САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Полуянов Сергей Викторович

Моделирование оценок погрешностей аппроксимации сплайнами в различных нормах

Специальность 01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2016

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор БУРОВА Ирина Герасимовна.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ВАГЕР Борис Георгиевич (Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет), профессор кафедры прикладной математики и информатики;
	доктор физико-математических наук, профессор ЛУЦЕНКО Михаил Михайлович (Петербургский государственный университет путей сообщений Императора Александра I), профессор кафедры «Математика и моделирование».
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).

Защита состоится «___» ___________ 2016 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199004, Санкт-Петербург, 10-я линия, д. 33, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте:
https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/6wtqdY7JP6.pdf

Автореферат разослан «___» ___________ 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Чурин Ю.В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Сплайны широко используются при решении различных математических задач. Считается, что первым упоминанием о сплайне как о гладкой, кусочно-заданной функции, является статья Исаака Шёнберга 1946 года, в которой был введён термин B-сплайн. В 50-х – 70-х годах происходило бурное развитие теории сплайновой интерполяции. Работая в автомобильной промышленности значительный вклад внесли Поль де Кастельжо, разработавший во время работы в Ситроен в 1959 году алгоритм построения и деления кривой Безье, Пьер Безье, работавший в Рено, Гаретт Биркгофф, Карл де Бор и Пол Гарабедиан в Дженерал Моторс. Всем известны монографии Алберга Дж., Нилсона Э., Уолша Дж., Завьялова Ю.С., Квасова Б.И., Мирошниченко В.Л., Стечкина С.Б., Субботина Ю.Н. Большой вклад внесли Михлин С.Г., Малоземов В.Н., Демьянович Ю.К. и другие математики. Квасовым Б.И. рассмотрена изогеометрическая интерполяция и аппроксимация, сохраняющая различные свойства формы исходных кривых и поверхностей.

Интегро-дифференциальные полиномиальные сплайны предложены профессором Московского авиационного института Киреевым В.И. Предложенные им параболические интегро-дифференциальные сплайны оказались удобным средством для сглаживания данных, полученных экспериментальным путем.

Представилось целесообразным построить и исследовать свойства интегро-дифференциальных более высокого порядка аппроксимации, а также построить тригонометрические сплайны с такими же свойствами.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью данной диссертационной работы является построение полиномиальных и тригонометрических интегро-дифференциальных сплайновых аппроксимаций функций одной и двух переменных, получение оценок погрешностей аппроксимаций, составление и отладка программ на языке MAPLE для получения результатов численных экспериментов, и визуализации полученных приближений.

В диссертационной работе решались следующие задачи:

1. Построение полиномиальных локальных интерполяционных непрерывно дифференцируемых центральных базисных сплайнов, обеспечивающих аппроксимацию пятого порядка, получение оценок погрешностей аппроксимации функций с помощью полученных базисных сплайнов.

2. Построение полиномиальных локальных интерполяционных непрерывно дифференцируемых левосторонних базисных сплайнов, обеспечивающих аппроксимацию пятого порядка, получение оценок погрешностей аппроксимации функций с помощью полученных базисных сплайнов.

3. Построение полиномиальных дважды непрерывно дифференцируемых приближений функций с применением базисных сплайнов пятого порядка первой высоты, получение оценок погрешностей аппроксимации функций с помощью полученных базисных сплайнов.

4. Построение и исследование среднеквадратического приближения с применением построенных базисных сплайнов.

5. Составление программ и проведение численных экспериментов, а также визуализации приближений и погрешностей приближений функций одной переменной.

6. Построение интегро-дифференциальных базисных функций двух переменных, разрывных приближений функций сплайнами двух переменных, а также непрерывных интегро-дифференциальных приближений сплайнами двух переменных, получение оценок погрешностей, проведение численных экспериментов для сравнения теоретических и практических погрешностей приближений.

7. Построение интегро-дифференциальных приближений функций центральными и левосторонними полиномиальными и тригонометрическими сплайнами двух переменных с помощью тензорного произведения, проведение численных экспериментов, сравнение полиномиальных и тригонометрических приближений, разработка программ для визуализации результатов.

Положения, выносимые на защиту

1. Левосторонние и центральные полиномиальные и тригонометрические базисные интегро-дифференциальные сплайны первой высоты, обеспечивающие погрешность аппроксимации пятого порядка и сохраняющие количественные характеристики пространства (площади и объемы). Приближения функций строятся отдельно на каждом сеточном интервале. Для построения приближений используются значения функции и её первой производной в узлах сетки, а также значения интегралов от функции по сеточным интервалам.

