На правах рукописи

**Усик Егор Владимирович**

# СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПАССИФИКАЦИИ ДЛЯ КАСКАДНЫХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2015

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
**Фрадков Александр Львович**

Официальные оппоненты: **Щербаков Павел Сергеевич,**
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
ведущий научный сотрудник

**Утина Наталья Валерьевна,**
кандидат физико-математических наук,
ФГБОУ ВПО "Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет",
доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого"

Защита состоится 17 февраля 2016 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д.33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан "___" _____________ 20   года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.232.29, проф., доктор физ.-мат. наук.

В.М. Нежинский

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В последние годы возникает все больше задач управления, в которых объект управления описывается сложными, взаимосвязанными системами. Среди таких систем выделяются каскадные системы, которые представляют собой последовательное соединение двух или нескольких подсистем. При синтезе алгоритмов управления для каскадных систем оказывается удобно решать задачу поэтапно. Примером поэтапного синтеза является процедура пошагового (попятного) управления или, как ее еще называют, бэкстеппинг (англ. backstepping). Синтез алгоритмов управления по выходу является достаточно сложной задачей, для которой до сих пор нет эффективного условия разрешимости. Одним из эффективных методов решения задачи синтеза является метод пассификации. Однако существующие подходы к пассификации каскадных систем требуют полного знания всех параметров объекта. При реализации алгоритмов управления на реальных технических системах разработчики систем сталкиваются с переходом от непрерывных систем к дискретным. Управляющие сигналы обрабатываются и формируются с помощью микропроцессоров и поэтому тоже имеют дискретную природу. Важными являются также задачи учета возмущения и стабилизации систем управления с квантизацией по выходу или по состоянию.

Перечисленные аргументы подтверждают актуальность темы диссертации.

**Целью диссертационной работы** является построение и анализ регуляторов, обеспечивающих пассификацию и синхронизацию каскадных нелинейных систем с возмущениями.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие **задачи**.

1. Получить условия синхронизации и пассификации каскадных нелинейных систем с помощью метода бэкстеппинга; исследовать влияние ограниченных возмущений в каскадной системе.
2. Получить условия синхронизации каскадных нелинейных систем, управляемых с помощью дискретного регулятора.
3. Получить условия синхронизации каскадных нелинейных систем, управляемых с помощью дискретного регулятора с возмущениями и квантизатором.

4. Оптимизировать оценку ошибки вектора состояния нелинейной каскадной системы, полученную в п. 1.

**Основные положения, выносимые на защиту.**

1. Получены условия синхронизации и пассификации каскадных нелинейных систем с помощью метода бэкстеппинга (Теоремы 1, 3) [1]; получена оценка вектора состояния при наличии ограниченного возмущения в системе (Теорема 2) [1].
2. Получены условия синхронизации каскадных нелинейных систем, управляемых с помощью дискретного регулятора (Теоремы 4, 5) [1; 2].
3. Получены условия синхронизации каскадных нелинейных систем, управляемых с помощью дискретного регулятора с возмущениями и квантизатором (статическим и динамическим) (Теоремы 6, 7) [2; 3].
4. Оптимизирована оценка ошибки вектора состояния нелинейной каскадной системы, полученная в п. 1, на основе метода инвариантных эллипсоидов(Теорема 8) [4].

**Научная новизна.** Все результаты выносимые на защиту, являются новыми.

**Практическая значимость.** Полученные результаты позволяют найти допустимую величину шага дискретизации, при которой нелинейная каскадная система Лурье с дискретным регулятором экспоненциально устойчива.

Результаты применены автором к исследованию системы дискретного управления, синхронизация трех мобильных роботов. Кроме этого для проверки работы алгоритмов были созданы универсальная лабораторная установка, позволяющая реализовывать не только эти, но и другие алгоритмы, а также система дистанционного управления мобильными роботами.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается корректным применением строгих математических методов: метода функции Ляпунова, метода матричных неравенств и метода пассификации.

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета СПбГУ, на семинарах лаборатории управления сложными системами ИПМаш РАН и на международных конференциях: 14th International Student Olympiad on Automatic Control, Saint-

Petersburg, 2011; 5th 19th IFAC World Congress, Cape Town, South Africa, 2014; 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control, Antibes, France, 2014.

