На правах рукописи

Иванский Юрий Владимирович

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧАХ МУЛЬТИАГЕНТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

01.01.09 — дискретная математика и
математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2016

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ГРАНИЧИН Олег Николаевич
Официальные оппоненты:	ЩЕРБАКОВ Павел Сергеевич доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, главный научный сотрудник
	УТИНА Наталья Валерьевна, кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», доцент
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет»

Защита состоится “____” ________ 2016 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9 и на сайте `https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/WkmwNghWHB.pdf`

Автореферат разослан “____” ________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последнее время все большее внимание уделяется задачам распределенного взаимодействия в сетях и управления в сетевых динамических системах. Интерес к тематике управления в динамических сетях вызван приложениями в различных областях, включая, например, обмен информацией в многопроцессорных сетях, логистические сети, производственные сети, сенсоры и беспроводные сети, скоординированное движение БПЛА, подводных объектов и мобильных роботов, распределенные системы управления электрических сетей, сложные кристаллические решетки и наноструктурные объекты. В работах Ч. Абдаллы (C. Abdallah), Р. П. Агаева, Б. Р. Андриевского, П. Антсаклиса (P. Antsaklis), Д. Баиллеула (J. Baillieul), Р. В. Берда (R.W. Beard), Ф. Булло (F. Bullo, Т. Виксека (T. Vicsek), В. А. Виттиха, В. И. Городецкого, И. А. Каляева, Д. Кортеса (J. Cortes), Ф. Льюиса (F. Lewis), А. С. Матвеева, А. С. Морса (A. S. Morse), Р. М. Мюррея (R. M. Murray), Р. Олфати-Сабера (R. Olfati-Saber), В. Рена (W. Ren), Г. А. Ржевского, Г. Таннера (H. Tanner), А. Л. Фрадкова, М. Хуанга (M. Huang), П. Ю. Чеботарева и других заложены основы теоретического описания методов анализа и синтеза децентрализованного адаптивного мультиагентного управления, обсуждаются многочисленные потенциальные практические приложения в управлении сложными производственными, энергетическими системами.

Н. О. Амелина, Д. Армбрустер (D. Armbruster), А. Глашенко, И. Грачев, С. Иноземцев, И. А. Каляев, А. С. Михайлов, С. Э. Парсегов, А. В. Проскурников, П. О. Скобелев, П. С. Щербаков и др. активно изучали алгоритмы управления в сетях, узлы которых выполняют определенные действия параллельно. Подобные сетевые системы применяются в вычислительных, производственных сетях, сетях обслуживания, транспортных и логистических сетях. Несмотря на объем работ по тематике управления децентрализованными системами, удовлетворительные решения предложены для ограниченного класса задач. Такие факторы, как переключения топологии связей, помехи и задержки при измерении состояний агентов значительно повышают сложность решения задач. Достаточно простые адаптивные алгоритмы часто демонстрируют удовлетворительную производительность, но остаются открытыми вопросы их теоретического обоснования и достижения оптимальной производительности. Как правило, при постановке задачи предполагается, что все задания, выполняемые системой, одинаково важны для исполнения.

На практике во время работы системы одни задания имеют более высокую важность, чем другие. Это может быть вызвано необходимостью выполнения системных запросов для поддержания работы всей системы; некоторые задания могут иметь более высокую срочность, в то время как для других заданий время их выполнения в системе не так критично; у системы могут быть несколько групп пользователей, которым требуется разный уровень обслуживания. В таких ситуациях для дифференциации заданий разных классов вводят приоритеты, которые учитываются при принятии решений об очередности выбора заданий на исполнение.

В последнее время набирает популярность концепция интернета вещей — соединения различных объектов в сеть для организации их взаимодействия, проводятся многочисленные эксперименты по организации взаимодействия групп мобильных роботов, наблюдается все возрастающее применение беспилотных летательных аппаратов, как в военных, так и в гражданских целях. Перечисленные тенденции актуализируют разработку и применение мультиагентного подхода в управлении группой объектов, поскольку, с одной стороны, подобными группами зачастую неэффективно управлять централизованно, с другой — объекты в таких группах способны самостоятельно организовывать и поддерживать взаимодействие внутри группы.В подобных системах устройства, как правило, обладают ограниченным запасом энергии, в связи с чем встает проблема организации взаимодействия агентов в системе, учитывающего расходы на обмен данными по сети.

Обозначенные проблемы и тенденции подтверждают актуальность темы диссертационного исследования.

