

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



СИЛАНТЬЕВА ОЛЬГА АЛЕКСАНДРОВНА

ДИНАМИКА СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2016

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Товстик Пётр Евгеньевич**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Косенко Иван Иванович,
профессор кафедры 802
Московского Авиационного Института
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Киреенков Алексей Альбертович,
старший научный сотрудник
лаборатории механики систем
Института проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН

Ведущая организация: ФГБУН «Институт проблем машиноведения
Российской Академии Наук»

Защита состоится «___» _____ 2016 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.30 на базе Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, аудитория 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте <https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/W2RxGgt3cC.pdf>.

Автореферат разослан «___» _____ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Е.В. Кустова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Относительное движение твёрдых тел, контактирующих друг с другом приводит к возникновению трения. Широкое распространение систем с трением в современном мире является источником многочисленных задач. Большое количество журналов с высоким индексом цитирования, такие как Трение и Износ, Wear, Tribology International и другие, посвящённых исследованиям в трибологии – науки, являющейся разделом механики, изучающей системы с трением, свидетельствуют о востребованности и актуальности данного направления. Движение транспортных средств, тормозные устройства, ходьба или вибрации струн музыкальных инструментов, всенаправленные роботехнические системы – это примеры, в которых трение является важным полезным фактором. Существует и множество случаев, когда трение играет негативную роль, вызывая износ механизмов, тепловые нагрузки, шум, вибрации и разрушение материалов, с которыми необходимо бороться.

Все механические системы, которые используют в своей работе трение или включают в себя фрикционную пару, требуют аккуратной разработки, что в свою очередь стимулирует развитие математического аппарата для более точного теоретического описания процессов в контактирующей паре трения. Требуются теоретические модели, которые могут покрыть всё более широкий набор материалов и условий скольжения на макро, микро и нано-уровнях, учитывать всё более сложные эффекты, такие как коррозия, температурные изменения, анизотропность и гетерогенность материалов пары, кинематику скольжения, адгезию. Необходимость в разработке моделей для описания трения также продиктована развитием программных пакетов, таких как Ansys и Abaqus для конечно-элементного анализа или библиотеки механики в Modelica.

Диссертация посвящена изучению поведения динамической системы с сухим трением, состоящей из шероховатой анизотропной поверхности и тонкой эллиптической пластины. Такая система может быть использована в задачах, например, контакта колеса поезда и рельса, контакта стопы с поверхностью, в некоторых всенаправленных роботехнических системах. Кроме того, широко распространённая модель кругового контакта является частным случаем

указанной системы.

Существует ряд физических и механических причин почему трение между взаимодействующими телами может оказаться анизотропным, при котором коэффициенты трения зависят от направления скольжения, или гетерогенным, при котором каждой точке поверхности может соответствовать отдельный коэффициент трения, и эволюционировать в процессе контакта. Шероховатость поверхности, износ, изменение состояния приповерхностного слоя, в результате самоорганизации молекул, фазовых переходов и других изменений микроструктуры, пластические деформации — это лишь небольшой список явлений существенно влияющих на фрикционное взаимодействие. Эти физические и механические процессы ведут к эволюции трибологических свойств контакта. Они могут снижать или увеличивать трение и износ материалов.

Между тем, основной круг работ, посвящённых движению тел по шероховатой поверхности принимает трение изотропным. К вопросам, связанным с предельным или «финальным» движением тел, то есть движением непосредственно перед остановкой, по изотропной поверхности обращались такие учёные, как Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л., Voyenli K., Eriksen E. и другие.

Цель работы:

1. Разработка теоретической модели, описывающей предельное поведение тонкой эллиптической пластины под действием сил сухого анизотропного трения
2. Получение уравнений для вычисления силы трения при различных законах трения.
3. Численное решение задачи о финальном движении пластины под действием ортотропного симметричного трения с равномерным и линейным распределениями давлений
4. Решение задачи о предельном поведении тонкой пластины под действием сил ортотропного асимметричного трения с равномерным давлением
5. Сравнение результатов, полученных для эллиптической и круговой пластины при различных видах трения.

Достоверность результатов обеспечивается последовательным решением задач от более простой постановки к более сложной путём корректного

применения методов аналитической механики и математического анализа. Кроме того, численный расчёт проводился двумя различными методами. Результаты сравнивались между собой, а также с известными данными других авторов.

Научная новизна определяется, во-первых, использованием нового подхода, учитывающего анизотропные свойства силы трения при контактном взаимодействии, при этом новым является способ расчёта, как для симметричного ортотропного, так и для асимметричного ортотропного трения, во-вторых, использованием эллиптической площадки контакта при указанных условиях.

Научная и практическая ценность диссертации состоит в теоретическом описании динамической задачи движения эллиптической пластины по анизотропной поверхности. Построена модель для исследования динамики тела при равномерном и линейном распределении давления в условиях симметричного ортотропного и асимметричного ортотропного трения. Практическое значение состоит в возможности применения результатов исследования в различных областях, например, для робототехнических систем.

