На правах рукописи

Сейфуллаев Руслан Эльманович

Исследование нелинейных гибридных систем методом матричных неравенств

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель:	доктор технических наук, профессор **Фрадков Александр Львович**
Официальные оппоненты:	**Пакшин Павел Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, Арзамасский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева», заведующий кафедрой прикладной математики **Утина Наталья Валерьевна,** кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», старший преподаватель
Ведущая организация:	ФГБУН Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук

Защита состоится “__” ________ 2015 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д.33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан “____” ________ 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физ.-мат. наук, профессор

В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Современные системы управления, как правило, реализуются на компьютерах, в следствие чего их математические модели включают как непрерывную так и дискретную части, т.е. являются гибридными. При расчете и реализации таких систем возникает важная задача выбора шага (интервала) дискретизации, обеспечивающего устойчивость и приемлемое качество системы. Даже для линейных систем эта задача не является тривиальной, если требуется не просто доказать, что при достаточно малом шаге дискретности система сохраняет свойства непрерывной, а найти достаточно хорошие, «неконсервативные» оценки предельно допустимой величины шага дискретизации. Для нелинейных гибридных систем поставленная задача, несмотря на её важность, изучена недостаточно.

В последние годы в мировой литературе вырос интерес к подходу, основанному на преобразовании дискретно-непрерывного описания системы к виду систем с переменным (пилообразным) запаздыванием (метод переменного запаздывания). Идея подхода не нова: он применялся в работах А. Д. Мышкиса, Ю. В. Михеева, Э. М. Фридман, В. А. Соболева, а метод функционалов Ляпунова–Красовского широко применяется для анализа систем с запаздыванием. В начале 2000-х годов в работах Э.М. Фридман и ее соавторов были получены результаты с использованием обобщённого функционала Ляпунова–Красовского в сочетании с дескрипторным методом исследования систем с переменным запаздыванием. Подход приобрел эффективную расчетную составляющую, основанную на линейных матричных неравенствах (LMI), и превратился в мощный метод расчета, позволяющий существенно снизить консервативность оценок. Однако до недавних пор метод переменного запаздывания и его расширения применялись только к линейным системам. Даже для такого хорошо исследованного класса систем как системы Лурье с нелинейностями, удовлетворяющими секторным квадратичным связям, соответствующие результаты отсутствовали. В то же время секторным связям удовлетворяют многие важные классы нелинейностей, такие как синусоидальные нелинейности, насыщение, реле с зоной нечувствительности, квантование, кусочно-линейные функции и др.

Таким образом, распространение данного подхода на нелинейные системы является актуальной задачей.

Целью диссертационной работы является получение оценок шага дискретизации в гибридных системах, гарантирующего их экспоненциальную устойчивость, методом переменного запаздывания для различных классов нелинейных систем Лурье. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие **задачи**:

1. Получить условия на шаг квантования для обеспечения экспоненциальной устойчивости с заданной степенью затухания нелинейных многосвязных систем Лурье с дискретным регулятором;

2. Получить условия на шаг квантования для обеспечения робастной экспоненциальной устойчивости с заданной степенью затухания нелинейных многосвязных систем Лурье с дискретным регулятором;

3. Применить полученные результаты к исследованию систем дискретного управления механическими объектами;

4. Получить оценки точности достижения цели управления в задаче управления энергией маятника с помощью обратной связи с квантованием.

Методы исследований. Для достижения поставленной цели использовались методы теории управления: метод функционалов Ляпунова–Красовского, метод S-процедуры, метод матричных неравенств, метод скоростного градиента.

Научная новизна. На защиту выносятся следующие научные результаты работы:

1. Получены новые условия на шаг квантования для обеспечения экспоненциальной устойчивости с заданной степенью затухания нелинейных многосвязных систем Лурье с дискретным регулятором (Теоремы 2.1, 2.2) [1, 12];

2. Получены новые условия на шаг квантования для обеспечения робастной экспоненциальной устойчивости с заданной степенью затухания нелинейных многосвязных систем Лурье с дискретным регулятором [11];

3. Впервые получены оценки точности достижения цели управления в задаче управления энергией маятника с помощью обратной связи с квантованием (Теорема 4.2) [5].