Целью работы является разработка и исследование алгоритмов повышения эффективности децентрализованного перераспределения между узлами вычислительной сети очередей задач с разными уровнями приоритетов в условиях переменной структуры связей, помех и задержек при передаче информации. Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1) исследовать применимость алгоритма локального голосования для решения задачи дифференцированного консенсуса в децентрализованной вычислительной сети с заданиями разных приоритетов в условиях случайно изменяющейся структуры связей, помех и задержек при передаче информации по каналам связи;

2) оптимизировать величину размера шага протокола локального голосования, по которому функционирует система в заданных условиях;

3) исследовать применимость алгоритма локального голосования для решения задачи дифференцированного консенсуса при наличии усредненных ограничений на использование связей внутри сети. Оптимизировать величину размера шага протокола локального голосования при наличии ограничений на использование связей внутри сети;

4) разработать пакет прикладных программ для моделирования процесса перераспределения заданий разных приоритетов между агентами в сети.

Методы исследования. В диссертации используются методы теорий исследования операций, управления, графов, вероятностей и математической статистики; применяется стохастическая аппроксимация, рандомизированные алгоритмы, имитационное моделирование.

Основные результаты. В ходе выполнения работы получены следующие научные результаты:

1) предложена рандомизированная модификация алгоритма локального голосования для достижения дифференцированного консенсуса в вычислительной сети с заданиями
нескольких приоритетов в условиях случайного изменения связей, при помехах и задержках в каналах связи. Установлены условия достижения дифференцированного среднеквадратического ε-консенсуса в этих условиях. Получена оценка отклонения значений на узлах в сетевой системе от консенсусного значения;

2) получена оценка оптимального размера шага алгоритма локального голосования для системы в условиях случайного изменения связей, помех и задержек в каналах связи;

3) предложена рандомизированная модификация алгоритма локального голосования для задачи достижения дифференцированного консенсуса в системе с заданиями разных приоритетов при наличии стоимостных ограничений на использование связей для передачи информации внутри системы. Получена оценка оптимального размера шага алгоритма локального голосования при таких ограничениях;

4) разработан пакет прикладных программ для моделирования процесса перераспределения заданий разных приоритетов между агентами в мультиагент-

ной сети в условиях случайного изменения связей, помех и задержек в каналах связи.

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Теоретическая ценность результатов заключается, во-первых, в предложении основанной на алгоритме локального голосования рандомизированной управляющей стратегии для решения задачи дифференцированного консенсуса и получении условий ее работоспособности в мультиагентной системе, обладающей изменяющейся структурой связей, при наличии помех и задержек при передаче данных внутри системы. Во-вторых, в обосновании оптимизации выбора размера шага предложенного алгоритма управления для увеличения производительности системы. В третьих, в представлении рандомизированной управляющей стратегии для решения задачи дифференцированного консенсуса в системе со стоимостными ограничениями на использование связей для обмена информацией между агентами в условиях изменяющейся структуры связей, помех и задержек при передаче данных, в получении условий ее работоспособности и оптимизации ее по размеру шага.

Сформулированная управляющая стратегия может применяться для организации работы децентрализованных вычислительных, логистических, коммуникационных сетей, обладающих разными классами обслуживания, в том числе при стоимостных ограничениях на использование связей внутри сети. В функционирующей по предложенному протоколу системе будет поддерживаться сбалансированный уровень загрузки узлов по всем классам поступающих заданий.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры системного программирования математико-механического факультета СПбГУ, на семинаре School of Life Science and Technology of Huazhong University of Science and Technology (December 1–3, 2015, Wuhan, Hubei Province, China), на конференции «XIII Форум университетских партнеров Intel, (Нижний Новгород, 27–28 января, Россия, 2014)» на российских и международных конференциях по оптимизации и теории управления: Шестой и Седьмой традиционных всероссийских молодежных летних школах «Управление, информация и оптимизация» (пос. Григорчиково, Московская обл., Россия, 22–29 июня, 2014; г. Солнечногорск, Московская обл., Россия, 14–20 июня, 2015), XII Всероссийском совещании по проблемам управления ВСПУ-2014 (Москва, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН РАН, 16–19 июня 2014), 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control (October 8–10, 2014, Antibes/Nice, France), IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON'15) (June 24–26, 2015, Saint-Petersburg, Russia), 14th European Control Conference (ECC'15) (July 15–17, 2015, Linz, Austria), 2015 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC'15) (September 21–23, 2015, Sydney, Australia), 3rd IEEE International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'16), April 6–8, 2016, Saint Julian's, Malta.