2. Теоремы об оценках погрешностей сплайновых приближений функций и их первых двух производных на отдельном сеточном промежутке и на всем промежутке $[a, b]$.

3. Применение построенных интегро-дифференциальных сплайнов пятого порядка аппроксимации для построения среднеквадратического приближения.

4. Дважды непрерывно дифференцируемые приближения интегро-дифференциальными сплайнами пятого порядка первой высоты и оценка погрешности приближения.

5. Базисные интегро-дифференциальные сплайны функций двух переменных, оценки погрешности приближения. Методика построения непрерывного приближения функций двух переменных на основе этих базисных сплайнов, оценки погрешности приближения.

6. Приближение интегро-дифференциальными полиномиальными и тригонометрическими сплайнами функций двух переменных с помощью тензорного произведения.

Научная новизна

В работе построены локальные полиномиальные и тригонометрические базисные сплайны, такие, что исходная функция и построенное приближение дают одинаковые количественные характеристики пространства (площади и объемы). Аппроксимация функций строится с помощью линейной комбинации значений функции, ее производных в узлах сетки, интегралам по сеточным интервалам и предлагаемых базисных сплайнов. При этом погрешность аппроксимации имеет пятый порядок.

Личный вклад автора

Личный вклад автора состоит в выполнении исследований, изложенных в диссертационной работе, реализации алгоритмов построения предложенных аппроксимаций, проведении численных экспериментов, а также в оформлении результатов в виде статей и научных докладов.

Теоретическая и практическая значимость

В данной работе предлагаются интегро-дифференциальные сплайны для построения аппроксимаций функций одной и двух переменных. Впервые такой подход был предложен Киреевым В.И. Данный подход позволяет получаемым аппроксимациям удовлетворять условию консервативности, то есть сохранять интегральные свойства аппроксимируемых функций, что позволяет повышать качество аппроксимации при моделировании технических поверхностей за счёт сохранения равенств площадей и объёмов.

Полученные результаты могут быть использованы для аппроксимации функций, построения поверхностей, обработки числовых потоков.

Доклады и публикации по теме диссертационнной работы

На тему диссертационной работы выполнены публикации: [1, 2, 3, 4, 5, 6], из них [1, 2, 3] – в изданиях, индексируемых в реферативных базах Scopus и Web of Science, а также на тему диссертационной работы опубликован доклад [7].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографии и приложения. Общий объем диссертации составляет 106 страниц. В тексте работы содержится 16 таблиц и 55 рисунков. В библиографии работы содержится 113 наименований. В приложении приведён 1 листинг программы.

Основное содержание

В **первой главе** рассматривается построение непрерывно дифференцируемых базисных сплайнов, непрерывно дифференцируемого приближения функций с помощью линейной комбинации данных базисных сплайнов, значений функции и её первой производной в узлах сетки, а также значений интегралов от этой функции по сеточным интервалам.

Рассмотрим промежуток $[a, b]$, где a и b – вещественные числа. Возьмём натуральное число n и построим сетку узлов $\{x_j\}$ с шагом $h = \frac{(b-a)}{n}$. Пусть в узлах сетки $\{x_j\}$ заданы значения функции u, $u \in C^5[a, b]$, и ее первой производной, а также известны значения $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t)dt$. Рассмотрим на каждом $[x_k, x_{k+1}]$ приближение для $u(x)$ в виде:

$$\widetilde{u}(x) = u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ + u'(x_k)\omega_{k,1}(x) + u'(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t)dt\right) \omega_k^{<1>}(x), \quad (1)$$

