На правах рукописи

Липкович Михаил

Частотные критерии существования функций Ляпунова для систем Лурье с нелинейностями из бесконечных секторов

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2016

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор технических наук, профессор **Фрадков Александр Львович**
Официальные оппоненты:	**Рапопорт Лев Борисович,** доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова Российской Академии Наук, заведующий лабораторией
	Утина Наталья Валерьевна, кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», доцент
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Защита состоится ”21” декабря 2016 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д.33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан “____” ________ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физ.-мат. наук, профессор

В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теория абсолютной устойчивости нелинейных систем занимает важное место в развитии теории автоматического управления. Существенный вклад внесли классики как отечественной (А.М. Летов, А.И. Лурье, И.Г. Малкин, Е.Н. Розенвассер, В.А. Якубович), так и зарубежной науки (Р. Брокетт, Р. Калман, В.М. Попов).

На рубеже 1950-1960-х годов важным событием стало открытие частотных критериев абсолютной устойчивости: кругового критерия и критерия В.М. Попова. В 1964 году В.А. Якубовичем было показано, что эти критерии необходимы и достаточны для существования функции Ляпунова специального вида[1] в случае систем с одной нелинейностью. В 1967 году Якубович показал, что для случая нескольких нелинейностей полученные критерии являются достаточными для существования функции Ляпунова. Однако, вопрос о необходимости частотных критериев для существования функции Ляпунова оставался открытым до последнего времени. В 1983-1991 годах, используя разные подходы, В.А. Каменецким, Л.Б. Рапопортом и У. Ионсианом были получены необходимые и достаточные условия существования функций Ляпунова, однако по форме они отличались от кругового критерия и критерия Попова.

Тема диссертации посвящена исследованию необходимости кругового критерия и критерия Попова для существования функций Ляпунова для систем Лурье с нелинейностями из бесконечных секторов, что подтверждает актуальность темы диссертации.

В диссертационной работе найдены условия, при которых круговой критерий и критерий Попова являются не только достаточными, но и необходимыми для существования функции Ляпунова для систем с несколькими нелинейностями, лежащими в бесконечном секторе. Доказательство основано на новом результате о неущербности S-процедуры для связей, соответствующих нелинейностям, лежащим в бесконечном секторе. Таким образом, дан ответ на вопрос, остававшийся нерешенным более полувека.

Целью диссертационной работы является поиск условий необходимости частотных критериев для существования функций Ляпунова для систем Лурье с нелинейностями из бесконечных секторов. Для достижения поставленной цели в работе ставятся и решаются следующие **задачи**:

1. Получить условия неущербности S-процедуры для произвольного числа связей специального вида.

[1]Для кругового критерия - квадратичной формы, для критерия Попова - "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности"

2. На основе полученного результата о неущербности S-процедуры получить условия эквивалентности кругового критерия существованию квадратичной функции Ляпунова.

3. На основе полученного результата о неущербности S-процедуры получить условия эквивалентности критерия Попова существованию функции Ляпунова вида "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности".

4. Расширить критерий Попова на комплексный случай и получить условия его эквивалентности существованию функции Ляпунова специального вида.

5. Применить полученные результаты к адаптивной стабилизации и адаптивному слежению для систем Лурье с неопределенной линейной частью и произвольным числом неизвестных нелинейностей.

Методы исследований. Для достижения цели использовались метод матричных неравенств, метод функций Ляпунова, метод S-процедур и метод пассификации.

Научную новизну работы составляют следующие результаты:

1. Получен новый результат о неущербности S-процедуры в комплексном линейном пространстве с произвольным числом связей специального вида (Теорема 2.1) [1].

2. Доказана эквивалентность кругового критерия существованию квадратичной функции Ляпунова для систем Лурье с произвольным числом нелинейностей, лежащих в бесконечном секторе (Теорема 2.2) [1, 4, 5, 7].

3. Доказана эквивалентность критерия Попова существованию функции Ляпунова вида "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности" для систем Лурье с произвольным числом нелинейностей, лежащих в бесконечном секторе (Теорема 3.1) [3, 6, 7].

4. Предложено обобщение критерия Попова на случай комплексных систем. Доказана эквивалентность полученного критерия существованию функции Ляпунова вида "квадратичная форма плюс вещественная часть интеграла от нелинейности" для систем Лурье с произвольным числом нелинейностей, лежащих в бесконечном секторе (Теоремы 4.1, 4.2) [9].

