На правах рукописи

Санникова Татьяна Николаевна

Влияние возмущающей силы, изменяющейся по заданному закону, на движение малого небесного тела

01.03.01 — астрометрия и небесная механика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Санкт-Петербург — 2016

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Холшевников Константин Владиславович
Официальные оппоненты:	Кузнецов Эдуард Дмитриевич доктор физико–математических наук, доцент, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н.Ельцина, Институт естественных наук, Департамент «Физический факультет», заведующий кафедрой астрономии и геодезии
	Васильев Николай Николаевич кандидат физико–математических наук, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, старший научный сотрудник лаборатории теории представлений и динамических систем
Ведущая организация:	Институт астрономии Российской академии наук

Защита состоится 14 июня 2016 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.232.15 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, Математико-механический факультет, ауд. 2143.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан "____"____________ 2016 г.

Учёный секретарь диссертационного совета

Миланова Юлия Владимировна

Диссертация посвящена исследованию движения небесного тела в центральном гравитационном поле при наличии добавочного возмущающего ускорения относительно простого вида. Небесным телом может быть астероид, комета, естественный или искусственный спутник планеты.

Актуальность темы исследования. В последнее десятилетие заметен всплеск интересов научной общественности к эволюции движений малых тел Солнечной системы с учетом негравитационных эффектов, в особенности к эволюции траекторий астероидов и комет, сближающихся с Землей и с другими большими планетами; к использованию в космонавтике двигателей малой тяги. Указанные задачи, на первый взгляд разнородные, объединяет похожий набор действующих на небесное тело сил: основная - притяжение к центральному телу - и возмущающая. Направление последней во многих случаях, хотя и не всегда, постоянно или меняется в небольших пределах в подходящей системе отсчета, а модуль постоянен или изменяется по простому закону. Представляется целесообразным рассмотреть детально соответствующую модельную задачу, поскольку многочисленные работы, некоторые из которых упомянуты нами ниже, решают различными методами частные случаи задачи одного притягивающего центра с дополнительным ускорением для достижения поставленных целей. Полученные различными авторами результаты разрозненны, требуют обобщения и систематизации. Поэтому мы считаем актуальным всестороннее исследование этой задачи в случае вектора возмущающей силы, постоянного по модулю и направлению в различных вращающихся системах координат.

Степень разработанности темы исследования. В современной небесной механике известно несколько модельных задач, интегрируемых в квадратурах. В частности, задача двух неподвижных центров и ее предельный вариант – задача одного притягивающего центра с дополнительным ускорением, постоянным как вектор в инерциальном пространстве.

В астрономии широко используются три координатные системы с общим началом, но разными направлениями осей: основная – инерциальная декартова $\mathcal{O}$ с неподвижными ортами $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, и две сопутствующие, вращающиеся относительно основной. Орты первой сопутствующей системы $\mathcal{O}_1$ направлены по радиусу-вектору, трансверсали и бинормали. Орты второй сопутствующей системы $\mathcal{O}_2$ направлены по вектору скорости, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали. Обозначим проекции возмущающего ускорения на оси инерциальной системы отсчета P_1, P_2, P_3, на оси $\mathcal{O}_1$ – S, T, W, на оси $\mathcal{O}_2$ – $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$, W.

Как правило, исследование движения малого тела $\mathcal{A}$ под действием силы притяжения к точке $\mathcal{S}$ и возмущающей силы $\mathbf{P}$ в инерциальной системе отсчета с началом в $\mathcal{S}$ начинается с записи дифференциального уравнения вида:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\varkappa^2}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{P},$$

где $\mathbf{r} = \overline{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ — радиус-вектор, $\varkappa^2 = Gm_0$ — гравитационный параметр, G — постоянная тяготения, точки означают производные по времени. Далее осуществляется переход к оскулирующим элементам и компонентам возмущающей силы на оси какой-либо системы координат, после чего выводится система соответствующих уравнений возмущенного движения типа Эйлера, которые устанавливают зависимость между оскулирующими элементами, их производными по времени, то есть скоростями изменения оскулирующих элементов, и компонентами возмущающего ускорения. Эти уравнения приводятся в руководствах и учебных пособиях по небесной механике, но лишь в специфических системах отсчета и для ограниченного набора элементов.