Результаты диссертации были использованы в работах по грантам РФФИ 13-07-00250 «Адаптивное управление динамическими системами с использованием рандомизированных алгоритмов», 15-08-02640 «Мультиагентное управление и консенсус в сенсорных, беспроводных и вычислительных сетях», 16-07-00890 «Рандомизированные алгоритмы в автоматическом управлении и при извлечении знаний», ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» 6.56.1224.2014 «Разработка мультиагентной технологии управления распределенными гетерогенными вычислительными ресурсами для адаптивной балансировки загрузки устройств в реальном времени при решении комплексных вычислительных задач».

Публикация результатов. Основные результаты исследований отражены в работах [1–13]. Соискателем опубликовано 13 научных работ, из которых шесть опубликованы в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus, и две в журналах, входящем в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук

Работы [1–8, 10] написаны в соавторстве. В работе [1] Ю. В. Иванскому принадлежит модификация протокола локального голосования для решения задачи дифференцированного консенсуса при стоимостных ограничениях и моделирование поведения системы, функционирующей по предложенному протоколу, Н. О. Амелиной — общая постановка задачи. В [2] Ю. В. Иванскому принадлежит модификация протокола локального голосования для учета потенциала направления, а соавторам — общая постановка задачи, детализация алгоритмов управления. В статье [8] Ю. В. Иванскому принадлежит описание особенностей мультиагентного подхода к решению задач с использованием вычислительных сетей, соавторам принадлежат описание различных аспектов работы и создания адаптивной мультиагентной ОСРВ. В работах [3, 4, 5, 6, 7, 10] Ю. В. Иванскому принадлежат формулировки утверждений об оценках на размер окрестности достижения консенсуса, на размер оптимального шага и доказательства этих утверждений, а соавторам — общие постановки задач.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 115 источников. Текст занимает 92 страницы и содержит 8 рисунков.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи исследования и кратко излагаются основные результаты.

В **первой главе** приводится краткий обзор литературы по теме исследования, вводятся основные понятия и обозначения, рассматривается протокол локального голосования и его применение для роевого управления в робототехнике, для подсчета контрольных сумм в RAID-подобных распределенных системах хранения данных, обсуждается потенциальное применение в задаче опознания со сжатием (compressive sensing) при подсчете сумм.

Пусть система образована n агентами, сотрудничающими друг с другом, и множеством заданий различных классов, которые должны быть выполнены системой. Задания поступают в систему на разных агентов в различные дискретные моменты времени $t = 0, 1, \ldots$. Агенты выполняют приходящие задания параллельно. Задания могут быть перераспределены среди агентов за счет использования обратной связи. Заметим, что выполнение задания не может быть прервано после того, как оно было назначено агенту.

Сопоставим каждому агенту номер i, $i = 1, \ldots, n$,. Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество всех агентов в системе. Топология сети может изменяться со временем и пусть она моделируется последовательностью ориентированных графов $\{(N, E_t)\}_{t\geq 0}$, где E_t — множество ребер в графе (N, E_t) в момент времени t. Соответствующие матрицы смежности обозначим $A_t = [a_t^{i,j}]$, где $a_t^{i,j} > 0$, если агент j соединен с агентом i, и $a_t^{i,j} = 0$, в противном случае. Здесь и далее, верхний индекс обозначает номер соответствующего агента (а не возведение в степень). Матрица $A_t = [a_t^{i,j}]$ является матрицей смежности графа сети $\mathcal{G}_{A_t}$ в момент времени t.

Будем использовать следующие определения из теории графов. *Взвешенная полустепень захода* узла i равна сумме i-й строки матрицы A: $d^i(A) = \sum_{j=1}^n a^{i,j}$;

$D(A) = \mathrm{diag}\{d^i(A)\}$ — соответствующая диагональная матрица; $d_{\max}(A)$ — максимальная полустепень захода в графе $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{L}(A) = D(A) - A$ — *лапласиан* графа $\mathcal{G}_A$; $\cdot^{\mathrm{T}}$ — операция векторного или матричного транспонирования; $||A||$ — Евклидова норма: $||A|| = \sqrt{\sum_i \sum_j (a^{i,j})^2}$; $Re(\lambda_2(A))$ — действительная часть второго по величине собственного числа матрицы A; $\lambda_{\max}(A)$ — это наибольшее по абсолютной величине собственное число матрицы A. Орграф $\mathcal{G}_B$ является подграфом $\mathcal{G}_A$, если $b^{i,j} \leq a^{i,j}$ для всех $i, j \in N$. *Путем* в ориентированном графе $\mathcal{G}_A$ называется последовательность дуг, в которой каждая следующая дуга имеет началом конец предыдущей дуги. Говорят, что граф $\mathcal{G}_A$ является *сильно связным*, если для любой вершины i существует путь в любую другую вершину $j \neq i$.