Результаты диссертации были получены в ходе работ по ФЦП "Кадры"(гос. контракты NN 16.740.11.0042, 14.740.11.0942, соглашения NN 8846, 8855), при поддержке РФФИ (проекты NN 11-08-01218, 14-08-01015) и РНФ (проект NN 14-29-00142) и использованы в перечисленных проектах.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 12 работ [1–12], в том числе 4 в изданиях из перечня научных журналов, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации основных научных результатов диссертаций, из них 3 работы в изданиях из баз цитирования Web of Science и Scopus.

Работы [2; 5; 6; 12] написаны в соавторстве. В работе [2] автору принадлежит формулировка и доказательство теоремы оценивания шага дискретизации для сетевых каскадных систем в форме Лурье на основе метода Ляпунова. В работах [5; 6] автором был разработан алгоритм синхронизации мобильных роботов. В [12] диссертанту принадлежит формулировка и доказательство теоремы о пассификации сетевых систем.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

**Первая глава** содержит краткое описание методов пассификации и бэкстеппинга, приводятся вспомогательные неравенства, используемые при получении основных результатов, даются вспомогательные сведения, относящиеся к методу инвариантных эллипсоидов.

Во **второй главе** рассматривается задача пассификации и синхронизации нелинейных каскадных систем в форме Лурье. Строится пассифицирующий регулятор на основе метода бэкстеппинга. Кроме того, исследуются вопросы влияния ограниченных возмущений, и применяются полученные результаты к сетевым системам Лурье.

В разделе 2.1 дается математическая постановка задачи.

Даны две динамические системы в форме Лурье с интегратором

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\varphi(y_1) + f_1(t),\ y_1(t) = Cx(t), && (1)\\
\dot{z}(t) &= Az(t) + B\varphi(y_2) + Bu(t) + f_2(t),\ y_2(t) = Cz(t), && (2)\\
\dot{u}(t) &= \psi(u,t) + w(t), && (3)
\end{aligned}$$

где $x(t), z(t)$ – $n$-мерные векторы состояния, $y_1(t), y_2(t)$ – скалярные выходы, $u(t)$ – скалярный вход подсистемы (2), получаемой из подсистемы (3), входом которой является управление $w(t)$, $A$ – $n \times n$ матрица, $B$ – $n \times 1$ матрица, $C$ – $1 \times n$ матрица, $\varphi(y)$, $\psi(u,t)$ – непрерывные нелинейности, лежащие в секторе, $f_i(t)$ – ограниченные возмущения являющиеся измеримыми ограниченными функциями, $\|f_i(t)\| \leqslant \Delta_{f_i}, i = 1{,}2,\ t \leqslant 0$. Система (1) называется ведущая (master), система (2) - ведомая (slave).

Цель управления - синхронизировать две системы (1),(2) с нелинейным интегратором (3), т. е. выбрать функцию управления $w(t)$ таким образом, чтобы $y_1(t) - y_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Вспомогательная задача – пассификация системы (1) – (3). $w(t)$ – управляющее воздействие для системы (2), (3).

Рассматривается следующая система с нулевым возмущением $f_i(t) \equiv 0$ для $i = 1{,}2$. Вводится ошибка синхронизации $e(t) = x(t) - z(t)$, а также ошибка синхронизации по выходу $\varepsilon(t) = y_1(t) - y_2(t) = Ce(t)$. С учетом этих обозначений вводится новая система:

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= Ae(t) + B\xi(\varepsilon,t) - Bu(t),\ \varepsilon(t) = Ce(t), && (4)\\
\dot{u}(t) &= \psi(u,t) + w(t), && (5)
\end{aligned}$$

где $\xi(\varepsilon,t) = \varphi(y_1) - \varphi(y_2)$ – новая нелинейность. Цель управления будет выглядеть следующим образом: $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

В разделе 2.2 даются предположения для достижения условий цели, а также формулируется и доказывается основной результат.

Для получения условий достижения цели делаются следующие предположения.

1. Пусть линейная система $\dot{e}(t) = Ae(t) - Bu(t)$, $\varepsilon(t) = Ce(t)$ гиперминимально-фазовая, т. е. матричная функция $\Gamma(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda W(\lambda)$ невырожденна и положительно определена, где

$W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B = \beta(\lambda)/\alpha(\lambda)$ – передаточная функция системы.

