

На правах рукописи

Ясько Павел Петрович

**СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ И БЛИЗКИХ К
ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕШЕНИЙ В ОБЩЕЙ
ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ**

01.03.01 – астрометрия и небесная механика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Санкт–Петербург – 2016

Работа выполнена в Санкт–Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук, профессор
Орлов Виктор Владимирович

Официальные оппоненты:

Чернин Артур Давидович,
доктор физико–математических наук, профессор,
главный научный сотрудник отдела внегалактической астрономии Государственного
астрономического института им. П.К. Штенберга МГУ им. М.В. Ломоносова

Железнов Николай Борисович,
кандидат физико–математических наук,
старший научный сотрудник лаборатории малых тел Солнечной системы Института
прикладной астрономии РАН

Ведущая организация:

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ель-
цина

Защита состоится „14“ июня 2016 г. в 17 ч. 00 м. на заседании диссертационного сове-
та Д 212.232.15 при Санкт–Петербургском государственном университете по адресу:
198504, Санкт–Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, ауд. 2143
(Математико–механический факультет).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт–
Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт–Петербург,
Университетская наб., 7/9 и на сайте [https://dissert.spbu.ru/dissert/soiskatelyu-uchjonoj-
stepeni/dis-list/details/14/888.html](https://dissert.spbu.ru/dissert/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/details/14/888.html).

Автореферат разослан „ “ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико–математических наук

Миланова Ю.В.

Общая характеристика работы

Задача трех тел является классической задачей небесной механики. Сформулированная в 1687 году Ньютоном, она привлекала внимание многих выдающихся математиков, механиков и астрономов. Эйлер, Лагранж, Лаплас, Якоби, Хилл, Пуанкаре, Сундман, Биркхофф, Ляпунов, Колмогоров, Арнольд, Мозер и многие другие ученые посвятили этой задаче годы своих исследований. Общее решение задачи трех тел было получено Сундманом (1912) в виде равномерно и абсолютно сходящихся рядов. Однако, эти ряды сходятся чрезвычайно медленно, что означает их практическую непригодность. Наряду с попытками получить общее решение, предпринимались попытки получить решения различных частных случаев задачи, в которых накладывались дополнительные условия симметрии и упрощающие предположения. Одним из частных случаев задачи трех тел является система равных масс с нулевым угловым моментом.

Важную роль в динамике тройных систем играют периодические орбиты. Устойчивые периодические орбиты „притягивают“ к себе множества орбит с ограниченными движениями, а неустойчивые орбиты порождают хаос. Первые периодические решения в задаче трех тел с нулевым угловым моментом были найдены Шубартом (1956) для прямолинейной задачи, Бруком (1979) для равнобедренной задачи и Муром (1993) для общего случая. Исследования задачи трех тел равных масс с нулевым угловым моментом Шуваковым и Дмитришиновичем (2013) привели к обнаружению новых периодических орбит.

Диссертационная работа посвящена поиску периодических и близких к периодическим орбит в общей задаче трех тел равных масс с нулевым угловым моментом. Рассматривались два различных способа задания начальных условий: начальные скорости всех тел отличны от нуля; начальные скорости всех тел равны нулю (free-fall equal-mass three-body problem). Предложен и апробирован новый метод локализации начальных условий для близких к периодическим орбит. Разработанным методом были найдены области начальных условий, в которых, вероятно, содержатся начальные условия для периодических орбит. Обнаруженные близкие к периодическим орбиты были описаны и классифицированы по динамическим и геометрическим свойствам.

Актуальность работы

Исследования периодических орбит в задаче трех тел проводятся регулярно со времен Пуанкаре. В последние десятилетия интерес к этой тематике существенно вырос — появилось много работ, использующих качественные, аналитические и числен-

ные методы исследований. Непрерывный прогресс в вычислительной технике позволяет разрабатывать и применять все новые методы и подходы в поиске и изучении периодических решений. Совместное использование численных экспериментов и аналитических методов современной математики (вариационное исчисление, теория групп, функциональный анализ и др.) позволяет эффективно применять численно–аналитический подход для поиска периодических решений и исследования их свойств. Однако, в основном, в предыдущих работах рассматривались отдельные периодические орбиты в ограниченных областях начальных условий в различных частных случаях задачи трех тел. Например, в прямолинейной и равнобедренной задачах. Таким образом, представляется актуальным рассмотрение обобщающих случаев в задаче трех тел, локализация и классификация периодических орбит, выделение отдельных семейств периодических орбит, изучение зависимостей устойчивости, топологии, характера эволюции и динамики от начальных условий и параметров задачи.

