САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ШАТРОВ Егор Александрович

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА ГАУССА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТЕЛЕЖКИ С МАЯТНИКАМИ

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2016

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор ЮШКОВ Михаил Петрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
Института проблем управления РАН
имени В.А. Трапезникова
ТХАЙ Валентин Николаевич

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической механики
и мехатроники механико-математического
факультета Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова
КУЛЕШОВ Александр Сергеевич

Ведущая организация: Балтийский государственный технический
университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова

Защита состоится 20 октября 2016 г. в 16 часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, С.-Петербург, Университетская набережная, д. 7/9 и на сайте
https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/JMRXyL7Zfj.pdf

Автореферат разослан "......"...........................2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Е.В. Кустова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы и ее цель. Предлагаемая работа посвящена созданию теории расчета гашения колебаний механических систем путем нахождения оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему за фиксированное время из одного фазового состояния в другое. Особенность работы состоит в том, что для решения этой важнейшей задачи теории управления используется аппарат теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. В результате удается получить выражение управляющей силы в виде полинома от времени, благодаря чему получается более плавное движение системы, чем движение, полученное на основе классических методов теории управления. Помимо этого, удается построить управление, не имеющее скачков в начале и в конце движения, что обычно наблюдалось при использовании методов теории управления. Подобные исследования в области теории управления, использующие аппарат неголономной механики со связями высокого порядка, можно считать вполне актуальными и заслуживающими внимания.

Научная новизна. Тем самым в диссертации устанавливается взаимосвязь двух важнейших и разнородных областей механики — теории неголономных систем и теории управления, что является само по себе достаточно новым. Для создания законченной математической модели гашения колебаний механических систем с помощью применения методов неголономной механики со связями высокого порядка требовалось изложение основ этой научной дисциплины. В работе дается методическая разработка основных положений теории движения неголономных систем со связями высокого порядка в свете подхода к этому вопросу, изложенного в монографии С.А. Зегжды, Ш.Х. Солтаханова, М.П. Юшкова "Неголономная механика. Теория и приложения"(М.: Наука. 2009. 344 с). При этом большое внимание уделяется вопросам изложения и применения обобщенного принципа Гаусса, свойственного этой теории.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным применением к решению поставленной задачи классических методов аналитической механики, в первую очередь, теории движения неголономных систем со связями высокого порядка, теории математического анализа, теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии. Результаты, относящиеся к решению конкретных задач, согласуются с выводами других авторов.

Теоретическое и практическое значение. Сформулировано окончательное изложение использования теории движения неголономных систем со связями высокого порядка применительно к одной из важнейших задач теории управления о нахождении оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему за фиксированный промежуток времени из заданного начального фазового состояния системы в заданное конечное фазовое состояние системы. Центральным здесь является применение обобщенного принципа Гаусса, позволяющего найти управление в виде полинома от времени. В результате этого получается более плавное движение системы, чем при решении этой же задачи классическими методами теории управления. Помимо этого, предложенная теория позволяет найти управляющую силу без скачков в начале и в конце движения, которые свойственны решениям, полученным при использовании стандартных методов теории управления.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на международных научных конференциях "Шестые Поляховские чтения" (Санкт-Петербург, 2012 г.), "Седьмые Поляховские чтения" (Санкт-Петербург, 2015 г.), "XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики" (Казань, 2015 г.), "12. Magdeburger Maschinenbau-Tage" (Магдебург, 2015 г.), XIII международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (Конференция Пятницкого)" (Москва, 2016 г.), на заседании секции теоретической механики им. Н.Н. Поляхова Санкт-Петербургского Дома ученых РАН (Санкт-Петербург, 2015 г.), на заседании кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (2016 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 8 научных работах автора, из которых 3 опубликованы в журнале, рекомендованном ВАК'ом (одна из них находится в печати).

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из краткой характеристики работы, введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Число рисунков равно 34. Общий объем работы составляет 115 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** кратко излагаются основные этапы развития неголономной механики и некоторые возможные пути ее дальнейшего развития. Основное внимание при этом обращается на создание СА. Зегждой, Ш.Х. Солтахановым и М.П. Юшковым теории движения неголономных систем при связях высокого порядка. Отмечается, что эта теория позволяет построить новый метод решения одной из важнейших задач теории управления о нахождении управляющей силы, переводящей механическую систему за заданное время из одного фазового состояния в другое.

В **главе I** предлагается методическая разработка основных положений неголономной механики. Движение механической системы с конечным числом степеней свободы в криволинейной системе координат $q = (q^1, \ldots, q^s)$ описывается уравнениями Лагранжа второго рода (M – масса всей системы):

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma\,, \quad T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)} = \\ = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{00} + M\mathrm{g}_{0\alpha}\,\dot{q}^\alpha + \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{\sigma\tau}\dot{q}^\sigma\dot{q}^\tau = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\,, \\ \sigma,\tau = \overline{1,s}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,, \quad q^0 = t\,, \quad \dot{q}^{\,0} = 1\,. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Введем в рассмотрение абстрактное многообразие V всех мыслимых положений изучаемой механической системы, которые она может иметь в данный момент времени t. Зафиксируем некоторую точку с координатами q^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, этого многообразия и в ней построим касательное пространство $\mathrm{T}\,(q, \mathrm{V})$ к многообразию V. Это пространство состоит из касательных векторов

$$\delta\mathbf{y} = \delta q^\sigma\,\mathbf{e}_\sigma\,, \qquad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,. \tag{1.2}$$

Эвклидову структуру в касательном пространстве можно ввести, используя инвариантность относительно систем отсчета квадрата длины вектора (1.2):

$$(\delta\mathbf{y})^{\,2} = \mathrm{g}_{\sigma\tau}\,\delta q^\sigma\,\delta q^\tau\,, \qquad \sigma,\tau = \overline{1,s}\,. \tag{1.3}$$

В формуле (1.3) коэффициенты $\mathrm{g}_{\sigma\tau}$ являются элементами положительно определенной квадратичной формы $T^{(2)}$.