Теоретическая значимость и практическая ценность. Полученные результаты распространяют метод переменного запаздывания на класс нелинейных систем в форме Лурье и позволяют найти допустимую величину шага дискретизации, при которой нелинейная многосвязная система Лурье с дискретным регулятором экспоненциально устойчива с заданной степенью затухания. Результаты применены к исследованию систем дискретного управления механическими объектами: управление маятником [12], робастное управление маятником с трением [11], синхронизация трех мобильных роботов [7], стабилизация маятника на тележке [2, 4, 10, 13], синхронизация систем «маятник на тележке», управляемых через сеть [14]. Полученные оценки на шаг дискретизации, при котором система экспоненциально устойчива, являются более точными в сравнение с оценками, полученными рядом других методов.

Результаты диссертации позволяют оценить точность достижения цели управления энергией маятника с помощью обратной связи с квантованием.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета СПбГУ, на семинарах лаборатории управления сложными системами ИПМаш РАН и на международных конференциях: 4th IFAC Workshop on Periodic and Control Systems, Antalya, Turkey, 2010; 14th International Student Olympiad on Automatic Control, Saint-Petersburg, 2011; 9th IFAC Symposium Advances in Control Education, Nizhny Novgorod, 2012; 5th IFAC Workshop on Periodic and Control Systems, Caen, France 2013; 19th IFAC World Congress, Cape Town, South Africa, 2014; 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control, Antibes, France, 2014.

Результаты диссертации были получены в ходе работы по ФЦП «Кадры» (гос. контракты NN 16.740.11.0042, 14.740.11.0942, соглашения NN 8846, 8855), при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты NN 11-08-01218, 14-08-01015) и Российского научного фонда (проект NN 14-29-00142) и использованы в перечисленных проектах.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ [1–14], в том числе 7 в изданиях из перечня научных журналов, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации основных научных результатов диссертаций, 7 работ в изданиях из баз цитирования Web of Science и Scopus. Основные результаты представлены на 12 российских и международных конференциях.

Работы [1, 6–8, 11, 12, 14] написаны в соавторстве. В работах [7, 14] Р. Э. Сейфуллаеву принадлежат формулировки результатов оценивания шага дискретизации, при котором нелинейная многосвязная система Лурье с дискретным регулятором экспоненциально устойчива, а также результаты численных экспериментов, в которых проверяется разрешимость линейных матричных неравенств. В [1, 11, 12] диссертанту принадлежат формулировки и доказательства теорем, а соавтору — постановка задачи и выбор методов решения. В работе [8] Р. Э. Сейфуллаеву принадлежит описание задачи управления роботом acrobot. В [6] диссертантом описана экспериментальная установка «маятник на тележке», соавтором – экспериментальная установка «Маятник Капицы».

Объем и структура работы. Диссертация объёмом 80 страниц состоит из введения, четырех глав, заключения, списка рисунков и списка литературы (72 источника).

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель и ставятся задачи работы, даётся обзор научной литературы по изучаемой проблеме, приводится краткое содержание работы по главам.

В первой главе приводятся вспомогательные сведения, относящиеся к системам с запаздыванием, даётся краткое описание методов пассификации и скоростного градиента, приводятся вспомогательные неравенства, используемые при получении основных результатов.