Классические уравнения Эйлера жестко привязаны к определенной системе отсчета, вращающейся в трехмерном пространстве с переменным, зависящим от положения и скорости, вектором угловой скорости, благодаря чему уравнения имеют относительно простой вид. Однако в век информатики простота уравнений отходит на второй план. Полезно иметь универсальные уравнения движения, инвариантные относительно выбора системы координат, для наиболее часто используемых элементов. Это возможно лишь частично, поскольку некоторые элементы сами зависят от ориентации системы координат. Поэтому целесообразно разбить оскулирующие элементы на два класса: инвариантные, такие как вектор площадей и его модуль, фокальный параметр, постоянная энергии, большая полуось, среднее движение, эксцентриситет, средняя аномалия, истинная аномалия, эксцентрическая аномалия, эпоха перицентра, средняя аномалия эпохи, и зависящие от выбора основной плоскости, например, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перицентра, аргумент широты.

Попытка унифицирования уравнений типа Эйлера встретилась нам только в книге [12]. Здесь получены инвариантные уравнения для параметра орбиты, эксцентриситета, большой полуоси и эпохи перицентра, в которых справа встречаются скалярные произведения вектора площадей и его производной по времени, вектора Лапласа и его производной по времени, а также их линейные комбинации. Уравнения для полуинвариантных элементов (наклона, долготы восходящего узла, аргумента перицентра) выражены здесь через скалярное произведение производной по времени от вектора площадей и орта $\mathbf{k}$, смешанное произведение вектора площадей, его производной по времени и орта $\mathbf{k}$, скалярное произведение единичного вектора, направленного по линии узлов от начала координат $\mathcal{S}$ в восходящий узел, и производной по времени от вектора Лапласа. Производная по времени от вектора площадей равна векторному произведению радиуса-вектора и вектора возмущающего ускорения, а дифференцирование интеграла Лапласа в векторной форме дает производную по времени от вектора Лапласа. С использованием этих соотношений в [12] выводятся уравнения движения типа Эйлера в стандартной форме для орбитальной системы координат $\mathcal{O}_1$. Уравнения для тех же элементов в $\mathcal{O}_2$ приводятся без вывода и указывается, что их можно легко получить из универсальных уравнений.

Уже в работах Лагранжа (1760) упоминается, что предельный случай задачи двух неподвижных центров интегрируется в квадратурах. Тем не менее в XVIII–XIX веках эта задача не получила должного внимания, поскольку тогда для нее не было практического применения. Развитие космонавтики, разработка двигателей малой тяги возродили полузабытую задачу к новой жизни. В 60-х-70-х годах прошлого века предельный вариант задачи двух неподвижных центров интенсивно исследовался в работах В.В.Белецкого [1], В.Г.Дёмина [3], А.Л.Куницына [4] и применялся ими в небесной механике и космодинамике.

Уравнения движения значительно упрощаются, если обнулить какие-либо компоненты возмущающего ускорения, наклон или эксцентриситет. Так, В.В.Белецкий [1] рассмотрел движение в инерциальной системе координат ($P_1 \neq 0$, $P_2 = P_3 = 0$) и нашел решение в квадратурах с помощью перехода к параболическим координатам. Для случая плоского движения он описал возможные траектории движения малого тела. Лантоне [16] повторил решение плоской задачи и нашел новые типы траекторий, упущенные Белецким, а затем обобщил двумерный случай на пространственный при $P_1 = P_2 = 0$, $P_3 \neq 0$. В [14] рассматривается переход космического аппарата между круговыми орбитами под действием малой тяги при условии постоянного нулевого эксцентриситета. В [19] исследуется плоская задача вывода космического аппарата со спутниковой круговой орбиты под действием тяги, направленной либо вдоль радиуса-вектора ($S \neq 0$), либо по трансверсали ($T \neq 0$). Более современные результаты по этой проблеме получены в работах Беттина [6] и Болтца [7, 8].