5. На основе метода пассификации получены условия адаптивной стабилизации и адаптивного слежения для систем Лурье с неопределенной линейной частью и несколькими неизвестными нелинейностями из заданного класса (Теоремы 5.1, 5.3, 6.1, 6.3) [2], [8].

Теоретическая значимость и практическая ценность. В диссертации дан ответ на вопрос, остававшийся нерешенным более полувека. Полученные результаты показывают, что критерии абсолютной устойчивости, получаемые за счет рассматриваемых функций Ляпунова, не могут быть улучшены. Все основные результаты являются новыми. Полученные результаты могут быть использованы при разработке алгоритмов стабилизации сложных систем.

Апробация результатов. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета СПбГУ, на семинарах лаборатории управления сложными системами ИПМаш РАН и на международных конференциях: International Student Conference «Science and Progress», Saint-Petersburg, 2011, 2015; XII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, Россия, 2012; 1st Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, Saint-Petersburg, Russia, 2015; International Conference of Young Scientists Automation and Control, Saint-Petersburg, Russia, 2015; XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, Россия, 2016.

Результаты диссертации были получены в ходе работ по гранту СПбГУ (проект № 6.38.230.2015) и РНФ (проект № 14-29-00142) и использованы в перечисленных проектах.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано девять работ, в том числе три в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендуемых ВАК. Работы [1, 2, 3, 5, 6, 8] написаны в соавторстве. В работах [1, 3, 5, 6] диссертантом была доказана необходимость частотных условий для существования функций Ляпунова из соответствующих классов. В работе [2] диссертантом была получена теорема об адаптивной абсолютной стабилизируемости систем Лурье. В работе [8] диссертанту принадлежит доказательство теоремы о слежении для систем с монотонными нелинейностями.

Объем и структура работы. Диссертация объемом 79 страниц состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы (72 источника).

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель и ставятся задачи работы, даётся обзор научной литературы по изучаемой проблеме, приводится краткое содержание работы по главам.

В первой главе приводятся вспомогательные сведения, относящиеся к абсолютной устойчивости, даётся краткое описание методов пассификации и S-процедуры, вводится описание оценочно оптимальных алгоритмов.

Во второй главе рассматривается задача определения необходимых и достаточных условий существования квадратичной функции Ляпунова для систем Лурье с произвольным числом нелинейностей из бесконечных секторов.

В разделе 2.1 дается математическая постановка задачи нахождения условий существования квадратичной функции Ляпунова. Рассматривается система Лурье, описываемая следующей системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{C}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{C}^m, y = y(t) \in \mathbb{C}^m$ – векторы состояния, входа и выхода соответственно, A, B, C – постоянные комплексные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $n \times m$ соответственно.

Передаточная матрица системы (1) имеет вид $W(s) = C^*(sI - A)^{-1}B$, где I – единичная матрица порядка n.

Предполагается, что система (1) замкнута непрерывными функциями, локально липшицевыми по y_j

$$u_j = -\varphi_j(y_j, t), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

При этом нелинейности удовлетворяют так называемому секторному условию

$$\mathrm{Re}\,\{y_j^*\,\varphi_j(y_j, t)\} \geqslant 0, \quad \forall t, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Предполагается, что связи (3) точны в следующем смысле:

$$\inf_{y_j \neq 0, \forall t} \mathrm{Re}\,\frac{\varphi_j(y_j, t)}{y_j} = 0, \quad \sup_{y_j \neq 0, \forall t} \mathrm{Re}\,\frac{\varphi_j(y_j, t)}{y_j} = +\infty. \tag{4}$$

Задача состоит в нахождении необходимых и достаточных условий существования квадратичной функции Ляпунова с симметричной $(n \times n)$-матрицей P

$$V(x) = x^*Px, \tag{5}$$

такой, что ее производная в силу системы (1), (2) удовлетворяет неравенству:

$$dV/dt < 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\{y_j^*\,u_j\} \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m, \quad x \neq 0. \tag{6}$$

В разделе 2.2 доказан новый результат о неущербности S-процедуры:

Теорема 2.1. *Пусть X – комплексное линейное пространство, Z – линейное пространство $X \times \mathbb{C}^m$. Рассмотрим вещественнозначные функционалы F, $G_1, \ldots G_m$ на Z следующего вида*

$$F(z) = F_0(x) + \sum_{j=1}^{m} Re\,\{u_j^* f_j(x)\}, \quad G_j(z) = Re\,\{u_j^* g_j(x)\}, \tag{7}$$

где F_0 – любой вещественнозначный функционал на X, а f_j, g_j – линейные функционалы на X.

