На правах рукописи

Плотников Сергей Александрович

УПРАВЛЕНИЕ СИНХРОНИЗАЦИЕЙ И БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМАХ ФИТЦХЬЮ-НАГУМО

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2016

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете

Научный руководитель:	доктор технических наук, профессор **Фрадков Александр Львович**
Официальные оппоненты:	**Пакшин Павел Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, Арзамасский политихнический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева», заведующий кафедрой прикладной математики
	Парсегов Сергей Эрнестович, кандидат физико-математических наук, ФГБУН Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»

Защита состоится 21 декабря 2016 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д.33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан “____” ________ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физ.-мат. наук, профессор

В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Задачи синхронизации в системах связанных осцилляторов возникают в различных областях прикладной математики, таких как нелинейные динамические системы, сетевые системы и теория колебаний, и имеют приложения в физике, биологии и технике. Важным классом таких задач является синхронизация популяций нейронов. Математические модели нейронных сетей, используемые в исследованиях, основаны на моделях нейронов Ходжкина-Хаксли, Морриса-Лекара, Хиндмарш-Роуз и других, отличающихся нелинейностями и сложной динамикой. В реальных сетях параметры различных нейронов в сети различны, т.е. сети являются неоднородными, что еще более усложняет исследования. В этих случаях часто используется наиболее простая модель второго порядка ФитцХью-Нагумо (ФХН). Поскольку поведение систем может существенно меняться при изменении ее параметров, важной задачей является анализ бифуркаций в системе. Однако вопросы бифуркаций и синхронизации в подобных сетях мало исследованы даже для простейших моделей нейронов ФХН. Особенно важным является исследование возможностей управления синхронизацией систем ФХН, определяющее перспективы влияния на патологические состояния реальных нейронных сетей с помощью внешних воздействий.

Сказанное подтверждает актуальность темы диссертационной работы.

Целью диссертационной работы является нахождение условий бифуркаций и возможностей управления синхронизацией в неоднородных сетях ФХН.

Для достижения поставленной цели в работе ставятся и решаются следующие **задачи**.

1. Получить условия, характеризующие поведение связанных систем ФХН с различными пороговыми параметрами.

2. Синтезировать алгоритмы управления синхронизацией двух связанных систем ФХН с различными пороговыми параметрами с помощью внешнего стимула и с помощью настройки силы связи.

3. Синтезировать алгоритмы управления синхронизацией двух связанных систем ФХН с переменной задержкой при помощи внешнего стимула.

4. Найти оценки шага дискретизации в зависимости от силы связи, необходимые для синхронизации двух систем ФХН, в случае дискретной связи между двумя системами.

5. Получить условие синхронизации неоднородной сети из систем ФХН и разработать алгоритм управления синхронизацией при помощи одинакового

для всех узлов внешнего стимула и алгоритмы управления синхронизацией при помощи настройки силы связи.

Методы исследований. Для достижения поставленной цели использовались методы теории управления: алгоритм скоростного градиента, метод функций Ляпунова, метод функционалов Ляпунова-Красовского и неравенство Халаная.

Научная новизна. На защиту выносятся следующие научные результаты работы.

1. Получены неравенства, устанавливающие невозможность бифуркации Андронова-Хопфа, для случая двух систем ФХН и для случая однонаправленного кольца систем ФХН с различными пороговыми параметрами. Показано, что, если неравенства выполнены, то траектории систем стремятся к устойчивой предельной точке (Теоремы 2.1, 2.2) [2, 10].

2. Синтезированы алгоритмы управления синхронизацией двух систем ФХН с различными пороговыми параметрами с помощью внешнего стимула и с помощью настройки силы связи. Сформулированы теоремы о достижении целей управления при управлении с помощью внешнего стимула (Теоремы 3.1, 3.2) [2–5].

3. Синтезированы алгоритмы управления синхронизацией двух систем ФХН с переменной задержкой при помощи внешнего стимула. Сформулированы теоремы о достижении цели управления (Теоремы 3.3, 3.4) [6, 7, 9].