Для случая со скалярным выходом это означает: степень знаменателя $\alpha(\lambda)$ равна $n$. Числитель $\beta(\lambda)$ гурвицев степени $n-1$ с положительными коэффициентами. В соответствии с теоремой о пассификации существует управление $u(t) = K\varepsilon$, такое что система стабилизируема;

2. $\xi(\varepsilon,t)$ лежит в секторе, т. е. $a \leqslant \xi(\varepsilon,t)/\varepsilon \leqslant b$, где $a, b$ – параметры сектора, зависящие от нелинейности;
3. $\psi(u,t)$ также лежит в секторе, т. е. $c \leqslant \psi(u,t)/u \leqslant d$, где $c, d$ – параметры сектора, зависящие от нелинейности;

Из гиперминимально-фазовости и теоремы о пассификации следует, что минимальное расстояние $\eta_0$ между корнями числителя передаточной функции и мнимой осью будет положительным. Выберем параметры $\eta$ и $K$ таким образом, чтобы $0 < \eta < \eta_0$, $2\|\tilde{D}\|\|P\|\|C\|\max(|a|,|b|) + 2\|P\|\max(|c|,|d|) < \eta\lambda_{\min}$, где $\tilde{D} = \begin{pmatrix} B \\ KCB \end{pmatrix}$, $P$ – положительно определенная матрица в квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^T P x$, $\lambda_{\min}$ – наименьшее собственное число данной матрицы.

Для синтеза управления $w(t)$ используется метод бэкстеппинга.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) + B\xi(\varepsilon,t) - Bu(t), \ \varepsilon(t) = Ce(t), && (6) \\ \dot{u}(t) &= KCAe(t) + KCB\xi(\varepsilon,t) + \psi(u,t) + v(t). && (7) \end{aligned}$$

Введем обозначения: $\tilde{e} = \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix}$ $\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \end{pmatrix}$.

**Теорема 1** (2.1)**.** *Пусть выполнены предположения (1)-(3). Тогда существуют числа $K, \gamma$, такие что система (6),(7) будет пассивна с квадратичной функцией запаса $V(\tilde{e}) = \tilde{e}^T P \tilde{e}$, а замкнутая система с управлением $v(t) = (-\gamma - KCB)u + \gamma K\varepsilon$ асимптотически устойчива.*

Переходим к учету влияния возмущений на исходную систему (1)-(3). Ее можно переписать в виде

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{A}\tilde{e}(t) + \tilde{B}K\tilde{\varepsilon}(t) + f(t), \ \tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{C}\tilde{e}(t), \tag{8}$$

где $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) - f_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ – ограниченное возмущение.

В разделе 2.3 представлена оценка вектора состояния для системы с ограниченным возмущением.

**Теорема 2** (2.2). *Дана система (8) с ограниченным возмущением $\|f(t)\| \leqslant \Delta_f$. Пусть выполнены три предположения (1)-(3). Тогда $\overline{\lim}_{t\to\infty}\|\tilde{e}(t)\| \leqslant C_{\tilde{e}}\Delta_f$, где $C_{\tilde{e}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\frac{1}{\eta}}$.*

В разделе 2.4 формулируется и доказывается результат, который состоит в получении условий пассификации и синхронизации для сетевых каскадных систем Лурье.

Рассматриваются $n$ взаимосвязанных систем с интегратором

$$\dot{z}_i(t) = Az_i(t) + B\varphi(y_i) + Bu_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\varphi_{ij}(z_i(t) - z_j(t)), \ y_i(t) = Cz_i(t), \quad (9)$$

$$\dot{u}_i(t) = \psi(u_i,t) + w_i(t), \quad (10)$$

где $\varphi_{ij}(x), i = 1,...,n, j = 1,...,d$ – функции, описывающие взаимосвязь между системами, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^1$.

Кроме этого рассматривается ведущая система (master)

$$\dot{z}_0(t) = Az_0(t) + B\varphi(y_0), \ y_0(t) = Cz_0(t). \quad (11)$$

Цель управления - синхронизировать все системы относительно ведущей, т. е. $y_i(t) - y_0(t) \to 0$ при $t \to \infty, i = 1,...,n$.

Положив $e_i(t) = z_i(t) - z_0(t)$, получаются уравнения относительно ошибок:

$$\dot{e}_i(t) = Ae_i(t) + B\xi(\varepsilon_i,t) - Bu_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\varphi_{ij}(e_i(t) - e_j(t)), \ \varepsilon_i(t) = Ce_i(t), \quad (12)$$

$$\dot{u}_i(t) = \psi(u_i,t) + w_i(t). \quad (13)$$

Введем обозначения $\tilde{e}_i = \begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix}$, $\tilde{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ u_i \end{pmatrix}$. По аналогии с теоремой 1 синтезируется регулятор с помощью метода бэкстеппинга. Таким образом, $w_i(t) = KCAe_i(t) + KCB\xi(\varepsilon_i,t) + v_i(t)$.