Предположим, что задачи (задания) относятся к различным классам (приоритетам) $k = 1, \ldots, m$, и у каждого агента есть m очередей — по одной на задания каждого класса.

Пусть поведение агента $i \in N$ задают две характеристики: длины очередей заданий $q_t^{i,k}$ каждого класса k в момент времени t , $k = 1, \ldots, m$; и средняя производительность p_{av}^i или число заданий, в среднем выполняемое агентом i в течение единичного временного интервала.

Агенты, имеющие каждый свою производительность должны распределить ее среди всех классов заданий таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить очередность выполнения заданий согласно их приоритетам, а с другой стороны (принимая во внимание «проблему голодания») чтобы задания с низким приоритетом не простаивали «бесконечно», дожидаясь своей очереди на исполнение. Такого поведения можно добиться за счет введения вероятностных приоритетов. Каждому классу заданий поставим в соответствие долю производительности $P_k,\ k = 1, \ldots, m$, одинаковую для конкретного класса k для всех агентов. На каждом агенте задания из очередей будем выбирать случайно с вероятностью, задаваемой следующей формулой: $\tilde{p}_t^{i,k} = \frac{P_k}{\sum_{q_t^{i,l}>0} P_l}$, если $q_t^{i,k} > 0$, где $\tilde{p}_t^{i,k}$ — вероятность выбора на исполнение агентом i задания класса k в момент времени t. Таким образом, чем больше P_k, тем выше вероятность выбрать на исполнение задание класса k. Отсюда, производительность агента распределяется между всеми классами заданий следующим образом: $p_{av}^{i,k} = \tilde{p}_t^{i,k} p_{av}^i$. Здесь $p_{av}^{i,k}$ обозначает число заданий класса k, в среднем выполняемое на агенте i в течение единичного временного интервала.

Для всех $k = 1 \ldots m,\ t = 0, 1, \ldots$, динамика сетевой системы определяется следующим образом:

$$\mathbf{q}_{t+1}^k = \mathbf{q}_t^k - \mathbf{p}_t^k + \mathbf{z}_t^k + \mathbf{u}_t^k, \tag{1}$$

где $\mathbf{p}_t^k = [p_t^{i,k}]$, и $\mathbf{z}_t^k = [z_t^{i,k}]$ — векторы размерности n, $p_t^{i,k}$ обозначает количество заданий приоритета k, выполненных агентом i в момент времени t, i-й элемент $z_t^{i,k}$ обозначает число новых заданий класса k, поступивших в систему на агента i в момент времени t; $\mathbf{u}_t^k \in \mathbb{R}^n$ является вектором управляющих воздействий размерности n (состоит из перераспределенных на агентов заданий класса k в момент времени t), который следует выбирать основываясь на информации о длинах очередей на соседних агентах $q_t^{j,k},\ j \in N_t^i$, где N_t^i — множество $\{j \in N : a_t^{i,j} > 0\}$.

В такой постановке можно решать задачу достижения консенсуса для состояний агентов $x_t^{i,k}$ по каждому уровню приоритета k, где $x_t^{i,k} = q_t^{i,k}/p_{av}^{i,k}$

Для балансировки загрузки сети (чтобы повысить общую производительность сети и уменьшить таким образом время завершения выполнения всех заданий) естественно использовать протокол перераспределения заданий во время работы сети.

Предположим, что для формирования управляющей стратегии $\mathbf{u}_t^i$ каждый агент $i \in N$ опирается на зашумленные данные о состояниях соседей, которые также могут приходить с задержкой: $y_t^{i,j,k} = x_{t-d_t^{i,j}}^{j,k} + w_t^{i,j,k},\ j \in N_t^i$, где $\mathbf{w}_t^{i,j,k}$ — вектор помех, $0 \leq d_t^{i,j} \leq \bar{d}$ — целочисленные задержки, а $\bar{d}$ — максимально возможная задержка.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, образованное пространством элементарных событий Ω, набором всех возможных событий $\mathcal{F}$, и вероятностной мерой $\mathbb{P}$ соответственно, E — символ математического ожидания.

Рассмотрим следующее семейство протоколов. Для каждого $k = 1, \ldots, m$ для декомпозиции топологии $\{\mathcal{G}_t^k\}$ для стоимостных ограничений $\{c_k\},\ c_k > 0$

$$u_t^{i,k} = \gamma p_{av}^{i,k} \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j}(y_t^{i,j,k} - x_t^{i,k}), \tag{2}$$

где $\gamma > 0$ — это шаг протокола управления, а $\bar{N}_t^i \subset N_t^i$ — множество соседей узла i (заметим, что можно использовать не все доступные связи, а лишь некоторое их подмножество), $b_t^{i,j}$ — коэффициенты протокола. Используя протокол (2), система работает таким образом, что задания одного приоритета распределяются между агентами равномерно. Пусть $B_t = [b_t^{i,j}]$ — матрица протокола перераспределения заданий в момент времени t. (Положим $b_t^{i,j} = 0$, когда $a_t^{i,j} = 0$ или $j \notin \bar{N}_t^i$.) По построению матрицы B_t, соответствующий граф $\mathcal{G}_{B_t}$ большую часть времени будет иметь такую же топологию, как граф $\mathcal{G}_{A_t}$, задаваемый матрицей A_t, или более разреженную.