где $\omega_{k,0}(x), \omega_{k+1,0}(x), \omega_{k,1}(x), \omega_{k+1,1}(x), \omega_k^{<1>}(x)$, $supp\, \omega_{k,\alpha} = [x_{k-1}, x_{k+1}]$, $\alpha = 0, 1$, $supp\, \omega_k^{<1>} = [x_k, x_{k+1}]$, определяем из условий

$$\widetilde{u}(x) = u(x) \text{ при } u(x) = x^i, i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Решая эту систему уравнений, получаем формулы базисных сплайнов при $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$\omega_{k,0}(x) = (5x + h - 5x_k)(-3x + h + 3x_k)(x_k + h - x)^2/h^4,$$
$$\omega_{k+1,0}(x) = -(-x_k + x)^2(-3x + 3x_k + 2h)(-5x + 5x_k + 6h)/h^4,$$
$$\omega_k^{<1>}(x) = 30(-x_k + x)^2(x_k + h - x)^2/h^5,$$
$$\omega_{k,1}(x) = (-x_k + x)(2h - 5x + 5x_k)(x_k + h - x)^2/(2h^3),$$
$$\omega_{k+1,1}(x) = (-x_k + x)^2(-5x + 3h + 5x_k)(x_k + h - x)/(2h^3).$$

Аппроксимации вида (1) будем называть центральными.

Доказана лемма об оценке погрешности приближения функции, а также её первой и второй производных.

Лемма 1. *Пусть функция $u \in C^{(5)}[x_k, x_{k+1}]$. Тогда при $x \in [x_k, x_{k+1}]$ выполня-*

ются соотношения:

$$|u(x)-\widetilde{u}(x)| \le h^5 K_0 \|u^{(5)}\|_{[x_k,x_{k+1}]},\ K_0 = 0.02,$$

$$|u'(x)-\widetilde{u}'(x)| \le h^4 K_1 \|u^{(5)}\|_{[x_k,x_{k+1}]},\ K_1 = 0.125,$$

а при $x \in [x_k, x_{k+1})$*:*

$$|u''(x)-\widetilde{u}''(x)| \le h^3 K_2 \|u^{(5)}\|_{[x_k,x_{k+1}]},\ K_2 = 0.8.$$

Следствие. Введем функцию $\widetilde{U}(x)$, $x \in [a,b]$, связанную с $\widetilde{u}(x)$ соотношением $\widetilde{U}(x) = \widetilde{u}(x)$, $\|f\|_{[a,b)} = \sup_{[a,b)} |f|$. Имеем

$$\begin{array}{rcl}
\|\widetilde{U} - u\|_{[a,b]} & \le & K_0 h^5 \|u^{(5)}\|_{[a,b]}, \\
\|\widetilde{U}' - u'\|_{[a,b]} & \le & K_1 h^4 \|u^{(5)}\|_{[a,b]}, \\
\|\widetilde{U}'' - u''\|_{[a,b)} & \le & K_2 h^3 \|u^{(5)}\|_{[a,b]},
\end{array}$$

Даются оценки погрешностей аппроксимации с помощью центральных полиномиальных сплайнов в L_2:

$$\sqrt{\int_{x_j}^{x_{j+1}} (\tilde{u}(x)-u(x))^2 dx} \le h^5 K \sqrt{\int_{x_j}^{x_{j+1}} |u^{(5)}(t)|^2 dt} = h^5 K \|u^{(5)}\|_{L_2[x_j,x_{j+1}]},$$

где $K = 0.0374$.

Далее строится дважды непрерывно дифференцируемое приближение на промежутке [a,b]: на каждом $[x_k, x_{k+1})$ приближение для $u(x)$ берем в виде

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{u}}_k(x) = u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\
+ C_k \omega_{k,1}(x) + C_{k+1}\omega_{k+1,1}(x) + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t)dt \right) \omega_k^{<1>}(x),
\end{aligned}$$

где коэффициенты C_k являются решением системы:

$$C_{k-1} - 6C_k + C_{k+1} = f_k,$$

$$f_k = 8(u_{k+1} - u_{k-1})/h + 20\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(t)dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t)dt\right)/h^2,$$
$$k = 1, \ldots, n-1.$$

В этой же главе получена оценка погрешности дважды непрерывно дифференцируемого приближения функций с помощью базисных интегро-дифференциальных сплайнов пятого порядка аппроксимации первой высоты. Доказана теорема:

Теорема 1. *Пусть $u \in C^5[a,b]$, $\widetilde{\widetilde{\widetilde{U}}}$ — дважды непрерывно дифференцируемое приближение, построенное с помощью полиномиальных базисных сплайнов, тогда*

$$\|\widetilde{\widetilde{\widetilde{U}}}^{\alpha} - u^{\alpha}\|_{[a,b)} \leq \widetilde{K}_\alpha h^{5-\alpha} \|u^{(5)}\|_{[a,b]},\ \alpha = 0, 1, 2,$$

где $\widetilde{K}_0 = 0.5464$, $\widetilde{K}_1 = 2.2692$, $\widetilde{K}_2 = 5.6996$.

