САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

СИПИН Александр Степанович

БЕССЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2016

Работа выполнена в Вологодском государственном университете

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор ЕРМАКОВ Сергей Михайлович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор БЕЛОПОЛЬСКАЯ Яна Исаевна (Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, профессор кафедры математики)
	доктор физико-математических наук, профессор САБЕЛЬФЕЛЬД Карл Карлович (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, главный научный сотрудник лаборатории стохастических задач)
	доктор физико-математических наук, доцент ХАЗАНОВ Владимир Борисович (Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, профессор кафедры прикладной математики и математического моделирования)
Ведущая организация:	Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (факультет вычислительной математики и кибернетики)

Защита состоится «__» ____________ 2016 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199004, Санкт-Петербург, 10-я линия, д. 33, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте:
http://spbu.ru/disser2/disser/sipin_alexandr_diss.pdf

Автореферат разослан «__» ____________ 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Чурин Ю. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Краевые задачи для уравнений в частных производных являются математическими моделями многих реальных процессов, изучаемых в естественных и технических науках. Численные методы решения краевых задач разнообразны и интенсивно развиваются. Наряду с методом конечных разностей, вариационными и проекционными методами для решения краевых задач успешно применяются и методы Монте-Карло (методы статистического моделирования). Они особенно полезны в тех случаях, когда требуется вычислить линейный функционал от решения задачи, поскольку позволяют сделать это без вычисления всего поля решения. Эффективные процедуры статистического моделирования разработаны для решения уравнения переноса излучения, уравнений газовой динамики, ряда задач электростатики, тепло-массобмена и теории упругости. Статистические алгоритмы позволяют решать как внешние, так и внутренние краевые задачи в областях со сложной структурой границы. Важным преимуществом является возможность их естественного распараллеливания, которое заключается в распределении всего объема выборки по имеющимся вычислительным устройствам таким образом, чтобы, по возможности, синхронизировать время окончания работы каждого из них. Следовательно, распараллеливание статистического алгоритма возможно на суперкомпьютерах, компьютерных кластерах, видеокартах. Статистические алгоритмы идеально приспособлены для облачных вычислений, поскольку в них нет обмена данными между вычислителями и передаваемые по сети данные имеют малый объем. Для широкого класса задач вычислительная работа в статистических алгоритмах линейно зависит от размерности пространства, чем они выгодно отличаются от разностных методов. Метод Монте-Карло незаменим при решении задач со случайными данными.

Вычисление любого вещественного параметра методом Монте-Карло связано с предствлением его в виде математического ожидания случайной величины, которая называется несмещенной оценкой. Качество несмещенной оценки определяется наличием у нее дисперсии и несложной процедуры получения реализаций на вычислительном устройстве (процедуры моделирования). Несмещенность оценки означает отсутствие систематической ошибки, то есть, в известном смысле, равносильна точности квадратурной формулы на подинтегральной функции или отсутствию погрешности аппроксимации разностной схемы на решении дифференциального уравнения. Наличие дисперсии, позволяет построить асимптотический доверительный интервал для оцениваемого параметра и, тем самым, оценить погрешность выборочного среднего как оценки параметра.

Известны различные варианты применения метода Монте-Карло к решению краевых задач. Их можно разделить на три группы.

К первой группе относятся статистические методы, связанные с решением систем линейных уравнений, полученных в результате дискретизации дифференциального уравнения [1, 2]. Методом Монте-Карло в этом случае решается система линейных уравнений для сеточной функции, приближающей точное решение в узлах сетки. В случае параболического уравнения обычно используется неявная разностная схема, либо устойчивая явная схема. Статистические оценки строятся на траекториях блуждания по сетке и являются несмещенными для сеточной функции. По отношению к решению дифференциального уравнения статистические оценки имеют смещение равное погрешности разностной схемы.

Ко второй группе относятся методы, основанные на представлении решений краевых задач в виде математического ожидания функционала от траектории диффузионного случайного процесса [3], производящим оператором которого является дифференциальный оператор краевой задачи. Для получения статистических оценок используются приближения случайного процесса, найденные путем решения стохастического дифференциального уравнения разностными методами. Наиболее развитый метод такого типа носит название *многосеточный метод Монте-Карло* (Multilevel Monte Carlo Method, [4, 5]). Получаемые при этом оценки являются смещенными. Величина смещения или ее порядок по шагу разностной схемы оцениваются. В настоящее время такие методы интенсивно развиваются, так как позволяют решать краевые задачи для уравнений с переменными коэффициентами, встречающиеся в финансовой математике.

К третьей группе относятся бессеточные методы, которые связаны с построением статистических оценок на траекториях цепей Маркова с дискретным временем и непрерывным фазовым пространством. Такие методы естественно также называть *методами случайных блужданий* (блуждание по сферам, блуждание по эллипсоидам, блуждание по границе области). Решение краевой задачи записывается при этом как функционал (линейный и ограниченный) от решения некоторого интегрального уравнения второго рода. Бессеточные методы позволяют построить несмещенные оценки решений для некоторых краевых задач в областях, ограниченных многогранниками, и в выпуклых областях. Несмещенность статистической оценки очень важна, так как позволяет определить погрешность непосредственно в процессе решения задачи. В общем случае, имеется смещение, которое можно сделать сколь угодно малым путем уменьшения параметра алгоритма. Вычислительная работа пропорциональна логарифму этого параметра.

Процедуру построения несмещенных оценок для решения интегральных уравнений принято называть схемой Неймана-Улама. Первоначально она разрабатывалась для уравнения переноса излучения, а затем была распространена на интегральные уравнения второго рода. По своей сути, она является процедурой последовательного несмещенного оценивания интеграла в интегральном уравнении по квадратурной формуле с одним случайным узлом, распределение которого определяется плотностью вероятностей перехода цепи Маркова. Схема Неймана-Улама также тесно связана с вероятностной теорией потенциала , что позволяет эффективно использовать теорию мартингалов для исследования случайных блужданий и несмещенных оценок решений краевых задач на траекториях этих блужданий.

Если интегральное уравнение получено из теоремы о среднем значении, то соответствующее блуждание происходит внутри области. Первым и наиболее известным алгоритмом такого типа является *алгоритм блуждания по сферам* [6], решающий задачу Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Алгоритм прост в реализации и достаточно эффективен. Он основан на интегральном представлении решения уравнения Пуассона в центре шара с помощью функции Грина. Во второй половине XX века алгоритмы блужданий внутри области были построены для уравнений второго порядка, главной частью которых является оператор Лапласа. Исследования в этом направлении интенсивно велись в Ленинградском государственном университете (под руководством С.М.Ермакова), в Новосибирском государственном университете (под руководством Г.А.Михайлова), в Болгарии (I.Dimov), в Германии (K.K.Sabelfeld, W.Wagner), в США (M.Mascagni). Результаты исследований отражены в монографиях [8, 11, A2, A3].

Если интегральное уравнение получается на основе уравнений теории потенциала, то говорят об алгоритмах случайного блуждания по границе. По-видимому, впервые такой алгоритм был применен для решения задачи Неймана [A16] в выпуклой области. Несмещенные статистические оценки для решения задачи были построены на траекториях блуждания по границе области, каждая следующая точка которого видна из предыдущей в случайном направлении, определяемом изотропным вектором в полупространстве. Плотность (по отношению к мере Лебега на поверхности) вероятности перехода за один шаг в таком блуждании является ядром Гаусса (для телесного угла), что естественным образом связывает процесс блуждания с уравнениями теории потенциала. Алгоритмы решения уравнений теории потенциала для оператора Лапласа и оператора теплопроводности были разработаны О.Курбанмурадовым, К.К.Сабельфельдом и Н.А.Симоновым [10].

Бессеточные алгоритмы построены для многих практически важных краевых задач.

Цели работы

В данной работе рассматриваются методы построения несмещенных и малосмещенных оценок решений краевых задач для эллиптических и параболических уравнений в частных производных как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Задачи рассматриваются в классической постановке. Строятся как оценки решения дифференциального уравнения в точке, так и функционалов от него. Основными целями работы являются:

- Теоретические исследования случайных процессов и статистических оценок, используемых при построении и реализации бессеточных методов решения краевых задач.
- Разработка новых алгоритмов статистического моделирования для решения краевых задач для уравнений параболического и эллиптического типа.
- Создание процедур моделирования распределений, необходимых для реализации алгоритмов.