Цели работы

Основной целью работы является поиск и исследование периодических и близких к периодическим орбит в общей задаче трех тел равных масс с нулевым угловым моментом. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие частные задачи:

1. исследование промежуточных областей между известными устойчивыми периодическими орбитами в пространстве начальных условий;
2. разработка и апробация нового алгоритма, позволяющего определять области начальных условий для близких к периодическим орбит с заданной точностью;
3. применение разработанного алгоритма для локализации начальных условий и определения периодов близких к периодическим орбит в общей задаче трех тел равных масс с нулевым угловым моментом;
4. проведение классификации обнаруженных орбит на основе их геометрических и динамических свойств, выделение семейств периодических орбит на основе этих свойств.

Научная новизна

1. Для двух переходных областей между устойчивыми периодическими орбитами показано отсутствие траекторий с ограниченными движениями и установле-

но, что время жизни долгоживущих тройных систем подчиняется степенному закону $f(T_e) \propto T_e^{-\alpha}$ с показателем $\alpha \approx 2$.

2. Разработан новый метод поиска периодических орбит, основанный на минимизации безразмерной функции, определяющей близость начальных и текущих координат в фазовом пространстве.
3. Впервые локализованы начальные условия для десятков близких к периодическим орбит в общей задаче трех тел равных масс с нулевым угловым моментом.
4. Обнаружены новые семейства близких к периодическим орбит и определены порождающие их орбиты.
5. Выполнена классификация орбит на основе сходства топологических свойств орбит.
6. Обнаружена и детально исследована переходная область между близкими к периодическим орбитами двух типов.

Научная и практическая ценность работы

В диссертационной работе предложен метод, позволяющий эффективно локализовать начальные условия для периодических решений и близких к ним в общей задаче трех тел. Кроме того, его можно применять для определения начальных условий близких к периодическим орбит в задаче N тел. Предложенный метод дополняет имеющиеся инструменты для поиска и исследования периодических орбит и близких к ним. Обнаруженные области начальных условий для близких к периодическим орбит представляют самостоятельную ценность для небесной механики и динамической астрономии. Предложенная в работе классификация периодических орбит позволяет проследить изменение топологии и геометрии орбит в зависимости от начальных условий и параметров задачи.

Результаты, выносимые на защиту

1. Предложен метод локализации начальных условий для близких к периодическим орбит.
2. Локализовано несколько десятков областей начальных условий, соответствующих орбитам, близким к периодическим.
3. Разработана классификация периодических орбит, основанная на их динамических и геометрических свойствах.

4. Показано, что в переходных областях между устойчивыми периодическими орбитами динамическая эволюция тройных систем завершается распадом системы, причем для долгоживущих систем распределение времени распада подчиняется степенному закону.

Достоверность результатов

В качестве критерия близости найденного решения к истинному периодическому принимается значение безразмерной функции, вычисленное в процессе численного интегрирования. Очевидно, что значение этой функции для точной периодической орбиты равно нулю. Достоверность полученных результатов также подтверждается согласием найденных нами решений с решениями, обнаруженными другими авторами, в том числе с использованием других методов и других способов задания начальных условий. Используемая в исследовании программа TRIPLE показала свою эффективность в многочисленных работах других авторов.

Апробация работы

Основные результаты работы неоднократно докладывались на семинаре Кафедры небесной механики СПбГУ, общегородском семинаре по звездной динамике и галактической астрономии, семинаре отдела небесной механики и динамической астрономии ГАО РАН.

Результаты работы докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях:

1. 45-я Международная студенческая научная конференция „Физика космоса“, Екатеринбург, 1–5 февраля, 2016.
2. International workshop „Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy“, Turku, Finland, 31 July, 2015.
3. Всероссийская научная конференция „Астрономия от ближнего космоса до космологических далей“, Москва, 25–30 мая, 2015.
4. Пятая Пулковская молодежная астрономическая конференция, Санкт-Петербург, 9–11 июня, 2014.
5. 43-я Международная студенческая научная конференция „Физика космоса“, Екатеринбург, 3–7 февраля, 2014.
6. Всероссийская астрономическая конференция „Многоликая Вселенная“ (ВАК-2013), Санкт-Петербург, 23–27 сентября, 2013.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих статьях, в том числе изданных в рецензируемом журнале из списка ВАК (статьи под номерами 2—5):