4. Найдены оценки шага дискретизации в зависимости от силы связи, необходимые для синхронизации двух систем ФХН, в случае дискретной связи между двумя системами [9].

5. Получено условие синхронизации неоднородной сети из систем ФХН со связным неориентированным графом. Предложен алгоритм управления синхронизацией при помощи одинакового для всех узлов внешнего стимула и алгоритмы управления синхронизацией при помощи настройки силы связи (Теорема 4.1) [1–4, 8, 10].

Теоретическая и практическая значимость результатов. В диссертационной работе найдены условия, при которых имеет место синхронизация в сетях систем ФХН, а также исследовано поведение сети. На основе полученных условий был предложен алгоритм управления синхронизацией в этих сетях. Таким образом, результаты диссертационной работы показывают, как с помощью внешнего стимула можно синхронизировать сеть систем ФХН в случае первоначального отсутствия синхронизации.

Полученные результаты могут быть использованы в будущем при разработке алгоритмов диагностики и лечения различных болезней нервной системы.

Достоверность результатов работы подтверждается корректным применением математических методов и компьютерным моделированием.

Апробация результатов. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета СПбГУ, на семинарах лаборатории управления сложными системами ИПМаш РАН и семинарах группы нелинейной динамики Технического университета Берлина, и на международных конференциях: International Student Conference «Science and Progress», Saint Petersburg, Russia, 2014, 2015; 1st Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, Saint Petersburg, Russia, 2015; 7th International Scientific Conference on Physics and Control, Istanbul, Turkey, 2015; XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, Россия, 2016; 6th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems, Eindhoven, The Netherlands, 2016.

Результаты диссертации были получены в ходе работ по грантам СПбГУ (проект № 6.38.230.2015), РНФ (проект № 14-29-00142) и Правительства Российской Федерации (проект № 074-U01) и использованы в перечисленных проектах.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ [1–10], в том числе 4 в изданиях из перечня научных журналов, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации основных научных результатов диссертаций, а именно в изданиях из баз цитирования Web of Science и Scopus.

Работы [2, 3, 6, 9, 10] написаны в соавторстве. В работах [2, 3] автору принадлежит анализ бифуркаций для двух систем ФХН с различными пороговыми параметрами, а также построение алгоритмов управления синхронизацией. В работе [10] диссертантом был проведен анализ бифуркаций для кольца систем ФХН с различными пороговыми параметрами, а также разработан алгоритм управления синхронизацией для неоднородной сети из систем ФХН. В работе [9] диссертантом были получены оценки шага дискретизации для двух гибридных систем ФХН, а в работах [6, 9] предложены алгоритмы управления синхронизацией двух систем ФХН с переменной задержкой и сформулированы теоремы о достижении цели управления.

Объем и структура работы. Диссертация объемом 91 страница состоит из введения, четырех глав, заключения, списка рисунков и списка литературы (131 источник).

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель и ставятся задачи работы, даётся обзор научной литературы по изучаемой проблеме, приводится краткое содержание работы по главам.

В **первой главе** диссертационной работы приводятся вспомогательные сведения, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов.

Во **второй главе** изучается поведение связанных систем ФХН с различными пороговыми параметрами, находятся условия бифуркации.

В разделе 2.1 рассматривается случай простейшей сети – двух связанных систем ФХН, описываемых уравнениями

$$\begin{aligned}
\varepsilon \dot{u_1}(t) &= u_1(t) - \frac{u_1^3(t)}{3} - v_1(t) + C[u_2(t-\tau) - u_1(t)],\\
\dot{v_1}(t) &= u_1(t) + a_1,\\
\varepsilon \dot{u_2}(t) &= u_2(t) - \frac{u_2^3(t)}{3} - v_2(t) + C[u_1(t-\tau) - u_2(t)],\\
\dot{v_2}(t) &= u_2(t) + a_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где u_i и v_i, $i = 1, 2$ – переменные, качественно соответствующие трансмембранному напряжению и переменной активации ионного тока, соответственно (будем также называть их активатором и ингибитором, соответственно); ε – параметр соотношения временных масштабов, характеризующий относительную скорость активации (деактивации) ионного тока; a_i, $i = 1, 2$ – пороговые параметры системы; C – сила связи между нейронами; τ – постоянная задержка, т.е. время, необходимое сигналу для достижения соседнего нейрона.