Тогда S-процедура для неравенства $F(z) < 0$ с ограничениями $G_1(z) \leqslant 0, \ldots G_m(z) \leqslant 0$ неущербна.

В разделе 2.3 полученный результат о неущербности S-процедуры используется для доказательства эквивалентности кругового критерия существованию квадратичной функции Ляпунова:

Теорема 2.2. *Рассмотрим систему (1), (2) с ограничениями (3), (4) и стабилизируемой парой (A, B). Предположим, что ранг $(n \times m)$-матриц B и C равен m. Тогда квадратичная функция Ляпунова (5), удовлетворяющая (6), существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие частотные условия для некоторых $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$:*

$$\begin{aligned} &Re\,\{\Lambda W(i\omega)\} > 0 \quad \text{для} \quad \omega \in (-\infty, +\infty), \\ &\lim_{\omega \to +\infty} \omega^2 Re\,\{\Lambda W(i\omega)\} > 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\Lambda = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.

В работе показано, что вывод Теоремы 2.2 остается верен в случае, когда все матрицы и векторы, входящие в (1) вещественны. При этом матрица P функции Ляпунова (5) также будет вещественна.

В третьей главе рассматривается задача определения необходимых и достаточных условий существования функции Ляпунова вида "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности" для систем Лурье с произвольным числом нелинейностей из бесконечных секторов в вещественном случае.

В разделе 3.1 дается математическая постановка задачи нахождения условий существования функции Ляпунова специального вида. Рассматривается система Лурье, описываемая следующей системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = C^* x, \tag{9}$$

где вектор-функции $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m, y = y(t) \in \mathbb{R}^m$ являются состоянием, входом и выходом соответственно, A, B, C – постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $n \times m$ соответственно.

Передаточная матрица системы (9) имеет вид $W(s) = C^*(sI - A)^{-1}B$, где I – единичная матрица порядка n.

Система (1) замкнута непрерывными функциями, локально липшицевыми по y_j

$$u_j = -\varphi_j(y_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Предполагается, что для нелинейностей выполнены следующие соотношения:

$$\varphi_j(y_j)\, y_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

означающие, что графики функций (10) должны лежать в бесконечном секторе, который составляют первый и третий квадранты на плоскости.

Делается предположение, что связи (11) точны в следующем смысле:

$$\inf_{y_j \neq 0} \frac{\varphi_j(y_j)}{y_j} = 0, \quad \sup_{y_j \neq 0} \frac{\varphi_j(y_j)}{y_j} = \infty, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

Задача состоит в нахождении для класса систем (9), (10), для которых выполнено (11), (12), необходимых и достаточных условий существования функции Ляпунова вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» с симметричной $(n \times n)$-матрицей P

$$V(x) = x^* P x + 2 \sum_{j=1}^{m} \theta_j \int_0^{y_j} \varphi_j(\tau)\, d\tau, \quad \theta_j \in R^1, \tag{13}$$

такой, что для всех $x \neq 0$ ее производная в силу системы отрицательна:

$$dV/dt < 0 \quad \text{при} \quad y_j u_j \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

В разделе 3.2 сформулирован и доказан основной результат об эквивалентности критерия Попова существованию функции Ляпунова (13), удовлетворяющей (14)

Теорема 3.1. *Пусть дана система (9), (10) с ограничениями (11), (12) и стабилизируемой парой (A, B). Введем диагональную матрицу $\Theta = diag\{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ с коэффициентами функции Ляпунова на диагонали. Предположим, что ранг $(n \times m)$-матриц B и C равен m и выполнено $\Theta C^* B = 0$.*

Тогда существование функции Ляпунова вида (13), для которой выполнено (14), равносильно следующему частотному условию, выполненному для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$:

$$\begin{aligned} &Re\, \left\{G^*(i\omega I - A)^{-1} B\right\} > 0 \quad \textit{при} \quad \omega \in (-\infty,\, +\infty), \\ &\lim_{\omega \to +\infty} \omega^2 Re\, \{G^*(i\omega I - A)^{-1} B\} > 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где матрица $G = C\Lambda + A^*\, C\Theta/2$, $\Lambda = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.