1. Ясько П.П. Новые близкие к периодическим орбиты в общей задаче трех тел. Известия ГАО в Пулкове. 2015. № 222. С. 125—133.
2. Ясько П.П., Орлов В.В. Тонкая структура области начальных условий для близких к периодическим орбит в общей задаче трех тел. *Астрономический журнал*. 2015. Т. 92. № 10. С. 858—866.
3. Ясько П.П., Орлов В.В. Поиск периодических орбит в области Агеяна–Аносовой для общей задачи трех тел. *Астрономический журнал*. 2015. Т. 92. № 5. С. 447—456.
4. Ясько П.П., Орлов В.В. Поиск периодических орбит в общей задаче трех тел. *Астрономический журнал*. 2014. Т. 91. № 11. С. 978—988.
5. Ясько П.П., Орлов В.В. Переходные области между устойчивыми периодическими решениями в общей задаче трех тел. *Астрономический журнал*. 2014. Т. 91. № 11. С. 969—977.
6. Ясько П.П., Орлов В.В. Периодические решения общей задачи трех тел с нулевым угловым моментом. Улугбековские чтения. Издательство Ташкентского университета. 2014. Т. 3. С. 130—135.

Результаты работы отражены также в следующих тезисах и трудах всероссийских и международных конференций:

1. Ясько П.П. Свойства близких к периодическим решений в общей задаче трех тел. Труды 45-й Международной студенческой научной конференции „Физика космоса“, Екатеринбург–Коуровка, 1–5 февраля 2016 г. Екатеринбург. 2016. С. 237.
2. Orlov V.V., Iasko P.P. Near to periodic orbits in the equal-mass free-fall three-body problem. Abstracts of international workshop „Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy“, Turku, Finland, 31 July, 2015. Turku, Finland. 2015. P. 34—37.
3. Ясько П.П., Орлов В.В. Близкие к периодическим орбиты в общей задаче трех тел. Сборник резюме докладов научной конференции „Астрономия от ближнего космоса до космологических далей“, Москва, 25–30 мая, 2015 г. Москва. 2015. С. 25—26.

4. Ясько П.П. Периодические орбиты в общей задаче трех тел. Труды 43-й Международной студенческой научной конференции „Физика космоса“, Екатеринбург–Коуровка, 3–7 февраля 2014 г. Екатеринбург. 2014. С. 213.
5. Ясько П.П., Орлов В.В. Связь между периодическими орбитами в общей задаче трех тел. Тезисы докладов Всероссийской астрономической конференции „Многоликая Вселенная“, Санкт-Петербург, 23–27 сентября 2013 г. Санкт-Петербург. 2013. С. 285.

Личный вклад автора

В совместных работах диссертант принимал участие в постановке задач, им были проведены все численные эксперименты. Анализ и обсуждение результатов проводились авторами совместно.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 101 страница. Диссертация содержит 5 таблиц и 51 рисунок. Библиография включает 86 наименований.

Содержание диссертации

Во *введении* обосновывается актуальность работы. Описывается постановка целей и задач диссертации, научная новизна, научная и практическая ценность исследования. Формулируются результаты, выносимые на защиту, приводятся сведения о публикациях и апробации работы с указанием личного вклада автора, а также краткое содержание диссертации.

В *первой главе* дан краткий исторический обзор изучения задачи трех тел и основных полученных результатов. Описана постановка задачи. Приводятся уравнения движения, интегралы движения, теорема вириала. Рассматриваются сингулярности уравнений движения, обусловленные двойными и тройными сближениями тел, а также различные методы регуляризации. Отдельно представлены результаты других авторов, полученные в процессе изучения периодических орбит. В частности, описан метод поиска периодических орбит при помощи минимизации функционала действия.

Вторая глава посвящена изучению задачи трех тел равных масс с нулевым угловым моментом. Начальная конфигурация системы задается таким образом, что все три тела лежат на одной прямой (сизигия), причем одно из них (центральное)

помещается в центр масс системы. Начальные условия для каждой рассматриваемой тройной системы задаются двумя параметрами: $k \in (0, 1)$ — вириальный коэффициент; $\varphi \in [0, \pi/2]$ — угол между вектором скорости центрального тела и прямой, на которой лежат все три тела. В частности, значения $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ соответствуют прямолинейной и равнобедренной задачам.