Находится положение равновесия системы (1): точка $\mathbf{x}^* \equiv (u_1^*, v_1^*, u_2^*, v_2^*)^{\mathrm{T}}$ с координатами $u_1^* = -a_1$, $u_2^* = -a_2$, $v_1^* = -a_1 + a_1^3/3 + C(a_1 - a_2)$ и $v_2^* = -a_2 + a_2^3/3 + C(a_2 - a_1)$.

Рассматриваемая система (1) линеаризуется около положения равновесия $\mathbf{x}^*$, и производится замена $\mathbf{x}(t) = [u_1(t), v_1(t), u_2(t), v_2(t)]^T \equiv \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}(t)$

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \xi_1 & -1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \delta\mathbf{x}(t) + \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta\mathbf{x}(t-\tau), \tag{2}$$

где $\xi_i = 1 - a_i^2 - C$, $i = 1, 2$.

Задача состоит в нахождении условий бифуркации для линеаризованной системы (2). Для этого используется подход, предложенный в работе (E. Schöll,

G. Hiller, P. Hövel, M. A. Dahlem. Time-delayed feedback in neurosystems // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 2009. — Vol. 367, Issue 1891. — P. 1079–1096), который применялся для случая двух связанных систем ФХН с одинаковыми пороговыми параметрами.

Делается следующее предположение о параметрах системы (1)

$$|(1 - C - a_1^2)(1 - C - a_2^2)| > C^2. \tag{3}$$

Выполнение данного неравенства гарантирует невозможность бифуркации Андронова-Хопфа для линеаризованной системы (2).

Теорема 2.1. *Если выполнено неравенство* (3)*, то бифуркация Андронова-Хопфа невозможна, т.е. положение равновесия линеаризованной системы* (2) *асимптотически устойчиво.*

В разделе 2.2 рассматривается более общий случай, а именно, случай неоднородной однонаправленной кольцевой сети из N систем ФХН. Уравнения такой сети можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_i(t) &= u_i(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} - v_i(t) + C[u_{(i+1) \mod N}(t-\tau) - u_i(t)], \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) + a_i, \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{4}$$

Находится единственное положение равновесия системы (4): точка $\mathbf{x}^* \equiv (u_1^*, v_1^*, \ldots, u_N^*, v_N^*)^{\mathrm{T}}$ с координатами $u_j^* = -a_j$, $v_j^* = -a_j + a_j^3/3 + C(a_j - a_{(j+1) \bmod N})$, где $j = 1, \ldots, N$, около которой система (4) линеаризуется, и производится замена $\mathbf{x}(t) = [u_1(t), v_1(t), u_2(t), v_2(t)]^T \equiv \mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}(t)$

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \xi_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi_N & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}\delta\mathbf{x}(t) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta\mathbf{x}(t-\tau), \quad (5)$$

где $\xi_j = 1 - a_j^2 - C$, $j = 1, \ldots, N$.

Делается следующее предположение на параметры системы (4)

$$\left|\prod_{j=1}^{N}(1 - C - a_j^2)\right| > |C|^N. \quad (6)$$

Данное неравенство определеяет значения параметров C, a_j, $j = 1, \ldots, N$, при которых бифуркация Андронова-Хопфа невозможна.

Теорема 2.2. *Если выполнено неравенство* (6) *то бифуркация Андронова-Хопфа невозможна, т.е. положение равновесия линеаризованной системы* (5) *асимптотически устойчиво.*

Полученное неравенство является обобщением неравенства (3) для случая однонаправленного кольца систем ФХН.

В **третьей главе** рассматриваются задачи управления синхронизацией простейшей сети – двух связанных систем ФХН с неоднородностями.