Во второй главе рассматривается задача оценивания шага квантования, обеспечивающего устойчивость нелинейных многосвязных систем Лурье с дискретным регулятором. В разделе 2.1 дается математическая постановка задачи. Рассматривается нелинейная система:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{N} q_i\xi_i(t) + (B + B_0\xi_0(t))\, u(t), \\ &\sigma_0(t) = r_0^T x(t), \quad \xi_0(t) = \varphi_0(\sigma_0(t), t), \\ &\sigma_i(t) = r_i^T x(t), \quad \xi_i(t) = \varphi_i(\sigma_i(t), t), \quad i = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – управляющий вектор, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – постоянные матрицы, $q_i \in \mathbb{R}^n, r_i \in \mathbb{R}^n, r_0 \in \mathbb{R}^n$ – постоянные векторы.

Делаются следующие предположения:

1. Для всех $t \geqslant 0$ график каждой функции $\xi_i = \varphi_i(\sigma_i, t)$ (где t рассматривается как параметр, а σ – как аргумент функции) расположен в двуполостном секторе между прямыми $\xi_i = \mu_{1i}\,\sigma_i$ и $\xi_i = \mu_{2i}\,\sigma_i$, где $\mu_{1i} < \mu_{2i}$ – некоторые вещественные числа. Таким образом, выполняется неравенство

$$\mu_{1i}\,\sigma_i^2 \leqslant \sigma_i\,\xi_i \leqslant \mu_{2i}\,\sigma_i^2, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

2. Нелинейная функция $\xi_0(t) = \varphi_0(\sigma_0(t), t)$ ограничена для всех $t \geqslant 0$:

$$\varphi_0^- \leqslant \xi_0(t) \leqslant \varphi_0^+.$$

3. Заданы последовательность моментов времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ \ldots$ и кусочно-постоянная функция управления

$$u(t) = u_d(t_k), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1},$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$.

4. Для некоторого $h \in \mathbb{R}$ $(h > 0)$ выполнены неравенства:

$$t_{k+1} - t_k \leqslant h \quad \forall k \geqslant 0.$$

Далее рассматривается закон управления в виде обратной связи

$$u(t) = Kx(t_k), \;\; t_k \leqslant t < t_{k+1}, \tag{3}$$

где $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, который переписывается в виде

$$u(t) = Kx(t - \tau(t)), \tag{4}$$

где $\tau(t) = t - t_k$, $t_k \leqslant t < t_{k+1}$.

Задача заключается в исследовании влияния величины верхней границы шага дискретизации h на устойчивость замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + (B + B_0\xi_0(t))\, Kx(t-\tau(t)) + \sum_{i=1}^{N} q_i\xi_i(t), \\ \sigma_0(t) &= r_0^T x(t), \quad \xi_0(t) = \varphi_0(\sigma_0(t), t), \\ \sigma_i(t) &= r_i^T x(t), \quad \xi_i(t) = \varphi_i(\sigma_i(t), t), \quad i = 1, \ldots, N, \\ \tau(t) &= t - t_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \end{aligned} \tag{5}$$

В разделе 2.2 формулируется и доказывается основной результат, который состоит в получении условий на шаг квантования для обеспечения экспоненциальной устойчивости с заданной степенью затухания системы (5). Вводятся обозначения:

$$\mathcal{B}(t) = B + B_0\xi_0(t), \quad \mathcal{B}^- = B + B_0\varphi_0^-, \quad \mathcal{B}^+ = B + B_0\varphi_0^+.$$

Предполагается, что P, Q – некоторые симметричные положительно определенные матрицы размера $n \times n$, P_2, P_3 – некоторые произвольные матрицы размера $n\times n$ и $\{\varkappa_{0\ i}^-\}_{i=1}^N$, $\{\varkappa_{0\ i}^+\}_{i=1}^N$, $\{\varkappa_{1\ i}^-\}_{i=1}^N$, $\{\varkappa_{1\ i}^+\}_{i=1}^N$ – положительные вещественные числа.