Положения, выносимые на защиту:

1. Теоретическая модель, позволяющая вычислить силы трения, обладающие анизотропными свойствами, для широкого круга практических задач.
2. Результаты исследования предельного поведения эллиптической пластины при равномерном и линейном распределении давления с учётом симметричного ортотропного трения.
3. Результаты исследования предельного поведения эллиптической пластины при равномерном распределении давления с учётом асимметричного ортотропного трения.
4. Сравнение поведения эллиптической пластины и частного случая круговой пластины, что позволяет оценить погрешность аппроксимации окружностью для контактных задач.

Апробация результатов. Результаты, представленные в диссертации, докладывались на следующих Международных конференциях:

1. Международная конференция «VIII Окуневские Чтения», 25-28 июля 2013, Санкт-Петербург, Россия. Опубликовано тезисы.
2. Международная конференция «11th World Congress on Computational Mechanics», 20-25 июля 2014, Барселона, Испания. Опубликовано тезисы и статья.
3. Международная конференция «Седьмые Поляховские Чтения», 2-6 февраля 2015, Санкт-Петербург, Россия. Опубликовано тезисы.
4. Международная конференция «3rd Polish Congress of Mechanics», 8-11 сентября 2015, Гданьск, Польша. Опубликовано тезисы и статья.

Результаты также докладывались на научных семинарах кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского государственного университета и кафедры теоретической механики и баллистики БГТУ "Военмех" им. Д.Ф. Устинова.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в восьми работах, одна из которых – в издании, рекомендованном ВАК, две – в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в международных системах цитирования Scopus и Web Of Science.

В совместных публикациях автором получены системы уравнений, разработан численный алгоритм и расчетный код, выполнены расчеты для всех рассмотренных в работе задач, их сравнение с существующими данными. При выполнении работ по теме диссертации автор принимала активное участие в обсуждении результатов, подготовке печатных работ и докладов на конференциях. Дмитриеву Н.Н. принадлежат основная идея исследований и постановка задач.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 76 наименований. Общий объем диссертации составляет 94 страницы, включая 40 рисунков и 4 таблицы.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цели работы, перечислены полученные новые результаты, их практическая ценность

и положения, выносимые на защиту. Кратко описано современное состояние изучаемой проблемы.

В главе 1 введены основные понятия, которые используются в дальнейшем. Также описана постановка задачи, основные уравнения и допущения, применяемые в диссертации. Исходная система уравнений проанализирована, сделан вывод о свойствах системы, в частности, показаны условия, накладываемые на систему уравнений, при которых произойдёт остановка тела.

Основные понятия и определения.

Плотность сил анизотропного трения $\boldsymbol{\tau}$ в точке M движущегося тела, согласно (Zmitrowicz A. Mathematical descriptions of anisotropic friction. // Int.J.Solids Struct. 1989. Vol. 25, no. 8. Pp. 837-862) определяется формулой:

$$\boldsymbol{\tau} = -p_M \mathcal{F}(M) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad (1)$$

где \mathbf{v} – вектор скорости точки M , p_M – нормальное давление в точке M области контакта пластины с плоскостью, $\mathcal{F}(M)$ – матрица коэффициентов трения:

$$\mathcal{F}(M) = \begin{pmatrix} f_x & f \\ -f & f_y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Если матрица трения (2) является тензором с постоянными коэффициентами, и компоненты тензора трения не зависят от относительной ориентации трущихся поверхностей, то имеет место симметричное анизотропное трение. Принимая, $f = 0$ будем говорить о симметричном ортотропном трении. Если же в добавок коэффициенты $f_x = f_y$, то имеет место изотропное трение.

Случай, при котором коэффициенты матрицы трения имеют вид:

$$f_x = \begin{cases} f_{x+}, & v_x \geq 0 \\ f_{x-}, & v_x < 0 \end{cases} \quad f_y = \begin{cases} f_{y+}, & v_y \geq 0 \\ f_{y-}, & v_y < 0 \end{cases}, \quad (3)$$

будем называть асимметричным анизотропным трением. Если при этом принимается $f = 0$, то такое трение назовём асимметричным ортотропным.

Уравнения движения.

Рассмотрим предельное движение по инерции тонкой пластины по гори-

горизонтальной плоскости, считая, что силы отличные от сил сухого анизотропного трения отсутствуют.