В разделе 3.1 рассматривается задача синхронизации двух систем ФХН с различными пороговыми параметрами. Системы описываются следующими уравнениями

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\dot{u}_1(t) &= u_1(t) - \frac{u_1^3(t)}{3} - v_1(t) + C[u_2(t) - u_1(t)] + I(t),\\
\dot{v}_1(t) &= u_1(t) - bv_1(t) + a_1,\\
\varepsilon\dot{u}_2(t) &= u_2(t) - \frac{u_2^3(t)}{3} - v_2(t) + C[u_1(t) - u_2(t)],\\
\dot{v}_2(t) &= u_2(t) - bv_2(t) + a_2,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $I(t)$ – внешний стимул, используемый в качестве управления.

Вводятся следующие обозначения, означающие ошибки синхронизации,

$$
\delta_1 = u_1 - u_2, \qquad \delta_2 = v_1 - v_2, \tag{8}
$$

и формулируется цель управления

$$
|\delta_1(t)| \leqslant \Delta_1, \quad |\delta_2(t)| \leqslant \Delta_2, \quad \text{при } t > t^*, \tag{9}
$$

где Δ_1, Δ_2 – уровни точности.

Путем вычитания третьего уравнения из первого системы (7) и четвертого из второго, соответственно, получается система, описывающая динамику ошибок синхронизации

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\dot{\delta}_1(t) &= (1 - 2C)\delta_1(t) - \delta_2(t) - \delta_1(t)\varphi(t) + I(t),\\
\dot{\delta}_2(t) &= \delta_1(t) - b\delta_2(t) + a_1 - a_2,
\end{aligned}
$$

где $\varphi = (u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)/3$ и $\varphi(t) \geqslant 0$ для любого t.

Строится регулятор, обеспечивающий цель управления (9)

$$
I(t) = -\gamma\delta_1(t), \tag{10}
$$

где $\gamma \geqslant 0$ – коэффициент усиления; данный регулятор может быть использован в случае известных параметров системы (7) и обеспечивает следующие уровни точности

$$
\Delta_1 = \frac{|a_1 - a_2|}{2\sqrt{b(2C + \gamma - 1)}}, \quad \Delta_2 = \frac{|a_1 - a_2|}{b}. \tag{11}
$$

Делается следующее предположение $\gamma > 1 - 2C$, и формулируется теорема о достижении ЦУ

Теорема 3.1. $\forall\ u_1(0),\ u_2(0),\ v_1(0),\ v_2(0)$ *системы* (7) *управление* $I(t)$ *в виде* (10)*, где* $\gamma > 1 - 2C$*, а* δ_1 *и* δ_2 *выражаются формулами* (8)*, обеспечивает цель управления* (9) *с уровнями точности* (11).

Следствие 3.1. *Если выполнено неравенство* $C > 0.5$*, то системы* (7) *синхронизируются без управления, т.е.* $I(t) = 0$.

В случае, если параметры системы неизвестны, строится адаптивный регулятор

$$\begin{aligned} I(t) &= -\gamma\delta_1(t) + \theta(t)\delta_1(t), \\ \dot{\theta}(t) &= -\gamma_0\delta_1^2(t), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\gamma > 0$, $\gamma_0 > 0$ – коэффициенты усиления, а θ – настраиваемый параметр, используемый для оценки неизвестной силы связи C. Оценка неизвестного параметра системы C производится с помощью алгоритма скоростного градиента, предложенного А. Л. Фрадковым (А. Л. Фрадков. Схема скоростного градиента и его применения в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 9. — С. 90–101).