**Теорема 3.** *Пусть для систем (9), (10) выполнены предположения (1)-(3), а функции* $\varphi_{ij}(x), i = 1,...,n, j = 1,...,d$ *глобально липшицевы:*

$$\varphi_{ij}(x) : \|\varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}(x')\| \leqslant L_{ij}\|x - x'\|, \forall x, x'. \tag{14}$$

*для некоторый* $L_{ij} > 0$.

*Пусть также выполнены неравенства:*

$$-\eta_i\lambda_{\min}(P_i) + 2\|\tilde{D}\|\lambda_{\max}(P_i)\max(|a|,|b|)\|\tilde{C}\| + 2\lambda_{\max}(P_i)\max(|c|,|d|)+ \\ + 2\lambda_{\max}(P_i)\sum_{j=1}^{n}(2|L_{ij}\alpha_{ij}| + |L_{ji}\alpha_{ji}|) < 0, i = 1,...,n, \tag{15}$$

*где* $\tilde{D} = \begin{pmatrix} B \\ KCB \end{pmatrix}$, $P$ *– положительно определенная матрица в квадратичной функции Ляпунова* $V(\tilde{e}_i) = \tilde{e}_i^T P\tilde{e}_i$, $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ *– наименьшее и наибольшее собственное число данной матрицы, то существуют числа* $K, \gamma$, *такие что система (9), (10) со входом* $v_i$ *будет пассивна с квадратичной функцией* $V(\tilde{e}) = \sum_{i=1}^{n}\tilde{e}_i^T P\tilde{e}_i$ *запаса и замкнутая система с управлением* $v_i(t) = (-\gamma - KCB)u_i + \gamma K\varepsilon_i$ *асимптотически устойчива.*

**Третья глава** посвящена исследованию нелинейных каскадных систем в форме Лурье с дискретным управлением. Выводятся условия экспоненциальной синхронизации.

В разделе 3.1 формулируется и доказывается результат, который состоит в получении условий на шаг дискретизации для обеспечения экспоненциальной устойчивости каскадных систем Лурье.

Рассматривается дискретный регулятор

$$v(t) = (-\gamma - KCB)u(t_k) + \gamma K\varepsilon(t_k), \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}, \tag{16}$$

где $t_k = kh$ – моменты времени, $h$ – шаг дискретизации.

Система (6), (7) представляется в виде

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{A}\tilde{e}(t) + \tilde{B}v(t) + \tilde{B}\psi(u,t) + \tilde{D}\xi(\varepsilon,t), \;\; \tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{C}\tilde{e}(t), \; v(t) = \tilde{K}\tilde{\varepsilon}(t_k). \tag{17}$$

**Теорема 4.** *Дана система (17) с дискретным регулятором. Пусть выполняются условия (1)-(3). Выберем шаг дискретизации так, чтобы выполнялось неравенство*

$$L(h) \leqslant 0, \tag{18}$$

*где* $L(h) = \|\tilde{C}\|\varkappa\|\tilde{K}\|e^{L_G h} - \|\tilde{C}\|\varkappa\|\tilde{K}\| - \min\{L_G - L_G e^{-\eta h}, 2\}$, $\varkappa$ *– коэффициент оценки выхода системы через функцию Ляпунова:* $|\tilde{\varepsilon}| \leqslant \varkappa\sqrt{V}$, $L_G$ *– константа Липшица правой части системы (17).*

*Тогда рассматриваемая система будет экспоненциально устойчива.*

Утверждение теоремы означает экспоненциальное стремление к нулю ошибки синхронизации.

В разделе 3.2 формулируется и доказывается результат, который состоит в получении условий на шаг дискретизации для обеспечения экспоненциальной устойчивости сетевых каскадных систем Лурье.