В начале главы исследуются две переходные области между известными областями устойчивости: между областями, связанными с орбитами Шубарта и Мура, и между областями, связанными с орбитами Брука и Мура. Обнаружено, что тройные системы, начальные условия для которых лежат внутри исследуемых переходных областей, распадаются на временах значительно меньших, чем системы с начальными условиями внутри областей устойчивости. Показано, что границы переходных областей могут быть как резкими, так и размытыми. Для определения границ переходных областей вычисляются времена T_e потери устойчивости для орбит с начальными условиями внутри этих областей. Оказалось, что для долгоживущих неустойчивых тройных систем распределения времени жизни T_e имеют степенной характер $f(T_e) \propto T_e^{-\alpha}$ при $\alpha \approx 2$, что согласуется с аналогичными исследованиями других авторов для других способов задания начальных условий.

В результате изучения отдельных траекторий с начальными условиями в переходных областях было выделено три основных этапа эволюции неустойчивых тройных систем. На первом этапе движения тел сходны с движениями, наблюдаемыми в ближайшей окрестности устойчивых периодических орбит. Затем витки траекторий заполняют область, ограниченную эллипсом с малым эксцентриситетом, причем центр эллипса совпадает с центром масс тройной системы. Эволюция системы завершается серией коротких выбросов компонентов с последующим далеким выбросом или уходом одного их тел. Приведены примеры типичных траекторий из переходных областей.

Способ задания начальных условий позволяет сканированием области (k, φ) обнаружить те начальные условия, которые соответствуют близким к периодическим решениям. Критерию близости к периодичности удовлетворяют такие решения, для которых в некоторый момент времени t значение безразмерной функции $\Phi(t)$ становится меньше заранее заданного критического значения Φ_{crit} :

$$\Phi(t)^2 = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{|\mathbf{r}_{i0} - \mathbf{r}_i|^2}{d^2} + \frac{|\dot{\mathbf{r}}_{i0} - \dot{\mathbf{r}}_i|^2}{(d/\tau)^2} \right] < \Phi_{crit}^2, \quad (1)$$

где d — средний размер тройной системы; τ — среднее время пересечения; \mathbf{r}_{i0} и \mathbf{r}_i — начальный и текущий радиус-векторы положения i -го тела ($i = 1, 2, 3$); $\dot{\mathbf{r}}_{i0}$ и $\dot{\mathbf{r}}_i$ — начальный и текущий радиус-векторы скорости i -го тела ($i = 1, 2, 3$). Значения $\Phi(t)$ определялись на каждом шаге численного интегрирования и в 19 промежуточных

точках с помощью квадратичной интерполяции. Величина t равна или кратна периоду T найденной близкой к периодической орбиты.

В результате сканирования области (k, φ) с шагами $\Delta k = \Delta \varphi = 0.001$ при $\Phi_{crit} = 0.03$ была обнаружена 21 область начальных условий, соответствующая близким к периодическим орбитам с периодами $T < 10\tau$. Для всех обнаруженных областей построены траектории движения тел, описаны динамические и геометрические свойства орбит. Среди найденных орбит 14 орбит были найдены другими авторами, 7 орбит обнаружены впервые.

Следующим этапом работы стало повторное сканирование области (k, φ) с более мелкими шагами $\Delta k = \Delta \varphi = 0.0001$ при значении $\Phi_{crit} = 0.003$ для орбит с периодами $T < 100\tau$. Было найдено несколько десятков областей начальных условий, соответствующим орбитам, близким к периодическим (рис. 1). Была обнаружена крупномасштабная структура распределения начальных условий: протяженная полоса, тянущаяся от начальных условий орбиты Шубарта $(k, \varphi) = (0.208, 0)$ к области начальных условий, соответствующих S -орбите $(k, \varphi) = (0.333, 0.656)$. Внутри этой структуры были обнаружены начальные условия для орбит с периодами, кратными периоду орбиты Шубарта $T = 0.90\tau$. При этом каждой вытянутой структуре, расположенной приблизительно ортогонально полосе, соответствует определенное значение периода. Близкие к периодическим орбиты, начальные условия которых расположены в пределах одной и той же вытянутой структуры, имеют одинаковое количество витков в течение одного периода.

При движении вдоль полосы в сторону семейства S -орбиты происходит качественное изменение топологии орбит, нарушается осевая симметрия. Нижняя часть полосы соответствует орбитам типа орбиты Шубарта, а верхняя часть — орбитам типа S -орбиты. Внутри полосы обнаружена переходная область, в которой лежат начальные условия для орбит, обладающих свойствами обоих семейств орбит. В переходной области не найдено орбит с периодами $T < 150\tau$.