С другой стороны, элементарная работа, инвариантная относитедьно выбранных систем координат, записывается в виде

$$\delta A = Q_\sigma \, \delta q^\sigma \,, \tag{1.4}$$

поэтому, если рассматривать коэффициенты Q_σ как ковариантные компоненты вектора

$$\mathbf{Y} = Q_\sigma \mathbf{e}^\sigma \,, \tag{1.5}$$

то элементарную работу (1.4) можно переписать в виде $\delta A = \mathbf{Y} \cdot \delta \mathbf{y}$. Векторы $\mathbf{e}_\sigma$ и $\mathbf{e}^\rho$ $(\sigma, \rho = \overline{1, s})$ в формулах (1.2) и (1.5) можно рассматривать как векторы взаимных базисов в касательном пространстве $\mathrm{T}(q, \mathrm{V})$ при использовании введенных криволинейных координат.

В результате получаем возможность представить уравнения Лагранжа второго рода (1.1) в касательном пространстве $\mathrm{T}(q, \mathrm{V})$ в виде одного векторного уравнения

$$\begin{gathered} M\mathbf{W} = \mathbf{Y} \,, \quad \mathbf{W} = \big(\mathrm{g}_{\sigma\tau} \ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\,\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\big)\mathbf{e}^\sigma = \big(\ddot{q}^{\,\sigma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\big)\mathbf{e}_\sigma \,, \\ \Gamma_{\tau,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{\tau\beta}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \mathrm{g}_{\tau\alpha}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial \mathrm{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^\tau}\right), \quad \sigma, \tau = \overline{1, s} \,, \quad \alpha, \beta = \overline{0, s} \,. \end{gathered} \tag{1.6}$$

При наложении на движение механической системы связей согласно принципу освобождаемости от связей вместо уравнения (1.6) получим векторное уравнение

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R} \,. \tag{1.7}$$

Для выявления структуры появившейся реакции связей $\mathbf{R}$ голономные и неголономные связи после дифференцирования по времени записываются в виде, содержащем линейно обобщенные ускорения:

$$f_2^\varkappa(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv a_\sigma^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q})\, \ddot{q}^{\,\sigma} + a_0^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}) = 0 \,, \quad l = s - k \,, \quad \varkappa = \overline{1, k} \,. \tag{1.8}$$

Формулой (1.8) могут задаваться и непосредственно линейные неголономные связи второго порядка. Для построения теории движения неголономных систем в рассмотрение вводятся векторы, которые в касательном пространстве формируют "K-пространство" размерности k с базисом

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} \equiv \boldsymbol{\nabla}'' f_2^\varkappa = \frac{\partial f_2^\varkappa}{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}\, \mathbf{e}^\sigma \,, \qquad \varkappa = \overline{1, k} \,, \quad \sigma = \overline{1, s} \,. \tag{1.9}$$

Обобщенный оператор $\boldsymbol{\nabla}''$ был предложен Н.Н. По́ляховым. Если ввести векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, $\lambda = \overline{1, l}$, удовлетворяющие условиям

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = 0 \,, \qquad \lambda = \overline{1, l} \,, \quad \varkappa = \overline{1, k} \,,$$

то касательное пространство разобьется на прямую сумму подпространств K и L с базисами $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}, \, \ldots \, , \boldsymbol{\varepsilon}^s\}$ и $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \, \ldots \, , \boldsymbol{\varepsilon}_l\}$. Любой вектор, например вектор ускорения

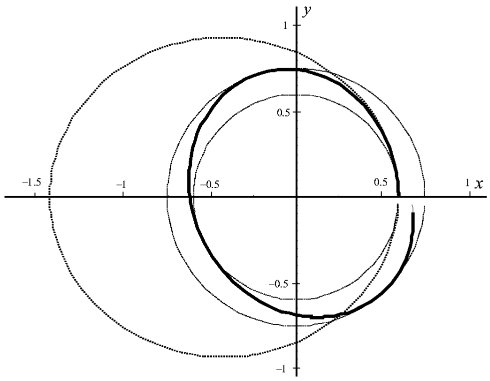

Рис. 1. Траектория движения спутника с постоянным ускорением
(первая теория)

системы, может быть представлен в виде двух ортогональных составляющих, принадлежащих этим подпространствам:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^K + \mathbf{W}_L\,, \quad \mathbf{W}_L \perp \mathbf{W}^K\,.$$

При идеальных связях $\mathbf{R}_L = 0$ и их реакция представляется следующим образом:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{1.10}$$

поэтому второй закон Ньютона при несвободном движении принимает вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,. \tag{1.11}$$

Из закона (1.11) получены основные виды уравнений несвободного движения и была установлена их связь с дифференциальными вариационными принципами механики.

В **главе II** излагаются две теории движения неголономных систем с линейными связями высокого порядка, созданных С.А. Зегждой, Ш.Х. Солтахановым и М.П. Юшковым. В первой из них множители Лагранжа рассматриваются как неизвестные функции времени, строится совместная система дифференциальных уравнений относительно них и обобщенных координат. Применение теории иллюстрируется подробным решением задачи о движении спутника Земли при закреплении величины его ускорения. Согласно проведенным расчетам (см. рис. 1) спутник начинает двигаться между двумя концентрическими окружностями, попеременно их касаясь.