Рассматриваются $n$ каскадных динамических систем в форме Лурье с интеграторами

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= Az_i(t) + B\varphi(y_i) + Bu_i(t) + && (19)\\ &+ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(z_i(t) - z_j(t)), && (20)\\ \dot{u}_i(t) &= \psi(u_i,t) + w_i(t),\ \ y_i(t) = Cz_i(t), && (21) \end{aligned}$$

где $\varphi_{ij}(x), i = 1,...,n, j = 1,...,d$ – функции, описывающие взаимосвязь между системами, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^1$. Кроме этого рассматривается ведущая систему (master):

$$\dot{z}_0(t) = Az_0(t) + B\varphi(y_0),\ \ y_0(t) = Cz_0(t). \tag{22}$$

где $z_i(t), z_0(t)$ – $n$-мерные векторы состояния объекта, $y_i(t), y_0(t)$ скалярные выходы, $A$ – $n \times n$ матрица, $B$ – $n \times 1$ матрица, $C$ $1 \times n$ матрица, $\varphi(y)$, $\psi(u,t)$ – непрерывные нелинейности лежащие в секторе, $w_i(t), t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ – управляющее воздействие, где $t_k = kh$ моменты времени с шагом дискретизации $h$.

Цель управления - синхронизировать все системы относительно ведущей, т. е. $z_i(t) - z_0(t) \to 0$ при $t \to \infty, i = 1,...,n$.

Положив $e_i(t) = z_i(t) - z_0(t)$ и $\varepsilon_i(t) = y_i(t) - y_0(t) = Ce_i(t)$, выводятся уравнения относительно ошибок:

$$\dot{e}_i(t) = Ae_i(t) + B\xi(\varepsilon_i,t) - Bu_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(e_i(t) - e_j(t)),\ \varepsilon_i(t) = Ce_i(t), \tag{23}$$

$$\dot{u}_i(t) = \psi(u_i,t) + w_i(t), \tag{24}$$

где $\xi(\varepsilon_i,t) = \varphi(\varepsilon_i + y_0(t)) - \varphi(y_0(t))$ новая нелинейность.

По аналогии с теоремой 4 синтезируется регулятор с помощью метода бэкстеппинга. Таким образом, $w_i(t) = KCAe_i(t) + KCB\xi(\varepsilon_i,t) + v_i(t)$. Цель управления принимает вид: $\lim_{t\to\infty} e_i(t) = 0$.

Введем обозначения $\tilde{e}_i = \begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix}$, $\tilde{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ u_i \end{pmatrix}$.

**Теорема 5.** *Дана система (23) - (24) с дискретным регулятором. Пусть выполнены предположения (1)-(3) и неравенство*

$$-\eta_i\lambda_{\min}(P_i) + 2\|\tilde{D}\|\lambda_{\max}(P_i)\max(|a|,|b|)\|\tilde{C}\| + 2\lambda_{\max}(P_i)\max(|c|,|d|)+ \\ + 2\lambda_{\max}(P_i)\sum_{j=1}^{n}(2|L_{ij}\alpha_{ij}| + |L_{ji}\alpha_{ji}|) < 0, i = 1,\ldots,n, \tag{25}$$

*где $\tilde{D} = \begin{pmatrix} B \\ KCB \end{pmatrix}$, $P$ – положительно определенная матрица в квадратичной функции Ляпунова $V(\tilde{e}_i) = \tilde{e}_i^T P\tilde{e}_i$, $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ — наименьшее и наибольшее собственные числа данной матрицы.*

*Функции $\varphi_{ij}(x), i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,d$ глобально липшицевы:*

$$\varphi_{ij}(x) : \|\varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}(x^{'})\| \leqslant L_{ij}\|x - x^{'}\|, L_{ij} > 0.$$

*Пусть шаг дискретизации удовлетворяет следующим неравенствам*

$$L_i(h) \leqslant 0,$$

*для $i = 1..n$, где $L_i(h) = \|\tilde{C}\|\varkappa_i\|\tilde{K}\|e^{L_G h} - \|\tilde{C}\|\varkappa_i\|\tilde{K}\| - \min\{L_G - L_G e^{-\eta h}, 2\}$, $\varkappa_i$ коэффициент оценки выхода системы через функцию Ляпунова: $|\tilde{\varepsilon}_i| \leqslant \varkappa_i\sqrt{V}$, $L_G$ – константа Липшица правой части системы (23) - (24).*

*Тогда рассматриваемая система будет экспоненциально устойчива.*

В **четвертой главе** рассматриваются нелинейные каскадные системы в форме Лурье с квантизацией по уровню. Решается задача синхронизации каскадных нелинейных систем, управляемых с помощью дискретного регулятора с возмущениями и квантизатора.

Рассматривается регулятор с квантизатором $\tilde{w}(t) = q_\mu(w(t))$.