Во **второй главе** рассматривается среднеквадратическое приближение, построенное с помощью полученных в первой главе непрерывно дифференцируемых базисных сплайнов.

В **третьей главе** рассматривается построение приближений функций и их производных с помощью левосторонних непрерывно дифференцируемых полиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов пятого порядка аппроксимации первой высоты. Предполагаем, что известны значения $u(x_k)$, $u'(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(t)dt$, $k = 1, \ldots, n$. Будем строить приближение $u(x)$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, n-1$, в виде

$$\widetilde{u}_k(x) = u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) +$$
$$+ u'(x_k)\omega_{k,1}(x) + u'(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) + \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(t)dt\right)\omega_k^{<-1>}(x), \quad (2)$$

где $\omega_{k,0}(x), \omega_{k+1,0}(x), \omega_{k,1}(x), \omega_{k+1,1}(x), \omega_k^{<-1>}(x)$ определяем из условий

$$\widetilde{u}_k(x) = u(x) \text{ для } u(x) = x^i, i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Положим $supp\, \omega_{k,\alpha} = [x_{k-1}, x_{k+1}]$, $\alpha = 0, 1$, $supp\, \omega_k^{<-1>} = [x_k, x_{k+1}]$. Получаем следующие формулы базисных сплайнов для $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $x = x_k + th$, $t \in [0,1]$:

$$\omega_{k,0}(x_k + th) = (15t^2 + 62t + 31)(t-1)^2/31,$$
$$\omega_{k+1,0}(x_k + th) = -t^2(45t^2 - 28t - 48)/31,$$
$$\omega_k^{<-1>}(x_k + th) = 30t^2(t-1)^2/(31h),$$
$$\omega_{k,1}(x_k + th) = th(62 + 85t)(t-1)^2/62,$$
$$\omega_{k+1,1}(x_k + th) = t^2h(35t + 27)(t-1)/62.$$

Приближения вида (2) называем левосторонними.

Доказана лемма об оценке погрешности приближения функции и первой производной с помощью левосторонних полиномиальных сплайнов:

Лемма 3. *Пусть функция* $u \in C^{(5)}[x_k, x_{k+1}]$, $\widetilde{u}$ *— приближение левосторонними полиномиальными сплайнами. Справедливы следующие утверждения:*

$$|u(x) - \widetilde{u}(x)| \le h^5 K_0 \|u^{(5)}\|_{[x_{k-1}, x_{k+1}]},\ x \in [x_k, x_{k+1}],\ K_0 = 0.22,$$

$$|u'(x) - \widetilde{u}'(x)| \le h^4 K_1 \|u^{(5)}\|_{[x_{k-1}, x_{k+1}]},\ x \in [x_k, x_{k+1}],\ K_1 = 0.6342.$$

В **четвертой главе** рассматривается построение базисных сплайнов двух переменных, которые могут быть использованы для моделирования приближений функций. Приближение строится в каждой элементарной прямоугольной области сетки узлов, если известны значения функции в узлах и значения интегралов по элементарным областям.

Пусть n и m - натуральные числа, такие что $n \ge 2, m \ge 1$. Пусть a, b, c, d - действительные числа. Рассмотрим прямоугольную область $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, где

$$\Omega = \{(x,y) | a < x < b, c < y < d\}$$

и Γ является границей Ω. Введём $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = b, c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m+1} = d$, и сетку прямых на $\bar{\Omega}$, которая делит область $\bar{\Omega}$ на прямоугольники $\bar{\Omega}_{j,k} = \Omega_{j,k} \cup \Gamma_{j,k}$,

$$\Omega_{j,k} = \{(x,y) | x \in (x_j, x_{j+1}), y \in (y_k, y_{k+1})\},$$

$\Gamma_{j,k}$ - это граница $\Omega_{j,k}, j = 0, \ldots, n, k = 0, \ldots, m, h_j = x_{j+1} - x_j, h_k = y_{k+1} - y_k$.