Вторая теория базируется на применении обобщенного принципа Геусса, предложенного Н.Н. Пóляховым, С.А. Зегждой и М.П. Юшковым еще в 1983 г. В этом случае (см. рис. 2) спутник (превращающийся в космический аппарат), сделав несколько оборотов вокруг Земли, асимптотически стремится двигаться по прямой с постоянным ускорением. Если в более общем случае рассматривается наложение на движение механической системы линейных неголономных связей третьего порядка

$$f_3^{\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q,\dddot q) \equiv a_{3\sigma}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q)\,\dddot q^{\,\sigma} + a_{30}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q) \;=\; 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{2.1}$$

то можно утверждать, что в случае задания связей (2.1) минимизируется величина $\dot{\mathbf{R}}/M = \dot{\mathbf{R}}^K/M$, а тем самым выполняется аналогично классическому принципу Гаусса утверждение

$$\delta'''Z_{(1)} = 0\,, \tag{2.2}$$

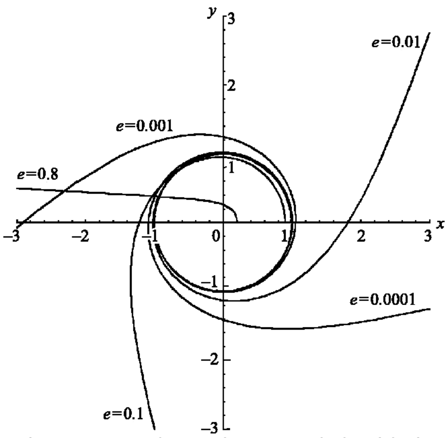

Рис. 2. Траектория движения спутника с постоянным ускорением (вторая теория)

где введено обозначение (для обобщенного принуждения по Гауссу)

$$Z_{(1)} = \frac{M}{2}\left(\dot{\mathbf{W}} - \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{M}\right)^2 . \tag{2.3}$$

Запись (2.2) можно рассматривать как *обобщенный прнцип Гаусса*, справедливый при наложении связей (2.1). Значок "(1)" в формулах (2.2) и (2.3) указывает на порядок обобщенного принципа по отношению к классическому принципу Гаусса, а три штриха в записи (2.2) подчеркивают, что варииpуются лишь третьи производные от обобщенных координат. Приведенный обобщенный принцип Гаусса первого порядка (2.2) в случае задания линейных неголномных связей порядка $(n+2)$ легко обобщается на *обобщенный принцип Гаусса n-го порядка*

$$\delta^{(n+2)} Z_{(n)} = 0 \,, \tag{2.4}$$

где введено обозначение

$$Z_{(n)} = \frac{M}{2}\left(\overset{(n)}{\mathbf{W}} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{Y}}}{M}\right)^2 . \tag{2.5}$$

В формулах (2.4), (2.5) индекс (n) означает порядок производной по времени от вектора, а индекс $(n+2)$ указывает на то, что частный дифференциал вычисляется при фиксированных $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ldots, \overset{(n+1)}{q^\sigma}$. Минимизируемый в данном случае по величине вектор $\Re \equiv \overset{(n)}{\mathbf{R}} = M\overset{(n)}{\mathbf{W}} - \overset{(n)}{\mathbf{Y}}$ можно назвать условно "реакцией" линейных неголономных связей порядка $(n+2)$.

Особенно удачным оказывается применение обобщенного принципа Гаусса для создания нового метода для решения одной из важнейших задач теории управления. Изложению этого метода и некоторому его развитию посвящены следующие две главы диссертации.

В **главе III** приводится законченное изложение нового метода, предложенного С.А. Зегждой, Ш.Х. Солтахановым и М.П. Юшковым, для нахождения управляющей силы, переводящей механическую систему за заданный промежуток времени из одного фазового состояния в другое. Такая задача является одной из важнейших задач теории управления. Изложение метода будем пояснять решением модельного примера о нахождении управляющей силы F, перемещающей горизонтально движущуюся вдоль оси x тележку массы m за заданное время $\widetilde{T}$ на расстояние S (см. рис. 3). На тележке укреплены оси s математических маятников с массами m_σ и длинами l_σ, $\sigma = \overline{1,s}$ (на рис. 3 для определенности изображена тележка с двумя маятниками). Требуется переместить данную систему из первоначального состояния покоя в новое положение покоя (при такой постановке задачи обычно говорят, что решается задача о гашении колебаний).

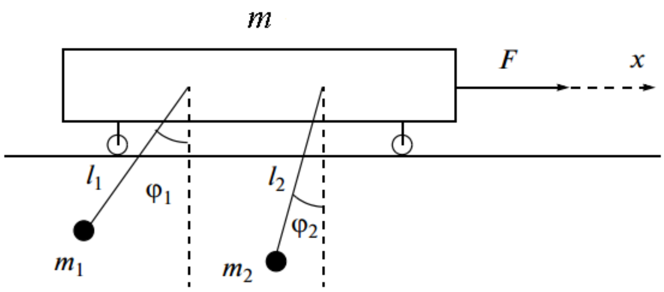

Рис. 3. Тележка с маятниками

Для удобства исследований систему дифференциальных уравнений движения запишем в главных координатах. Рассматриваемая механическая система имеет нулевую частоту и s ненулевых собственных частот Ω_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Используя собственные формы колебаний, соответствующие этим частотам, введем главные безразмерные координаты x_σ, $\sigma = \overline{1,s}$, задавая их как линейные комбинации углов φ_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Переходя к безразмерному времени $\tau = \Omega_1 t$ и вводя $(s+1)$-ю безразмерную главную координату x_0, пропорциональную перемещению центра масс рассматриваемой механической системы, в результате получим

$$x_0'' = u\,, \quad x_\sigma'' + \omega_\sigma^2 x_\sigma = u\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{3.1}$$