Пусть $z \in \mathbb{R}^l$ квантуемая переменная. Квантизатор это кусочно-постоянная функция $q : \mathbb{R}^l \longrightarrow Q$, где $Q$ конечное подмножество из $\mathbb{R}^l$. Это приводит к разбиению множества $\mathbb{R}^l$ на конечное число областей квантования в виде $z \in \mathbb{R}^l : q(z) = i, i \in Q$. Когда переменная $z$ не принадлежит объединению областей квантования, квантизатор насыщается. Более подробно: предполагается что существуют положительные вещественные числа $M$ и $\Delta$ такие, что выполняются следующие условия: если $|\varepsilon| \leqslant M$, то $|Q(\varepsilon) - \varepsilon| \leqslant \Delta$ и $|\varepsilon| > M \Rightarrow |Q(\varepsilon)| > M - \Delta$.

Параметры $M$ и $\Delta$ называются диапазоном $q$ и ошибкой квантования, соответственно.

Цель управления - синхронизировать две системы (1),(2) с нелинейным интегратором (3), т. е. выбрать функцию управления $w(t)$ таким образом, чтобы $x(t) - z(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим систему (6), (7) с дискретным регулятором и статическим квантизатором $v(t) = Q((-\gamma - KCB)u(t_k) + \gamma K\varepsilon(t_k)),\ t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, где $t_k = kh$ моменты времени с шагом дискретизации $h$.

Начальная система (6), (7) может быть представлена в виде

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{A}\tilde{e}(t) + \tilde{B}v(t) + \tilde{B}\psi(u,t) + \tilde{D}\xi(\varepsilon,t), \tag{26}$$

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{C}\tilde{e}(t),\, v(t) = \tilde{K}Q(\tilde{\varepsilon}(t_k)) = \tilde{K}\tilde{\varepsilon}(t_k) + \Delta, \tag{27}$$

где $\tilde{e} = \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix}$ $\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \end{pmatrix}$.

**Теорема 6.** *Рассмотрим систему (26) с дискретным по времени управлением и квантизатором $Q$. Выберем шаг дискретизации, чтобы выполнялось неравенство:*

$$(L_G)\tilde{e}^{-\eta h} + \|\tilde{C}\|\varkappa\|\tilde{K}\|\tilde{e}^{L_G h} - \|\tilde{C}\|\varkappa\|\tilde{K}\| < 0 \tag{28}$$

*$\varkappa$ коэффициент оценки выхода системы через функцию Ляпунова: $|\tilde{\varepsilon}| \leqslant \varkappa\sqrt{V}$, $L_G$ – константа Липшица правой части системы (26). Тогда $\overline{\lim}_{t\to\infty}\|\tilde{e}(t)\| \leqslant C_{\tilde{e}}\Delta$, где*

$$C_{\tilde{e}} = \sqrt{\frac{2\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)L_G(\eta L_G - \tilde{e}^{L_G h}\varkappa K + \varkappa K)}(\tilde{e}^{L_G h} + L_G - 1)}.$$

Для алгоритма управления, представленного ниже, используется динамический квантователь в виде $q_\mu(z) = \mu q(\frac{z}{\mu})$ где $\mu > 0$ – масштабирующий параметр. Диапазон квантователя – $M\mu$ и ошибка квантования – $\Delta\mu$.

Рассматривается система (6), (7) с регулятором $v(t) = q_\mu((-\gamma - KCB)u(t) + \gamma K\varepsilon(t))$.

Исходная система (6), (7) представляется в виде

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{A}\tilde{e}(t) + \tilde{B}v(t) + \tilde{B}\psi(u,t) + \tilde{D}\xi(\varepsilon,t),\ \ \tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{C}\tilde{e}(t),\ v(t) = \tilde{K}q_\mu(\tilde{\varepsilon}(t)), \tag{29}$$

где $\tilde{e} = \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix}$ $\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \end{pmatrix}$.

Зафиксируем параметр $\mu$.

**Лемма 1.** *Пусть выполнены предположения (1)-(3). Зафиксируем произвольный параметр $\varepsilon > 0$ и предположим, что $M$ достаточно большое по сравнению с $\Delta$, таким образом будет выполнено*

$$\sqrt{\lambda_{min}(P)}M > \sqrt{\lambda_{max}(P)}\Theta_{\tilde{e}}\Delta(1+\varepsilon), \tag{30}$$

*где $\Theta_{\tilde{e}} = \frac{2\|PBKC\|}{\chi} > 0$, $\chi = \eta - \|D\|\|C\|\max(|a|,|b|) - \|B\|\max(|c|,|d|)$.*