Методика исследования

В работе используются методы вычислительной математики, классической теории уравнений в частных производных, функционального анализа, математической статистики и теории вероятностей. С помощью фундаментальных решений или функций Леви краевая задача сводится к интегральному уравнению, которое решается методом Монте-Карло. Для исследования свойств траекторий блуждания, на которых строится статистическая оценка решения краевой задачи и свойств самой оценки применяется теория мартингалов.

Основные результаты, выносимые на защиту

- Схема Неймана-Улама для интегральных уравнений с субстохастическим ядром.
- Статистические алгоритмы решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами.
- Статистические алгоритмы решения первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами.
- Статистические алгоритмы решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами.

- Статистические алгоритмы решения первой и второй краевой задачи для уравнения Пуассона.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них заключаются в следующем.

1) Решена проблема построения стохастических бессеточных алгоритмов для решения эллиптических и параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Алгоритмы могут быть эффективно использованы на современных компьютерах с параллельной структурой и в совокупности с облачными технологиями.
2) Для широкого класса краевых задач, связанных с оператором Лапласа, построены процедуры моделирования несмещенных статистических оценок решений этих задач, что позволяет оценивать погрешность найденного приближенного решения в ходе вычислений. В частности, разработаны различные варианты алгоритма блуждания по полусферам для уравнения Пуассона в многограннике с краевыми условиями первого и третьего рода.
3) Введено понятие главной части интегрального оператора, с помощью которого построены эффективные статистические процедуры решения уравнений теории потенциала. Сформулированы и обоснованы методы выделения главной части оператора с помощью процедуры стохастической аппроксимации.
4) Для интегральных уравнений второго рода с субстохастическим ядром построена универсальная статистическая процедура оценивания решения уравнения и функционалов от него. Построенная теория применена к исследованию алгоритмов метода Монте-Карло для решения краевых задач.

.

Практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Разработанные в ней стохастические алгоритмы могут быть полезны при решении конкретных краевых задач. В частности, алгоритм блуждания по сферам и полусферам, позволяющий получить несещенные оценки для решений внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа успешно применяется для вычисления взаимных электростатических ёмкостей проводников. Доказанные в работе теоремы о поведении траекторий блужданий будут полезны при исследовании новых бессеточных стохастических алгоритмов решения краевых задач.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- на семинаре кафедры статистического моделирования математико- механического факультета Санкт- Петербургского государственного университета под руководством профессора С.М.Ермакова (неоднократно);
- на семинаре кафедры прикладной математики факультета прикладной математики, компьютерных технологий и физики Вологодского государственного университета под руководством профессора А.И.Зейфмана (неоднократно);
- на V всесоюзной конференция "Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике", Новосибирск, 1976;
- на VI всесоюзной конференции "Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике", Новосибирск, 1979;
- на межреспубликанской школе-семинаре "Методы Монте-Карло и их приложения" (Казахстан, Алма-Ата, сентябрь 1987);
- на школе-семинаре "Актуальные проблемы теории статистического моделирования и ее приложения" (Узбекистан, Ташкент, сентябрь 1989);
- на международной конференции Fifth Workshop on Simulation. (St. Petersburg ,2005);
- на международной конференции "А.Н.Тихонов и современная математика" (секция "Вычислительная математика и информатика"), (Москва, 2006);
- на пятой международной конференции "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания", (Обнинск, 2011);
- на международной конференции Seven Workshop on Simulation. (Rimini, Italy, 2013);
- на международной конференции Ninth IMACS Seminar on Monte Carlo Methods, (Annecy-le-Vieux, France, 2013)

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 22 работах, в том числе, в трех монографиях и 11 статьях, напечатанных в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание учёной степени доктора наук. Перечень публикаций приведён в конце автореферата. Монография [А3] опубликована при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-01-07007). Работы [А4 – А13] опубликованы в журналах, которые входят в список ВАК, а издание [А14] входит в систему цитирования Scopus.

В монографии [А1] автору принадлежат глава 2 и первые четыре параграфа главы 5. В монографии [А2] автору принадлежат глава 2, первые четыре параграфа главы 5 и параграф 4 главы 6. В монографии [А3] автору принадлежат вторая часть книги “Методы Монте-Карло для уравнений в частных производных. (Бессеточные методы)”. В работе [А6] автору принадлежат определение понятия главной части интегрального оператора и примеры 1-3 её выделения. Соавтору принадлежат результаты, связанные с выделением с помощью процедуры стохастической аппроксимации конечномерной главной части оператора. В работе [А7] автору принадлежат результаты параграфов 2,4,5. Постановка задачи и парагафы 1,3 принадлежат соавтору. В работе [А11] автору принадлежат постановка задачи и формулы для вычисления емкостей. Соавтору принадлежат реализация алгоритмов и результаты вычислений. В работе [А12] автору принадлежат постановка задачи, формулировка и исследование алгоритма блуждания по шарам. Остальные результаты работы принадлежат соавтору. В работе [А13] автору принадлежат результаты параграфа 3.1 и параграфа 4.1. Остальные результаты работы принадлежат соавторам. В работе [А15] автору принадлежат теорема 1, леммы 1 и 2. Соавтору принадлежат результаты вычислительного эксперимента. В работе [А21] автору принадлежат результаты параграфов 1-4. Соавтору принадлежат результаты вычислительного эксперимента.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы, приложения и заключения. Общий объём работы составляет 229 страниц.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы, формулируются задачи исследований, кратко излагается содержание диссертации по главам и параграфам.

В **первой главе** рассматриваются вопросы, связанные с применением *схемы Неймана-Улама* к решению интегральных уравнений эквивалентных краевым задачам. Спектральный радиус оператора таких интегральных уравнений равен единице, поэтому традиционная процедура статистического моделирования для таких уравнений требует корректировки.

Исследование статистических оценок и марковских цепей, на которых оценки строятся, проводится методами теории мартингалов. Необходимые сведения из этой теории содержит **параграф 1.1**.

В **параграфе 1.2** содержатся некоторые результаты из вероятностной теории потенциала.

В **параграфе 1.3** исследуются интегральные уравнения с субстохастическим ядром. Формулируются и доказываются теоремы о поведении траекторий однородной цепи Маркова, определяемой этим ядром.

Пусть $(Q, \mathfrak{A})$– некоторое измеримое пространство. Вещественная, определенная на $Q \times \mathfrak{A}$ функция $k(x, A)$ называется ядром, если при всех $A \in \mathfrak{A}$ функция $k(\cdot, A)$ является $\mathfrak{A}$ – измеримой, и при всех $x \in Q$ функция множества $k(x, \cdot)$ является зарядом (конечной счетно аддитивной функцией множества). Ядро, удовлетворяющее при всех $x \in Q$ неравенствам $0 \leq k(x, Q) \leq 1$ называется субстохастическим и обозначается $P(x, dy)$.

В пространстве $M(Q)$ ограниченных борелевских функций на некотором компакте Q в евклидовом пространстве R^n рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = \int\limits_Q u(y)P(x, dy) + F(x), x \in Q. \tag{1}$$

Определим оператор Ku как интегральный оператор в уравнении (1). Функция, удовлетворяющая неравенству $Ku(x) \leq u(x)$ при всех $x \in Q$, называется эксцессивной, а функция, удовлетворяющая уравнению $Ku(x) = u(x)$ – инвариантной для ядра $P(x, dy)$.

Несмещенные оценки решения уравнения (1) обычно строят на траекториях цепи Маркова $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, определяемой переходной вероятностью $P(x, dy)$. Процесс обрывается в некоторый случайный марковский момент τ_1 при переходе в поглощающее состояние Δ, лежащее вне Q (при этом $u(\Delta) = 0$).