Многочисленные исследования показали, что, если целью является увеличение большой полуоси орбиты, например, в случае межпланетного перелета, оптимальным является тангенциальное ускорение $\mathfrak{T}$. Так, в [18] изучается переход между компланарными круговыми орбитами под действием $\mathfrak{T}$. В [5] исследуется плоский спиральный разгон космического аппарата при $\mathfrak{T} = \mathrm{const}$.

Для получения аналитического решения дифференциальных уравнений могут применяться различные приближенные методы. В работах [11, 10, 9, 20] используется следующий приём: вариация быстрой переменной аппроксимируется отбрасыванием слагаемых, содержащих компоненты ускорения, и в уравнениях для медленных переменных осуществляется переход от дифференцирования по времени к дифференцированию по быстрой переменной. Эффективным методом исследования эволюции орбит на космогонических временах является осреднение по быстрым переменным. В случае задачи одного притягивающего центра с дополнительным ускорением этот метод позволяет исследовать вековое изменение траектории под влиянием добавочного возмущения, но до сих пор применяется он редко и только в частных случаях. Например, в [15] используется метод осреднения для вычисления аналитического решения для восходящей орбиты при постоянном тангенциальном ускорении в присутствии земной тени. В [17] в результате аппроксимирующих преобразований осредненных вариационных уравнений движения получены осредненные по времени скорости изменения орбитальной энергии и эксцентриситета под действием только $\mathfrak{T}$, а затем найдено выражение производной энергии по эксцентриситету. В [13] компоненты возмущающего ускорения S, T, W представлены в виде рядов Фурье по эксцентрической аномалии, затем уравнения Гаусса осреднены.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что задача одного притягивающего центра с дополнительным ускорением до сих пор разработана недостаточно, незаслуженно редко для получения аналитического решения применяется метод осреднения.

Цели и задачи работы. Основной целью диссертации является получение уравнений движения малого тела в центральном поле тяготения под действием добавочного постоянного по модулю возмущающего ускорения, применение к ним осредняющего преобразования, решение уравнений в новых переменных для ряда частных случаев, применение полученных результатов к движению астероида со встроенным двигателем малой тяги и движению искусственного спутника под действием малой возмущающей силы. Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- Вывести универсальные уравнения типа Эйлера для часто используемых оскулирующих элементов орбиты, пригодные для любой системы координат, и уравнения типа Эйлера для трех наиболее употребительных систем координат — основной (инерциальной) и двух сопутствующих.

- Рассмотреть шесть конкретных уравнений, отвечающих трем вышеуказанным системам отсчета при постоянном модуле возмущающего ускорения, и выполнить осредняющее преобразование уравнений движения типа Эйлера в первом порядке по малому параметру, соответствующему отношению возмущающего ускорения к основному.

- Получить норму разности оскулирующих и средних элементов.
- Исследовать осредненные уравнения и найти все существующие интегралы движения. Если их окажется достаточное количество, то построить фазовый портрет системы и тем самым найти все качественно различные траектории. При недостаточном количестве интегралов движения выявить качественные следствия из интегралов движения.
- Применить полученные результаты к движению астероида и ИСЗ.

Научная новизна.

- Выведены универсальные уравнения типа Эйлера для пятнадцати часто используемых оскулирующих элементов орбиты, получены уравнения типа Эйлера для трех наиболее употребительных систем координат – основной (инерциальной) и двух сопутствующих. В такой общей постановке ранее подобные работы не проводились. Уравнения типа Эйлера изменения оскулирующих элементов известны давно и даже предпринимались отдельные попытки записать их в универсальной форме. Однако представление правых частей через инвариантные (вектор площадей, радиус-вектор, вектор скорости, вектор возмущающего ускорения), а для связанных с ориентацией элементов - полуинвариантные (орт $\mathbf{k}$) величины получено впервые. Их основное достоинство - возможность применения в любых системах отсчета, а также удобство программирования в системах компьютерной алгебры, поскольку во всех уравнениях, кроме вектора площадей, встречаются всего лишь **три** соотношения указанных величин.