Здесь u — управление, пропорциональное силе F, штрихи соответствуют производным по безразмерному времени τ, $\omega_\sigma = \Omega_\sigma/\Omega_1$, $\sigma = \overline{1,s}$. Полученную систему дифференциальных уравнений (3.1) будем решать при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} x_0(0) = x_0'(0) = 0\,, \quad x_\sigma(0) = x_\sigma'(0) = 0\,, \quad T = \Omega_1 \widetilde{T}\,, \\ x_0(T) = a \equiv \frac{S}{l_1}\,, \quad x_0'(T) = 0\,, \quad x_\sigma(T) = x_\sigma'(T) = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Система (3.1) имеет $(s+1)$ дифференциальных уравнений, из нее требуется найти неизвестные функции x_0, x_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Но в этой же системе неопределенной является и функция $u(t)$. Поэтому для решения поставленной задачи (3.1)–(3.2) необходимо добавить еще одно условие. В монографии *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука. 1980 г.* при решении подобных задач выбор управления подчиняется условию минимальности функционала

$$J = \int_0^T u^2 d\tau\,. \tag{3.3}$$

Прменяя для решения задачи оптимального управления (3.1)–(3.3) метод, опирающийся на использование принципа максимума Понтрягина, найдем безразмерное управление в виде

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(C_{2\sigma+1}\cos\omega_\sigma\tau + C_{2\sigma+2}\sin\omega_\sigma\tau\right). \tag{3.4}$$

Формула (3.4) позволяет посмотреть на полученное с помощью принципа максимума Понтрягина решение с совершенно новой и интересной точки зрения, благодаря которой удастся соединить две абсолютно различные области механики — теорию управления и неголономную механику.

С этой целью обратим, прежде всего, внимание на то, что полученное управление (3.4) можно рассматривать как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_2^2\right)\,\ldots\,\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_s^2\right)u = 0\,. \tag{3.5}$$

Возвращаясь в уравнении (3.5) к размерным переменным и подставляя в полученное уравнение выражение для F из первого уравнения Лагранжа

$$M\ddot{x} - \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma l_\sigma \ddot{\varphi}_\sigma = F\,, \quad M = m + \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma\,,$$

получим дифференциальное уравнение порядка $(2s+4)$ относительно обобщенных координат x, φ_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. В частном случае наличия лишь двух маятников оно имеет вид

$$\begin{gathered}
a_{8,x}\,\frac{d^8x}{dt^8} + a_{8,\varphi_1}\,\frac{d^8\varphi_1}{dt^6} + a_{8,\varphi_2}\,\frac{d^8\varphi_2}{dt^8} + a_{6,x}\,\frac{d^6x}{dt^6} + a_{6,\varphi_1}\,\frac{d^6\varphi_1}{dt^6} + a_{6,\varphi_2}\,\frac{d^6\varphi_2}{dt^6} + \\
+ a_{4,x}\,\frac{d^4x}{dt^4} + a_{4,\varphi_1}\,\frac{d^4\varphi_1}{dt^4} + a_{4,\varphi_2}\,\frac{d^4\varphi_2}{dt^4} = 0\,, \\
a_{8,x} = M + m_1 + m_2\,, \quad a_{8,\varphi_1} = -m_1\,l_1\,, \quad a_{8,\varphi_2} = -m_2\,l_2\,, \\
a_{6,x} = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)(M + m_1 + m_2)\,, \quad a_{6,\varphi_1} = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\,m_1\,l_1\,, \\
a_{6,\varphi_2} = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\,m_2\,l_2\,, \quad a_{4,x} = \Omega_1^2\,\Omega_2^2\,(M + m_1 + m_2)\,, \\
a_{4,\varphi_1} = -\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,m_1\,l_1\,, \quad a_{4,\varphi_2} = -\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,m_2\,l_2\,.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Таким образом, решению поставленной задачи теории управления с использованием принципа максимума Понтрягина соответствует решение некоторой неголономной задачи при наложении связи порядка $(2s+4)$. Поэтому наличие связи высокого порядка, вытекающей из минимизации функционала (3.3) с помощью применения принципа максимума Понтрягина, позволяет задачу определения управляющей силы, обеспечивающей гашение колебаний, рассматривать как некоторую задачу неголономной механики со связями высокого порядка. Но тогда представляется целесообразным попытаться решать эту же механическую задачу, опираясь на теорию движения неголономных систем со связями высокого порядка, развитую С.А. Зегждой, Ш.Х. Солтахановым, М.П. Юшковым и кратко изложенную в главе II диссертации. Согласно этой теории при наличии связи порядка $(2s+4)$ можно составить уравнение порядка $(2s+2)$ относительно реакции этой связи. Таким образом, если рассматривать связь порядка $(2s+4)$ как некоторую программу движения, которую должна выполнять механическая система, то реакция этой связи оказывается управляющей силой, обеспечивающей выполнение заданной программы. Следовательно, в общем случае дифференциальное уравнение (3.5) порядка $(2s+2)$ относительно управления можно трактовать как дифференциальное уравнение относительно реакции связи. Но если мы продолжаем пользоваться теорией движения неголономных систем со связями высокого порядка, то естественно вместо минимизации функционала (3.3) с помощью принципа максимума Понтрягина воспользоваться вариационным принципом, свойственным этой теории. Таковым принципом является обобщенный принцип Гаусса, изложенный в главе II. Дальнейшее изложение будет иллюстрироваться исследованием гашения колебаний тележки, несущей оси двух маятников ($s=2$).