Пусть $\{\mathfrak{A}\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность σ-алгебр, порожденная цепью до момента времени i, χ_i — индикатор события $\{\tau_1 > i\}$. Пусть $u(x)$ — ограниченная эксцессивная функция, удовлетворяющая уравнению (1). Определим *стандартную* последовательность несмещенных оценок

$$\eta_i = \sum_{j=0}^{i-1} F(x_j)\chi_j + \chi_i u(x_i), \tag{2}$$

которая, очевидно, является мартингалом относительно потока $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Теорема 1. *(О свойствах стандартной последовательности оценок)*

1) *Стандартная последовательность несмещенных оценок, построенная по ограниченному эксцессивному решению уравнения (1) с субстохастическим ядром является равномерно интегрируемым мартингалом.*
2) *Для любого момента остановки τ случайная величина η_τ – несмещенная оценка для $u(x)$.*

Свойства траекторий цепи Маркова, определяемой переходной вероятностью $P(x, dy)$ тесно связаны со свойствами решений интегрального уравнения. Примером такой взаимосвязи является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть субстохастическое ядро интегрального уравнения (1) является переходной вероятностью цепи Маркова и τ_1 – момент её обрыва, тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если для всех $x \in Q$ вероятность $P_x(\tau_1 < \infty) = 1$, то всякая ограниченная эксцессивная функция является потенциалом.*
2) *Если функция $u(x) \equiv 1$ является потенциалом, то для всех $x \in Q$ вероятность $P_x(\tau_1 < \infty) = 1$.*
3) *Если существует строго положительная инвариантная функция, то при всех x справедливо неравенство $P_x(\tau_1 = \infty) > 0$.*
4) *Пусть Γ — множество нулей неотрицательной непрерывной на Q функции $F(x)$, потенциал которой всюду конечен. Пусть $P_x(\tau_1 = \infty) > 0$ и $\rho(x, \Gamma)$ — расстояние от x до Γ, тогда*

$$P_x(\lim \rho(x_i, \Gamma) = 0 | \tau_1 = \infty) = 1.$$

5) *Пусть Γ_1 и Γ_2 — множества нулей неотрицательных непрерывных на Q функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, потенциалы которых всюду конечны. Пусть $P_x(\tau_1 = \infty) > 0$, тогда*

$$P_x\Big(\lim \rho(x_i, \Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0 \mid \tau_1 = \infty\Big) = 1.$$

6) *Пусть $v(x)$ — непрерывная инвариантная функция, для которой $Kv^2(x)$ является непрерывной функцией. Пусть $P_x(\tau_1 = \infty) > 0$ и $\Gamma = \{x \in Q | v^2(x) = Kv^2(x)\}$, тогда*

$$P_x(\lim \rho(x_i, \Gamma) = 0 | \tau = \infty) = 1.$$

7) *Пусть $v(x) \geq 0$ и $-v(x)$ — непрерывная эксцессивная функция ($v(x) \leq 0$ и $v(x)$ — непрерывная эксцессивная функция), и $Kv^2(x)$ является непрерывной функцией. Пусть $P_x(\tau_1 = \infty) > 0$ и $\Gamma = \{x \in Q | v^2(x) = Kv^2(x)\}$, тогда*

$$P_x(\lim \rho(x_i, \Gamma) = 0 | \tau = \infty) = 1.$$

8) *В случаях 6 и 7 для $x \in \Gamma$ функция $v(y) = const = v(x)$ P_x почти наверное и, если $v(x) \neq 0$, то $P(x, Q) = 1$.*

Как правило, сама последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ почти наверное сходится. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для цепи Маркова $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, переходной вероятностью которой является субстохастическое ядро уравнения (1), справедливы утверждения.*

1) *Пусть при всех $m = 1, \ldots, n$ координатные функции $v_m(x)$ таковы, что при некоторой ограниченной эксцессивной функции $w_m(x)$, сумма $w_m(x) + v_m(x)$ или разность $w_m(x) - v_m(x)$ являются эксцессивными функциями, тогда последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ почти наверное сходится на множестве $\{\tau_1 = \infty\}$.*
2) *Пусть при всех $m = 0, 1, \ldots, n$ координатные функции $v_m(x)$ таковы, что при некоторой постоянной w_m, сумма $w_m + v_m(x)$ или разность $w_m - v_m(x)$ являются эксцессивными функциями, тогда последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ почти наверное сходится на множестве $\{\tau_1 = \infty\}$.*
3) *Пусть при всех $m = 0, 1, \ldots, n$ координатные функции $v_m(x)$ таковы, что либо $v_m(x)$ или $-v_m(x)$ являются эксцессивными функциями, либо $v_m(x)$ — инвариантна, тогда последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ почти наверное сходится на множестве $\{\tau_1 = \infty\}$.*

Приведены примеры применения доказанных теорем.

В **параграфе 1.4** рассматриваются процедуры построения несмещенных оценок решений интегральных уравнений с субстохастическим ядром. Оценки строятся на траекториях цепи Маркова, определяемой этим ядром. Доказываются теоремы о конечности дисперсии таких оценок, исследуется трудоемкость алгоритмов.

В частности, доказаны две леммы, гарантирующие равномерную ограниченность дисперсии стандартной последовательности оценок.

Лемма 1. *Пусть уравнение (1) имеет ограниченные решения для правой части $F(x)$ и $|F(x)|$, тогда стандартная последовательность несмещенных оценок образует квадратично-интегрируемый мартингал относительно потока σ-алгебр $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=0}^{\infty}$.*

Функцию $F(x)$, обычно, представляют в виде $F(x) = h(x)Ef(Y)$, где $h(x) > 0$, случайная величина Y имеет распределение, зависящее от x, а функция $f(y)$ является правой частью дифференциального уравнения, либо значением его решения на границе. Пусть $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ — последовательность случайных величин, таких что

$$F(x_i) = h(x_i)E(f(y_i) \mid \mathfrak{A}_i) \qquad (3)$$

почти наверное и $\mathfrak{B}_i$ — минимальная σ-алгебра, порожденная $\mathfrak{A}_i$ и последовательностью $\{y_j\}_{j=0}^{i}$.

Для последовательности несмещенных оценок

$$\xi_i = \sum_{j=0}^{i-1} h(x_j) f(y_j) \chi_j + \chi_i u(x_i) \tag{4}$$

справедлива лемма.

Лемма 2. *Пусть уравнение (1) имеет ограниченное решение для правой части $F(x) = h(x)$. Тогда для правой части вида (3), с ограниченной функцией $f(x)$, уравнение (1) также имеет ограниченное решение и последовательность несмещенных оценок (4) образует квадратично-интегрируемый мартингал относительно потока σ-алгебр $\{\mathfrak{B}_i\}_{i=0}^{\infty}$.*

В **параграфе 1.5** изучается *последовательная процедура статистического оценивания* решений интегральных уравнений с произвольным конечным ядром. Показано, что в случае ограниченного ядра, для основных статистических оценок суммы ряда Неймана она совпадает со схемой Неймана-Улама. Доказаны теоремы об ограниченности дисперсии статистических оценок.

Пусть $k(x, A)$ - конечное ядро. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = \int_Q u(y) k(x, dy) + F(x), x \in Q \tag{5}$$

в пространстве ограниченных функций $M(Q)$. Решение уравнения (5), имеющее вид $u(x) = GF(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} K^i F(x)$, называют потенциалом, а ряд, которым оно представлено – рядом Неймана.

Пусть $P(x, A)$ – стохастическое ядро, относительно которого ядро $k(x, A)$, а, значит, и его полная вариация $|k|(x, A)$ – абсолютно непрерывны. Соответствующие производные обозначим $k_p(x, y)$ и $\overline{k}_p(x, y)$. Несмещенные оценки решения уравнения (5) будем строить на траекториях цепи Маркова $x_i \quad (i = 0, 1, \dots)$ с переходной вероятностью $P(x, A)$, стартующей из точки $x_0 = x$. Пусть $\mathfrak{F}_i \quad (i = 0, 1, \dots)$ фильтрация, такая что x_i $\mathfrak{F}_i$-измерима, а ζ_i и θ_i – $\mathfrak{F}_i$-измеримые случайные величины, такие что

$$E(\zeta_{i+1} u(x_{i+1}) + \theta_{i+1} | \mathfrak{F}_i) = u(x_i). \tag{6}$$

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\xi_i = \theta_1 + \zeta_1 \theta_2 + \zeta_1 \zeta_2 \theta_3 + \dots + (\prod_{j=1}^{i-1} \zeta_j) \theta_i + (\prod_{j=1}^{i} \zeta_j) u(x_i), \tag{7}$$

очевидно, образующую мартингал относительно выбранной фильтрации.

Выбранную модель оценивания $u(x)$ будем называть *линейной моделью оценивания.*

Мажорантным уравнением называется уравнение

$$\overline{u}(x) = \int_Q \overline{u}(y)|k|(x, dy) + H(x), x \in Q, \qquad (8)$$

где $H(x)$ – измеримая функция, удовлетворяющая неравенству $|F(x)| \leq H(x)$ при всех $x \in Q$.

Доказана теорема о несмещенности статистической оценки в процедуре линейного оценивания.