- Выведены в первом приближении по малому параметру осредненные уравнения движения в новых переменных и функции замены переменных. Соответствующие функции найдены в замкнутой форме, без использования разложений по степеням эксцентриситета, или наклона, или отношения радиуса центрального тела к большой полуоси. Ранее метод осреднения для решения подобных задач применялся только в частном случае – $\mathfrak{T} \neq 0$, остальные компоненты дополнительного ускорения полагались равными нулю перед процедурой осреднения.

- Получены аналитические решения осредненных уравнений движения в поле возмущающего ускорения, постоянного в $\mathcal{O}_1$, в ряде частных случаев. Эта задача никем ранее не рассматривалась, так что все результаты здесь – новые.

Теоретическая и практическая значимость работы. Множество промежуточных результатов диссертации обладает собственной научной и практической ценностью.

В первой главе приведены дифференциальные уравнения для 15 наиболее популярных элементов орбиты в универсальной форме, из которых можно легко вывести выражения для шести независимых переменных в нужной системе координат, выразив скалярные и смешанные произведения через оскулирующие элементы и проекции вектора возмущающего ускорения на оси выбранной системы отсчета. Далее из универсальных уравнений получены скорости изменения тех же 15 элементов в трех наиболее часто употребляемых системах координат.

Во второй главе выведены уравнения движения в средних элементах и функции замены переменных для основной и двух сопутствующих систем координат.

В третьей главе получена формула для вычисления нормы разности оскулирующих и средних элементов, позволяющая оценить влияние периодических возмущений, а также величину погрешности положения малого тела, возникающую за счет простой замены оскулирующих элементов средними. Оказалось, что среднеквадратичная норма в $\mathcal{O}_1$ зависит только от компонент вектора возмущающего ускорения, большой полуоси и эксцентриситета оскулирующего эллипса.

В четвертой главе рассмотрены решения уравнений движения в средних элементах для $\mathcal{O}_1$ при $e = 0$ (круговые орбиты) и в случаях, если хотя бы одна из компонент возмущающего ускорения равна нулю. В этих частных случаях система интегрируется в квадратурах. На практике можно свести многие задачи к такому виду при надлежащем выборе системы отсчета. Для первой сопутствующей системы координат осредненные уравнения движения решены методом рядов Ли по степеням времени.

Приведенные выше результаты применены к задачам изменения орбиты сближающегося с Землей астероида (АСЗ), снабженного двигателем малой тяги, и спутника-ретранслятора. Получена норма разности оскулирующих и средних элементов для нескольких малых тел и ИСЗ. Оценен временной интервал, необходимый для существенного изменения элементов орбиты АСЗ при малом возмущении. Оказалось, что двигатель малой тяги, действительно, может быть эффективен для предотвращения астероидно-кометной опасности, особенно в отношении тел диаметром до 100 м.

Методология и методы исследования. Вывод универсальных уравнений типа Эйлера, пригодных для любой системы координат, и уравнений типа Эйлера для конкретной системы координат выполнен аналитически методами аналитической геометрии и векторного анализа. Осредняющее преобразование уравнений движения типа Эйлера осуществлено методом осреднения Крылова–Боголюбова. Средние значения функций, встречающихся при осреднении уравнений типа Эйлера, и неопределенные интегралы, необходимые для нахождения функций замены переменных, а также решения частных случаев осредненных уравнений движения для $\mathcal{O}_1$ найдены аналитически методами дифференциального и интегрального исчисления. Радиус сходимости рядов, полученных в главе 2, найден методами теории функций комплексной переменной.

Положения, выносимые на защиту.

- Вывод универсальных уравнений типа Эйлера для пятнадцати оскулирующих элементов (из которых 6 независимых). Для независящих от ориентации системы отсчета элементов правые части выражены через инвариантные относительно группы вращений трехмерного пространства величины. Для зависящих от ориентации элементов (наклон орбиты к основной плоскости, долгота узла, аргумент перицентра) правые части выражены через величины, инвариантные относительно группы вращений плоскости. Явные выражения через элементы получены для трех основных в небесной механике систем отсчета.