Уравнения движения тела в безразмерной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_C}{dt} = T_\tau &= - \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \frac{(\beta(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + f_x s_1 + \mu s_3 + f s_2)}{s} d\xi d\eta, \\
v_C \frac{d\vartheta}{dt} = T_n &= - \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \frac{(\beta(\mu \sin \vartheta \cos \vartheta - f) + f_x s_2 + \mu s_4 - f s_1)}{s} d\xi d\eta, \\
\frac{d\omega}{dt} = M_{C\zeta} &= - \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta)}{I} \frac{(\beta(f_x s_1 + \mu s_3 - f s_2) + f_x(\xi^2 + \eta^2) + \mu s_0^2)}{s} d\xi d\eta,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{\beta^2 + \xi^2 + \eta^2 + 2\beta s_1}, & s_0 &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\
s_1 &= \xi \sin(\vartheta - \varphi) - \eta \cos(\vartheta - \varphi), & s_2 &= \xi \cos(\vartheta - \varphi) + \eta \sin(\vartheta - \varphi), \\
s_3 &= \xi \cos \varphi \sin \vartheta - \eta \sin \varphi \sin \vartheta, & s_4 &= \xi \cos \varphi \cos \vartheta - \eta \sin \varphi \cos \vartheta.
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $\mu = f_y - f_x$, $\beta = \frac{v_C}{\omega}$, T_τ , T_n - тангенциальная и нормальная компоненты силы трения, соответственно, $M_{C\zeta}$ - момент силы трения относительно оси, проходящий через центр пластины перпендикулярно плоскости скольжения, I - безразмерный момент инерции, ξ, η - безразмерные координаты, t - безразмерное время, v_C, ω - безразмерные линейная и угловая скорость, соответственно, Ω - область интегрирования, $p(\xi, \eta)$ - безразмерное давление, φ - угол между осью Ox неподвижной системы координат и осью $C\xi$, связанной с телом системы координат, ϑ - угол между вектором скорости центра масс пластины и осью Ox .

Система (4) является общей системой, вид которой не зависит от условий, накладываемых на компоненты матрицы трения. Специфика формы пятна контакта может быть учтена при интегрировании по области Ω . Аналитическое решение этой системы возможно лишь для некоторых простых форм контакта. В общем же случае, решение можно получить только численно.

Поделим первое уравнение системы (4) на третье и обозначим через $\Phi(\beta, \vartheta)$

отношение правых частей этих уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dv_C}{d\omega} &= \Phi(\beta, \vartheta), \\ v_C \frac{d\vartheta}{dt} &= T_n(\beta, \vartheta).\end{aligned}\tag{5}$$

Так как сила трения имеет отрицательную мощность, то движение при ненулевых начальных условиях заканчивается остановкой, то есть $v_C(t_*) = 0$. Поэтому второе уравнение системы (5) позволяет записать соотношение:

$$T_n(\beta, \vartheta) \xrightarrow[\substack{t \rightarrow t_* \\ \vartheta \rightarrow \vartheta_* \\ \beta \rightarrow \beta_*}]{} 0,\tag{6}$$

где ϑ_* и β_* – предельные значения соответствующих величин, t_* – момент времени, соответствующий остановке пластины. Первое уравнение системы (5) может быть проинтегрировано

$$\omega = \omega_0 \exp \left[- \int_{\beta_0}^{\beta_1} \frac{d\beta}{\beta - \Phi(\beta, \vartheta)} \right].\tag{7}$$

Следует подчеркнуть, что значение функции $\Phi(\beta, \vartheta)$, кроме величин β и ϑ , зависит от формы области контакта тела с плоскостью, от закона распределения давления $p(\xi, \eta)$, компонентов тензора трения f_x , f_y и угла φ , отвечающего за ориентацию тела на плоскости. Поэтому значение величины β_1 , при котором интеграл, стоящий в соотношении (7) становится несобственным и стремится к $-\infty$, зависит от параметров механической системы:

$$\beta_1 \xrightarrow[\substack{t \rightarrow t_* \\ \vartheta \rightarrow \vartheta_* \\ \varphi \rightarrow \varphi_*}]{} \beta_*(\vartheta_*, \varphi_*, \Omega, f_x, f_y, p(\xi, \eta)).\tag{8}$$

Суммируя сказанное, отметим, что к моменту t_* должно выполняться условие (6) и

$$\beta - \Phi(\beta, \vartheta) \xrightarrow[\substack{t \rightarrow t_* \\ \vartheta \rightarrow \vartheta_* \\ \beta \rightarrow \beta_*}]{} 0.\tag{9}$$

При этом для фиксированных $\beta = \tilde{\beta}$ уравнение $T_n(\tilde{\beta}, \vartheta) = 0$ и уравнение $\tilde{\beta} - \Phi(\tilde{\beta}, \vartheta) = 0$ могут иметь несколько решений. Но сочетание условий (6) и (9) выполняется для единственных ϑ_* , β_* (см. например, Dmitriev N.N. Movement of the disk and the ring over the plane with anisotropic friction. // J.Fric. Wear. 2002. Vol. 23. Pp. 10-15.), которые в свою очередь зависят от начальных условий.

Во время поиска предельных значений параметров ϑ_* , β_* из уравнений (6) и (9) может оказаться, что решение отсутствует. В таком случае следует пользоваться уравнениями для обратной величины и находить решение в области ϑ_* , $\delta_* = \beta^{-1}$. Более того, поскольку движение пластины существенно зависит от соотношения момента инерции и коэффициентов трения, что для случая круговой пластины строго доказано в работе (Dmitriev N.N. Sliding of a solid body supported by a round platform on a horizontal plane with orthotropic friction. Part 1. Regular load distribution. // J.Fric. Wear. 2009. Vol. 30, no. 4. Pp. 227-234), необходимо во время вычислений отслеживать состояние обеих областей.