Теорема 4. *Пусть ряд Неймана для мажорантного уравнения (8) сходится. Если в линейной модели оценивания (7) для $u = GF$ при всех $i \geq 0$ случайная величина $\zeta_{i+1} = \gamma_{i+1}k_p(x_i, x_{i+1})$, где $\gamma_{i+1} \geq 0$, выполнено неравенство $E(|\theta_{i+1}||\mathfrak{F}_i) \leq H(x_i)$ и условие $E(\gamma_{i+1}|\mathfrak{F}_i, x_{i+1}) = 1$, то несмещенные оценки (7) образуют равномерно интегрируемый мартингал.*

Отметим, что ряд Неймана для мажорантного уравнения (8) сходится, если оператор $\overline{K}$ ограничен и имеет спектральный радиус $\rho(\overline{K}) < 1$. Для неограниченного оператора вместо спектрального радиуса следует использовать *перронов корень* оператора $\overline{K}$.

Важно также, что для инвариантной функции $u(x)$ мартингал $\{\xi_i = \prod_{j=1}^{i} \zeta_j u(x_i)\}_{i=0}^{\infty}$ может не обладать свойством равномерной интегрируемости. Это верно, например, для стандартной схемы Неймана-Улама при постоянной вероятности обрыва $g > 0$ для стохастического ядра и $u(x) = 1$, так как $\xi_i \to 0$ с вероятностью единица.

Доказана также теорема о конечности дисперсии в линейной модели.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4, справедливы неравенства $E(\theta_{i+1}^2|\mathfrak{F}_i) \leq H_1(x_i)$ и $H^2(x_i) \leq H_1(x_i)$, а также сходится ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\prod_{j=1}^{i-1} \overline{\zeta}_j)^2 H_1(x_i) < +\infty. \qquad (9)$$

Тогда,

1) $E\overline{\xi}_{\infty}^2 < +\infty$

2) $E\xi_{\infty}^2 < +\infty$

3) Для любого марковского момента τ оценка ξ_τ имеет конечную дисперсию.

Во второй главе рассматриваются алгоритмы статистического моделирования для решения задачи Коши и первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка, в основном, с переменными коэффициентами. Интегральные уравнения для решений краевых задач получаются методом замороженных коэффициентов. К этим уравнениям применяется либо стандартная процедура оценивания, либо процедура из параграфа 1.5 и ее аналоги.

В **параграфе 2.1** приводятся необходимые сведения о параболических уравнениях. Мы используем монографию [12], поэтому стараемся придерживаться используемых в ней обозначений и терминологии.

Формула

$$L = L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x,t) \quad (10)$$

определяет парболический оператор в области $D_{n+1}^{(T)} = R^n \times (0,T)$, либо в области $Q_T = D \times (0,T)$, где D — ограниченная область в пространстве R^n с границей $\Gamma \in H^{1+\beta}$, $(0 \leq \beta < 1)$. Коэффициенты оператора принадлежат классу функций $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$, $(0 \leq \alpha < 1)$. Матрица коэффициентов при старших производных $A(x,t)$ предполагается симметричной, а ее собственные числа лежат в фиксированном отрезке $[\nu, \mu]$ и $\nu > 0$. Нас интересуют решения уравнения

$$L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = f(x,t) \quad (11)$$

или функционалы от них. Приводится известное представление [12] фундаментального решения $Z(x,y,t,\tau)$ уравнения (11) и другие необходимые сведения.

$$Z(x,y,t,\tau) = Z_0(x-y,y,t,\tau) + \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{R^n} Z_0(x-z,z,t,\lambda) Q(z,y,\lambda,\tau) dz, \quad (12)$$

где функция Q является решением уравнения Вольтерра

$$Q(x,y,t,\tau) + \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{R^n} K(x,z,t,\lambda) Q(z,y,\lambda,\tau) dz + K(x,y,t,\tau) = 0, \quad (13)$$

со слабо полярным ядром K.

Функциz Z_0 при $t > \tau$ определяется равенством

$$Z_0(x-y,y,t,\tau) = \frac{1}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{n}{2}}\,(\det A(y,\tau))^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)}(x-y)^\top A^{-1}(y,\tau)(x-y)\right) \quad (14)$$

При $t < \tau$ функция $Z_0(x-y,y,t,\tau) = 0$.
Функция Z_0 удовлетворяет неравенству

$$Z_0(x-y,y,t,\tau) \le \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{n}{2}} Z_1(x-y,t-\tau), \quad (15)$$

где

$$Z_1(x-y,t-\tau) = \frac{1}{[4\pi\mu(t-\tau)]^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\mu(t-\tau)}\right).$$

Существуют положительные постоянные C и c, такие что при $0 \le \tau < t$

$$|K(x,y,t,\tau)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right). \quad (16)$$

С помощью формул Грина получены не содержащие производных интегральные представления для решения параболического уравнения в цилиндре, шароиде (области, ограниченной поверхностью уровня фундаментального решения) и во всем пространстве.

В **параграфе 2.2** с помощью полученных представлений решается задача Коши:

$$\begin{aligned} L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) &= f(x,t), \\ u(x,0) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрена как прямая, так и сопряженная схема Неймана-Улама. Доказаны теоремы об ограниченности дисперсии построенных статистических оценок.

В *прямой схеме* решение задачи Коши записывается в виде суммы четырех потенциалов:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t) = \\
= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} Z_0(x-y,y,t,\tau) f(y,\tau) dy + \int\limits_{R^n} Z_0(x-y,y,t,0)\varphi(y) dy + \\
+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} \left(\int\limits_\tau^t d\lambda \int\limits_{R^n} Z_0(x-z,z,t,\lambda) Q(z,y,\lambda,\tau) dz \right) f(y,\tau) dy + \\
+ \int\limits_{R^n} \left(\int\limits_0^t d\lambda \int\limits_{R^n} Z_0(x-z,z,t,\lambda) Q(z,y,\lambda,0) dz \right) \varphi(y) dy. \quad (18)
\end{aligned}
$$

Для каждого потенциала построена несмещенная статистическая оценка. Потенциалы $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ оцениваются стандартной процедурой метода Монте-Карло с помощью плотности Z_1. Статистические оценки потенциалов $u_3(x,t)$ и $u_4(x,t)$ построены на траекториях цепи Маркова с плотностью вероятностей перехода

$$p\big((x,t) \to (z,\lambda)\big) = \frac{\alpha(1-q)}{2t^{\frac{\alpha}{2}}} (t-\lambda)^{\frac{\alpha}{2}-1} Z_2(x-z, t-\lambda), \qquad (19)$$

где $0 < q < 1$ является вероятностью обрыва цепи на текущем шаге, а

$$Z_2(x-z,t-\lambda) = \left(\frac{C}{\pi(t-\lambda)} \right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-C \frac{|x-z|^2}{t-\lambda} \right) \qquad (20)$$

при $0 \le \lambda < t$. При $\lambda > t$ функция $Z_2(x-z,t-\lambda) = 0$. Постоянная C в этих формулах берется из неравенства (16), которое также влечет согласованность плотности и ядра интегрального уравнения. Отметим, что вероятность обрыва цепи на каждом шаге постоянна, поэтому цепь обрывается с вероятностью единица и среднее число шагов до обрыва равно q^{-1}.

Доказаны теоремы о конечности дисперсии построенных оценок. Получены формулы для вычисления констант в неравенстве (16), необходимые для реализации статистических оценок.

Статистические оценки функционалов от решения задачи Коши построены с помощью *сопряженной схемы* Неймана-Улама.

Пусть $h(x,t)$ — интегрируемая на $D^{(T)}_{n+1}$ по мере Лебега функция. Для оценки функционала

$$\Phi(h) = \int\limits_0^T dt \int\limits_{R^n} h(x,t) u(x,t) dx, \qquad (21)$$

используя (18), запишем его в виде

$$\Phi(h) = \Phi_1(h) + \Phi_2(h) + \Phi_3(h) + \Phi_4(h) =$$

$$= \int_0^T dt \int_{R^n} dx h(x,t) \int_0^t d\tau \int_{R^n} Z_0(x-y,y,t,\tau) f(y,\tau) dy +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{R^n} dx h(x,t) \int_{R^n} Z_0(x-y,y,t,0) \varphi(y) dy +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{R^n} dx h(x,t) \int_0^t d\tau \int_{R^n} \left(\int_\tau^t d\lambda \int_{R^n} Z_0(x-z,z,t,\lambda) Q(z,y,\lambda,\tau) dz \right) \times$$

$$\times f(y,\tau) dy +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{R^n} dx h(x,t) \int_{R^n} \left(\int_0^t d\lambda \int_{R^n} Z_0(x-z,z,t,\lambda) Q(z,y,\lambda,0) dz \right) \times$$

$$\times \varphi(y) dy. \quad (22)$$

Поскольку функция $Z_0(x-y,y,t,\tau)$ по переменной x является плотностью распределения нормального случайного вектора, несмещенные оценки для $\Phi_1(h)$ и $\Phi_2(h)$ очевидны.