- Выполнение процедуры осреднения в основной и двух сопутствующих системах отсчета. Получены в замкнутой форме как правые части осредненных уравнений, так и функции замены переменных. В $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_1$ все функции элементарны. В $\mathcal{O}_2$ правые части осредненных уравнений содержат также полные эллиптические интегралы. Функции замены медленных переменных содержат также неполные эллиптические интегралы. Соответствующие функции для быстрой переменной содержат также интегралы от неполных эллиптических интегралов. Средствами компьютерной алгебры для них получены представления в виде рядов по степеням эксцентриситета. Найден их радиус сходимости, оказавшийся равным единице.

- Интегрирование осредненных уравнений. В $\mathcal{O}_1$ найдены решения уравнений движения в средних элементах при $e = 0$ и в случаях, если хотя бы одна из компонент возмущающего ускорения равна нулю. В этих частных случаях система интегрируется в квадратурах. Для $\mathcal{O}_1$ осредненные уравнения движения решены методом рядов Ли по степеням времени.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты, полученные в ходе данного исследования, докладывались на семинарах Кафедры небесной механики СПбГУ, а также на научных конференциях: на международной конференции «Околоземная астрономия-2013» (Туапсинский р-н Краснодарского края, п. Агой, 7–11 окт. 2013 г.); на 38-х Академических чтениях по космонавтике (г. Москва, РАН, 28–31 янв. 2014 г.); на 43-й и 44-й международных студенческих научных конференциях «Физика космоса» (г. Екатеринбург, 2014–2015 гг.); на 1-й всероссийской научной конференции «Экология и космос» им. акад. К.Я.Кондратьева (г. Санкт-Петербург, 7 февраля 2014 г.).

Достоверность результатов диссертации обеспечена корректным применением апробированных методов математики и небесной механики, а также совпадением с результатами исследований других авторов в сопоставимых случаях.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы (95 наименований) и 3 приложений. Общий объем диссертации — 191 страница, из них 16 страниц приложений. Работа содержит 9 рисунков и 8 таблиц.

Первая глава «Уравнения движения типа Эйлера» содержит в себе вывод универсальных уравнений типа Эйлера, пригодных для любой системы координат, и уравнений типа Эйлера для трех наиболее употребительных систем координат — основной (инерциальной) и двух сопутствующих.

В настоящей работе получены универсальные уравнения движения типа Эйлера для 15 часто используемых элементов орбиты — 11 инвариантных (кроме средней аномалии эпохи) и 4 полуинвариантных. В качестве опорных выбраны вектор площадей $\mathbf{c}$, радиус-вектор $\mathbf{r}$, вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}$ и вектор возмущающего ускорения $\mathbf{P}$, что, на наш взгляд, является более удачным выбором, чем вектор площадей и вектор Лапласа, принятые в [12], так как у нас результирующие уравнения имеют законченный и удобный для дальнейшего использования вид. Так, скорости изменения всех инвариантных элементов, кроме вектора площадей, записаны в виде линейной комбинации **двух** величин – скалярного произведения вектора скорости $\dot{\mathbf{r}}$ малого тела и вектора $\mathbf{P}$, и смешанного произведения векторов $\mathbf{c}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{P}$. Производная по времени от вектора площадей представляет собой векторное произведение $\mathbf{r}$ и $\mathbf{P}$. В выражения для скоростей изменения полуинвариантных элементов добавится третья величина – смешанное произведение векторов **r**, **P** и орта **k** оси Z инерциальной декартовой системы координат. Зависимость от этих **трех** величин по-прежнему линейна. В случае необходимости из этих 15 выражений можно легко вывести уравнения для новых элементов. Например, при исследовании почти круговых спутниковых орбит целесообразно вместо эксцентриситета e и аргумента перицентра σ использовать их комбинации $\epsilon_1 = e\sin\sigma, \epsilon_2 = e\cos\sigma$ [2]. Новые элементы являются функциями старых, поэтому $\dot\epsilon_1 = \sin\sigma\dot e + e\cos\sigma\dot\sigma$, $\dot\epsilon_2 = \cos\sigma\dot e - e\sin\sigma\dot\sigma$. Подставив сюда уже известные уравнения для $\dot e, \dot\sigma$, получим универсальные уравнения для новых элементов.