Теорема 3.2. $\forall\ u_1(0),\ u_2(0),\ v_1(0),\ v_2(0)$ *системы* (7) *управление* $I(t)$ *в виде* (12)*, где* $\gamma > 1$*,* $\gamma_0 > 0$*, а* δ_1 *и* δ_2 *выражаются формулами* (8)*, обеспечивает цель управления* (9) *с некоторыми уровнями точности.*

Управлять синхронизацией можно также с помощью настройки силы связи C, которую можно производить по алгоритму скоростного градиента. Для этого вводится целевая функция

$$Q(\mathbf{z}(t)) = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_1(t) + a_1 - a_2)^2,$$

где $\mathbf{z} = (\delta_1, \delta_2)$, к которой применяется алгоритм скоростного градиента

$$\dot{C}(t) = 2\gamma\delta_1(t)(\delta_1(t) + a_1 - a_2), \tag{13}$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент усиления.

Работоспособность получаемых алгоритмов управления (9), (12), (13) иллюстрируется результатами численного моделирования.

В разделе 3.2 производится анализ синхронизации двух систем ФХН с дискретными связями. Уравнения систем описываются следующим образом

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{u_1}(t) &= u_1(t) - \frac{u_1^3(t)}{3} - v_1(t) + C[u_2(t_k) - u_1(t)], \\ \dot{v_1}(t) &= u_1(t) + a - bv_1(t), \\ \varepsilon\dot{u_2}(t) &= u_2(t) - \frac{u_2^3(t)}{3} - v_2(t) + C[u_1(t_k) - u_2(t)], \\ \dot{v_2}(t) &= u_2(t) + a - bv_2(t), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \end{aligned} \tag{14}$$

где a, b – постоянные параметры системы. Распространяющийся между нейронами сигнал задан кусочно-постоянной функцией с последовательностью промежутков времени $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$, где $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$.

Предполагается, что неравенства

$$t_{k+1} - t_k \leqslant h \quad \forall k \geqslant 0,$$

выполнены для некоторого $h > 0$.

Рассматривается система из ошибок синхронизации (8) системы (14)

$$\begin{aligned} &\varepsilon\dot{\delta}_1(t) = (1 - C - \varphi(t))\delta_1(t) - C\delta_1(t - \tau(t)) - \delta_2(t),\\ &\dot{\delta}_2(t) = \delta_1(t) - b\delta_2(t),\\ &\quad t \in [t_k,\ t_{k+1}), \quad \tau(t) = t - t_k, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\varphi = 1/3(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)$, $\varphi(t) \geqslant 0,\ \forall t$.

Задачей является изучить влияние шага дискретизации h на устойчивость системы (15). Для этого используется метод, предложенный Р. Э. Сейфуллаевым и А. Л. Фрадковым (Р. Э. Сейфуллаев, А. Л. Фрадков. Анализ дискретно-непрерывных нелинейных многосвязных систем на основе линейных матричных неравенств // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 3. — С. 57–74), основанный на разрешимости линейных матричных неравенств.

Разрешимость линейных матричных неравенств проверяется в системе *Matlab*, пакет *Yalmip*. Находятся максимальные значения шага дискретизации h в зависимости от параметров системы (14).

В разделе 3.3 рассматривается задача синхронизации двух связанных систем ФХН с переменной задержкой

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{u_1}(t) &= u_1(t) - \frac{u_1^3(t)}{3} - v_1(t) + C[u_2(t - \tau(t)) - u_1(t)] + I(t),\\ \dot{v_1}(t) &= u_1(t) - bv_1(t) + a,\\ \varepsilon\dot{u_2}(t) &= u_2(t) - \frac{u_2^3(t)}{3} - v_2(t) + C[u_1(t - \tau(t)) - u_2(t)],\\ \dot{v_2}(t) &= u_2(t) - bv_2(t) + a. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь τ – переменная задержка.

Система (16) приводится к системе из ошибок синхронизации (8)

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{\delta}_1(t) &= (1 - C)\delta_1(t) - \varphi(t)\delta_1(t) - C\delta_1(t - \tau(t)) - \delta_2(t) + I(t),\\ \dot{\delta}_2(t) &= \delta_1(t) - b\delta_2(t), \end{aligned}$$

где $\varphi = 1/3(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)$, $\varphi(t) \geqslant 0\ \forall t$ – неотрицательная функция.