Несмещенными оценками для $\Phi_3(h)$ являются случайные величины

$$\phi_3 = -\sum_{m=1}^{N} \left(-\frac{1}{1-q} \right)^{m-1} \psi_m, \quad (23)$$

$$\phi_3' = -\left(-\frac{1}{1-q} \right)^{N-1} \frac{\psi_N}{q}, \quad (24)$$

где случайная величина N имеет геометрическое распределение, то есть

$$P(N=m) = q(1-q)^{m-1}, npu \quad m = 1,2,\ldots,$$

а случайная величина ψ_m несмещенно оценивает функционал для итерированного ядра $K_m(z,y,\lambda,\tau)$

$$\Psi_m(h) = \int_0^T d\tau \int_{R^n} dy f(y,\tau) \int_\tau^T d\lambda \int_{R^n} dz \int_\lambda^T dt \times$$

$$\times \int_{R^n} Z_0(x-z,z,t,\lambda) K_m(z,y,\lambda,\tau) h(x,t) dx. \quad (25)$$

Оценки ψ_m для функционалов $\Psi_m(h)$ построены на траекториях неоднородной цепи Маркова $\{(y_k,\tau_k)\}_{k=0}^{\infty}$. Начальное состояние цепи выбирается в $D_{n+1}^{(T)}$ с некоторой плотностью $\pi(y,\tau)$, согласованной с функцией $f(y,\tau)$. Процедура оценивания носит рекуррентный характер. Доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть функция $h(x,t)$ — ограничена, а функция $f^2(y,\tau)/\pi(y,\tau)$ — интегрируема в $D_{n+1}^{(T)} = R^n \times (0,T)$. Тогда дисперсии оценок ϕ_3 и ϕ_3' конечны.*

Для уравнений с гладкими коэффициентами задача Коши сводится к интегральному уравнению с помощью функции Грина. Доказана сходимость ряда Неймана для этого уравнения. Построены несмещенные статистические оценки решения задачи Коши как по прямой, так и по сопряженной схеме Неймана-Улама. Для уравнения теплопроводности аналогичные результаты были ранее получены О. Курбанмурадовым и Н. А. Симоновым.

В **параграфе 2.3** получены малосмещенные оценки с конечной дисперсией для первой краевой задачи внутри ограниченной области D с границей Γ :

$$\begin{aligned} L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u &= f, \\ u|_{\Gamma} &= \Phi(x,t), \\ u|_{t=0} &= \varphi(x). \end{aligned} \tag{26}$$

В [12] показано, что если $f \in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$, $\varphi \in C(\overline{D})$, функция Φ — непрерывна, а коэффициенты a_{ij} имеют производные $\partial a_{ij}/\partial x_k$, удовлетворяющие условию Гельдера по переменным x с показателем α и Γ — поверхность Ляпунова, то задача (26) имеет классическое, непрерывное вплоть до границы решение в в области $Q_T = D \times (0,T)$.

Полученые в параграфе 2.1 интегральные представления решения краевой задачи (26) в пространственно-временном цилиндре или в *шароиде* (области, ограниченной поверхностью уровня фундаментального решения) определяют процессы блуждания внутри области и квадратично-интегрируемый мартингалы несмещенных оценок решения задачи (26).

Рассмотрим, например, задачу (26) для оператора с постоянными коэффициентами

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Пусть $\mathrm{dist}(x,\Gamma)$ обозначает расстояние от от точки x до границы Γ. Зададимся функцией $R = R(x)$, непрерывной в D и удовлетворяющей неравенствам

$$c_1 \operatorname{dist}(x,\Gamma) \le R(x) \le c_2 \operatorname{dist}(x,\Gamma),$$

при некоторых положительных постоянных c_1 и c_2, и условию $D_R \subset D$, где $D_R = \{y | (y-x)^\top A^{-1}(y-x) < R\}$ – область, ограниченная эллипсоидом с центром в точке x.

Пусть $\sqrt{A}$ – верхне-треугольная матрица, удовлетворяющая условию $(\sqrt{A})^\top \sqrt{A} = A$; Ω_1 — изотропный единичный вектор в пространстве и $\Omega = \sqrt{A}\Omega_1$; случайная величина γ имеет гамма-распределение с параметром $\frac{n}{2}+1$; случайная величина ρ имеет плотность распределения nr^{n-1} на отрезке $[0,1]$ и, наконец, пусть θ равномерно распределена на $[0,1]$. Пусть χ_A индикатор события A, тогда при $R^2 \ge 2nt$ решение $u(x,t)$ задачи (26) можно представить в виде $u(x,t) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = t \cdot E\chi_{\left\{\gamma \le \frac{R^2}{4t\theta}\right\}} f(x + 2\rho\sqrt{t\theta\gamma}\Omega, t - t\theta) \tag{27}$$

$$I_2 = E\chi_{\left\{\gamma > \frac{R^2}{4t}\right\}} \chi_{\left\{\theta > \frac{n}{2\gamma}\right\}} u\left(x + R\rho\Omega, t - \frac{R^2}{4\gamma}\right) \tag{28}$$

$$I_3 = E\chi_{\left\{\gamma \le \frac{R^2}{4t}\right\}} \varphi(x + 2\rho\sqrt{t\gamma}\Omega) \tag{29}$$

$$I_4 = E\chi_{\left\{\gamma > \frac{R^2}{4t}\right\}} \chi_{\left\{\theta \le \frac{n}{2\gamma}\right\}} u\left(x + R\Omega, t - \frac{R^2}{4\gamma}\right) \tag{30}$$

При $R^2 < 2nt$ справедливо аналогичное представление $u(x,t) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$,

$$J_1 = \frac{R^2}{2n} \cdot E\chi_{\left\{\gamma \le \frac{n}{2\theta}\right\}} f(x + R\rho\sqrt{\frac{2\theta\gamma}{n}}\Omega, t - \frac{R^2}{2n}\theta) \tag{31}$$

$$J_2 = E\chi_{\left\{\gamma > \frac{n}{2}\right\}} \chi_{\left\{\theta > \frac{n}{2\gamma}\right\}} u\left(x + R\rho\Omega, t - \frac{R^2}{4\gamma}\right) \tag{32}$$

$$J_3 = E\chi_{\left\{\gamma \le \frac{n}{2}\right\}} u\left(x + R\rho\sqrt{\frac{2\gamma}{n}}\Omega, t - \frac{R^2}{2n}\right) \tag{33}$$

$$J_4 = E\chi_{\left\{\gamma > \frac{n}{2}\right\}} \chi_{\left\{\theta \le \frac{n}{2\gamma}\right\}} u\left(x + R\Omega, t - \frac{R^2}{4\gamma}\right). \tag{34}$$

Используя полученные формулы, легко определить процедуру моделирования *блуждания по цилиндрам* $\big(x(k), t(k)\big)$ и последовательность несмещенных оценок $\xi_k = \xi_k(x,t)$ для решения $u(x,t)$ на траекториях этого блуждания.

А именно, пусть $\gamma_k, \rho_k, \theta_k, \Omega_k (k = 1, 2, \dots)$ — последовательности независимых в совокупности случайных величин с распределениями, определенными ранее, $R_k = R\big(x(k), t(k)\big)$, $x(0) = x$, $t(0) = t$, $\xi_0 = u(x, t)$. Тогда, при выполнении условий $0 < 2nt(k-1) < R_{k-1}^2$, в момент времени $k-1$, $(k = 1, 2, \dots)$ выполняется следующая последовательность действий.

1) Моделируем случайные величины $\gamma_k, \rho_k, \theta_k, \Omega_k$.
2) В оценке ξ_{k-1} функцию $u\big(x(k-1), t(k-1)\big)$ заменяем суммой несмещенных оценок интегралов I_1, I_2, I_3, I_4 по формулам (27–30), выбранным значениям случайных величин и $R = R_{k-1}$.
3) Если слагаемое, содержащее функцию u, отсутствуют, то оценка построена и процесс обрывается $(t(k) = 0)$. В противном случае, переходим к пункту 4.
4) Аргументы функции u в полученной оценке ξ_k определяют новое состояние цепи.