При выборе вращающейся системы отсчета из универсальных выражений можно легко получить уравнения возмущенного движения, выразив скалярные и смешанные произведения через оскулирующие элементы и проекции вектора возмущающего ускорения на оси выбранной системы отсчета. В первой главе подобная операция проведена для 15 элементов орбиты в трех системах координат. Все уравнения получены в двух вариантах — выраженными через эксцентрическую и через истинную аномалию.

Во *второй главе* «Метод осреднения» рассмотрены системы уравнений для шести независимых элементов орбиты, отвечающих трем вышеуказанным системам отсчета при постоянном модуле возмущающего ускорения, и выполнено методом Крылова-Боголюбова осредняющее преобразование уравнений движения типа Эйлера в первом порядке по малому параметру, соответствующему отношению возмущающего ускорения к основному. Наличие лишь одной быстрой переменной предотвращает появление малых знаменателей. Мы ограничились возмущениями первого порядка, поскольку этого достаточно для подавляющего числа астрономических приложений. В этом случае осредняющее преобразование может быть выполнено в замкнутом виде, без разложений по степеням эксцентриситета или наклона, или отношения радиуса центрального тела к большой полуоси. В результате получены уравнения движения в средних элементах и функции замены переменных для основной и двух сопутствующих систем координат. Так как для $\mathcal{O}_2$ в формулах замены переменных появляются неполные эллиптические интегралы первого и второго рода, и даже интегралы от неполных эллиптических интегралов, то кроме замкнутых формул получены их разложения по степеням эксцентриситета. Радиус сходимости этих рядов равен единице.

В *третьей главе* «Разность положений на оскулирующей и средней орбите для системы $\mathcal{O}_1$» получена формула для вычисления нормы разности оскулирующих и средних элементов:

$$\|\rho\|^2 = \frac{a^6}{32\varkappa^4}(A_1S^2 + A_2T^2 + A_3W^2),$$

где $A_1 = 32 + 276e^2 - 255e^4 + 50e^6$, $A_2 = 512 - 99e^2 - 385e^4 - e^6$, $A_3 = 32 - 15e^2 + 10e^4$. Видим, что среднеквадратичная норма $\|\rho\|^2$ в $\mathcal{O}_1$ зависит только от компонент вектора возмущающего ускорения, большой полуоси и эксцентриситета оскулирующего эллипса! От ориентации орбиты и положения точки $\mathcal{A}$ на ней $\|\rho\|^2$ не зависит.

Четвертая глава «Решение осредненных уравнений для системы $\mathcal{O}_1$» посвящена решению уравнений движения в средних элементах для первой сопутствующей системы координат. При $e = 0$ и в случаях, если хотя бы одна из компонент возмущающего ускорения равна нулю, система проинтегрирована в квадратурах и построен ее фазовый портрет. Для $\mathcal{O}_1$ осредненные уравнения движения решены методом рядов Ли по степеням времени.

В *пятой главе* «Применение к задаче изменения орбиты астероида или ИСЗ» рассматриваются приложения модельной задачи к изменению орбиты АСЗ, снабженного двигателем малой тяги, и спутника-ретранслятора.

Норма разности оскулирующих и средних элементов вычислена для нескольких малых тел и ИСЗ и составила $\sim 10^{-8}$ величины радиуса-вектора. Следовательно для выбранных объектов периодическими возмущениями можно пренебречь, принимая во внимание лишь вековое движение, которое дается осредненными уравнениями, полученными в главе 2.

Оценен временной интервал, необходимый для существенного изменения элементов орбиты АСЗ или ИСЗ при малом возмущении. Например, если придать астероиду 99 942 Апофис дополнительное возмущающее ускорение $T = 1.64 \cdot 10^{-9}$ м с$^{-2}$, что соответствует тяге 100 Н, то через год такого воздействия малое тело сместится от своего невозмущенного положения на 2.46 Мм. Таким образом, орбиту опасного астероида можно изменить с помощью батареи электрореактивных двигателей для избежания столкновения за приемлемое время (от нескольких месяцев до нескольких лет в зависимости от величины тяги и массы тела). В случае спутника-ретранслятора воздействие малой тяги в 20 мН, направленной по трансверсали, в течение суток приведет к увеличению большой полуоси на 432 км.