Динамика системы с обратными связями, функционирующей по протоколу (2), будет иметь следующий вид:

$$x_t^{i,k} - r_t^{i,k} + \tilde{z}_t^{i,k} + \gamma \sum_{j=1}^{n} b_t^{i,j} x_t^j - \gamma indeg_i(B_t) x_t^{i,k} + \gamma \sum_{j=1}^{n} b_t^{i,j} w_t^{i,j,k}, i \in N,\ k = 1 \dots m, \quad (3)$$

где $r_t^{i,k} = p_t^{i,k}/p_{av}^{i,k}$, $\tilde{z}_t^{i,k} = z_t^{i,k}/p_{av}^{i,k}$.

Во **второй главе** задача балансировки загрузки узлов вычислительной сети с задачами разных приоритетов формулируется в виде задачи достижения дифференцированного консенсуса, приводятся основные теоретические результаты.

Предположим, что выполнены следующие условия.

- **A1**. Граф $\mathcal{G}_{B_{av}}$ является сильно связным (для того, чтобы консенсус в системе был достижим и консенсусное значение равнялось среднему арифметическому состояний всех агентов в системе).

- **A2**. **a)** Для любых $i \in N,\ j \in N_t^i$ векторы помех наблюдений $w_t^{i,j,k}$ центрированные, независимые и одинаково распределенные случайные векторы с ограниченной дисперсией: $\mathrm{E}(w_t^{i,j,k})^2 \leq \sigma_{w,k}^2$.

  b) Для любых $i \in N, j \in N_{\max}^i = \cup_t \bar{N}_t^i$ появление «изменяющегося во времени» ребра (j,i) в графе $\mathcal{G}_{B_t}$ — независимое случайное событие. Для всех $i \in N,\ j \in N_t^i$ веса $b_t^{i,j}$ в протоколе управления — независимые случайные величины с математическим ожиданием: $\mathrm{E}b_t^{i,j} = b^{i,j}$ и ограниченной дисперсией: $\mathrm{E}(b_t^{i,j} - b^{i,j})^2 \leq \sigma_b^2$.

  c) Для любых $i \in N, j \in N^i$ существует конечная целая неотрицательная величина $\bar{d} \in \mathbb{Z}^+$: $d_t^{i,j} \leq \bar{d}$ с вероятностью 1, и целочисленные задержки $d_t^{i,j}$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, принимающими значения $l = 0, \dots, \bar{d}$ с вероятностью $D_l^{i,j}$.

  d) Для любых $k = 1, \dots, m,\ i \in N,\ t = 0, 1, \dots$ случайные величины $\tilde{z}_t^{i,k}$ независимы и имеют ограниченные математические ожидания $\mathrm{E}\tilde{z}_t^{i,k} \leq \bar{z}^k$ и дисперсии: $\mathrm{E}(\tilde{z}_t^{i,k} - \bar{z}^k)^2 \leq \sigma_{z,k}^2$.

  e) Для любых $i \in N,\ t = 0, 1, \dots$ случайные величины $r_t^{i,k}$ независимы для одного значения k. Случайные величины $\tilde{r}_t^{i,k},\ k = 1, \dots, m$, имеют математические ожидания: $\mathrm{E}\tilde{r}_t^{i,k} = \bar{r}^k$ и дисперсии $\sigma_{r,k}^2$.

Заметим, если предположения **A2.b** и **A2.c** выполняются, то усредненная матрица $\bar{B}_{av} = \mathrm{E}\bar{B}_t$, состоит из элементов

$$\bar{b}^{i,j}_{av} = \begin{cases} D^{i,j \bmod n}_{j \div n} b^{i,j \bmod n}, \text{ если } i \in N, \ j \bmod n \neq 0 \\ D^{i,n}_{j \div n} b^{i,n}, \text{ если } i \in N, \ j \bmod n = 0 \\ 1/\gamma, \text{ если } i = n+1, \dots, \bar{n}, \ j = i - n, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Здесь mod — операция взятия остатка от деления, а $\div$ — деление без остатка. Если $\bar{d} = 0$, то $\bar{B}_{av} = B_{av}$.