*Следовательно эллипсоиды*

$$R_1(\mu) = \{\tilde{e} : \tilde{e}^T P\tilde{e} \leqslant \lambda_{min}(P)M^2\mu^2\} \tag{31}$$

*и*

$$R_2(\mu) = \{\tilde{e} : \tilde{e}^T P\tilde{e} \leqslant \lambda_{max}(P)\Theta_{\tilde{e}}^2\Delta^2(1+\varepsilon)^2\mu^2\} \tag{32}$$

*– инвариантные области для системы (29). Более того, все решения системы (29) начинающиеся в эллипсоиде (31) попадают в меньший (32) за конечное время.*

**Теорема 7.** *Предположим что $M$ достаточно большое по сравнению с $\Delta$, таким образом будет выполнено неравенство*

$$\frac{M}{\Delta} > 2\max\left\{1, \frac{\|PBCK\|}{\chi}\right\}\sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}, \tag{33}$$

*где* $\chi = \eta - \|D\|\|C\|\max\left(|a|,|b|\right) - \|B\|\max\left(|c|,|d|\right)$ .

*Тогда, существует гибридный квантованный алгоритм управления, который делает систему (29) глобально асимптотически устойчивой.*

В **пятой главе** диссертационной работы оптимизируется оценка ошибки выхода нелинейной каскадной системы на основе метода инвариантных эллипсоидов.

Цель состоит в оптимизации оценки ошибки выхода в системе с ограниченными внешними возмущениями на основе техники LMI и методе инвариантых эллипсоидов.

**Определение 1.** *Инвариантным эллипсоидом для динамической системы называется эллипсоид*

$$\Upsilon_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q^{-1} x \leqslant \Delta_f\}, Q \succ 0, \tag{34}$$

*обладающий следующим свойством: любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в $\Upsilon_x$, в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду.*

Представим систему (6),(7) в виде

$$\begin{pmatrix} \dot e \\ \dot u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ KCA & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ KCB \end{pmatrix} \xi(\varepsilon,t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \psi(u,t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} v$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$v(t) = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix}$$

Или, в других обозначениях,

$$\dot{\tilde e}(t) = \tilde A \tilde e(t) + \tilde B \psi(u,t) + \tilde B v(t) + \tilde D \xi(\varepsilon,t) + E \tilde f(t), \tag{35}$$
$$\tilde\varepsilon(t) = \tilde C \tilde e(t),\; v(t) = \tilde K \tilde\varepsilon. \tag{36}$$

**Теорема 8.** *Пусть выполнены предположения (1) - (3). Эллипсоид (34) является инвариантным для системы (6),(7), если его матрица* $Q \succ 0$ *удовлетворяет LMI*

$$\begin{pmatrix} W & Q & Q & E^T \\ Q & -\frac{\gamma}{\max(c,d)}(C^T C)^{-1} & 0 & 0 \\ Q & 0 & -\frac{\delta}{\max(a,b)}(C^T C)^{-1} & 0 \\ E & 0 & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0. \tag{37}$$

*при некоторых* $\alpha, \gamma, \delta > 0$, *где* $W = \widehat{A}^T Q + Q\widehat{A} + \alpha Q + \gamma \tilde B \tilde B^T + \delta \tilde D \tilde D^T$, $\widehat{A} = \tilde A + \tilde B \tilde C \tilde K$.

**Следствие 1.** *Решение* $\widehat{Q}$ *задачи*

$$trCQC^T \to min \tag{38}$$

*при ограничении*

$$\begin{pmatrix} W & Q & Q & E^T \\ Q & -\frac{\gamma}{\max(c,d)}(C^TC)^{-1} & 0 & 0 \\ Q & 0 & -\frac{\delta}{\max(a,b)}(C^TC)^{-1} & 0 \\ E & 0 & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0, \qquad (39)$$

$\widehat{A} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}\tilde{K}$, $W = \widehat{A}^TQ + Q\widehat{A} + \alpha Q + \gamma\tilde{B}\tilde{B}^T + \delta\tilde{D}\tilde{D}^T$ *определяет матрицу* $C\widehat{Q}C^T$ *ограничивающего эллипсоида для выхода* $\varepsilon = C\tilde{e}(t)$ *системы (6),(7). Минимизация проводится по матричной переменной* $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, параметрам* $\alpha, \gamma, \delta > 0$.

Влияние внешних возмущений на систему можно исследовать с помощью инвариантных эллипсоидов.