При выполнении противоположного условия $2nt(k-1) > R_{k-1}^2$, в момент времени $k-1$, $(k = 1, 2, \dots)$ выполняется аналогичная последовательность действий.

1) Моделируем случайные величины $\gamma_k, \rho_k, \theta_k, \Omega_k$.
2) В оценке ξ_{k-1} функцию $u\big(x(k-1), t(k-1)\big)$ заменяем суммой несмещенных оценок интегралов J_1, J_2, J_3, J_4 по формулам (31–34), выбранным значениям случайных величин и $R = R_{k-1}$.
3) Аргументы функции u в полученной оценке ξ_k определяют новое состояние цепи.

Справедлива лемма.

Лемма 3. *Последовательность $\big(x(k), t(k)\big)$, $(k = 0, 1, 2, \dots)$ с вероятностью 1 либо обрывается за конечное число шагов на боковой поверхности или нижнем основании цилиндра $\overline{Q_T}$, либо сходится к случайной точке на боковой поверхности цилиндра.*

Из определения последовательности $\xi_k, (k = 0, 1, 2, \dots)$ следует, что она является мартингалом относительно потока σ-алгебр $\mathfrak{F}_k, (k = 0, 1, 2, \dots)$, порожденного блужданием. Доказаны теорема и лемма.

Теорема 7. *Пусть функции $f(x, t)$, $\varphi(x)$ и $\Phi(x, t)$ ограничены. Тогда мартингал ξ_k, $(k = 0, 1, 2, \dots)$ — квадратично интегрируемый.*

Пусть $\delta > 0$, N_1 — момент обрыва траектории, N_2 — момент первого попадания траектории в δ — окрестность границы области D, а $N_\delta = \min(N_1, N_2)$.

Лемма 4. *Случайная величина N_δ имеет конечное математическое ожидание. Случайная величина ξ_{N_δ} является несмещенной оценкой $u(x,t)$ и имеет конечную дисперсию.*

На траекториях *блуждания по цилиндрам* построены также оценки для решения уравнения с переменными коэффициентами. На траекториях *блуждания по шароидам* построены оценки для решения уравнения с постоянными коэффициентами и для решения уравнения с переменным коэффициентом при неизвестной функции. Кроме того, рассмотрен метод построения статистических оценок, основанный на сведении начально-краевой задачи к системе эллиптических краевых задач путём дискретизации времени.

В **параграфе 2.4** на траекториях ветвящегося блуждания по границе выпуклой области построены несмещенные статистические оценки решения уравнения теплопроводности с нелинейным граничным условием Стефана-Больцмана, связывающим тепловой поток на поверхности абсолютно черного тела с его температурой.

С помощью тепловых потенциалов исходная задача сводится к нелинейному интегральному уравнению. Построена итерационная процедура, которая определяет последовательность функций, равномерно сходящихся к решению задачи. Далее выполняется рекурсивная процедура статистического оценивания тепловых потенциалов, которая за конечное число шагов приводит к построению несмещенной оценки температуры в фиксированной точке в фиксированный момент времени. Наибольшую трудность вызывает построение несмещенной оценки для потенциала простого слоя. Проблема решена с помощью специально подобранной замены переменной в поверхностном интеграле.

В **третьей главе** рассматриваются алгоритмы статистического моделирования для решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка как с переменными, так и с постоянными коэффициентами в пространстве R^n, где $n > 2$. Для первой краевой задачи исследуются, в основном, блуждания внутри области, а для второй краевой задачи — блуждания по границе области. Как и во второй главе, задачи рассматриваются в классической постановке, то есть граница области и функции, входящие в уравнение, предполагаются достаточно гладкими и ограниченными.

Определим эллиптический оператор формулой

$$M = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x). \qquad (35)$$

Матрица коэффициентов при старших производных предполагается симметричной, а ее собственные числа лежащими в фиксированном отрезке $[\nu, \mu]$ и $\nu > 0$. Это означает, что оператор M является сильно эллиптическим.

Нас интересуют решения уравнения $Mu(x,t) = -f(x,t)$, определенные в некоторой ограниченной области $D \subset R^n$ (или вне ее, для внешней краевой задачи), а также функционалы от них.

Граница Γ области D предполагается достаточно гладкой. Будем говорить, что замкнутая область $\overline{D}$ принадлежит классу $A^{(k,\lambda)}$, если в некоторой окрестности каждой точки $x \in \Gamma$ граница задается уравнением $z_n = h(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ в некоторой системе координат, а функция h имеет непрерывные производные до порядка k включительно, причем ее производные порядка k удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ.

Коэффициенты оператора также принадлежат к гельдеровым классам функций.

В **параграфе 3.1** с помощью функции Леви специального вида построено и исследовано интегральное представление решения эллиптического уравнения в эллипсоиде.

Пусть $A(x)$ — матрица, составленная из старших коэффициентов $a_{ij}(x)$ оператора M, $A^{(i,j)}(x)$ — элементы обратной матрицы $A^{-1}(x)$. Определим функцию $\sigma(y,x)$ равенством

$$\sigma(y,x) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} A^{(i,j)}(x)(y_i - x_i)(y_j - x_j) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Функцию

$$H(x,y) = \frac{\sigma^{2-n}(x,y)}{(n-2)\sigma_n \sqrt{\det A(y)}} \tag{37}$$

называют *параметрикс.*

Функцию $\mathcal{L}(x,y)$, непрерывную в области D при $x \neq y$ вместе со своими первыми и вторыми производными по переменным x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ назовем *функцией Леви*, если при некотором $\lambda > 0$ справедлива асимптотика

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(x,y) - H(x,y) = O(r^{\lambda+2-n}), \quad \frac{\partial(\mathcal{L}(x,y) - H(x,y))}{\partial x_i} = O(r^{\lambda+1-n}), \\ \frac{\partial^2(\mathcal{L}(x,y) - H(x,y))}{\partial x_i \partial x_j} = O(r^{\lambda-n}) \end{gathered} \tag{38}$$

равномерно по y в каждой замкнутой подобласти $T \subset D$.

Для оператора M с гладкими коэффициентами при $\lambda \le 1$ и $r \to 0$ справедлива асимптотика:

$$M_x \mathcal{L}(x,y) = O(r^{\lambda-n}), \quad N_x \mathcal{L}(x,y) = O(r^{\lambda-n}), \tag{39}$$

где N – оператор, формально-сопряженный с оператором M.

Пусть $T \subset D$ — какая-либо замкнутая область класса $A^{(1)}$. Используя разные варианты выбора функции Леви и выбирая области $T = T(x)$, зависящими от x, получим разные варианты интегрального представления для решения уравнения $Mu(x,t) = -f(x,t)$.

$$u(x) = \int\limits_T G(x,y) f(y) dy - \int\limits_{\partial T} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i} \cos(\nu, y_j) u(y) d_y S, \tag{40}$$

если выбрана область $T = T(x) \subset D$ с известной функцией Грина $G(x,y)$.

При

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(y,x) = 0, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial \mathcal{L}(y,x)}{\partial y_i} \cos(\nu, y_j) \le 0, \quad y \in \partial T(x); \\ N_y \mathcal{L}(y,x) \ge 0, \quad \mathcal{L}(y,x) > 0 \quad y \in T(x) \setminus \partial T(x), \end{gathered} \tag{41}$$

получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} u(x) = \int\limits_T \left(\mathcal{L}(y,x) f(y) + u(y) N_y \mathcal{L}(y,x) \right) dy - \\ - \int\limits_{\partial T} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial \mathcal{L}(y,x)}{\partial y_i} \cos(\nu, y_j) u(y) d_y S. \end{aligned} \tag{42}$$

При

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(y,x) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(y,x)}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad y \in \partial T(x); \\ N_y \mathcal{L}(y,x) \ge 0, \quad \mathcal{L}(y,x) > 0 \quad y \in T(x) \setminus \partial T(x), \end{gathered} \tag{43}$$

получим интегральное уравнение

$$u(x) = \int\limits_T \left(\mathcal{L}(y,x) f(y) + u(y) N_y \mathcal{L}(y,x) \right) dy. \tag{44}$$

Справедлива очевидная

Лемма 5. *Если при $x \in D$ выполнено неравенство $c(x) \le 0$, то неотрицательное ядро любого из интегральных уравнений (40–44) является субстохастическим.*

Далее, к уравнениям (40–44) применяются результаты первой главы так как каждое из них можно записать в виде

$$u(x) = \int\limits_{\overline{D}} u(y)P(x, dy) + F(x), x \in \overline{D}, \tag{45}$$

где $P(x, dy)$ — субстохастическое ядро, а

$$F(x) = \int\limits_T \mathcal{L}(y, x)f(y)dy - \int\limits_{\partial T \cap \partial D} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)\frac{\partial \mathcal{L}(y, x)}{\partial y_i} \cos(\nu, y_j)u(y)d_yS, \quad x \in D, \tag{46}$$

является интегралом от граничных условий и правой части уравнения. Все точки границы делятся на два типа: *поглощающие* и *непоглощающие.* Для поглощающей точки границы $P(x, B) = 0$ для любого борелевского множества B, $F(x) = u(x)$. Для непоглощающей точки границы $P(x, \cdot)$ является распределением, сосредоточенным в точке x, а $F(x) = 0$.