- **A3.** Размер шага протокола управления $\gamma > 0$ удовлетворяет следующим условиям:
$$E\left(2(1 - \gamma\lambda_2(\mathcal{L}(\bar{B}_t)))^2\right) < 1 \text{ и } \gamma \leq \frac{1}{indeg_{\max}(\bar{B}_{av})}. \tag{5}$$

Усредненная модель.

Пусть $\{X^{\star,k}_t\}$, $k = 1 \dots m$ — траектории усредненных систем

$$X^{\star,k}_{t+1} = X^{\star,k}_t + \bar{Z}^k - \bar{R}^k, \tag{6}$$

где n-мерные векторы $\bar{Z}^k = [\bar{z}^k]$ и $\bar{R}^k = [\bar{r}^k]$ состоят из математических ожиданий, заданных в предположениях **A2.d, A2.e**.

Дифференцированный консенсус.

Рассмотрим векторы $\bar{X}^{\star,k}_t = \mathbf{1}_{\bar{d}+1} \otimes (X^{\star,k^T}_t, X^{\star,k^T}_{t-1} \dots X^{\star,k^T}_{t-\bar{d}})^T \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $t = 0, 1, \dots$.

Т е о р е м а 1. ***Если*** *для систем с обратными связями (3) и (6) выполнены предположения* ***A1–A3***, ***то*** *справедливо следующее неравенство:*

$$E\|\bar{X}^k_t - \bar{X}^{\star,k}_t\|^2 \leq Q^{t+1}\|\bar{X}^k_0 - \bar{X}^{\star,k}_0\|^2 + \Delta\frac{1 - Q^{t+1}}{1 - Q}, \tag{7}$$

где $Q = 2\left(1 - \gamma Re(\lambda_2\mathcal{L}(\bar{B}_{av})^T) - \gamma Re(\lambda_2\mathcal{L}(\bar{B}_{av})) + \gamma^2 E\lambda_{max}\left(\mathcal{L}(\bar{B}_t)^T\mathcal{L}(\bar{B}_t)\right)\right)$,

$$\Delta = 2\gamma^2 E\left(\lambda_{max}(\tilde{B}_t^T\tilde{B}_t)\right)\left(\frac{\bar{d}(\bar{d}+1)(2\bar{d}+1)}{6}n(\bar{z}^k - \bar{r}^k)^2\right) + \\ + n\sigma^2_{z,k} + n\sigma^2_{r,k} + \gamma^2 indeg(B_t)^T indeg(B_t)\sigma^2_{w,k}.$$

то есть, если $\mathrm{E}\|\bar{X}^k_0 - \bar{X}^{\star,k}_0\|^2 < \infty$, *то асимптотический среднеквадратичный*

ε-консенсус в (3) достигается с $\varepsilon \le \frac{\Delta}{1-Q}$ для каждого приоритета k.

Т е о р е м а 2. ***Если*** *выполнены предположения* ***A1–A3 то*** *оптимальное значение шага $\gamma^\star$, для протокола из (2) может быть получено из следующей формулы:*

$$\gamma^\star = -\frac{KS-J}{JV} + \sqrt{\left(\frac{KS-J}{JV}\right)^2 + \frac{K}{J}}, \tag{8}$$

где

$$J = 2E\left(\lambda_{max}(\tilde{B}_t^T\tilde{B}_t)\right)\left(\frac{\bar{d}(\bar{d}+1)(2\bar{d}+1)}{6}n(\bar{z}^k-\bar{r}^k)^2\right) + indeg(B_t)^T indeg(B_t)\sigma_{w,k}^2,$$

$$K = n\sigma_{z,k}^2 + n\sigma_{r,k}^2,\ S = 2E\lambda_{max}\left(\mathcal{L}(\bar{B}_t)^T\mathcal{L}(\bar{B}_t)\right),\ V = 4(Re(\lambda_2\mathcal{L}(\bar{B}_{av})^T) + Re(\lambda_2\mathcal{L}(\bar{B}_{av}))).$$

Определим теперь стоимость выбранной топологии $\{N_t^i, i \in N\}$ следующим образом: $C(\{N_t^i, i \in N\}) = \max_{i\in N}\sum_{j\in N_t^i} a_t^{i,j}$.