Кроме того случаи движения, при которых в начальный момент $v_C = 0$, $\omega \neq 0$ или $v_C \neq 0$, $\omega = 0$ должны рассматриваться отдельно от случая $v_C \neq 0$, $\omega \neq 0$. Это связано с тем, что при ряде условий движение может оставаться поступательным или чисто вращательным (см., например, работы Дмитриева Н.Н. (2002, 2009)). Однако, при несимметричной области контакта или несимметричном распределении давления $p(\xi, \eta)$ при поступательном или чисто вращательном движении возникают начальное угловое ускорение или начальное ускорение центра масс соответственно.

Отметим, что исследование равенства (7) при изотропном трении для тонкого диска и тонкого кольца проводилось в работе (Ishlinskii A.Yu., Sokolov B.N., Chernous'ko F.L. On the motion of plane bodies in the presence of dry friction // Izv. AN SSSR. MTT [Mechanics of Solids]. 1981. no. 4. Pp. 17-28), а для случая анизотропного трения для этих тел в (Dmitriev N.N. Movement of the disk and the ring over the plane with anisotropic friction. // J.Fric. Wear. 2002. Vol. 23. Pp. 10-15).

Глава 2 посвящена решению задачи о предельном поведении тонкой эллиптической пластины на горизонтальной плоскости с симметричным орто-

тропным трением. Показаны два способа вычисления сил трения при равномерном распределении давления: непосредственным интегрированием и методом Лурье. Непосредственным интегрированием также получены уравнения для вычисления сил трения при линейной распределении давления. Проведено сравнение результатов численного моделирования двух методов. Сделан вывод о целесообразности использования в дальнейшем метода Лурье. Проведено численно исследование поведения эллиптической пластины при равномерном и линейном распределении давления. Результаты сравниваются со случаем кругового контакта. Также проанализировано изменение поведения в зависимости от эксцентриситета эллипса. Показано влияние анизотропии трения на поведение системы, построен фазовый портрет системы.

Некоторые результаты

Случай $\omega = 0$, $v \neq 0$ Рассмотрим случай, когда в уравнениях (4) в начальный момент времени есть только поступательная скорость. Тогда плотность сил трения будет:

$$\begin{aligned}\tau_x &= -p(\xi, \eta)(f_x \cos \vartheta + f \sin \vartheta), \\ \tau_y &= -p(\xi, \eta)(-f \cos \vartheta + f_y \sin \vartheta).\end{aligned}\tag{10}$$

Откуда уравнения движения в проекциях на оси естественного трехгранника при равномерном распределении давления будут:

$$\begin{aligned}m\dot{v}_C &= T_x \cos \vartheta + T_y \sin \vartheta = -p \iint_{\Omega} (\mu \sin^2 \vartheta + f_x) d\xi d\eta, \\ mv_C \dot{\vartheta} &= -T_x \sin \vartheta + T_y \cos \vartheta = -p \iint_{\Omega} (\mu \sin \vartheta \cos \vartheta - f) d\xi d\eta, \\ I\dot{\omega} &= \iint_{\Omega} (\tau_y x' - \tau_x y') d\xi d\eta = -p \iint_{\Omega} (\xi K_1 + \eta K_2) d\xi d\eta,\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}K_1 &= (\mu \sin \vartheta \cos \varphi + f_x \sin(\vartheta - \varphi) - f \cos(\vartheta - \varphi)), \\ K_2 &= (-\mu \sin \vartheta \sin \varphi - f_x \cos(\vartheta - \varphi) - f \cos(\vartheta - \varphi)).\end{aligned}$$

Легко видеть, что правая часть уравнения для угловой скорости в системе

(11) обратится в ноль в случае круговой и эллиптической площадки контакта, поскольку имеет место симметричная граница. Так что, в итоге, получим систему:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_C &= -pS (\mu \sin^2 \vartheta + f_x), \\ mv_C\dot{\vartheta} &= -pS (\mu \sin \vartheta \cos \vartheta - f), \\ I\dot{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, что движение будет только поступательным.

Случай $\omega \neq 0, \quad v = 0$

Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени в системе (4) присутствует только вращательная скорость, что означает $\beta = 0$ и получим уравнения движения в проекциях на оси естественного трехгранника в виде:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_C &= -p \iint_{\Omega} \frac{\xi A_0 + \eta A_1}{D} d\xi d\eta = -p [A_0 F_1(\xi, \eta) + A_1 G_1(\xi, \eta)], \\ mv_C\dot{\vartheta} &= -p \iint_{\Omega} \frac{\xi B_0 + \eta B_1}{D} d\xi d\eta = -p [B_0 F_1(\xi, \eta) + B_1 G_1(\xi, \eta)], \\ I\dot{\omega} &= -p \iint_{\Omega} \frac{\xi^2 C_0 + \xi \eta C_1 + \eta^2 C_2}{D} d\xi d\eta = -p [C_0 F_2(\xi, \eta) + C_1 L(\xi, \eta) + C_2 G_2(\xi, \eta)], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$D = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

$$A_0 = \mu \cos \varphi \sin \vartheta + f_x \sin(\vartheta - \varphi) + f \cos(\vartheta - \varphi),$$