В **параграфе 3.2** рассмотрена первая краевая задача

$$Mu(x) = -f(x), \quad x \in D; \qquad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{47}$$

Будем предполагать, что область D и оператор M таковы, что задача (47) имеет единственное непрерывное в $\overline{D}$ и регулярное в D решение для любых достаточно гладких функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Достаточные условия для этого дает, например, следующая теорема .

Теорема 8. *(K.Miranda) Пусть M — эллиптический оператор, коэффициенты которого в замкнутой области $\overline{D}$ класса $A^{(1,\lambda)}$ удовлетворяют условиям $a_{ij} \in C^{(1,\lambda)}(\overline{D})$, $b_i \in C^{(0,\lambda)}(\overline{D})$, $c \in C^{(0,\lambda)}(\overline{D})$. Пусть $f \in C^{(0,\lambda)}(D) \cap C(\overline{D})$, $\varphi \in C(\Gamma)$ и $c(x) \leq 0$, тогда задача (47) имеет единственное регулярное решение $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$.*

Для того чтобы применить схему Неймана-Улама к решению первой краевой задачи, наложим на семейство замкнутых множеств $T(x)$ и функцию Леви ограничения:

1) $T(x) \subseteq \overline{D}$,
2) $T(x) \in A^{(1)}$,
3) $h(x) = \int\limits_T \mathcal{L}(y, x)dy - \int\limits_{\partial T \cap \partial D} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)\frac{\partial \mathcal{L}(y,x)}{\partial y_i} \cos(\nu, y_j)d_yS > c(\delta) > 0$ при $\operatorname{dist}(x, \Gamma) > \delta$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть выполнены следующие условия:*
коэффициенты дифференциального оператора достаточно гладкие и $c(x) \leq 0$*; задача (47) имеет единственное регулярное решение в области* $\overline{D}$ *при всех достаточно гладких* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$*; для решения краевой задачи справедливо уравнение (45) с субстохастическим ядром* $P(x, dy)$ *и оно является одним из уравнений (40–44); область* $T(x)$ *и функция Леви в ней выбраны в соответствии с условиями 1)–3).*
Тогда почти все траектории цепи Маркова с переходной вероятностью $P(x, dy)$*, стартующей из точки* $x \in D$*, либо обрываются за конечное число шагов, либо сходятся к случайной точке на границе* Γ*.*
Пусть $\delta > 0$*,* τ_1 *— момент обрыва цепи,* τ_2 *— момент первого попадания цепи в* δ*-окрестность границы* Γ *и* $\tau_\delta = \min(\tau_1, \tau_2)$*. Математическое ожидание* $E\tau_\delta < \infty$*.*
Последовательность оценок $\xi_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} h(x_j) f(y_j) \chi_j + \chi_i u(x_i)$*, определенная в (4) образует квадратично интегрируемый мартингал. Случайная величина* ξ_{τ_δ} *является несмещенной оценкой* $u(x)$ *и имеет конечную дисперсию. Аналогичные утверждения справедливы для последовательности оценок с весами.*

Доказанная теорема применяется для обоснования таких алгоритмов статистического моделирования как блуждание по сферам, блуждание по сферам и шарам, блуждание по эллипсоидам. Для них в явном виде построены функции Леви и в приложении представлены алгоритмы моделирования распределений, необходимых для реализации стандартных статистических оценок решения краевой задачи.

В **параграфе 3.3** рассматриваются краевые задачи для оператора Лапласа. Определяются различные варианты *блуждания по полусферам* на траекториях которого строятся несмещенные и малосмещенные статистические оценки решения уравнения Пуассона $-\Delta u(x) = g(x)$ в ограниченной области $D \subset R^n$, с регулярной границей.

Определим для каждого $x \in D$ подобласть $T(x) \subset D$, для которой x является внутренней точкой. Используя функцию Грина, получаем для $u(x)$ интегральное представление

$$u(x) = \int\limits_{\partial T} k(x, y) u(y)\, d_y S - \int\limits_{T} G(x, y) g(y)\, dy, \tag{48}$$

которое рассматривается как интегральное уравнение в пространстве $C(\overline{D})$ и исследуется методами главы 1.

Пусть T — половинка шара радиуса R. Плоскую границу области T обозначим H, а сферическую — S. Пусть $\partial T = H \cup S$.

Построим функцию Грина $G(x, y)$ задачи Дирихле в T методом отражений. Если $0 < \beta < 1$ и точка x лежит на оси симметрии полушара на расстоянии βR от его центра, то нормальная производная функции Грина по внутренней нормали к поверхности полушара имеет вид

$$k(x,y) = \begin{cases} \frac{2R\beta}{\sigma_n}\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{\left(\beta|\overline{x^*}-y|\right)^n}\right), & y \in H, \\ \frac{R}{\sigma_n}\left(1-\beta^2\right)\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|\overline{x}-y|^n}\right), & y \in S, \end{cases} \tag{49}$$

где $x \in T$, x^* — точка, симметричная x относительно сферы S, $\overline{x}$ и $\overline{x^*}$ — точки, симметричные x и x^* относительно плоскости H.

Пусть область D является многогранником. Для каждой внутренней точки области определим $d(x)$ — расстояние от x до границы области D и точку $x_0 \in \partial D$, ближайшую к x . В качестве подобласти $T(x)$ выберем половину шара с центром в точке x_0 и радиусом $R(x) = d(x)/\beta$, если она содержится в D и x_0 является ортогональной проекцией x на некоторую грань многогранника, в противном случае $D(x)$ — шар радиуса $d(x)$ с центром в точке x. Ядро $P(x, A)$ сосредоточено на границе выбранной области $T(x)$ и имеет плотность $k(x, y)$ в случае полушара, либо определяет равномерное распределение на сфере. Цепь Маркова, определяемую таким ядром, будем называть *блужданием по полусферам.* Для этого блуждания доказана лемма.

Лемма 6. *Процесс блуждания по полусферам сходится с вероятностью 1 к точке, лежащей на границе области D. Среднее число шагов до выхода процесса на границу имеет конечные математическое ожидание и дисперсию.*

Пусть $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots$ — блуждание по полусферам, а η_i — несмещенная оценка для

$$F(x_i) = \int\limits_{T(x_i)} G(x_i, y) g(y)\, dy,$$

тогда справедлива лемма.

Лемма 7. *Пусть $F(x)$ ограничена и существует константа C, такая что несмещенные для $F(x_i)$ оценки η_i имеют дисперсию $D_x\eta_i \le C$, и N — момент выхода "блуждания по полусферам" на границу области D, тогда*

$\xi_N = \varphi(x_N) + \sum\limits_{i=0}^{N-1} \eta_i$ *является несмещенной оценкой для* $u(x)$ *и* $D_x(\xi_N) \le C_1$ *для некоторой константы* $C_1 < \infty$.

Построенный алгоритм применен для решения модельной задачи в трехмерном кубе.

Построен и исследован алгоритм *блуждания по сферам и границе* для определения гармонической в области D функции $u(x)$ по ее значениям на части границы Γ_1 и значениям ее нормальной производной на оставшейся выпуклой части границы Γ_2.

Статистическими методами решена первая краевая задача для уравнения Пуассона с разрывом нормальной производной решения на плоской границе, разделяющей область на части. То есть решена задача по определению электростатического потенциала в областях с разной диэлектрической проницаемостью с общей плоской границей. Приведены результаты вычислений для модельной задачи.