Эллипсоид

$$\Upsilon_y = \{y \in \mathbb{R}^l : y^T(CQC^T)^{-1}y \leqslant \Delta_f\},$$

содержит выход системы (6),(7), при $x(0) \in \Upsilon_x$.

Кроме этого, в частном случае при скалярном выходе, эллипсоид представляет собой полосу:

$$\Upsilon_y = \{y \in \mathbb{R} : |y| \leqslant \sqrt{CQC^T}\Delta_f\},$$

которая будет содержать выход $y$ системы.

В **шестой главе** представлено описание универсальной лабораторной установки, с помощью которой были применены полученные результаты на практике. Кроме этого, установка позволяет исследовать не только представленные в настоящей работе алгоритмы, но и другие, а также дистанционно управлять мобильными роботами.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем.

1. Получены условия синхронизации и пассификации каскадных нелинейных систем с помощью метода бэкстеппинга; получена оценка

вектора состояния при наличии ограниченного возмущения в системе.
2. Получены условия синхронизации каскадных нелинейных систем, управляемых с помощью дискретного регулятора.
3. Получены условия синхронизации каскадных нелинейных систем, управляемых с помощью дискретного регулятора с возмущениями и квантизатором (статическим и динамическим).
4. Оптимизирована оценка ошибки вектора состояния нелинейной каскадной системы, полученная в п. 1, на основе метода инвариантных эллипсоидов.

## Публикации автора по теме диссертации


1. ***Е. В. Усик***. **Синхронизация нелинейных систем Лурье на основе пассификации и бэкстеппинга** / **Е. В. Усик** // *Автоматика и телемеханика*. — 2012. — Т. 8. — С. 35–48.

2. ***E. Usik and R. Seifullaev and A. Fradkov and T. Bryntseva***. **Accuracy of Fridman's Estimates for Sampling Interval: A Nonlinear System Case Study** / **E. Usik and R. Seifullaev and A. Fradkov and T. Bryntseva** // *IFAC Proceedings Volumes (IFACPapersOnline)*. — 2014. — Vol. 19, World Congress, Part 1. — Pp. 11165–11170.

3. ***E.V. Usik***. **Passification based synchronization of cascade Lurie systems with quantized signals** / **E.V. Usik** // Proceedings of IEEE Conference on Control Applications. — 2014. — Oct. — Pp. 1964–1969.

4. ***Е. В. Усик***. **Оптимизация нелинейных каскадных систем в форме Лурье при ограниченных внешних возмущениях** / **Е. В. Усик** // *Управление большими системами*. — 2015. — Т. 57. — С. 35–52.

5. *Усик, Е.В.* Навигация и управление движением мобильных ЛЕГО-роботов с помощью видеокамеры и беспроводного Bluetooth соединения / Е.В. Усик, В.В. Ниденс // Материалы XII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». — 2010. — С. 194–200.

6. *Усик, Е.В.* Робототехнический комплекс для исследования систем навигации и группового управления мобильными роботами / Е.В. Усик, В.В. Ниденс // Тезисы II Междунар. науч.-практ. конф. «Научно-техническое творчество молодежи – путь к обществу, основанному на знаниях». — 2010. — С. 235–236.

7. *Усик, Е.В.* Система группового управления движением мобильных ЛЕГО-роботов / Е.В. Усик // Материалы 7-ой научно-технической конференции «Мехатроника, автоматизация, управление». — 2010. — С. 401–403.

8. *Усик, Е.В.* Особенности реализации синхронного движения мобильных LEGO-роботов / Е.В. Усик // Список-2011: материалы межвуз. науч. конф. по проблемам информатики. — 2011. — С. 276–279.

9. *Usik, E.V.* Synchronization of Two Nonlinear Lurie Systems Based on Passification and Backstepping / E.V. Usik // Preprints 14th International Student Olympiad on Automatic Control (Baltic Olympiad). — 2011. — Pp. 60–63.

10. *Usik, E.V.* Synchronization of Two Nonlinear Lurie Systems Based on Passification and Backstepping / E.V. Usik // Conference Proceedings International Student Conference "Science and Progress". — 2011. — Pp. 60–63.

11. *Усик, Е.В.* Управление нелинейными каскадными системами в гамильтоновой форме / Е.В. Усик // Материалы 5-ой Российской мультиконференции по проблемам управления. Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах. — 2012. — С. 240–243.

12. *Усик, Е.В.* Синхронизация движения группы мобильных роботов / Е.В. Усик, Т. Брынцева // Материалы XV конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». — 2013. — С. 333–338.