На рис. 2 представлены примеры обнаруженных нами близких к периодическим орбит с начальными условиями из области (k, φ) . На рис. 2 и 4 используется следующая нотация: (а) — левый верхний рисунок, (б) — правый верхний рисунок, (в) — левый нижний рисунок, (г) — правый нижний рисунок.

В *третьей главе* рассматривается задача трех тел равных масс с нулевыми начальными скоростями (equal-mass free-fall three-body problem). В этом случае начальные условия определяются координатами (ξ, η) в области \mathbf{D} всех возможных конфигураций тройных систем (Агекян и Аносова, 1967). Проводилось сканирование прямоугольника $\xi \in (0, 0.5], \eta \in (0, \sqrt{3}/2]$, включающего в себя область \mathbf{D} , с шагами $\Delta \xi = \Delta \eta = 0.0001$ при значении $\Phi_{crit} = 0.03$. Фиксировались точки, для которых выполнялось условие (1). В результате было обнаружено 50 областей на-

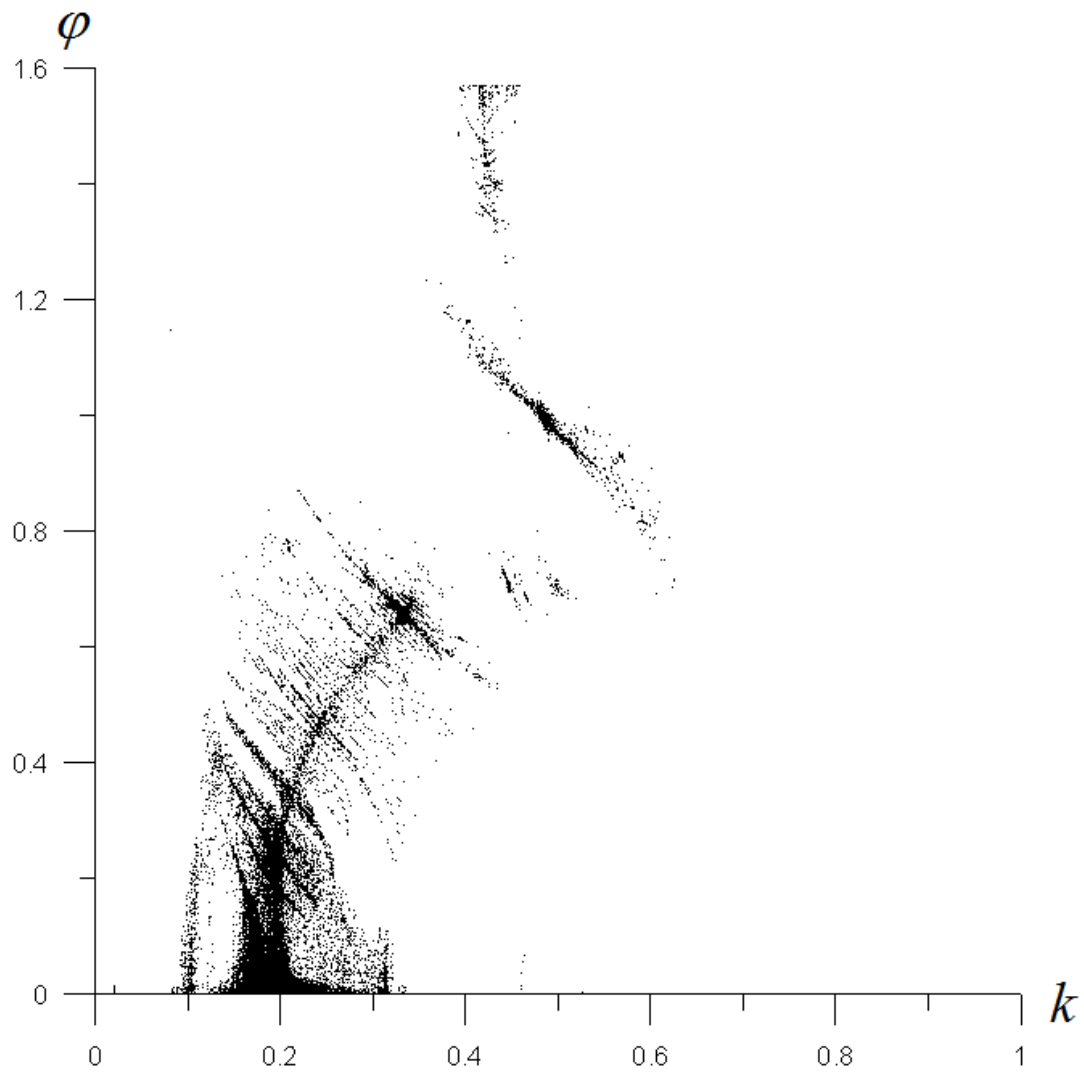


Рис. 1: Начальные условия (k, φ) для близких к периодическим орбит с периодами $T < 100\tau$.