Формулируется цель управления

$$\delta_1(t) \to 0, \quad \delta_2(t) \to 0, \quad \text{при } t \to \infty, \tag{17}$$

Для достижения цели управления (17) выбирается регулятор $I(t)$ в следующей форме

$$I(t) = -\theta_1\delta_1(t) + \theta_2\delta_1(t - \tau(t)), \tag{18}$$

где $\theta_1 \geqslant 0$, θ_2 – параметры управления.

Делаются следующие предположения.

1. Предположим, что задержка τ – дифференцируемая функция с ограниченной сверху производной $\dot{\tau} \leqslant d < 1$ (случай медленно-меняющихся задержек).

2. Предположим, что параметры регулятора θ_1, θ_2 удовлетворяют неравенству

$$\theta_1 > \frac{|\theta_2 - C|}{\sqrt{1-d}} - C + 1. \tag{19}$$

Формулируется теорема о достижении ЦУ

Теорема 3.3. *Пусть задержка τ – медленно-меняющаяся дифференцируемая функция в системе* (16)*, т.е. $\dot{\tau} \leqslant d < 1$. Тогда управление $I(t)$ в форме* (18)*, где параметры $\theta_1 \geqslant 0$ и θ_2 удовлетворяют неравенству* (19)*, а δ_1, δ_2 выражаются формулами* (8)*, обеспечивает цель управления* (17).

Также рассматривается общий случай с произвольной задержкой для двух связанных систем ФХН (16).

Строится регулятор в форме (18) и делается следующее предположение на параметры регулятора

$$\begin{cases} 0 < q < b, \\ -4q\varepsilon(1 - C - \theta_1 + q\varepsilon) > (\theta_2 - C)^2. \end{cases} \tag{20}$$

Формулируется теорема о достижении ЦУ

Теорема 3.4. *Пусть в системе* (16) *задержка $\tau(t)$ – произвольная функция. Алгоритм управления в форме* (18) *с параметрами, удовлетворяющими неравенствам* (20) *и δ_1, δ_2 равными* (8)*, обеспечивает цель управления* (17).

Следствие 3.2. *Если выполнено неравенство $\Theta = -4q\varepsilon(1 - C + q\varepsilon) > 0$ для $q \in (0, b)$ системы* (14)*, то дискретный алгоритм управления в форме*

$$I(t) = \theta_2(u_1(t_k) - u_2(t_k)), \ t_k \leqslant t < t_{k+1}, \tag{21}$$

где $(\theta_2 - C)^2 < \Theta$, обеспечивает синхронизацию систем (14).

Работоспособность получаемых алгоритмов управления (18), (21) иллюстрируется результатами численного моделирования.

В **четвертой главе** рассматривается задача синхронизации неоднородной сети систем ФХН.

В разделе 4.1 находятся условия, гарантирующие синхронизацию неоднородной сети систем ФХН. Рассматривается сеть, состоящая из N систем ФХН

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{u}_i(t) &= u_i(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} - v_i(t) + C\sum_{j=1}^{N} G_{ij}[u_j(t) - u_i(t)], \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) - bv_i(t) + a_i. \end{aligned} \tag{22}$$

где $\mathbf{G} = (G_{ij})$ – матрица смежности, $i = 1, \ldots, N$.

Делаются следующие предположения.

1. Предположим, что значения пороговых параметров a_i лежат в некотором отрезке, т.е. $|a_i - a_j| \leqslant \sigma, \ \forall i, j = 1, \ldots, N$.
2. Предположим, что граф связей Γ сети (22) связный и неориентированный, т.е. его матрица смежности $\mathbf{G} = (G_{ij})$ симметричная.