Задания обладают различными приоритетами и для каждого приоритета определена максимальная разрешенная стоимость сетевого графа. В каждый момент времени t будем рассматривать m способов (которые могут различаться, и каждый из которых соответствует одному уровню приоритета) выбрать подграф $\mathcal{G}_t^k:\ \mathcal{G}_t^m \subset \mathcal{G}_t^{m-1} \subset \ldots \subset \mathcal{G}_t^1$ графа $\mathcal{G}_{A_t}$, позволяющий использовать протокол для перераспределения заданий приоритета $k,\ k = 1,\ldots,m$. Обозначим B_t^k соответствующие матрицы смежности. Заметим, что один из возможных способов выбора $\mathcal{G}_t^k$ — использовать $\mathcal{G}_{A_t}$ для всех k.

Пусть $c_k,\ k = 1,\ldots,m,$ — максимальная средняя стоимость сетевых связей для заданий с приоритетом k. Положим, $c_1 \ge c_2 \ge \ldots c_m > 0$.

Определение Будем говорить, что декомпозиция топологии сети $\{\mathcal{G}_t^k\}$ удовлетворяет ограничениям на среднюю стоимость $\{c_k\}$, если для каждого класса приоритета k выполнено: $d_{\max}(B_{av}^k) = \mathrm{E}d_{\max}(B_t^k) = \mathrm{E}\max_{i\in N}\sum_{j\in N_t^{i,k}} b_t^{i,j,k} \le c_k$, где $N_t^{i,k}$ — множество соседей агента i в момент времени t, образованное в соответствии с топологией $\mathcal{G}_t^k$.

Будем рассматривать протоколы управления, удовлетворяющие определенному ограничению на стоимость топологии для каждого отдельного уровня приоритета.

Т е о р е м а 3. ***Если*** *выполнены предположения* ***A1–A3*** *и стоимостные ограничения,* ***то*** *для среднеквадратической разности $\nu_t^k = \mathrm{E}\|\bar{X}_t^k - \bar{X}_t^{\star,k}\|^2$ траекторий систем с обратными связями (3) и (6) справедливо следующее неравенство:*

$$E\|\nu_t^k\|^2 \leq Q_k^{t+1}\|\nu_0^k\|^2 + \Delta_k \frac{1-Q_k^{t+1}}{1-Q_k}, \tag{9}$$

где $Q_k = 2(1-\gamma_k Re(\lambda_2 \mathcal{L}(\bar{B}_{av}^k)^T) - \gamma_k Re(\lambda_2 \mathcal{L}(\bar{B}_{av}^k)) + \gamma_k^2 E \lambda_{max}(\mathcal{L}(\bar{B}_t^k)^T \mathcal{L}(\bar{B}_t^k))),$

$$\Delta_k = 2\gamma_k^2 E\left(\lambda_{max}(\tilde{B}_t^{k\,T}\tilde{B}_t^k)\right)\left(\frac{\bar{d}(\bar{d}+1)(2\bar{d}+1)}{6}n(\bar{z}^k-\bar{r}^k)^2\right)+$$
$$+n\sigma_{z,k}^2 + n\sigma_{r,k}^2 + \gamma_k^2 indeg(B_t^k)^T indeg(B_t^k)\sigma_{w,k}^2.$$

то есть, если $\mathrm{E}\|\bar{X}_0^k - \bar{X}_0^{\star,k}\|^2 < \infty$, *то асимптотический среднеквадратический* ε*-консенсус в (3) достигается с* $\varepsilon \leq \frac{\Delta_k}{1-Q_k}$ *для каждого приоритета* k.

Т е о р е м а 4. ***Если*** *выполнены предположения* ***A1–A3*** *и стоимостные ограничения* ***то*** *оптимальные значения шагов* $\gamma_k^\star$, $k=1,\ldots,m$, *для каждого протокола из (2), где* γ *заменено на* γ_k *и* B_t *на* B_t^k, *находятся по формуле:*

$$\gamma_k^\star = -\frac{KS-J}{JV} + \sqrt{\left(\frac{KS-J}{JV}\right)^2 + \frac{K}{J}} \tag{10}$$

где $J = 2E\left(\lambda_{max}(\tilde{B}_t^{k\,T}\tilde{B}_t^k)\right)\left(\frac{\bar{d}(\bar{d}+1)(2\bar{d}+1)}{6}n(\bar{z}^k-\bar{r}^k)^2\right) + indeg(B_t^k)^T indeg(B_t^k)\sigma_{w,k}^2$, $K = n\sigma_{z,k}^2 + n\sigma_{r,k}^2$, $S = 2E\lambda_{max}\left(\mathcal{L}(\bar{B}_t^k)^T\mathcal{L}(\bar{B}_t^k)\right)$, $V = 4(Re(\lambda_2\mathcal{L}(\bar{B}_{av}^k)^T) + Re(\lambda_2\mathcal{L}(\bar{B}_{av}^k)))$.