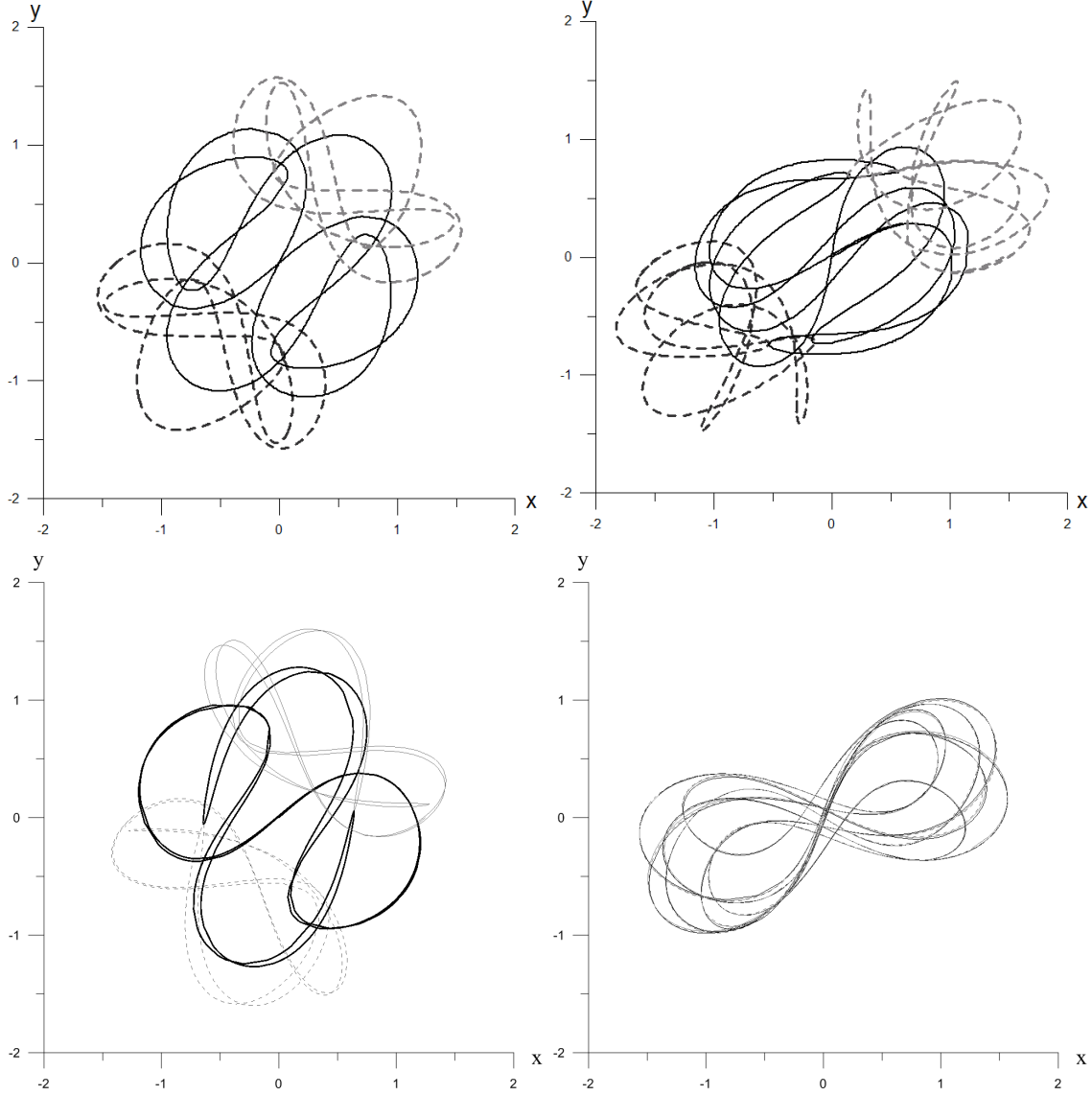


Рис. 2: (а) Орбита 6: $(k, \varphi) = (0.447, 0.706)$; $T = 4.39\tau$. (б) Орбита 10: $(k, \varphi) = (0.418, 0.545)$; $T = 5.37\tau$. (в) Орбита 27: $(k, \varphi) = (0.501, 0.713)$; $T = 6.08\tau$. (г) Орбита 31: $(k, \varphi) = (0.385, 1.188)$; $T = 11.73\tau$.