Обозначим $u(x_j, y_k)$ как $u_{j,k}$. Предположим, что известны значения интегралов:

$$I_{j,k}^{<0>} = \iint_{\bar{\Omega}_{j,k}} u(x,y)dxdy, I_{j,k}^{<-1>} = \iint_{\bar{\Omega}_{j-1,k}} u(x,y)dxdy.$$

Приближение $\tilde{u}(x,y)$ к $u(x,y)$ в прямоугольнике $\bar{\Omega}_{j,k}$ берем в виде:

$$\tilde{u}(x,y) = u_{j,k}W_1(x,y) + u_{j+1,k}W_2(x,y) + u_{j,k+1}W_3(x,y)+ \\ + u_{j+1,k+1}W_4(x,y) + I_{j,k}^{<0>}W_5(x,y) + I_{j,k}^{<-1>}W_6(x,y), \quad (3)$$

где базисные сплайны $W_i(x,y)$ получаются из условий:

$$\tilde{u}(x,y) = u(x,y) \text{ для } u(x,y) = 1, x, y, xy, x^2, y^2.$$

Если положить $h_k = h_j = h, x = x_j + th, y = y_k + t_1h, t, t_1 \in [0,1]$, то получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
W_1(x_j+th, y_k+t_1h) =& -(1/2)t^2 + 2t_1^2 - 3t_1 - (1/2)t + tt_1 + 1,\\
W_2(x_j+th, y_k+t_1h) =& -tt_1 + t_1^2 - t_1 + (1/2)t^2 + (1/2)t,\\
W_3(x_j+th, y_k+t_1h) =& -tt_1 + 2t_1^2 - t_1 + (1/2)t^2 + (1/2)t,\\
W_4(x_j+th, y_k+t_1h) =& tt_1 + t_1^2 - t_1 + (1/2)t^2 - (1/2)t,\\
W_5(x_j+th, y_k+t_1h) =& -(1/h^2)(5t_1^2 - 5t_1 + t^2 - t),\\
W_6(x_j+th, y_k+t_1h) =& (1/h^2)(-t_1^2 + t_1 + t^2 - t).
\end{aligned}$$

Аппроксимации (3) оказываются разрывными в Ω. В работе указан способ построения непрерывных аппроксимаций на основе данных базисных функций.

Доказана теорема:

Теорема 2. *Обозначим* $\bar{\Omega}_h = \{(x,y) | a+h \le x \le b, c \le y \le d\}$. *Пусть функция* $u(x,y) \in C^3(\bar{\Omega})$. *Предположим, что* $h_j = h_k = h$. *Тогда для* $(x,y) \in \bar{\Omega}_{j,k} \subset \bar{\Omega}_h$ *выполнено*

$$|\tilde{u}(x,y) - u(x,y)| \le h^3 K ||u||_{C^3(\bar{\Omega})}, K = 1.$$

В **пятой главе** строятся базисные одномерные полиномиальные и тригонометрические интегро-дифференциальные сплайны пятого порядка аппроксимации.

Обозначим за $\widetilde{\widetilde{u}}(x)$ приближение функции $u(x)$ на интервале $[x_j, x_{j+1}]$:

$$\widetilde{\widetilde{u}}(x) = u(x_j)\widetilde{\omega}_{j,0}(x) + u(x_{j+1})\widetilde{\omega}_{j+1,0}(x) + u'(x_j)\widetilde{\omega}_{j,1}(x) + \\ + u'(x_{j+1})\widetilde{\omega}_{j+1,1}(x) + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} u(t)dt\,\widetilde{\omega}_j^{<0>}(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \quad (4)$$

Базисные сплайны $\widetilde{\omega}_{j,0}(x)$, $\widetilde{\omega}_{j+1,0}(x)$, $\widetilde{\omega}_{j,1}(x)$, $\widetilde{\omega}_{j+1,1}(x)$, $\widetilde{\omega}_j^{<0>}(x)$, получаем из системы:

$$\widetilde{\widetilde{u}}(x) \equiv u(x), \;\; u(x) = 1, \sin(kx), \cos(kx), \;\; k = 1, 2.$$

Получаем для $x = x_j + th$, $t \in [0, 1]$ следующие формулы:

$\widetilde{\omega}_{j,0}(x_j+th) = (6\sin(t\,h+h) - 8\cos(t\,h)\,h + 12\,h\cos(t\,h+h) - 4\,h\cos(-3\,h + t\,h) + 15\sin(h) - 6\sin(2\,h + t\,h) + 6\sin(-2\,h + t\,h) + 3\sin(3\,h) - 12\sin(2\,h) + 3\sin(-3\,h + 2\,t\,h) + 2\,h\cos(-3\,h + 2\,t\,h) + 6\,h\cos(-h + 2\,t\,h) + 3\sin(h + 2\,t\,h) - 6\sin(-h + 2\,t\,h) - 8\,h\cos(2\,t\,h) - 6\sin(-3\,h + t\,h))/(30\sin(h) - 24\sin(2\,h) - 16\,h + 18\,h\cos(h) - 2\,h\cos(3\,h) + 6\sin(3\,h))$,