$$A_1 = f \sin(\vartheta - \varphi) - \mu \sin \vartheta \sin \varphi - f_x \cos(\vartheta - \varphi),$$

$$B_0 = \mu \cos \varphi \cos \vartheta + f_x \cos(\vartheta - \varphi) - f \sin(\vartheta - \varphi),$$

$$B_1 = f \cos(\vartheta - \varphi) + f_x \sin(\vartheta - \varphi) - \mu \sin \varphi \cos \vartheta,$$

$$C_0 = f_x + \mu \cos^2 \varphi, \quad C_1 = -2\mu \cos \varphi \sin \varphi, \quad C_2 = f_x + \mu \sin^2 \varphi.$$

$$F_1(\xi, \eta) = \iint_{\Omega} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta, \quad G_1(\xi, \eta) = \iint_{\Omega} \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta,$$

$$F_2(\xi, \eta) = \iint_{\Omega} \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta, \quad G_2(\xi, \eta) = \iint_{\Omega} \frac{\eta^2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta,$$

$$L(\xi, \eta) = \iint_{\Omega} \frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta.$$

После интегрирования система (13) примет вид:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_C &= 0, \\ mv_C\dot{\vartheta} &= 0, \\ I\dot{\omega} &= C_0F_2(\xi, \eta) + C_2G_2(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{14}$$

Очевидно, что движение будет оставаться чисто вращательным.

Случай $\omega \neq 0, \quad v \neq 0$.

На рисунке 1 представлено решение системы (4) для некоторых значений μ и начальных условий: $t = 0, v_C = 1, \vartheta = \frac{\pi}{4}, \omega = 1, \varphi = \frac{\pi}{3}$. 1(a) и 1(c) соответствуют круговой площадке контакта, 1(b) и 1(d) – эллиптической с эксцентриситетом $e = 0.866$. Сплошной линией показан случай, когда сила трения изотропна.

Видно, что для диска угол ϑ остаётся неизменным, а в анизотропных случаях ϑ обращается в ноль. Эти результаты согласуются с данными статьи (Dmitriev N.N. Sliding of a solid body supported by a round platform on a horizontal plane with orthotropic friction. Part 1. Regular load distribution. // J.Fric. Wear. 2009. Vol. 30, no. 4. Pp. 227-234), однако, там использовался другой способ для вычисления сил трения.

Отметим, что движение диска по шероховатой горизонтальной плоскости характеризуется тем, что скорость центра масс и угловая скорость обращаются в ноль одновременно, что показано, например, для изотропного трения в работах Ишлинского А.Ю., а для анизотропного в работах Дмитриева Н.Н. Этот вывод подтверждён экспериментально в работе (Waidman P.D., Malhotra Ch.P. On the Terminal Motion of Sliding Spinning Disks with Uniform Coulomb Friction. // Phys. D. 2007. Vol. 233, no. 1. Pp. 1-13), однако, указано, что соотношение между коэффициентом трения и моментом инерции диска может иметь решающее значение и приводить к чистому вращению или чистому скольжению. Зависимость соотношения между v и ω непосредственно

перед моментом остановки от величины $\mu = f_y - f_x$ ($f_y \geq f_x$) при $f_x = 0,42$ представлены в таблице 1. Как и в работах Дмитриева Н.Н., Waidman P.D., Malhorta Ch.P., а также в работе (Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D.E. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90, no. 24. Pp. 248-302), значение величины β в изотропном случае оказалось 0.653. Это значение хорошо видно и в решении динамической задачи на рисунке 1(a). Совпадение решения с результатами других авторов позволяет сделать вывод о верности предложенного подхода.

Таблица 1: Зависимость величины β непосредственно перед остановкой от μ при скольжении диска по плоскости с ортотропным трением ($f_x = 0.42$).

μ	0.00	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18
β	0.653	0.697	0.739	0.779	0.816	0.859	0.890