Как было показано в главе I диссертации, при использовании понятия касательного пространства уравнения Лагранжа второго рода можно представить в виде одного векторного уравнения (1.7), где в случае тележки с двумя маятниками имеем

$$M\mathbf{W} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} a_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau}\,\mathbf{e}^{\sigma}\,, \quad \mathbf{Y} = -\sum_{\sigma,\tau=1}^{3} c_{\sigma\tau}\,q^{\tau}\,\mathbf{e}^{\sigma}\,, \quad \mathbf{R} = \sum_{\sigma=1}^{3} R_{\sigma}\,\mathbf{e}^{\sigma}\,,$$
$$q^1 = \varphi_1\,, \quad q^2 = \varphi_2\,, \quad q^3 = x\,.$$

Выше отмечалось, что управление u, удовлетворяющее уравнению (3.5) при $s=2$, можно рассматривать как реакцию линейной неголономной связи восьмого порядка (3.6). Поэтому в уравнении (1.7) вектор $\mathbf{R}$, который в неголономной механике обозначает вектор реакции связи, в нашей задаче при использовании аппарата неголономной механики соответствует управлению u. Применительно к рассматриваемой задаче управляемого движения этот вектор можно представить в виде

$$\mathbf{R} = u(t)\,\mathbf{b}\,, \quad \mathbf{b} = \sum_{\sigma=1}^{3} b_{\sigma}\,\mathbf{e}^{\sigma}\,.$$

Обобщенный принцип Гаусса утверждает, что

$$\delta^{(8)}\left(M\,\frac{d^6\mathbf{W}}{dt^6} - \frac{d^6\mathbf{Y}}{dt^6}\right)^2 = 0\,. \tag{3.7}$$

Согласно принципу (3.7) линейная связь восьмого порядка (3.6) является идеальной (можно говорить, что в этом случае и отыскиваемое управление можно назвать идеальным), если ее "реакция" $\Re \equiv \mathbf{R}_{(8)}$ оказывается минимальной, то есть если минимальной оказывается величина

$$\left(\mathbf{R}_{(8)}\right)^2 = \left(M\,\frac{d^6\mathbf{W}}{dt^6} - \frac{d^6\mathbf{Y}}{dt^6}\right)^2. \tag{3.8}$$

Из всех возможных линейных неголономных связей восьмого порядка выделим такое подмножество, для элементов которого величина $\left(\mathbf{R}_{(8)}\right)^2$ равна своей нижней границе, равной нулю. Всем этим элементам, как это следует из выражения (3.8), соответствует единственное уравнение

$$\frac{d^6u}{dt^6} = 0\,, \quad \text{откуда} \quad u(t) = \sum_{k=1}^{6} C_k t^{k-1}\,. \tag{3.9}$$

В отличие от управления, полученного с помощью применения принципа максимума Понтрягина, управление, отыскиваемое в виде полинома (3.9), не будет иметь осцилляций, соответствующих собственным частотам системы. Найденная функция будет достаточно гладкой, в чем состоит ее безусловное преимущество.

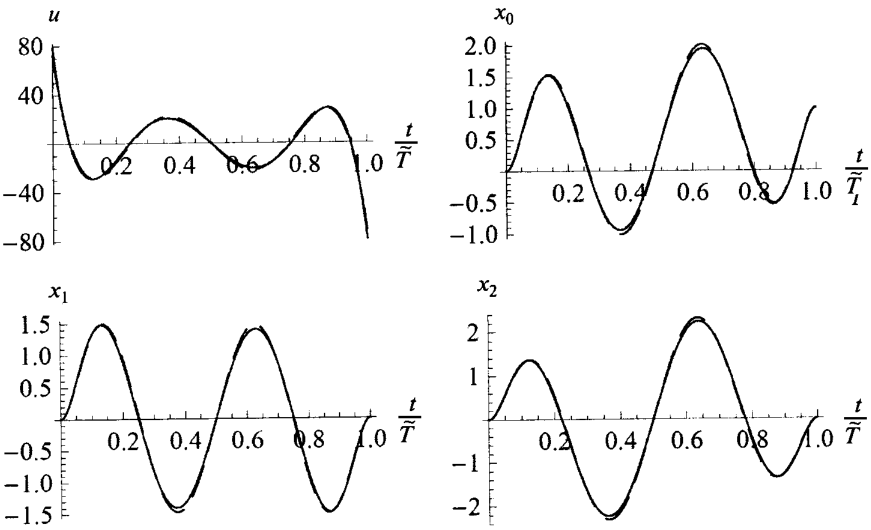

Рис. 4. Кратковременное движение механической системы, $T = T_2,\ T_2 = 0.5\,T_1$