$\widetilde{\omega}_{j+1,0}(x_j + th) = (3\sin(h + 2\,t\,h) - 6\sin(-h + 2\,t\,h) + 8\,h\cos(t\,h - h) - 6\,h\cos(-h + 2\,t\,h) - 2\,h\cos(h + 2\,t\,h) + 6\sin(t\,h + h) + 12\sin(2\,h) - 3\sin(3\,h) - 15\sin(h) + 8\,h\cos(2\,t\,h - 2\,h) - 6\sin(-3\,h + t\,h) + 3\sin(-3\,h + 2\,t\,h) - 12\,h\cos(-2\,h + t\,h) + 4\,h\cos(2\,h + t\,h) - 6\sin(2\,h + t\,h) + 6\sin(-2\,h + t\,h))/(-30\sin(h) + 24\sin(2\,h) + 16\,h - 18\,h\cos(h) + 2\,h\cos(3\,h) - 6\sin(3\,h))$,

$\widetilde{\omega}_{j,1}(x_j + th) = (10 + 6\cos(2\,h) - 2\cos(2\,t\,h) - 4\,h\sin(2\,t\,h) - 15\cos(h) - 8\cos(t\,h) + 5\cos(-3\,h + 2\,t\,h) + 6\,h\sin(-h + 2\,t\,h) - 2\,h\sin(-3\,h + 2\,t\,h) - 8\,h\sin(t\,h) + 6\cos(-2\,h + t\,h) + 2\cos(2\,h + t\,h) - 4\cos(-3\,h + t\,h) + 4\cos(t\,h - h) + 12\cos(-h + 2\,t\,h) - \cos(h + 2\,t\,h) - 14\cos(2\,t\,h - 2\,h) + 6\,h\sin(t\,h + h) - \cos(3\,h) + 2\,h\sin(-3\,h + t\,h))/(30\sin(h) - 24\sin(2\,h) - 16\,h + 18\,h\cos(h) - 2\,h\cos(3\,h) + 6\sin(3\,h))$,

$\widetilde{\omega}_{j+1,1}(x_j + th) = (10 + 6\cos(2\,h) + 2\cos(-3\,h + t\,h) - 15\cos(h) - \cos(3\,h) - 2\,h\sin(2\,h + t\,h) - 6\,h\sin(-2\,h + t\,h) + 12\cos(-h + 2\,t\,h) + 5\cos(h + 2\,t\,h) - \cos(-3\,h + 2\,t\,h) + 2\,h\sin(h + 2\,t\,h) - 6\,h\sin(-h + 2\,t\,h) - 2\cos(2\,t\,h - 2\,h) - 14\cos(2\,t\,h) - 4\cos(2\,h + t\,h) + 4\,h\sin(2\,t\,h - 2\,h) + 8\,h\sin(t\,h - h) + 4\cos(t\,h) - 8\cos(t\,h - h) + 6\cos(t\,h + h))/(-30\sin(h) + 24\sin(2\,h) + 16\,h - 18\,h\cos(h) + 2\,h\cos(3\,h) - 6\sin(3\,h))$,

$\widetilde{\omega}_j^{<0>}(x_j + th) = (8 + 6\cos(-h + 2\,t\,h) + \cos(h + 2\,t\,h) - 9\cos(h) + \cos(3\,h) - 4\cos(2\,t\,h) - 2\cos(-3\,h + t\,h) - 4\cos(2\,t\,h - 2\,h) + \cos(-3\,h + 2\,t\,h) + 6\cos(-2\,h +$

$t\,h) - 2\,\cos(2\,h + t\,h) - 4\,\cos(t\,h - h) + 6\,\cos(t\,h + h) - 4\,\cos(t\,h))/(-15\,\sin(h) + 12\,\sin(2\,h) + 8\,h - 9\,h\,\cos(h) + h\,\cos(3\,h) - 3\,\sin(3\,h))$.