В **третьей главе** приводятся результаты имитационного моделирования, иллюстрирующие полученные результаты. Глава содержит четыре части. В первой части приводится иллюстрация типичного поведения системы, выполняющей задания нескольких классов, функционирующей по предложенной рандомизированной модификации протокола локального голосования в условиях помех, задержек, изменяющейся структуры связей сети. Вторая часть содержит результаты моделирования поведения системы, выполняющей задания нескольких классов, при наличии разных стоимостных ограничений на использование связей для обмена заданиями каждого класса, при балансировке по управляющему протоколу, сформированному с учетом заданных стоимостных ограничений. В третьей части проиллюстрирована зависимость степени достижимости консенсуса в системе от размера величины шага предложенного протокола. Четвертая часть содержит результаты имитационных экспериментов с использованием поискового алгоритма стохастической аппроксимации с рандомизацией на входе для подстройки величины размера шага управляющего протокола во время работы вычислительной системы.

В **заключении** формулируются основные результаты диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

[1] ***Амелина Н. О., Иванский Ю. В.*** **Задача достижения дифференцированного консенсуса при стоимостных ограничениях** // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2. №4. С. 495–506.

[2] ***Ерофеева В. А., Иванский Ю. В., Кияев В. И.*** **Управление роем динамических объектов на базе мультиагентного подхода** // Компьютерные инструменты в образовании, вып. 6, 2015, С. 34–42.

[3] ***Amelina N., Granichin O., Granichina O., Ivanskiy Y., Jiang Y.*** **Differentiated consensuses in a stochastic network with priorities** // Proc. of 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control, October 8–10, 2014, Antibes/Nice, France, P. 264–269.

[4] ***Amelina N., Granichin O., Granichina O., Ivanskiy Y., Jiang Y.*** **Optimal Step-Size of a Local Voting Protocol for Differentiated Consensuses Achievement in a Stochastic Network with Priorities** // Proc. of the 14th European Control Conference (ECC'15), Linz, Austria, July 15–17, 2015, P. 628–633.

[5] ***Amelina N., Granichin O., Granichina O., Ivanskiy Y., Jiang Y.*** **Local Voting Protocol for Differentiated Consensuses in a Stochastic Network with Priorities** // Proc. of the IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON'15), Saint-Petersburg, Russia, June 24–26, 2015, P. 964–969.

[6] ***Ivanskiy Y., Amelina N., Granichin O., Granichina O., Jiang Y.*** **Optimal Step-Size of a Local Voting Protocol for Differentiated Consensuses Achievement in a Stochastic Network with Cost Constraints for Different Priorities** // Proc. of the 2015 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC'15), September 21–23, 2015, Sydney, Australia, P. 1367–1372.

[7] ***Amelin K., Amelina N., Ivanskiy Y., Jiang Y.*** **Choice of Step-Size for Consensus Protocol in Changing Conditions via Stochastic Approximation Type Algorithm** // 3rd IEEE International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'16), April 6–8, 2016, Saint Julian's, Malta.

[8] *Амелин К. С., Баклановский М. В., Граничин О. Н., Иванский Ю. В., Корнивец А. Д., Мальковский Н. В., Найданов Д. Г., Шеин Р. Е.* Адаптивная

мультиагентная операционная система реального времени // Стохастическая оптимизация в информатике. 2013. Т. 9. №1. С. 3–16.

[9] *Иванский Ю. В.* Восстановление 3D-образов из скомпрессированных данных УЗИ // Стохастическая оптимизация в информатике. 2013. Т. 9. №1. С. 45–58.

[10] *Амелина Н. О., Корнивец А. Д., Иванский Ю. В., Тюшев К. И.* Применение консенсусного протокола для балансировки загрузки стохастической децентрализованной сети при передаче данных // В сб.: XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 8902–8911.

[11] *Ivanskiy Yu.* Consensus achievement for different task classes in multi-agent network // В книге: Управление, информация и оптимизация (VI ТМШ) Тезисы докладов Шестой Традиционной всероссийской молодежной летней Школы. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, Национальный комитет по автоматическому управлению, Лаборатория структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании МФТИ; под редакцией Б. Т. Поляка. 2014. С. 31.

[12] *Иванский Ю. В.* Дифференцированный консенсус в стохастической сети с приоритетами // Стохастическая оптимизация в информатике. 2014. Т. 10. №1. С. 9–29.

[13] *Иванский Ю. В.* Использование алгоритма типа стохастической аппроксимации для поиска оптимального шага протокола локального голосования при достижении дифференцированного консенсуса в мультиагентной сети со стоимостными ограничениями на топологию // Стохастическая оптимизация в информатике. 2015. Т. 11. №3. С. 18–38.