В четвертой главе рассматривается обобщение результата предыдущей главы на комплексный случай. На сколько известно автору, ранее критерий Попова рассматривался только в вещественном случае. В четвертой главе сделана попытка получить критерий Попова для комплексного случая и доказана его эквивалентность существованию функции Ляпунова из соответствующего класса.

В разделе 4.1 дается математическая постановка задачи нахождения условий существования функции Ляпунова вида "квадратичная форма плюс вещественная часть интеграла от нелинейности". Рассматривается система Лурье, описываемая следующей системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = C^* x, \tag{16}$$

где вектор-функции $x = x(t) \in \mathbb{C}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{C}^m, y = y(t) \in \mathbb{C}^m$ – состояние, вход и выход соответственно, A, B, C – постоянные комплексные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $n \times m$ соответственно.

Передаточная матрица системы (16), как и ранее, имеет вид $W(s) = C^*(sI - A)^{-1}B$, где I - единичная матрица порядка n.

Предполагается, что система (16) замкнута локально липшицевыми комплексными функциями от y_j

$$u_j = -\varphi_j(y_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{17}$$

Рассматриваются нелинейности, вещественные и мнимые части которых дифференцируемы как функции вещественных переменных и связаны следующим соотношением:

$$\frac{\partial \mathrm{Re}\, \varphi_j(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \frac{\partial \mathrm{Im}\, \varphi_j(z_1, z_2)}{\partial z_1}, \tag{18}$$

которое можно рассматривать как одно из условий Коши-Римана, выполненное для $\varphi^*(z)$.

Нелинейности удовлетворяют секторному условию:

$$\mathrm{Re}\{\varphi_j^*(y_j)\, y_j\} \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{19}$$

являющемуся аналогом бесконечного сектора в вещественном случае.

Предполагается, что связи (19) точны в следующем смысле:

$$\inf_{y_j \neq 0} \mathrm{Re} \frac{\varphi_j(y_j)}{y_j} = 0, \quad \sup_{y_j \neq 0} \mathrm{Re} \frac{\varphi_j(y_j)}{y_j} = +\infty. \tag{20}$$

Для каждого x обозначим за l_j отрезок, соединяющий точку 0 с точкой $y_j = (C^* x)_j$ на комплексной плоскости. Задача состоит в нахождении необходимых и достаточных условий существования функции Ляпунова вида «квадратичная форма плюс вещественная часть интеграла от нелинейности» с симметричной $(n \times n)$-матрицей P

$$V(x) = x^* P x + 2 \sum_{j=1}^{m} \theta_j \mathrm{Re} \left\{ \int\limits_{l_j} \varphi_j^*(z)\, dz \right\}, \quad \theta_j \in R^1, \tag{21}$$

такой, что для всех $x \neq 0$ производная (21) в силу системы (16), (17) отрицательна:

$$dV/dt < 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\{u_j^* y_j\} \leqslant 0, \;\; j = 1, \ldots, m, \quad x \neq 0. \tag{22}$$

В разделе 4.2 сформулирован и доказан основной результат об эквивалентности критерия Попова существованию функции Ляпунова (21), удовлетворяющей (22).

Теорема 4.1. *Рассмотрим систему (16), (17) с ограничениями (18), (19), (20) и стабилизируемой парой (A, B). Введем диагональную матрицу $\Theta = diag\{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ с коэффициентами функции Ляпунова на диагонали. Предположим, что $(n \times m)$-матрицы B и C имеют ранг m и матрица $\Theta C^* B$ равна нулевой матрице.*

Тогда функция Ляпунова (21), удовлетворяющая (22) существует тогда и только тогда когда выполнены следующие частотные соотношения для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$:

$$\begin{aligned} &Re\left\{G^*(i\omega I - A)^{-1} B\right\} > 0 \quad \textit{при} \quad \omega \in (-\infty, +\infty), \\ &\lim_{\omega \to +\infty} \omega^2 Re\left\{G^*(i\omega I - A)^{-1} B\right\} > 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где матрица $G = C\Lambda + A^* C\Theta/2$, $\Lambda = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.

Полученный критерий по форме совпадает с критерием Попова для вещественного случая из предыдущей главы.

На основе полученного частотного критерия приводится теорема об абсолютной устойчивости.

Теорема 4.2. *Рассмотрим систему (16), (17) с гурвицевой матрицей A. Введем матрицу $\Theta = diag\{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ с неотрицательными элементами на диагонали, такую что $\Theta C^* B$ неотрицательно определена и выполнено частотное условие (23) для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$. Тогда система (16), (17) абсолютно устойчива в классе нелинейностей (18), (19).*

В разделе 4.3 дается пример анализа абсолютной устойчивости сверточной нейронной сети Хопфилда на основе полученной теоремы.