Вычисляется средняя траектория, описываемая уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{\bar{u}}(t) &= \bar{u}(t) - \psi(u_1(t), \ldots, u_N(t)) - \bar{v}(t), \\ \dot{\bar{v}}(t) &= \bar{u}(t) - b\bar{v}(t) + \bar{a}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{u} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j, \quad \bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j, \quad \bar{a} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_j,$$

$$\psi(u_1, \ldots, u_N) = \frac{1}{3N}\sum_{j=1}^{N} u_j^3.$$

Строится система из ошибок синхронизации

$$\begin{aligned} \varepsilon[\dot{u}_i(t) - \dot{\bar{u}}(t)] &= u_i(t) - \bar{u}(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} + \psi(t) - v_i(t) + \bar{v}(t) + \\ &+ C\sum_{j=1}^{N} G_{ij}[u_j(t) - u_i(t)], \\ \dot{v}_i(t) - \dot{\bar{v}}(t) &= u_i(t) - \bar{u}(t) - b[v_i(t) - \bar{v}(t)] + a_i - \bar{a}. \end{aligned}$$

Определяется условие синхронизации

$$|u_i(t) - \bar{u}(t)| \leqslant \Delta_1, \quad |v_i(t) - \bar{v}(t)| \leqslant \Delta_2, \quad \text{при } t > t^*, \ i = 1, \ldots, N, \qquad (23)$$

где Δ_1, Δ_2 – уровни точности.

Формулируется теорема

Теорема 4.1. *Пусть граф связей* Γ *неоднородной сети систем ФХН* (22) *неориентированный и связный. Если выполнено неравенство* $C > 1/\lambda_2(\Gamma)$*, где* $\lambda_2(\Gamma)$ *– алгебраическая связность графа связей* Γ*, тогда сеть синхронизируется* (23) *с уровнями точности* $\Delta_1 = 2\sigma$*,* $\Delta_2 = \sigma/b$*.*

Данный результат является обобщением теоремы 3.1 для сети из N узлов со связным неориентированным графом, а также результата работы (E. Steur, I. Tyukin, H. Nijmeijer. Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators // Physica D. — 2009. — Vol. 328. — P. 2119–2128), в которой получены результаты для синхронизируемости сети ФХН с одинаковыми пороговыми параметрами.

Следствие 4.1. *Если для неориентированного и связаного графа связей* Γ *неоднородной сети систем ФХН* (22) *выполнено неравенство* $C > 1/\delta(\Gamma)$*, где* $\delta(\Gamma)$ *– минимальная степень вершины графа связей* Γ*, тогда цель управления* (23) *достигается с уровнями точности* $\Delta_1 = 2\sigma$*,* $\Delta_2 = \sigma/b$*.*

В разделе 4.2 строится алгоритм управления синхронизацией сети ФХН с помощью общего для всех узлов внешнего стимула

$$I(t) = \gamma u(t), \tag{24}$$

где γ – коэффициент усиления, а u – значение активатора системы *мастера*, которая описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{u}(t) &= u(t) - \frac{u^3(t)}{3} - v(t), \\ \dot{v}(t) &= u(t) - bv(t) + a. \end{aligned} \tag{25}$$

С помощью выбора параметров a, b можно регулировать поведение сети. Например, если сеть находилась в возбудимом режиме, то путем добавления внешнего стимула, описываемого уравнениями (24), (25) с колебательным режимом, можно перевести всю сеть в колебательный режим.

В разделе 4.3 строятся алгоритмы управления синхронизацией систем ФХН с помощью настройки силы связи.

Алгоритм управления синхронизацией (13) обобщается на случай однонаправленного кольца из систем ФХН. Рассматривается сеть систем ФХН из N узлов (22), где матрица смежности $\mathbf{G}$ имеет следующую форму

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что k – узел с самым большим пороговым параметром, а l – с самым маленьким, т.е.

$$a_k = \max_{i=1,\ldots,N} a_i, \qquad a_l = \min_{i=1,\ldots,N} a_i, \tag{26}$$

и они являются соседними, т.е. $k = (l+1) \bmod N$ или $k = (l-1) \bmod N$.

Подход основывается на том, чтобы синхронизировать два узла в кольце; в этом случае другие узлы также синхронизируются. Для этого используется закон управления (13) для синхронизации этих двух узлов. Он будет выглядеть следующим образом

$$\dot{C}(t) = \gamma\left[u_k(t) - u_l(t) + a_k - a_l\right]\left[u_k(t) - u_l(t)\right], \tag{27}$$

где γ – коэффициент усиления.