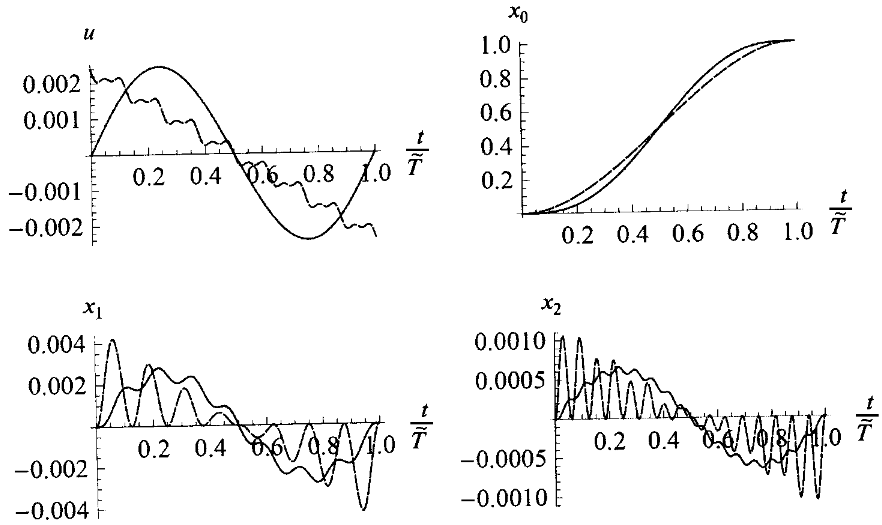

Рис. 5. Длительное движение механической системы, $T = 16\,T_2,\ T_2 = 0.5\,T_1$

Для иллюстрации изложенного приведем расчеты для случая $s = 2$ и при $a = 1$. Решение зависит от двух безразмерных параметров T/T_2 и $T_2 T_1$, где T_1 и T_2 — безразмерные периоды колебаний, соответствующие первой и второй ненулевым собственным частотам. Так как $\omega_1 = 1$, то $T_1 = 2\pi$, в свою очередь $T_2 = 2\pi/\omega_2$. Рассматривались два случая движения (кратковременное и длительное):

$$T = T_2\,, \quad T = 16\,T_2\,, \quad \text{при этом} \quad T_2 = 0.5\,T_1\,.$$

Результаты расчетов, полученные с с помощью принципа максимума Понтрягина, представлены рисунках 4 и 5 пунктирными линиями, а с помощью обобщенного принципа Гаусса — сплошными кривыми. Из сравнения этих случаев движения видно, что при кратковременном движении (см. рис. 4) решения, полученные по обоим методам, практически совпадают, а при длитедбном времени движения (см. рис. 5) они заметно различаются. Это различие можно объяснить тем, что управление, полученное с помощью использования принципа максимума Понтрягина, содержит гармоники с собственными частотами системы, что вводит систему в резонанс. В то же время управление, созданное с применением обобщенного принципа Гаусса, задается полиномом, что обеспечивает сравнительно плавное движение системы.

Интересно обратить внимание еще на одно обстоятельство — применение принципа максимума Понтрягина всегда создает скачки управляющей силы в начале и в конце движения. Если же используется обобщенный принцип Гаусса, то при длительном времени движения подобные скачки исчезают. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли удалить скачки управления и при кратковременном движении системы.

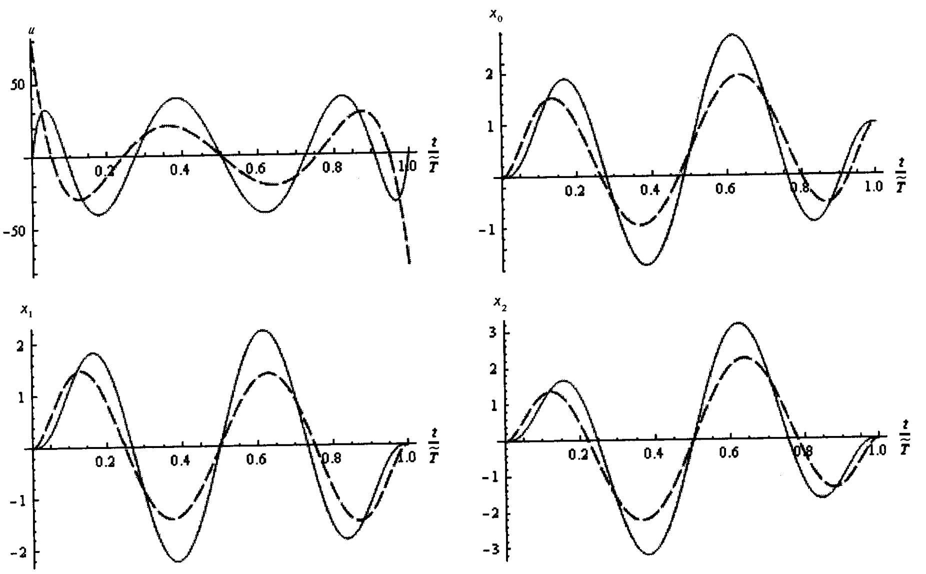

Рис. 6. Кратковременное движение без скачков управляющей силы, $T = T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

С этой целью в излагаемой теории формулируется и решается расширенная (обобщенная) краевая задача, в которой дополнительно требуется обращение в нуль обобщенных ускорений в начале и в конце движения системы. В нашем случае легко показать, что для этого достаточно потребовать дополнительно к граничным условиям (3.2) и выполнения условий

$$\ddot{x}_0(0) = 0\,, \quad \ddot{x}_0(T) = 0\,.$$

Полученный расчет представлен на рис. 6, этот рисунок полезно сравнить с рис. 4.