В пятой главе формулируется и решается задача адаптивной абсолютной стабилизации системы с секторными нелинейностями.

В разделе 5.1 дается определение адаптивной абсолютной устойчивости. Рассматривается нелинейная система:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\xi)x + B(\xi)u + B_1(\xi)\psi(y_1, t, \xi), \\ y &= C(\xi)^* x, \\ y_1 &= C_1(\xi)^* x, \end{aligned} \tag{24}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y = y(t) \in \mathbb{R}^m$, $y_1 = y_1(t) \in \mathbb{R}^m$ – состояние, вход и два вектора выхода соответственно; $\psi(y_1, t, \xi) = \mathrm{col}(\psi_1(y_{1_1}, t, \xi), \ldots, \psi_m(y_{1_m}, t, \xi))$, где $\psi_j(y_{1_j}, t, \xi)$ – непрерывные функции, локально липшицевые по y_{1_j}; $A(\xi), B(\xi), B_1(\xi), C(\xi), C_1(\xi)$ – вещественные матрицы соответствующих размерностей, ξ – вектор дополнительных неизвестных параметров из известного множества Ξ.

Система (24) замкнута следующей обратной связью:

$$u = K^* y, \tag{25}$$

$$\frac{dK}{dt} = F(y), \tag{26}$$

где $F(y)$ – непрерывная матричная функция. Уравнение (26) определяет закон изменения матрицы K. Такие законы называются *адаптивными алгоритмами*. Отметим, что алгоритм (25), (26) не зависит от неизвестного ξ.

Нелинейности $\psi_j(y_{1_j}, t, \xi)$ лежат в бесконечном секторе для всех $\xi \in \Xi$:

$$\psi_j(y_{1_j}, t)\, y_{1_j} \geqslant 0, \quad \forall t, j = 1, \ldots, m, \tag{27}$$

что означает, что графики функций ψ_j расположены в первом и третьем квадрантах на плоскости.

Задача состоит в нахождении функции $F(y)$ в (26), не зависящей от $\xi \in \Xi$, такой, что система (24) адаптивно стабилизируема алгоритмом (25), (26) для всех нелинейностей из класса (27) для всех неизвестных параметров $\xi \in \Xi$.

В разделе 5.2 вводится следующий алгоритм адаптации

$$\mathrm{vec}(dK/dt) = -P(I_m \otimes y) G^* y, \tag{28}$$

где $P = P^* > 0$ – произвольная вещественная положительно определенная $(m^2 \times m^2)$-матрица, G – некоторая вещественная $(m \times m)$-матрица, $\otimes$ – кронекерово произведение матриц, а vec – оператор векторизации, ставящий матрице в соответствие вектор, получающийся наложением ее столбцов друг на друга.

Наряду с нелинейной системой (24) вводится линейная система, получающаяся из (24) заменой $B_1(\xi)$ на нулевую матрицу:

$$\dot{x} = A(\xi)x + B(\xi)u, \quad y = C(\xi)^* x. \tag{29}$$

В подразделе 5.2.1 дается решение поставленной задачи на основе критерия Попова.

Теорема 5.1. *Рассмотрим систему (24), (25) со стационарными нелинейностями. Пусть $B_1(\xi) = -B(\xi)$. Предположим, что $C_1^* B = 0$ и $C = C_1 + A^* C_1 \Theta$ для* *некоторой диагональной матрицы Θ с неотрицательными элементами. Тогда система (24) адаптивно абсолютно стабилизируема в классе неопределенностей Ξ в классе алгоритмов адаптации (26), если алгоритм адаптации имеет вид (28) и для любого $\xi \in \Xi$ линейная система (29) строго G-пассифицируема от входа u к выходу y с диагональной матрицей G с неотрицательными элементами.*

Доказано, что условия Теоремы 5.1 также являются необходимыми и достаточными для существования функции Ляпунова вида "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности". То есть алгоритм (28) охватывает все стабилизирующие алгоритмы из класса (26), которые могут быть получены за счет такой функции Ляпунова.

В подразделе 5.2.2 дается решение задачи адаптивной абсолютной стабилизируемости на основе кругового критерия.