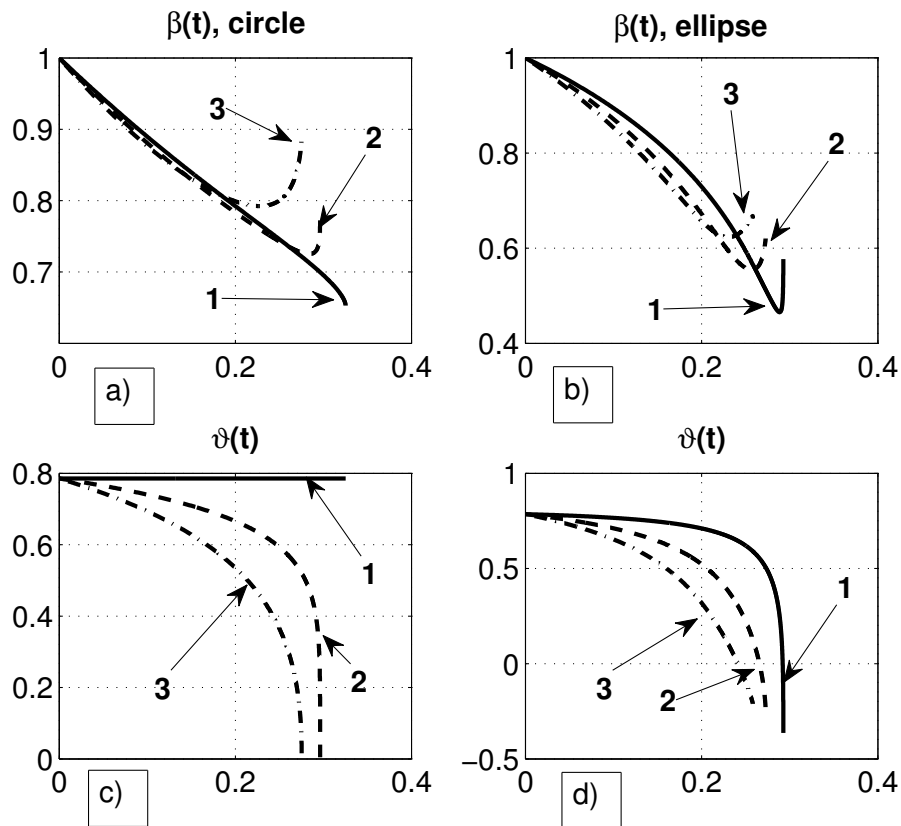


Рис. 1: Влияние анизотропии сил трения на эволюцию параметров β и ϑ для диска и эллипса ($e = 0.866$): 1) $\mu = 0$, 2) $\mu = 0.09$, 3) $\mu = 0.18$. $v_0 = 1, \omega_0 = 1, \varphi_0 = \pi/3, \vartheta_0 = \pi/4$

В случае эллиптической площадки контакта остановка скольжения и вращения также происходит одновременно, однако характерные значения пара-

метра β , расстояния до мгновенного центра скоростей, заметно ниже. Видно, что при движении эллиптической пластины даже в случае изотропного трения угол ϑ меняется: вектор скорости поворачивается в сторону противоположную угловой скорости пластины.

В таблице 2 представлены характерные значения величины β при финальном значении угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Параметры β_*, θ_* непосредственно перед остановкой существенно зависят от ориентации эллипса непосредственно перед окончанием скольжения. В свою очередь, угол φ зависит от начальных условий: $t = 0, \varphi = \varphi_0, \omega = \omega_0, v = v_0$, т.е. $\varphi_* = \varphi_*(v_0, \omega_0, \varphi_0, f_x, f_y, p)$.

Таблица 2: Зависимость величины β непосредственно перед остановкой от μ при скольжении эллиптической пластинки ($e = 0.866$) по плоскости с ортотропным трением ($f_x = 0.42$).

μ	0.00	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18
$\varphi_* = \pi/2$	0.577	0.593	0.608	0.623	0.637	0.650	0.664

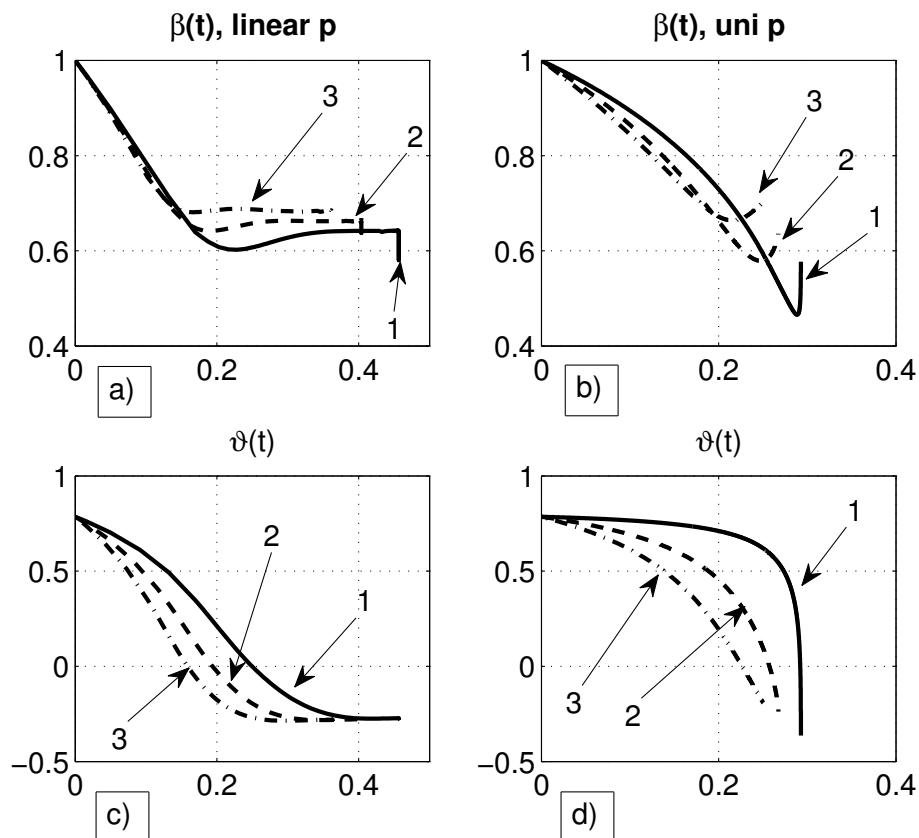


Рис. 2: Эволюция параметров β и ϑ для эллипса $e = 0.866$ при линейном и равномерном распределении давления: 1) $\mu = 0$, 2) $\mu = 0.12$, 3) $\mu = 0.24$.