чальных условий (ξ, η) , которые соответствуют близким к периодическим орбитам с периодами $T < 100\tau$ (рис. 3). Среди них 18 орбит для прямолинейной задачи трех тел (точки лежат на оси 0ξ), 22 орбиты для равнобедренной задачи (точки лежат на окружности: $(\xi + 0.5)^2 + \eta^2 = 1$) и 10 орбит для общего случая (точки лежат вне границ области \mathbf{D}).

Все найденные орбиты исследовались методами символической динамики. В результате было выделено два основных типа периодических орбит: в момент времени $t = T/2$ происходит либо остановка всех трех тел, либо соударение двух тел и остановка третьего тела. Для начальных условий, соответствующих равнобедренной задаче, удалось найти несколько семейств орбит. В одном из семейств с увеличением периода

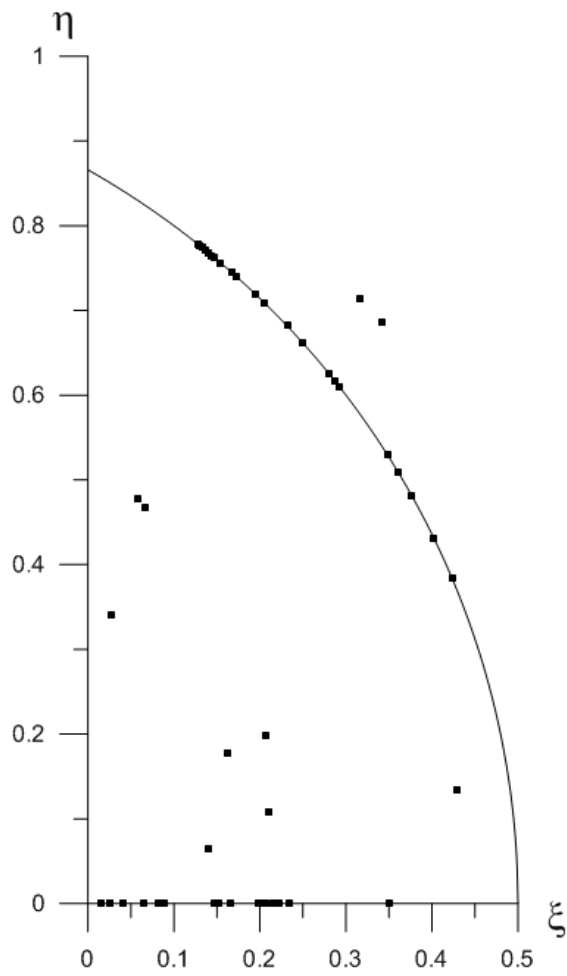


Рис. 3: Начальные условия (ξ, η) для близких к периодическим орбит с периодами $T < 100\tau$.

происходит чередование событий остановки и соударения в момент времени $t = T/2$. Начальные условия для орбит из этого семейства с ростом периода стремятся к вершине области \mathbf{D} и доходят до границы зоны быстрых распадов (Агемян и Аносова, 1977).

На рис. 4 представлены примеры обнаруженных нами близких к периодическим орбит с начальными условиями из области \mathbf{D} .