Доказана теорема об оценке погрешности приближения функции тригонометрическими сплайнами:

Теорема 4. *Погрешность приближения тригонометрическими сплайнами такова, что выполняется соотношение:*

$$|\widetilde{\widetilde{u}}(x) - u(x)| \leq Kh^5 \|4u' + 5u''' + u^V\|_{[x_j, x_{j+1}]},$$

где $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $K > 0$, *K не зависит от h и u.*

Далее рассматривается приближения базисными сплайнами, построенными с помощью тензорного произведения базисных сплайнов одной переменной.

Для приближения функции на прямоугольнике $\Omega_{j,k}$ получаем формулу с использованием тензорного произведения:

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{p=0}^{1} u(x_{j+i}, y_{k+p}) \omega_{j+i,0}(x) \omega_{k+p,0}(y) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{1} \sum_{p=0}^{1} u'_y(x_{j+i}, y_{k+p}) \omega_{j+i,0}(x) \omega_{k+p,1}(y) + \sum_{i=0}^{1} \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} u(x_{j+i}, t) dt dy \omega_{j+i,0}(x) \omega_k^{<0>}(y)$$

$$+ \sum_{i=0}^{1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} u(t, y_{k+i}) dt \omega_j^{<0>}(x) \omega_{k+i,0}(y) + \sum_{i=0}^{1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} u'_y(t, y_{k+i}) dt \omega_j^{<0>}(x) \omega_{k+i,1}(y) +$$

$$\int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, y) dx dy \omega_k^{<0>}(y) \omega_j^{<0>}(x) + \sum_{i=0}^{1} u'_x(x_j, y_{k+i}) dt \omega_{j,0}(x) \omega_{k+i,0}(y) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{1} u''_{xy}(x_j, y_{k+i}) dt \omega_{j,0}(x) \omega_{k+i,1}(y) + \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} u'_x(x_j, t) dt \omega_{j,1}(x) \omega_k^{<0>}(y).$$

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

В **приложение** вынесен исходный код программы на языке Maple для построения непрерывного приближения функций сплайнами двух переменных на основе разрывного с помощью дополнительной интерполяции.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Бурова И.Г., Полуянов С.В.* О построении приближений интегро-дифференциальными сплайнами пятого порядка первой высоты. // *Вестник Санкт-Петербургского университета.* – Серия 1: Математика, механика, астрономия. – 2014. – Т. 1, № 2. – С. 183–191.

   (*Burova I.G., Poluyanov S.V.* Construction of Meansquare Approximation with Integro-Differential Splines of Fifth Order and First Level. // *Vestnik St. Petersburg University.* – Mathematics. – Allerton Press, Inc. – 2014. – Vol. 47, № 2, Pp. 57–63.)

2. *Burova I.G., Poluyanov S.V., Shirokova Iu.V.* On Approximations by polynomial and trigonometrical Integro-Differential Splines of Two Variables. // *WSEAS Transactions on Mathematics.* – 2015. – Volume 14, Art. 33. – Pp. 345–352.

3. *Burova I.G., Poluyanov S.V.* On Approximations by polynomial and trigonometrical integro-differential splines. // *INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICAL MODELS AND METHODS IN APPLIED SCIENCES.* – 2016. – Volume 10. – Pp. 190–199.

Другие публикации:

4. *Burova I.G., Poluyanov S.V.* Construction of twice continuously differentiable approximations by integro-differential splines of fifth order and first level. // *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET).* – 2014. – Volume 5, Issue 4. – Pp. 239–246.

5. *Burova I.G., Poluyanov S.V.* On Approximations by polynomial and trigonometrical Integro-Differential Splines of Two Variables. // *Proceedings of the 18th International Conference on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems (MAMECTIS'16), Venice, Italy, January 29-31.* – 2016. – Pp. 103–109.

6. *Burova I.G., Poluyanov S.V., Shirokova Iu.V.* On Approximations by Integro-Differential Splines of Two Variables. // *Recent Advances on Computational*

Science and Applications Proceedings of the 4th International Conference on Applied and Computational Mathematics (ICACM'15). – 2015. – Pp. 33–37.

7. *Бурова И.Г., Полуянов С.В.* Распараллеливание построения среднеквадратического приближения сплайнами восьмого порядка аппроксимации третьей высоты – *Проблемы математической и естественно-научной подготовки в инженерном образовании.* – С.-Петербург, ПГУПС. – 2012. – С. 115–118.