Теорема 5.3. *Рассмотрим систему (24), (25). Пусть $B_1(\xi) = -B(\xi)$ и $C_1(\xi) = C$, то есть $y_1 = y$. Тогда (24) адаптивно абсолютно стабилизируема в классе неопределенностей Ξ в классе алгоритмов адаптации (26), если алгоритм адаптации имеет вид (28) и для любого $\xi \in \Xi$ линейная система (29) строго G-пассифицируема от входа u к выходу y с диагональной матрицей G с неотрицательными элементами.*

Доказано, что условия Теоремы 5.3 также являются необходимыми и достаточными для существования квадратичной функции Ляпунова. То есть алгоритм (28) охватывает все стабилизирующие алгоритмы из класса (26), которые могут быть получены за счет такой функции Ляпунова.

В разделе 5.3 приводятся примеры адаптивной стабилизации нелинейных систем с секторными нелинейностями. В подразделе 5.3.1 на основе кругового критерия приведена синхронизация двух цепей Чуа с неизвестными параметрами. Приведена область параметров Ξ, для которых система является адаптивно абсолютно стабилизируемой на основании Теоремы 5.3. В подразделе 5.3.2 рассматривается задача адаптивной стабилизации продольного движения самолета с помощью Теоремы 5.1. Показано, что Теоремой 5.3 стабилизируемость рассматриваемой системы не установить.

В шестой главе результаты из предыдущей главы расширяются на случаи регулирования и слежения.

В разделе 6.1 дается математическая постановка задачи адаптивного абсолютного слежения. Рассматривается нелинейная система со стационарными нелинейностями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\xi)x + B(\xi)u - B(\xi)\zeta(y, \xi), \\ y &= C(\xi)^* x, \end{aligned} \tag{30}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y = y(t) \in \mathbb{R}^m$ – векторы состояния, входа и выхода соответственно; $\zeta(y, \xi) = \mathrm{col}(\zeta_1(y_1, \xi), \ldots, \zeta_m(y_m, \xi))$, где $\zeta_j(y_j, \xi)$ – непрерывные функции, локально липшицевые по y_j; $A(\xi), B(\xi), B_1(\xi), C(\xi)$ – вещественные матрицы подходящих размерностей, ξ – вектор дополнительных неизвестных параметров из известного множества Ξ.

Задана вектор-функция $r(t) \in \mathbb{R}^m$ желаемого выхода системы. Таким образом, имеется следующая цель управления:

$$\|y(t) - r(t)\| \leqslant \Delta \quad \text{при} \quad t \geqslant t_*, \tag{31}$$

где Δ и t_* – некоторые неотрицательные константы.

Вводится расширенный выход системы (30):

$$\hat{y} = \mathrm{col}(y, r) = \mathrm{col}(C(\xi)^* x, r) \tag{32}$$

Предполагается, что система (30) замкнута следующей обратной связью:

$$u = K^* \hat{y}, \tag{33}$$

$$\frac{dK}{dt} = F(\hat{y}), \tag{34}$$

где $F(y)$ – непрерывная матричнозначная функция.

Нелинейности $\zeta_j(y_j, \xi)$ предполагаются монотонно неубывающими относительно вектора r, то есть удовлетворяющими следующему соотношению для всех $\xi \in \Xi$ и для всех t:

$$(y_j - r_j)(\zeta_j(y_j, \xi) - \zeta_j(r_j, \xi)) \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{35}$$

В разделе 6.2 наряду с нелинейной системой (30) рассматривается линейная система, полученная из (30) заменой $B_1(\xi)$ на нулевую матрицу:

$$\dot{x} = A(\xi)x + B(\xi)u, \quad y = C(\xi)^* x. \tag{36}$$

Показано, что при условии строгой G-пассифицируемости линейной системы (36) существует вектор-функция $x_0(\xi, t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{gathered} C^*(\xi) x_0 = r(t), \\ x_0 + B K_0^* \hat{y}_0 - B\zeta(C^* x_0) = 0, \end{gathered} \tag{37}$$

где матрица $K_0(\xi) = \mathrm{col}(\nu_0(\xi), \theta_0(\xi))$, матрица ν_0 определяется из условия пассифицируемости системы (36), а матрица $\theta_0(\xi)$ имеет следующий вид:

$$\theta_0^* = -W_0^{-1} + \mathrm{diag}\left\{\frac{\zeta_j(r_j)}{r_j}\right\}, \tag{38}$$

где обратимость $W_0(\xi) = C(\xi)^*(A(\xi) + B(\xi)\nu_0(\xi)^*C(\xi)^*)^{-1}B(\xi)$ следует из свойств пассивных систем и $\frac{\zeta_j(r_j)}{r_j} = 1$ для $r_j = 0$.