Важно отметить, что решить сформулированную расширенную (обобщенную) краевую с помощью применения принципа максимума Понтрягина невозможно, так как полученное с его помощью управление будет содержать количество неизвестных произвольных постоянных, недостаточное для удовлетворения всех поставленных граничных условий. В отличие от этого применить к сформулированной расширенной краевой задаче обобщенный принцип Гаусса можно, увеличив его порядок на две единицы.

Глава IV посвящена дальнейшему развитию рассматриваемого нового метода теории управления. Оказалось, что формулировка и решение расширенной краевой задачи не всегда оказывается полезной. Дело в том, что, как показывают расчеты, результаты движения механической системы под действием управления, полученного в результате решения обобщенной краевой задачи, существенно зависят от безразмерного параметра $K = T/T_1$. В работе *Зегжда С.А., Гаврилов Д.Н. Гашение колебаний упругого тела при его перемещении // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3* было показано, что существует счетное множество таких значений (*особых точек решений*) параметра K, при приближении к которым в системе развиваются интенсивные колебания.

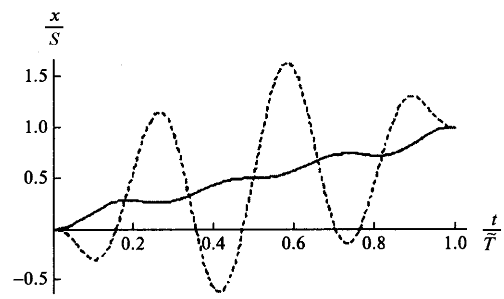

Рис. 7. Сравнение решений по Гауссу, соответствующих расширенной и обычной краевым задачам, при $T = 4\,T_2,\ T_2 = 0.25\,T_1$

В качестве примера рассмотрим гашение колебаний тележки с двумя маятниками при следующих значениях безразмерных параметров:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{4}\,, \quad \frac{m_1}{M + m_1 + m_2} = \frac{4}{5}\,, \quad \frac{m_2}{M + m_1 + m_2} = \frac{1}{10}\,, \quad \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = 2.242\,. \qquad (4.1)$$

Движение тележки, измеренное в долях S, полученное с помощью обобщенного принципа Гаусса в случае решения обыкновенной краевой задачи, представлено на рис. 7 плавной сплошной жирной линией. В то же время в результате решения задачи при тех же параметрах (4.1) в случае постановки расширенной краевой задачи получаем движение тележки, представленное на рис. 7 пунктирной линией. Видим, в этом случае развиваются интенсивные колебания тележки. Это объясняется тем, что принятым значениям параметров (1.1) соответствует значение $K = 1.5$, близкое к величине первой особой точки, равной $K = 1.522$.

Для нахождения решения без особых точек в диссертации предлагается следующий метод. Назовем сформулированную ранее расширенную краевую задачу *расши-*

ренной краевой задачей первого порядка и получаемое в результате решение обозначим через $u_1(\tau)$. Наряду с этой задачей поставим еще более сложную *расширенную краевую задачу второго порядка*, в которой дополнительно потребуем, чтобы у тележки в начале и в конце пути производная и от ускорения по времени равнялось нулю. Решение этой задачи обозначим через $u_2(\tau)$. Это новое решение также будет иметь особые значения параметра K, но они будут отличны от особых значений предыдущего решения. Тогда при любых значениях параметра μ функция

$$u(\tau) = u_1(\tau) + \mu(u_2(\tau) - u_1(\tau)) \tag{4.2}$$

будет решением рассматриваемой задачи. Избежать вычисления особых значений решений u_1 и u_2 и построить аналитическое решение, непрепрерывно зависящее от параметра K, позволяет определение параметра μ из условия минимальности интеграла от квадрата функции $u(\tau)$ за время перемещения T. Это решение соответствует следующему значению параметра μ

$$\mu = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_3 - 2J_2}\,, \quad J_1 = \int_0^T u_1^2(\tau)\,d\tau\,, \quad J_2 = \int_0^T u_1(\tau)u_2(\tau)\,d\tau\,, \quad J_3 = \int_0^T u_2^2(\tau)\,d\tau\,.$$

Как развитие предложенного метода можно было бы строить и решение $u_3(\tau)$ *расширенной краевой задачи третьего порядка*, в которой добавляются требования обращения в нули четвертых производных от координаты тележки в начале и в конце пути и находить μ аналогично предыдущему приему.

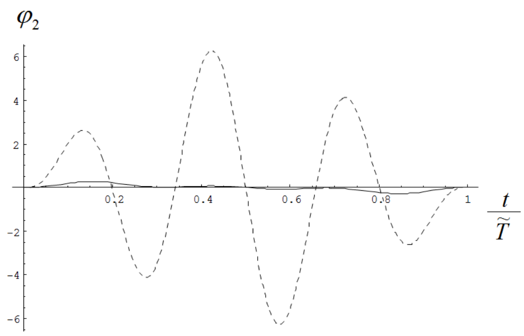

Рис. 8. Колебания второго маятника

Помимо этого, в диссертации предлагается новый, более простой подход к решению задачи, который позволяет избежать определения собственных частот и собственных форм колебаний данной механической системы. В нем ищется как функция времени не сила F, которая приложена к тележке, а ускорение тележки $\ddot{x}$, при котором она за заданное время $\widetilde{T}$ переместится на заданное расстояние S при отсутствии скоростей и ускорений у тележки и у маятников в начале и в конце пути. Тогда в безразмерных координатах система уравнений запишется в виде

$$\bar{x}_0'' = \bar{u}\,, \quad \bar{x}_1'' + \bar{x}_1 = \bar{u}\,, \quad \bar{x}_2'' + \bar{x}_2/\alpha = \bar{u}\,, \qquad \bar{u} = \ddot{x}/\mathrm{g}\,, \quad \bar{\tau} = \sqrt{\mathrm{g}/l_1}\,t\,, \quad \alpha = l_2/l_1\,.$$

