дословно распространяется на случай произвольного n. А именно, доказывается, что такая система формально эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i, \\ \dot{y}_i &= f_i + y_i g_i, \end{aligned}$$

где ряды f_i, g_i не зависят от y_i. Хотя такая структура возмущения еще не является обобщенной нормальной формой, так как может быть дополнительно упрощена при помощи почти тождественных преобразований, она имеет существенно более простой вид, чем у исходной системы. Для $n = 2$ данное утверждение дополнительно уточняется, показывается, что обобщенная нормальная форма такого вида единственна, а структура возмущения приводится явно.

Раздел 3 целиком посвящен обобщенным нормальным формам контактных систем и их применению в термодинамике неидеальных сред. Уравнения состояния реальных сред, которые, как правило, сложно получить теоретически, можно рассматривать как возмущения идеальных моделей. В диссертации приводится новый подход к классификации такого рода возмущений при помощи метода обобщенных нормальных форм.

В подразделе 3.1 читатель знакомится с термическими уравнениями состояния, которые описывают взаимосвязь между температурой T, объемными концентрациями n_i компонент системы, давлением P и другими обобщенными термодинамическими силами. С учетом уравнения Гиббса-Дюгема термическое уравнение состояния представляет собой уравнение в частных производных первого порядка относительно P. Его характеристические уравнения образуют контактную систему. В связи с этим в работе вводится понятие контактной эквивалентности таких уравнений. В качестве иллюстрации введенного определения в подразделе 3.2 рассматривается уравнение состояния смеси неидеальных газов в форме вириального разложения:

$$P - nT - \sum_{|m|\geq 2} B_m(T) n_1^{m_1} \cdots n_k^{m_k} = 0,$$

где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $m = (m_1, \dots, m_k)$, $|m| = m_1 + \cdots + m_k$. Показывается, что оно контактно эквивалентно уравнению состояния смеси идеальных газов

$$P - nT = 0.$$

Далее в подразделе обсуждается физический смысл полученной обобщенной нормальной формы.

В подразделах 3.3–3.4 рассматривается модель Дебая-Хюккеля классической водородной плазмы, описываемой уравнением состояния

$$P - T\,n + \frac{\sqrt{8\pi}}{3T^{1/2}} n_{\mathrm{p}}^{3/2} e^3 = 0,$$

где через e обозначен элементарный заряд. В подразделе 3.3 обсуждаются свойства модели Дебая-Хюккеля и условия ее применимости. В заключительном подразделе 3.4 находятся младшие резонансные возмущения для такой плазмы, подробно анализируется влияние этих возмущений на поведение плазмы и выясняется, какие физические явления могут приводить к их возникновению. Результаты раздела 3, в частности, показывают, что резонансные возмущения термодинамических моделей являются не просто математической абстракцией, но, напротив, несут в себе ясный физический смысл, а метод обобщенных нормальных форм может быть использован для получения нетривиальных моделей неидеальных термодинамических сред.

В заключении подводятся итоги проведенного исследования, формулируются выводы, обсуждаются пути дальнейшего развития метода обобщенных нормальных форм и вопросы, оставшиеся за рамками диссертации. По мнению автора, результаты работы показывают, что обобщенные нормальные формы гамильтоновых и контактных систем могут быть полезны при изучении широкого круга задач, возникающих не только в рамках локальной качественной теории, но и в других предметных областях.

В приложение вынесены базовые сведения о контактных и симплектических преобразованиях.

Публикации автора по теме диссертации

Жирным шрифтом выделены публикации в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК.

1. Басов В.В., Ваганян А.С. Нормальные формы гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2010. № 4. С. 86–107. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/basovvr.pdf.

2. **Басов В.В., Ваганян А.С. О нахождении неполной нормальной формы Белицкого гамильтоновой системы // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48, № 4. С. 9–18.**

3. **Басов В.В., Ваганян А.С. Обобщенные нормальные формы двумерных систем с гамильтоновой невозмущенной частью // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 59, № 3. С. 351–359.**

4. Ваганян А.С. Обобщенные нормальные формы систем с гамильтоновой невозмущенной частью // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 4. С. 66–83. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/vaganyan.pdf.

5. **Ваганян А.С. О нахождении обобщенных нормальных форм систем с гамильтоновой невозмущенной частью методом Белицкого // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61), № 3. С. 372–376.**

6. **Ваганян А.С. Нормальные формы уравнений термодинамики // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, № 1. С. 58–67.**

7. Басов В.В., Ваганян А.С. Нормальные формы гамильтоновых систем с произвольной квазиоднородной невозмущенной частью гамильтониана // Еругинские чтения — 2011: тезисы докладов XIV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Новополоцк, 12–14 мая 2011 г.). 2011. С. 38–39.

8. Vaganyan A.S. Contact transformations and normal forms in thermodynamics of non-ideal media // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения — 2013): тезисы докладов Международной научной конференции. Гродно, 13–16 мая 2013 г. Часть 2 / Под ред. А.К. Деменчук, С.Г. Красовский, Е.К. Макаров. 2013. С. 83.

9. Vaganyan A.S. Contact transformations and normal forms in thermodynamics of non-ideal media // Международная конференция, посвященная памяти Л.П. Шильникова: Тезисы докладов. 2013. С. 110–111.