Тогда вектор-функция $x_0(\xi, t)$ может быть определена следующим образом:

$$x_0(t) = (A + B\nu_0^*C^*)^{-1}BW_0^{-1}r(t). \qquad (39)$$

В подразделе 6.2.1 рассматривается задача регулирования. Предполагается, что желаемый выход системы $r(t)$ постоянный: $r(t) \equiv r$. В этом случае можно достичь выполнения (31) для всех Δ, то есть выполнения

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t) - r\| = 0. \qquad (40)$$

Предлагается алгоритм адаптации (34) следующего вида:

$$\mathrm{vec}(dK/dt) = -P(I_{2m} \otimes \hat{y})G^*(y - r), \qquad (41)$$

где $P = P^* > 0$ – произвольная вещественная положительно определенная $(m^2 \times m^2)$-матрица, G – некоторая вещественная $(2m \times 2m)$-матрица.

Теорема 6.1. *Рассмотрим систему (30), (32), (33). Цель управления (40) достигается в классе неопределенностей Ξ в классе нелинейностей (35) в классе алгоритмов (34), если алгоритм адаптации имеет вид (41) и линейная система (36) строго G-пассифицируема от входа u к выходу y с диагональной матрицей G с неотрицательными элементами.*

Аналогично предыдущей главе доказывается, что условия Теоремы 6.1 необходимы и достаточны для существования квадратичной функции Ляпунова.

В подразделе 6.2.2 рассматривается общий случай задачи слежения, то есть случай, когда $r(t)$ непостоянна. В этом случае цель (40) не может быть достигнута. Ставится задача нахождения оценочно ε-оптимального алгоритма, то есть алгоритма, с которым достигается некоторая оценка оптимума Δ.

В дальнейшем предполагается, что эталонный сигнал $r(t)$ непрерывно дифференцируем, а нелинейности $\zeta_j(y_j, \xi)$ дважды непрерывно дифференцируемы по y_j. Предполагается, что $\max_t \|\dot{r}(t)\| \leqslant \Delta_r$, $\max_t \left|\frac{\zeta_j(r_j(t),\xi)}{r_j(t)}\right| \leqslant \Delta_{\zeta_j}(\xi)$, $\max_t |\zeta_j''(\tau)| \leqslant \Delta_{\zeta_j''}(\xi)$ для всех $\xi \in \Xi$, $j = 1, \dots, m$ и некоторых $\Delta_r > 0, \Delta_{\zeta_j}(\xi) > 0, \Delta_{\zeta_j''}(\xi) > 0$.

Вводятся обозначения: $\tilde{k}_0(\xi, r) = \mathrm{vec}(K_0(\xi, r))$, $\tilde{\nu}_0(\xi) = \mathrm{vec}(\nu_0(\xi))$, $\tilde{\theta}_0(\xi, r(t)) = \mathrm{vec}(\theta_0(\xi, r(t)))$, где матрицы K_0, ν_0, θ_0 определяются из (37) и (38). Доказываются следующие оценки:

$$\max_t \|\tilde{k}_0(\xi, r(t))\| \leqslant \|\nu_0(\xi)\| + \|W_0^{-1}(\xi)\| + m \max_j \max_t \left|\frac{\zeta_j(r_j(t), \xi)}{r_j(t)}\right| = \alpha_1(\xi) \qquad (42)$$

$$\max_t \|\dot{\tilde{k}}_0(\xi, r(t))\| \leqslant m \max_j \max_t |\zeta''(r(t))| = \alpha_2(\xi). \tag{43}$$

В качестве алгоритма адаптации рассматривается алгоритм (41) с регуляризацией:

$$\mathrm{vec}(dK/dt) = -P\left[\kappa(I_m \otimes \hat{y})G^*(y-r) + \lambda \mathrm{vec}(K)\right], \tag{44}$$

где $P = P^* > 0$ – произвольная вещественная положительно определенная $(2m^2 \times 2m^2)$-матрица, G – некоторая вещественная $(m \times m)$-матрица, λ, κ – дополнительные положительные параметры.