Зная движение тележки и маятников, легко определим и искомую размерную горизонтальную управляющую силу F_N по формуле:

$$F_N = M\mathrm{g}\bar{u} - m_1\mathrm{g}\bar{x}_1'' - m_1\mathrm{g}\bar{x}_2''\,.$$

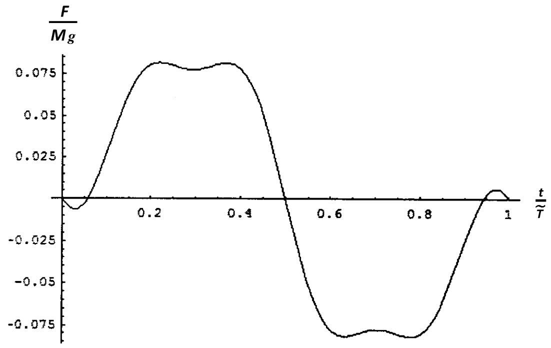

Рис. 9. Управляющая сила для движения тележки с двойным маятником

Расчеты проводились с использованием формулы (4.2) при следующих значениях параметров:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{4}\,, \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{8}\,, \quad \frac{m}{m_1} = \frac{1}{2}\,, \quad K = 1.54\,, \quad S = \frac{l_1}{5}\,.$$

На рис. 8 показаны колебания второго маятника в градусах, пунктирная линия соответствует старому подходу, а сплошная — новому.

Предложенный метод используется и при гашении колебаний тележки с двойным маятником. На рис. 9 приведена зависимость силы F, выраженной в долях $M\mathrm{g}$, от безразмерного времени τ. Исходные параметры механической системы таковы: $m_1 = m_2 = m,\ l_1 = l_2$. Расчеты соответствуют перемещению тележки на расстояние $S = l_1$ за время $\widetilde{T} = 1.5\,(2\pi/\Omega_1)$, где $\Omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{\mathrm{g}/l_1}$. В последнем параграфе диссертации сформулирован алгоритм практического применения обобщенного принципа Гаусса для гашения колебаний механической системы при переводе ее из одного состояния покоя в другое без использования теории движения неголономных систем со связями высокого порядка.

В **Заключении** диссертации кратко формулируются основные выводы и

Результаты, выносимые на защиту:

1 . Критический обзор теории движения неголономных систем со связями высокого порядка применительно к одной из важнейших задач теории управления.

2 . Построение решения задачи без особых точек.

3 . Новый подход к решению задачи, состоящий в предварительном отыскании оптимального ускорения основного тела механической системы, по которому вычисляется управляющая сила.

4 . Гашение колебаний тележки с двойным маятником.

Публикации автора по теме диссертации:

-Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

[1] *Шатров Е.А.* Использование главных координат в задаче о гашении колебаний тележки с двумя маятниками // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Вып. 4. С. 619–623.

[2] *Зегжда С.А., Шатров Е.А., Юшков М.П.* Новый подход к нахождению управления, переводящего систему из одного фазового состояния в другое // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Вып. 2. С. 286–295.

[3] *Зегжда С.А., Шатров Е.А., Юшков М.П.* Гашение колебаний тележки с двойным маятником с помощью управления ее ускорением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Вып. 4.(В печати)

-Публикации в других изданиях

[4] *Шатров Е.А.* Применение псевдоглавных координат при исследовании гашения колебаний механических систем // Междунар. научн. конференция по механике "Шестые Поляховские чтения" . 31 января – 3 февраля 2012 г. С.-Петерб., Россия. Тезисы докладов. СПб: ООО "Пантон" . 2012. С. 76.

[5] *Шатров Е.А.* Новый подход к решению задачи о гашении колебаний тележки с маятниками // Междунар. научн. конференция по механике "Седьмые Поляховские чтения" . 2 февраля – 6 февраля 2015 г. С.-Петерб., Россия. Тезисы докладов. СПб: ООО "Пантон" . 2015. С. 47.

[6] *Зегжда С.А., Шатров Е.А.* Эффективность гашения колебаний тележки с маятниками на основе определения ее ускорения // "XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики" . 20 августа – 24 августа 2015 г. Казань, Россия. Аннотации докладов. Казань: ООИ "Арманд" . 2015. С. 112.

[7] *Zegzhda S.A., Shatrov E.A.* A new approach to the problem of suppression of oscillations of a trolley with a double pendulum // 12. Magdeburger Maschinenbau-Tage. Magdeburg, 30. September und 01. Oktober 2015. CD. Paper P-03.

[8] *Зегжда С.А., Юшков М.П., Наумова Н.В., Солтаханов Ш.Х., Шатров Е.А.* Использование принципа максимума Понтрягина и обобщенного принципа Гаусса в задачах гашения колебаний // XIII международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (Конференция Пятницкого)" . 1 июня – 3 июня 2016 г. Москва, Россия. Тезисы докладов. Москва: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2016.

В совместных работах С.А. Зегжде, Ш.Х. Солтаханову, М.П. Юшкову принадлежат постановки задач и научное консультирование Е.А. Шатрова при его выполнении научных исследований; в работе [8] Н.В. Наумова проводила численные расчеты, связанные с использованием принципа максимума Понтрягина, а научное исследование и численные расчеты, связанные с применением обобщенного принципа Гаусса, проводил Е.А. Шатров.