В этом же параграфе рассмотрины алгоритм *блуждания по сферам* и алгоритм *блуждания по сферам и полусферам* для решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Оба алгоритма основаны на интегральном представлении Пуассона для функции, гармонической вне шара. Доказаны теоремы о сходимости построенных блужданий к границе области. Построены малосмещенные статистические оценки решения задачи Дирихле. Если граница области является многогранником, то *блуждание по сферам и полусферам* выходит на границу за конечное число шагов и статистические оценки становятся несмещенными.

Постоенные процедуры решения внешней задачи Дирихле позволили создать совместно с аспирантом А.Н.Кузнецовым универсальный алгоритм для вычисления взаимных электростатических емкостей проводников, в котором емкости находятся как функционалы от решения внешней задачи Дирихле. Приведено краткое описание универсального алгоритма и примеры его применения. Алгоритм реализован А.Н.Кузнецовым на MPI-кластере.

Заключительная часть параграфа посвящена задаче Неймана в выпуклой области и в дополнении выпуклой области. Получены интегральные уравнения теории потенциала для сужения решения задачи Неймана на границу области. Выполнена регуляризация этих уравнений, которая приводит их к интегральным уравнениям с оператором, спектральный радиус которого меньше единицы. Построенная регуляризация оператора названа нами процедурой выделения главной части оператора, поскольку она аналогична процедуре выделения главной части в методе Монте-Карло для вычисления интегралов. Получены несмещенные оценки объемного потенциала и потенциала простого слоя, необходимые для реализации алгоритма.

В **параграфе 3.4** процедура выделения главной части оператора реализуется для операторов Фредгольма и Гильберта-Шмидта методом стохастической аппроксимации. Полученные результаты применяются для решения уравнений теории потенциала.

В **приложение** вынесены как известные, так и предложенные автором алгоритмы моделирования распределений, необходимые для реализации предложенных в диссертации процедур статистического моделирования решений краевых задач.

В **заключении** перечислены основные результаты диссертации, показана их теоретическая и практическая ценность.

Список литературы

1. *Haji-Sheikh A., Sparrow E. M.* The floating random walk and its application to Monte Carlo solutions of heat equations // *SIAM J. Appl. Math.* — 1966. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 570—589.

2. *Kushner H. J.* Probabilistic methods for finite difference approximation to degenerate elliptic and parabolic equations with Neumann and Dirichlet boundary conditions // *J. Math.Anal. and Appl.* — 1976. — Vol. 58, — Pp. 644—668.

3. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы — М.: Физматгиз, 1963.

4. *Giles M. B.* Multi-Level Monte Carlo Path Simulation // *Operations Research.* — 2008 — Vol. 56, no. 3. — Pp. 607–617.

5. *Heinrich S.* Multilevel Monte Carlo Methods // *Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag* — 2001 — Vol. 2179. — Pp. 58–67.

6. *Müller M. E.* Some continuous Monte Carlo methods for the Dirichlet problem // *Ann. Math. Statistics.* — 1956 — Vol. 27, no. 37. — Pp. 569–589.

7. *Сипин А. С.* О решении задачи Неймана методом Монте-Карло // Методы Монте-Карло в вычислит. математике и мат. физике. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. — Pp. 129–135.

8. *Михайлов Г. А.* Весовые алгоритмы статистического моделирования — Новосибирск: Изд. ИВМ и МГ СО РАН, 2003. — 185 с.

9. *Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С.* Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики — М.: Наука, 1984.

10. *Курбанмурадов О. А., Сабельфельд К. К., Симонов Н. А.* Алгоритмы случайного блуждания по границе — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989.

11. *Сабельфельд К. К.* Методы Монте-Карло в краевых задачах — Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1989.

12. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа — М.: Наука, 1967.

Публикации автора по теме диссертации

Монографии:

А1. *Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.С.* Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. — М.: Наука, 1984.

А2. *Ermakov S. M., Nekrutkin V. V., Sipin A. S.* Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

А3. *Ермаков С.М., Сипин А.С.* Метод Монте-Карло и параметрическая разделимость алгоритмов. — Санкт-Петербург: СПбГУ, 2014.

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК:

А4. *Сипин А.С.* Решение задачи Дирихле для уравнения $-\Delta u(x) + a(x)u(x) = f(x)$ методом Монте-Карло.// *Вестник ЛГУ*, серия матем., мех., астр. 1976. Вып. 1. С. 60–63.

А5. *Сипин А. С.* Решение двух краевых задач Дирихле методом Монте-Карло // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1979. – Т. 19, № 2. – С. 388–401.

А6. *Ермаков С. М., Сипин А. С.* Новая схема метода Монте-Карло для решения задач математической физики // *Доклады АН СССР.* – 1985. – Т. 285, № 3.

А7. *Ермаков С. М., Сипин А. С.* Процесс блуждания по полусферам и его применение к решению краевых задач // *Вестн. С.-Петерб. ун-та.* – 2009. – Сер. 1, Вып. 3. – С. 9–18.

А8. *Сипин А. С.* Статистические алгоритмы решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка // *Вестн. С.-Петерб. ун-та.* Сер. 1. – 2011. – Вып. 3. – С. 65–74.

А9. *Сипин А. С.* Статистические алгоритмы решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка. Сопряженная схема // *Вестн. С.-Петерб. ун-та.* Сер. 1. – 2012. – Вып. 1. – С. 7–67.

А10. *Сипин А. С.* Применение схемы Неймана—Улама к решению первой краевой задачи для параболического уравнения // *Вестн. С.-Петерб. ун-та.* Сер.1. – 2014. – Вып. 1. – С. 33–44.

А11. *Кузнецов А. Н., Сипин А. С.* Универсальный алгоритм расчета электростатических емкостей системы проводников методом Монте-Карло // *Матем. моделирование* – 2009. – Т. 21, № 3. – С. 41–52.

A12. *Кузнецов А. Н., Сипин А. С.* Статистические оценки для степеней оператора Грина // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та.* Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 114–123.

A13. *Кузнецов А. Н., Рытенкова И. А., Сипин А. С.* Оценки методом Монте-Карло итераций оператора Грина и собственных чисел первой краевой задачи для оператора Лапласа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та.* Сер. Физ.-мат. науки. – 2011. – № 4. – С.82–92.

A14. *Sipin A.* Monte Carlo method for partial differential equations // Topics in Statistical Simulation Research from the 7th International Workshop on Statistical Simulation. –/ Eds.: Melas V. B., Mignani S., Monari P., Salmaso L. — *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics* – 2014.– Vol. 114. – Pp. 475-483.

Другие публикации:

A15. *Расулов А. С., Сипин А. С.* Решение одного нелинейного уравнения методом Монте-Карло // Методы Монте-Карло в вычисл. математике и мат. физике. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. – С. 149–155.

A16. *Сипин А. С.* О решении задачи Неймана методом Монте-Карло // Методы Монте-Карло в вычисл. математике и мат. физике. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. – С. 129–135.

A17. *Сипин А. С.* Решение первой краевой задачи для уравнения эллиптического типа методом Монте-Карло // Методы Монте-Карло в вычислит. математике и мат. физике. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979. – С. 113–119.

A18. *Sipin A. S.* Monter Carlo method for Stefan-Boltzmann problem // Proc. of the 5th St. Petersburg Workshop on simulation, St. Petersburg, June 26–July 2, 2005– / Eds.: S. M. Ermakov, V. B. Melas. and A.N.Pepelyshev — St. Petersburg: VVM com. Ltd., 2005 — Pp. 633–638.

A19. *Сипин А. С.* Процессы блуждания внутри области и их применение к решению краевых задач // А.Н. Тихонов и современная математика. Труды международной конференции. – Москва, 2006. – С. 113–114.

A20. *Сипин А. С.* Блуждание по цилиндрам для параболических уравнений // Математические модели. Теория и приложения. – Санкт-Петербург: ВВМ НИИХ СПбГУ, 2010. – С. 83–103.

A21. *Сипин А. С., Богданов И. И.* Блуждание по цилиндрам для уравнения теплопроводности // Математические модели. Теория и приложения. – Санкт-Петербург: ВВМ НИИХ СПбГУ, 2012. – С. 25–36.

A22. *Сипин А. С.* Об особенностях применения схемы Неймана-Улама к решению краевых задач // Математические модели. Теория и приложения. – Санкт-Петербург: ВВМ НИИХ СПбГУ, 2012. – С. 37–47.

Подписано в печать 18.01.2016. Формат $60 \times 84\,{}^{1}\!/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 2,00. Тираж 100 экз. Заказ № 124.

Отпечатано в Издательстве ВВМ.
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41.