В *приложение* вынесены вспомогательные математические предложения и методы, используемые в данной работе, но напрямую не относящиеся к теме диссертации.

Заключение. Рассмотрена задача о движении точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения **P**. Вектор **P** считается постоянным в одной из трех наиболее употребительных в астрономии систем отсчета с общим началом $\mathcal{S}$, но разными направлениями осей: основная инерциальная и две сопутствующие.

Выведены уравнения типа Эйлера изменения оскулирующих элементов в форме, не зависящей от системы отсчета. Элементы были разбиты на две группы: инвариантные относительно группы вращений трехмерного пространства, и инвариантные только относительно группы вращений основной плоскости. Это позволило легко получить уравнения типа Эйлера в любой из рассмотренных систем отсчета.

Для решения уравнений был применен метод осреднения. Для трех систем отсчета были получены как формулы замены переменных (от оскулирующих к средним и обратно), так и правые части уравнений движения в средних элементах с точностью до первой степени малого параметра, соответствующего отношению возмущающего ускорения к основному. В $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_1$ все соотношения оказались элементарными. В $\mathcal{O}_2$ правые части уравнений движения содержат полные эллиптические интегралы, а формулы замены переменных — также неполные эллиптические интегралы и интегралы от них. Их можно избежать, раскладывая соответствующие функции в ряды по степеням эксцентриситета, что и было сделано. Доказано, что радиус сходимости этих рядов равен единице.

Осредненные уравнения движения, хотя и неинтегрируемы в квадратурах, но близки к таковым. Для $\mathcal{O}_1$ при $e = 0$ (круговые орбиты) и в случаях, если хотя бы одна из компонент возмущающего ускорения равна нулю, система интегрируется в квадратурах. Найдены интегралы движения и построен фазовый портрет системы. Осредненные уравнения движения были решены также методом рядов Ли по степеням времени.

В качестве приложения показано, что двигатель малой тяги может быть эффективен для предотвращения астероидно-кометной опасности, а также для корректировки орбит искусственных спутников.

В будущем мы намереваемся расширить результаты данной диссертации, выполнив аналогичные вычисления при возмущающем ускорении, обратно пропорциональном квадрату расстояния от притягивающего центра, и применить результаты к движению астероида или ядра кометы под действием негравитационных эффектов, включая эффект Ярковского-Радзиевского.

Публикации по результатам работы. Основные результаты работы опубликованы в следующих статьях в рецензируемых журналах:

- *Санникова Т.Н., Холшевников К.В.* Уравнения движения в оскулирующих элементах в различных системах отсчета // Вестник СПбГУ, сер. 1,

вып. 4, 2013, с. 134–145.

- *Санникова Т.Н., Холшевников К.В., Чечеткин В.М.* Применение метода осреднения Гаусса к анализу возможности увода небесного тела // Экологич. вестн. научн. центров Черноморск. экон. сотрудн., том 2, №. 4, 2013, с. 144–147.

- *Санникова Т.Н.* Осредненные уравнения движения в центральном поле при постоянном по модулю возмущающем ускорении // Вестник СПбГУ, сер. 1, том 1(59), вып. 1, 2014, с. 171–179.

- *Холшевников К.В., Санникова Т.Н., Джазмати М.С.* К выводу уравнений движения в оскулирующих элементах // Вестник СПбГУ, сер. 1, том 1(59), вып. 2, 2014, с. 160–164.

- *Холшевников К.В., Санникова Т.Н.* Осредненные уравнения движения при постоянном в различных системах отсчета возмущающем ускорении // Астрономический Журнал, том 91, № 12, 2014, с. 1060–1068.

- *Санникова Т.Н., Холшевников К.В.* Движение в центральном поле при возмущающем ускорении, постоянном в сопровождающей системе отсчета, связанной с радиусом-вектором // Астрономический Журнал, том 92, № 8, 2015, с. 681–692.

В совместных статьях Санниковой Т.Н. принадлежит вывод инвариантных и полуинвариантных уравнений типа Эйлера, а затем получение из них дифференциальных уравнений в трех системах отсчета для 15 элементов орбиты, выполнение процедуры осреднения, вывод уравнений движения в осредненных переменных и функций замены переменных для трех систем координат, вывод нормы разности оскулирующих и средних элементов, решение в квадратурах системы осредненных уравнений в $\mathcal{O}_1$ для нескольких частных случаев.