Также задается следующий класс алгоритмов:

$$u = K_0(t,\xi)^* \hat{y}, \tag{45}$$

где $K_0(t,\xi) = \mathrm{col}(\nu_0(\xi), \theta_0(t,\xi))$, где $\nu_0(\xi)$ – некоторая $(m \times m)$-матрица и $\theta_0(t,\xi)$ – $(m \times m)$-матрица вида $L(\xi) + \mathrm{diag}\left\{\frac{\zeta_j(r_j(t))}{r_j(t)}\right\}$ с некоторой матрицей $L(\xi)$. Алгоритмы (45) рассматриваются как подкласс "идеальных" алгоритмов, для которых известны значения параметров ξ и значения нелинейностей $\zeta(y)$.

Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 6.3. *Рассмотрим систему (30), (33) с алгоритмом адаптации вида (44). Предположим, что эталонный сигнал $r(t)$ непрерывно дифференцируем, а нелинейности $\zeta_j(y_j,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируемы по y_j. Пусть $\max_t \|\dot{r}(t)\| \leqslant \Delta_r$, $\max_t \left|\frac{\zeta_j(r_j(t),\xi)}{r_j(t)}\right| \leqslant \Delta_{\zeta_j}(\xi)$, $\max_t |\zeta_j''(r(t))| \leqslant \Delta_{\zeta_j''}(\xi)$ для всех $\xi \in \Xi$, $j = 1,\dots,m$ и некоторых $\Delta_r > 0, \Delta_{\zeta_j}(\xi) > 0, \Delta_{\zeta_j''}(\xi) > 0$. Определим $\alpha_1(\xi)$ и $\alpha_2(\xi)$ из (42) и (43) соответственно. Пусть ρ^2 является минимальным собственным числом матрицы P. Тогда цель (31) достигается, если $\lambda\rho^2 > \alpha_0$ и линейная система (36) строго G-пассифицируема от входа u к выходу y с диагональной матрицей G с неотрицательными элементами. Если более того $\kappa > \kappa_0 = \frac{\lambda\alpha_1^2\rho^2(\lambda\rho^2-\alpha_0)+\alpha_2^2}{\varepsilon\alpha\rho^2(\lambda\rho^2-\alpha_0)}$, тогда алгоритм (44) оценочно ε-оптимальный в классе неопределенностей Ξ в классе алгоритмов (45).*

Из доказательства Теоремы 6.3 видно, что ее условия достаточны для существования квадратичной функции Ляпунова, однако, в отличие от случая регулирования и Теоремы 6.1, их необходимость не установлена.

В разделе 6.3 рассматриваются примеры слежения для системы Чуа. Определяются области параметров, при которых выполнены условия адаптивного абсолютного слежения.

В заключении перечислены основные результаты работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. **Lipkovich, M. Equivalence of MIMO Circle Criterion to Existence of Quadratic Lyapunov Function / M. Lipkovich, A. Fradkov // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2016. — Vol. 61, no. 7. — P. 1895–1899.**

2. **Fradkov, A. L. Adaptive absolute stability / A. Fradkov, M. Lipkovich // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48, no. 11. — P. 258–263.**

3. **Липкович, М. М. О необходимости критерия Попова для существования специальной функции Ляпунова у систем с несколькими нелинейностями / М. М. Липкович, А. Л. Фрадков // Автоматика и Телемеханика. — 2015. — № 5. – С. 90–99.**

4. Lipkovich, M. Existence of quadratic Lyapunov function for the systems with several nonlinear blocks / M. Lipkovich // International Student Conference "Science and Progress". — 2011. — P. 73.

5. Липкович, М. М. Условия существования квадратичной функции Ляпунова для систем с несколькими нелинейными блоками / М. М. Липкович, А. Л. Фрадков // XII Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". — 2012. — С. 219–221.

6. Lipkovich, M. About the necessity of Popov criterion for a Lyapunov function existence / M. Lipkovich, A. Fradkov // International Conference of Young Scientists "Automation & Control". — 2013. — P. 7–10.

7. Lipkovich, M. Circle and Popov Criteria for the Systems with Multiple Nonlinearities / M. Lipkovich // International Student Conference "Science and Progress". — 2015. — P. 55.

8. Липкович, М. М. Адаптивная абсолютная устойчивость в задаче слежения / М. М. Липкович, А. Л. Фрадков // XIII Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". — 2016. — С. 240–243.

9. Липкович, М. М. Критерий Попова для систем с несколькими комплекснозначными нелинейностями / М. М. Липкович // XIII Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". — 2016. — С. 243–245.