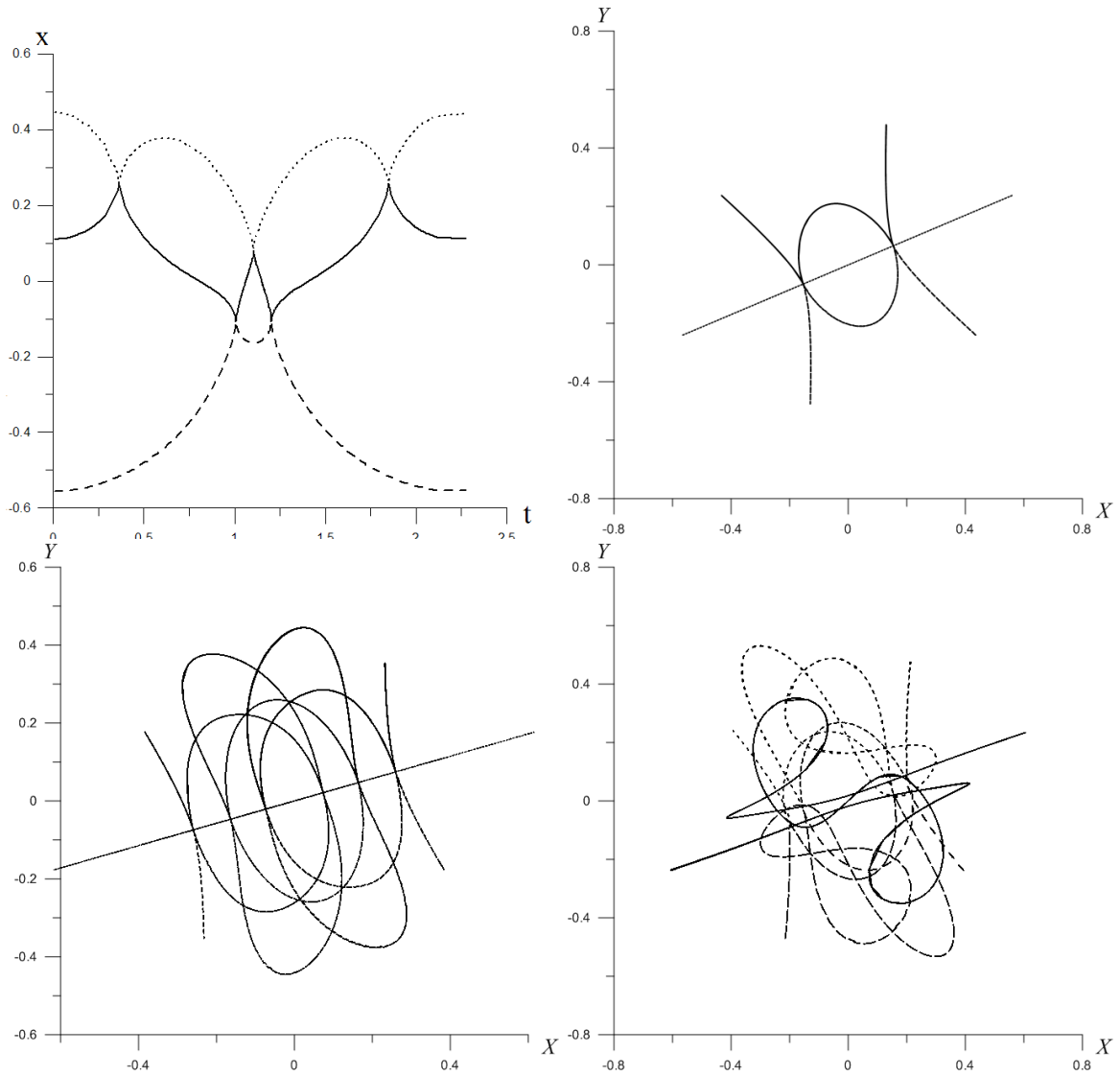


Рис. 4: (а) Орбита 9: $(\xi, \eta) = (0.1662, 0.0)$; $T = 2.21\tau$. (б) Орбита 20: $(\xi, \eta) = (0.1945, 0.7195)$; $T = 2.76\tau$. (в) Орбита 34: $(\xi, \eta) = (0.3481, 0.5298)$; $T = 9.30\tau$. (г) Орбита 46: $(\xi, \eta) = (0.3170, 0.7141)$; $T = 9.31\tau$.

В *заключении* излагаются основные результаты диссертации.

Литература

1. Агекян Т.А., Аносова Ж.П. Исследование динамики тройных систем методом статистических испытаний // Астрон. журн. 1967. Т. 44. С. 1261–1272.
2. Агекян Т.А., Аносова Ж.П. Начальная конфигурация и распад тройных систем // Труды АО ЛГУ. 1977. Т. 33. С. 52–61.
3. Broucke R. On the isosceles triangle configuration in the planar general three-body problem // Astron. and Astrophys. 1979. V. 73. P. 303–313.
4. Moore C. Braids in classical dynamics // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3675–3679.
5. Schubart von J. Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem // Astron. Nachr. 1956. V. 283. P. 17–22.
6. Sundman K. Memoire sur le problème des trois corps // Acta Math. 1912. V. 36. P. 105–179.
7. Šuvakov M., Dmitrašinović V. Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110. id. 114301.