Рассматриваются следующие матрицы:

$$\Psi_{S0}^- = \begin{bmatrix} \Phi_{S1}^- & \Phi_{F12}^- & \Phi_{S2}^{-(1)} & \ldots & \Phi_{S2}^{-(N)} \\ * & \Phi_{F22|\tau(t)=0} & \Phi_{F23}^{(1)} & \ldots & \Phi_{F23}^{(N)} \\ * & * & \Phi_{S3}^{-(1)} & \ldots & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \ldots & \Phi_{S3}^{-(N)} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{S0}^+ = \begin{bmatrix} \Phi_{S1}^+ & \Phi_{F12}^+ & \Phi_{S2}^{+(1)} & \ldots & \Phi_{S2}^{+(N)} \\ * & \Phi_{F22|\tau(t)=0} & \Phi_{F23}^{(1)} & \ldots & \Phi_{F23}^{(N)} \\ * & * & \Phi_{S3}^{+(1)} & \ldots & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \ldots & \Phi_{S3}^{+(N)} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{S1}^{-}=\begin{bmatrix}\Phi_{S4}^{-} & \Phi_{F12}^{-} & \Phi_{S5}^{-(1)} & \dots & \Phi_{S5}^{-(N)} & -hP_2^T\mathcal{B}^{-}K\\ * & \Phi_{F22|\tau(t)=h} & \Phi_{F23}^{(1)} & \dots & \Phi_{F23}^{(N)} & -hP_3^T\mathcal{B}^{-}K\\ * & * & \Phi_{S6}^{-(1)} & \dots & 0 & 0\\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ * & * & 0 & \dots & \Phi_{S6}^{-(N)} & 0\\ * & * & 0 & \dots & 0 & -hQe^{-2\alpha h}\end{bmatrix},$$

$$\Psi_{S1}^{+}=\begin{bmatrix}\Phi_{S4}^{+} & \Phi_{F12}^{+} & \Phi_{S5}^{+(1)} & \dots & \Phi_{S5}^{+(N)} & -hP_2^T\mathcal{B}^{+}K\\ * & \Phi_{F22|\tau(t)=h} & \Phi_{F23}^{(1)} & \dots & \Phi_{F23}^{(N)} & -hP_3^T\mathcal{B}^{+}K\\ * & * & \Phi_{S6}^{+(1)} & \dots & 0 & 0\\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ * & * & 0 & \dots & \Phi_{S6}^{+(N)} & 0\\ * & * & 0 & \dots & 0 & -hQe^{-2\alpha h}\end{bmatrix},$$