В предположение линейного распределения давления система (4), которая была получена для центра эллипса, смещённого на $\xi_0 = 0.1$, $\eta_0 = 0.1$, решалась при начальных условиях $t = 0$, $v = 1$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\omega = 1$. Отметим, что случай диска со смещённым центром при анизотропном трении был изучен в работе (Дмитриев Н.Н. Движение диска со смещённым центром масс по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ. 2008. Vol. 29. Pp. 118-124), а с линейным распределением давления и изотропным трением в работе (Ердакова Н.Н., Мамаев И.С. Динамика тела с осесимметричным основанием, скользящего по шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2015. Vol.11, no.3, pp. 547-577).

Результаты численного анализа показаны на рисунке 2:(a), (c) соответствуют линейному распределению давления, (b), (d) – равномерному распределению давления (приведены для сравнения). Начальные условия: $v_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, $\varphi = \pi/3$, $\vartheta = \pi/4$. Видно, что при неравномерном распределении давления даже в случае изотропного трения кривая $\beta(t)$ отклоняется от прямой, соответствующей скольжению диска при равномерном давлении и изотропном трении. Кроме того, поведение кривых β и ϑ существенно отличается от случая эллиптической площадки при равномерном давлении. В данном примере, хорошо видно, что эффект давления достаточно сильно меняет поведение системы и может оказываться гораздо сильнее, чем эффект анизотропии. Вместе же эти два явления существенно меняют поведение эллиптической пластины в сравнении с равномерным изотропным случаем. В работе Ердаковой Н.Н. и Мамаева И.С. (2015) так же показано существенное влияние линейного распределения давления, однако, трение принималось изотропным, и кроме того сравнивать с этими работами достаточно трудно, так как авторы не делали допущения о безотрывности скольжения.

В Главе 3 изучается предельное поведение тонкой эллиптической пластины на горизонтальной поверхности с асимметричным ортотропным трением при равномерном распределении давления. В качестве одного из частных случаев также рассмотрена и пластина с окружностью в основании. Получены выражения для вычисления сил трения в такой постановке. Численно проанализирован характер движения пластины. Проведено сравнение со случаем симметричного ортотропного трения, а также проведено сравнение с круго-

вой площадкой в аналогичных условиях.

На рисунке 3 показано сравнение основных параметров движения для симметричного и асимметричного трения в случае круговой и эллиптической площадок. Рисунки 3(a), 3(c) соответствуют симметричному случаю, а 3(b), 3(d) – асимметричному. Видно, что во всех случаях чем более сильная анизотропия на поверхности, тем быстрее происходит остановка. Заметим, что во всех случаях скольжение при асимметричном трении длительнее, а изменение параметра β в заключительной части движения более резкое. Это происходит, поскольку направления «назад» или «вниз» являются направлениями с меньшим коэффициентом трения, чем исходный симметричный случай, соответственно, движение в этом направлении оказывается проще, что позволяет, как скользить дольше, так и разворачиваться на больший угол.