Доклады по результатам работы опубликованы в трудах конференций:

- *Холшевников К.В., Санникова Т.Н.* Движение с постоянным в различных системах отсчета возмущающим ускорением // Труды 43-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 3 — 7 февраля 2014 г, изд. УрФУ, с. 129–146.

- *Холшевников К.В., Санникова Т.Н., Батмунх Н.* Связь возмущений координат и элементов орбиты // Труды 44-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 2 — 6 февраля 2015 г, изд. УрФУ, с. 127–139.

Литература

[1] *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. — М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 432 с.

[2] *Бордовицына Т. В., Авдюшев В. А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: Учеб. пособие. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. — 178 с.

[3] *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. — НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2010. — 420 с.

[4] *Куницын А. Л.* Качественное исследование движений в одном предельном варианте задачи двух неподвижных центров // *Тр. Ун-та дружбы нар. им. П. Лумумбы. Сер. Теор. мех.* — 1966. — Т. 17, № 4. — С. 32–52.

[5] *Охоцимский Д. Е.* Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения // *Космич. исслед.* — 1964. — Т. 2, № 6. — С. 817–842.

[6] *Battin R. H.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. Revised Edition. — AIAA educ. ser. Reston, Virginia, 1999. — 800 p.

[7] *Boltz F. W.* Orbital motion under continuous radial thrust // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* — 1991. — Vol. 14, No. 3. — Pp. 667–670.

[8] *Boltz F. W.* Orbital motion under continuous tangential thrust // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* — 1992. — Vol. 15, No. 6. — Pp. 1503–1507.

[9] *Colombo C., Vasile M., Radice G.* Semi-analytical solution for the optimal low-thrust deflection of near-earth objects // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* — 2009. — Vol. 32, No. 3. — Pp. 796–809.

[10] *Gao Y.* Low-thrust interplanetary transfers, including escape and capture trajectories // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* — 2007. — Vol. 30, No. 6. — Pp. 1814–1818.

[11] *Gao Y., Kluever C. A.* Analytic orbital averaging technique for computing tangential-thrust trajectories // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* — 2005. — Vol. 28, No. 6. — Pp. 1320–1323.

[12] *Gerhard Beutler*. Methods of Celestial Mechanics. Volume I: Physical, Mathematical, and Numerical Principles. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. — 464 p.

[13] *Hudson J. S., Scheeres D. J.* Reduction of low-thrust continuous controls for trajectory dynamics // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* — 2009. — Vol. 32, No. 3. — Pp. 780–787.

[14] *Kechichian J. A.* Low-thrust eccentricity-constrained orbit raising // *Journal of Spacecraft and Rockets.* — 1998. — Vol. 35, No. 3. — Pp. 327–335.

[15] *Kechichian J. A.* Orbit raising with low-thrust tangential acceleration in presence of Earth shadow // *Journal of Spacecraft and Rockets.* — 1998. — Vol. 35, No. 4. — Pp. 516–525.

[16] *Lantoine G., Russell R. P.* Complete closed-form solutions of the Stark problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* — 2011. — Vol. 109, No. 4. — Pp. 333–366.

[17] *Petropoulos A. E.* Some analytic integrals of the averaged variational equations for a thrusting spacecraft // *Interplanetary Network Progress Report.* — 2002. — Vol. 150. — Pp. 1–29.

[18] *Rodriguez E.* Method for determining steering programs for low thrust interplanetary vehicles // *ARS Journal.* — 1959. — Vol. 29, No. 10. — Pp. 783–788.

[19] *Tsien H. S.* Take-off from satellite orbit // *Journal of the American Rocket Society.* — 1953. — Vol. 23, No. 4. — Pp. 233–236.

[20] *Zuiani F., Vasile M., Palmas A., Avanzini G.* Direct transcription of low-thrust trajectories with finite trajectory elements // *Acta Astronautica.* — 2012. — Vol. 72. — Pp. 108–120.