Если для рассматриваемой системы предположение (26) неверно, то закон управления (27) не даст результата. Однако, если управлять каждой силой связи отдельно, то можно достичь цели управления. В этом случае кольцевая сеть систем ФХН описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{u}_i(t) &= u_i(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} - v_i(t) + C_i(t)[u_{(i+1)\bmod N}(t) - u_i(t)],\\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) - bv_i(t) + a_i, \quad i = 1, \ldots, N,\end{aligned}$$

где $C_i(t)$ – сила связи с узлом i.

Вводится следующая целевая функция

$$Q(\mathbf{z}(t)) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[u_i(t) - u_{(i+1)\bmod N}(t) + a_i - a_{(i+1)\bmod N}\right]^2,$$

где $\mathbf{z} = (u_1, \ldots, u_N)$, к которой применяется алгоритм скоростного градиента

$$\begin{aligned}C_i(t) = \gamma\left[u_i(t) - u_{(i+1)\bmod N}(t)\right] \times \big[2u_i(t) - u_{(i-1)\bmod N}(t) -\\ - u_{(i+1)\bmod N}(t) + 2a_i - a_{(i-1)\bmod N}(t) - a_{(i+1)\bmod N}(t)\big],\ i = 1, \ldots, N,\end{aligned} \tag{28}$$

где γ – коэффициент усиления.

Работоспособность получаемых алгоритмов управления ((24), (25)), (27), (28) иллюстрируется результатами численного моделирования.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Плотников, С. А. Управление синхронизацией в сетях ФитцХью-Нагумо / С. А. Плотников // XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). — 2016. — С. 286–288.

2. **Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh-Nagumo nodes / S. A. Plotnikov, J. Lehnert, A. L. Fradkov, E. Schöll // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2016. — Vol. 26, Issue 4. — 1650058.**

3. Control of synchronization in delay-coupled neural heterogeneous networks [Электронный ресурс] / S. Plotnikov, J. Lehnert, A. Fradkov, E. Schöll // International Conference «Physics and Control». — 2015. — Режим доступа : `http://lib.physcon.ru/doc?id=227ddba0ebd3`, свободный.

4. Plotnikov, S. Control of synchronization in neural delay-coupled networks with heterogeneous threshold parameters / S. Plotnikov // Conference abstracts. International student conference «Science and progress». — SPb.: SOLO, 2014. — P. 46.

5. **Plotnikov, S. A. Control of synchronization in two delay-coupled FitzHugh-Nagumo systems with heterogeneities / S. A. Plotnikov // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48, Issue 11. — P. 887–891.**

6. Plotnikov, S. Controlled syncrhonization in two dynamical systems with sector bounded nonlinearities [Электронный ресурс] / S. Plotnikov, A. Fradkov // International Conference «Physics and Control». — 2015. — Режим доступа : `http://lib.physcon.ru/doc?id=9c71f5378325`, свободный.

7. Plotnikov, S. Controlled synchronization in two FitzHugh-Nagumo systems with slowly-varying delays / S. Plotnikov // Cybernetics and Physics. — 2015. — Vol. 4, Issue 1. — P. 21–25.

8. Plotnikov, S. Synchronization in heterogeneous FitzHugh-Nagumo networks / S. Plotnikov // Conference abstracts. International student conference «Science and progress». — SPb.: SOLO, 2015. — P. 56.

9. **Plotnikov, S. A. Controlled synchronization in two hybrid FitzHugh-Nagumo systems / S. A. Plotnikov, A. L. Fradkov // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, Issue 14. — P. 137–141.**

10. **Synchronization in heterogeneous FitzHugh-Nagumo networks with hierarchical architecture / S. A. Plotnikov, J. Lehnert, A. L. Fradkov, E. Schöll // Physical Review E. — 2016. — Vol. 94, Issue 1. — 012203.**