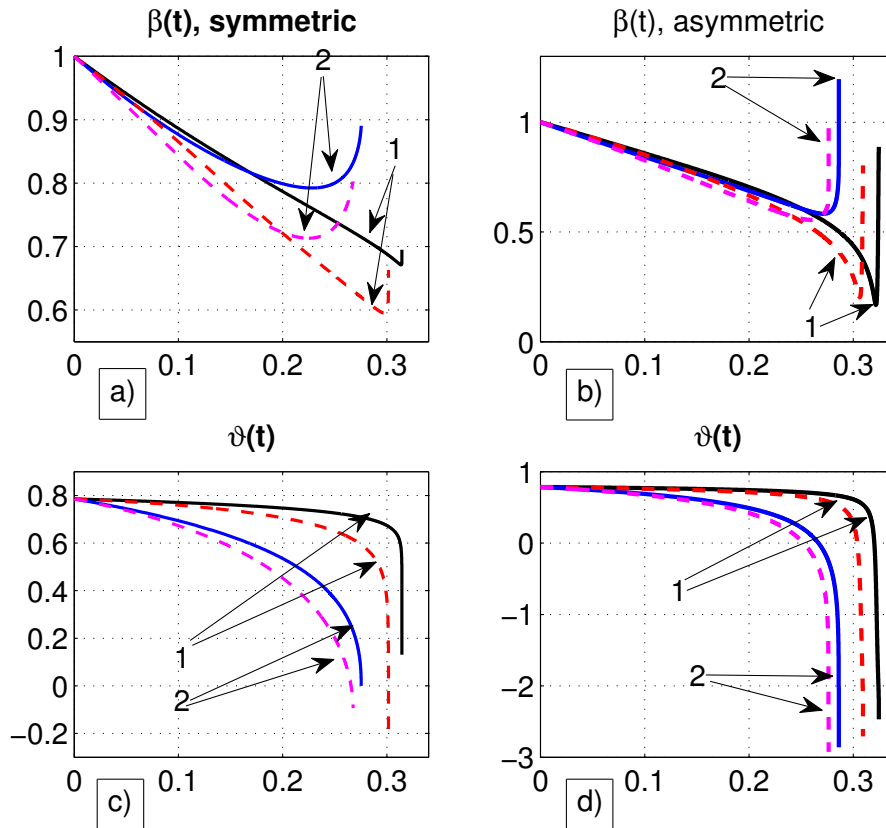


Рис. 3: Сравнение поведения параметров $\beta(t)$, $\vartheta(t)$ для эллипса $e = 0.6$ (штриховая линия) и диска (сплошная линия): (1) $\mu = 0.03$, $\mu_+ = 0.03$ (2) $\mu = 0.18$, $\mu_+ = 0.18$

В заключении кратко сформулированы основные результаты диссертационной работы, которые сводятся к следующему:

В диссертации разработана теоретическая модель, описывающая предельное поведение тонкой пластины с эллиптическим основанием, скользящей по горизонтальной поверхности с анизотропным трением.

Модель включает систему уравнений движения, а также в предположении справедливости закона Кулона в дифференциальной форме для элементарной площадки внутри пятна контакта, получены выражения для вычисления силы и момента трения в случае анизотропного трения с равномерным и линейным распределением давления.

Представлены результаты расчетов для широкого набора начальных условий.

На основе предложенной модели решены задачи:

- 1) о предельном поведении эллиптической пластины при симметричном ортотропном трении и равномерном и линейном распределении давления,
- 2) о финальном движении пластины, опирающейся на эллиптическое основание при асимметричном ортотропном трении и равномерном распределении давления.

При рассмотрении симметричного ортотропного трения показано влияние на основные характеристики движения следующих эффектов:

- соотношения между коэффициентами трения;
- начальной ориентации эллипса;
- формы области контакта;
- распределения давления;

Построен фазовый портрет системы, а также траектории движения. Проведено сравнение с изотропным трением в случае круговой площадки контакта.

При рассмотрении асимметричного ортотропного трения показано влияние на основные характеристики движения следующих эффектов:

- соотношения между коэффициентами трения;
- формы области контакта.

Построен фазовый портрет системы, а также траектории движения. Проведено сравнение результатов для эллиптической площадки с круговой площадкой контакта.

Кроме того проведено сравнение поведения пластины при симметричном и асимметричном случаях. Показаны основные отличия в эволюции основных характеристик движения.

Результаты показали важность учета анизотропии на поверхности в контактных задачах. Кроме того необходимо учитывать особенности формы пятна контакта.

Результаты могут быть использованы для оценки эффектов, таких как износ, связанных с анизотропией на поверхности, со спецификой области взаимодействия, а также с неравномерностью распределения давления.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК:

1. Н.Н. Дмитриев, О.А. Силантьева. Финальное движение тонкой эллиптической пластины по горизонтальной поверхности с ортотропным трением. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика, механика, астрономия, 2016, No 1, с. 164-172.
2. O.A. Silantyeva, N.N. Dmitriev. About the movement of a solid body on a plane surface in accordance with elliptic contact area and anisotropic friction.// Proceedings of jointly organised WCCM XI, ECCM V, ECFD VI. Vol.IV, July 23, 2014, Barcelona, Spain, pp. 4440-4452.
3. O.A. Silantyeva, N.N. Dmitriev. Dynamics of bodies under symmetric and asymmetric orthotropic friction forces // Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues Proceedings of the 3rd Polish Congress of Mechanics (PCM) and 21st International Conference on Computer Methods in Mechanics (CMM), Gdansk, Poland, 8-11 September 2015, pp. 511-515.

Другие публикации:

4. О.А. Силантьева Движение твёрдого тела с эллиптическим основанием по поверхности с анизотропным трением. // Материалы Международной конференции «VIII Окуневские чтения», 25-28 июня 2013, Санкт-Петербург, Россия.

5. О.А. Силантьева, Н.Н. Дмитриев. Исследование динамики эллиптической пластины по горизонтальной плоскости с анизотропным трением. // Тезисы докладов Международной конференции «Седьмые Поляховские чтения», 6 февраля, 2015.
6. Olga A. Silantyeva, Nikita N. Dmitriev. Dynamics of bodies under symmetric and asymmetric orthotropic friction forces // Short papers of PCM-CMM-2015, V.1, Gdansk, Poland, 12 September 2015.
7. O.A. Silantyeva, N.N. Dmitriev. About the movement of a solid body on a plane surface in accordance with elliptic contact area and anisotropic friction. // Abstracts of jointly organised WCCM XI, ECCM V, ECFD VI., July 23, 2014, Barcelona, Spain.
8. О.А. Силантьева, Н.Н. Дмитриев. Статика и динамика систем при асимметричном трении // Тезисы докладов Международной конференции «Седьмые Поляховские чтения», 6 февраля, 2015.