где “$*$” обозначает симметричный блок симметричной матрицы, а

$$\begin{aligned}
\Phi_{F11}(t) &= P_2^T(A+\mathcal{B}(t)K)+(A+\mathcal{B}(t)K)^TP_2+2\alpha P,\\
\Phi_{F12}(t) &= P-P_2^T+(A+\mathcal{B}(t)K)^TP_3,\\
\Phi_{F13}^{(i)} &= P_2^Tq_i,\quad \Phi_{F23}^{(i)}=P_3^Tq_i,\quad i=1,\dots,N,\\
\Phi_{F22}(t) &= -P_3-P_3^T+(h-\tau(t))Q,\\
\Phi_{F11}^{-} &= \Phi_{F11}(t)|_{\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}^{-}},\quad \Phi_{F11}^{+}=\Phi_{F11}(t)|_{\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}^{+}},\\
\Phi_{F12}^{-} &= \Phi_{F12}(t)|_{\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}^{-}},\quad \Phi_{F12}^{+}=\Phi_{F12}(t)|_{\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}^{+}},\\
\Phi_{S1}^{-} &= \Phi_{F11}^{-}-\sum_{i=1}^{N}\varkappa_{0\ i}^{-}\mu_{1i}\mu_{2i}r_ir_i^T,\quad \Phi_{S1}^{+}=\Phi_{F11}^{+}-\sum_{i=1}^{N}\varkappa_{0\ i}^{+}\mu_{1i}\mu_{2i}r_ir_i^T,\\
\Phi_{S2}^{-(i)} &= P_2^Tq_i+\frac{1}{2}\varkappa_{0\ i}^{-}(\mu_{1i}+\mu_{2i})r_i,\quad \Phi_{S3}^{-(i)}=-\varkappa_{0\ i}^{-},\\
\Phi_{S2}^{+(i)} &= P_2^Tq_i+\frac{1}{2}\varkappa_{0\ i}^{+}(\mu_{1i}+\mu_{2i})r_i,\quad \Phi_{S3}^{+(i)}=-\varkappa_{0\ i}^{+},\\
\Phi_{S4}^{-} &= \Phi_{F11}^{-}-\sum_{i=1}^{N}\varkappa_{1\ i}^{-}\mu_{1i}\mu_{2i}r_ir_i^T,\quad \Phi_{S4}^{+}=\Phi_{F11}^{+}-\sum_{i=1}^{N}\varkappa_{1\ i}^{+}\mu_{1i}\mu_{2i}r_ir_i^T,\\
\Phi_{S5}^{-(i)} &= P_2^Tq_i+\frac{1}{2}\varkappa_{1\ i}^{-}(\mu_{1i}+\mu_{2i})r_i,\quad \Phi_{S6}^{-(i)}=-\varkappa_{1\ i}^{-},\\
\Phi_{S5}^{+(i)} &= P_2^Tq_i+\frac{1}{2}\varkappa_{1\ i}^{+}(\mu_{1i}+\mu_{2i})r_i,\quad \Phi_{S6}^{+(i)}=-\varkappa_{1\ i}^{+}.
\end{aligned}$$

Теорема 2.1. *Пусть для заданного $\alpha>0$ существуют матрицы $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $(P>0)$, $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $(Q>0)$, $P_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $P_3\in\mathbb{R}^{n\times n}$, а также положительные вещественные числа $\left\{\varkappa_{0\ i}^{-}\right\}_{i=1}^{N}$, $\left\{\varkappa_{0\ i}^{+}\right\}_{i=1}^{N}$, $\left\{\varkappa_{1\ i}^{-}\right\}_{i=1}^{N}$ и $\left\{\varkappa_{1\ i}^{+}\right\}_{i=1}^{N}$ такие, что следующие линейные матричные неравенства:*

$$\Psi_{S0^{-}}<0,\quad \Psi_{S0^{+}}<0,\quad \Psi_{S1^{-}}<0,\quad \Psi_{S1^{+}}<0$$

выполнены. Тогда система (5) экспоненциально устойчива в целом со скоростью затухания α.

Далее рассматривается более сложный случай, позволяющий добиться более точных результатов за счет использования “расширенного” функционала Ляпунова-Красовского, предложенного Э.М. Фридман[1].

Предполагается, что $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y_3^{(i)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(i = 1, \ldots, N)$ и $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – некоторые матрицы.

Рассматриваются следующие матрицы:

$$\Theta = \begin{bmatrix} P + h\frac{X+X^T}{2} & hX_1 - hX \\ * & -hX_1 - hX_1^T + h\frac{X+X^T}{2} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{H0}^{-} = \begin{bmatrix} \Phi^{-}_{H1|\tau(t)=0} & \Phi_{12|\tau(t)=0} & \Phi^{-}_{13|\tau(t)=0} & \Phi^{-(1)}_{H2} & \ldots & \Phi^{-(N)}_{H2} \\ * & \Phi_{22|\tau(t)=0} & \Phi^{-}_{23|\tau(t)=0} & \Phi^{(1)}_{24} & \ldots & \Phi^{(N)}_{24} \\ * & * & \Phi_{33|\tau(t)=0} & \Phi^{(1)}_{34} & \ldots & \Phi^{(N)}_{34} \\ * & * & * & \Phi^{-(1)}_{H3} & \ldots & 0 \\ * & * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & 0 & \ldots & \Phi^{-(N)}_{H3} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{H0}^{+} = \begin{bmatrix} \Phi^{+}_{H1|\tau(t)=0} & \Phi_{12|\tau(t)=0} & \Phi^{+}_{13|\tau(t)=0} & \Phi^{+(1)}_{H2} & \ldots & \Phi^{+(N)}_{H2} \\ * & \Phi_{22|\tau(t)=0} & \Phi^{+}_{23|\tau(t)=0} & \Phi^{(1)}_{24} & \ldots & \Phi^{(N)}_{24} \\ * & * & \Phi_{33|\tau(t)=0} & \Phi^{(1)}_{34} & \ldots & \Phi^{(N)}_{34} \\ * & * & * & \Phi^{+(1)}_{H3} & \ldots & 0 \\ * & * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & 0 & \ldots & \Phi^{+(N)}_{H3} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{H1}^{-} = \begin{bmatrix} \Phi^{-}_{H4|\tau(t)=h} & \Phi_{12|\tau(t)=h} & \Phi^{-}_{13|\tau(t)=h} & \Phi^{-(1)}_{H5} & \ldots & \Phi^{-(N)}_{H5} & hY_1^T \\ * & \Phi_{22|\tau(t)=h} & \Phi^{-}_{23|\tau(t)=h} & \Phi^{(1)}_{24} & \ldots & \Phi^{(N)}_{24} & hY_2^T \\ * & * & \Phi_{33|\tau(t)=h} & \Phi^{(1)}_{34} & \ldots & \Phi^{(N)}_{34} & hR^T \\ * & * & * & \Phi^{-(1)}_{H6} & \ldots & 0 & hq_1^T {Y_3^{(1)}}^T \\ * & * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & 0 & \ldots & \Phi^{-(N)}_{H6} & hq_N^T {Y_3^{(N)}}^T \\ * & * & * & * & * & * & -hQe^{-2\alpha h} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{H1}^{+} = \begin{bmatrix} \Phi^{+}_{H4|\tau(t)=h} & \Phi_{12|\tau(t)=h} & \Phi^{+}_{13|\tau(t)=h} & \Phi^{+(1)}_{H5} & \ldots & \Phi^{+(N)}_{H5} & hY_1^T \\ * & \Phi_{22|\tau(t)=h} & \Phi^{+}_{23|\tau(t)=h} & \Phi^{(1)}_{24} & \ldots & \Phi^{(N)}_{24} & hY_2^T \\ * & * & \Phi_{33|\tau(t)=h} & \Phi^{(1)}_{34} & \ldots & \Phi^{(N)}_{34} & hR^T \\ * & * & * & \Phi^{+(1)}_{H6} & \ldots & 0 & hq_1^T {Y_3^{(1)}}^T \\ & * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & 0 & \ldots & \Phi^{+(N)}_{H6} & hq_N^T {Y_3^{(N)}}^T \\ * & * & * & * & * & * & -hQe^{-2\alpha h} \end{bmatrix},$$

[1]Fridman, E. A Refined Input Delay Approach to Sampled-Data Control / E. Fridman // Automatica. — 2010. — Vol. 46, no. 2. — P. 421–427.

где

$$\Phi_{11}(t) = A^TP_2 + P_2^TA + 2\alpha P - Y_1 - Y_1^T - (1-2\alpha(h-\tau(t)))\frac{X+X^T}{2},$$

$$\Phi_{12}(t) = P - P_2^T + A^TP_3 - Y_2 + (h-\tau(t))\frac{X+X^T}{2},$$

$$\Phi_{13}(t) = Y_1^T + P_2^T\mathcal{B}(t)K - R + (1-2\alpha(h-\tau(t)))(X-X_1),$$

$$\Phi_{22}(t) = -P_3 - P_3^T + (h-\tau(t))Q,$$

$$\Phi_{23}(t) = Y_2^T + P_3^T\mathcal{B}(t)K - (h-\tau(t))(X-X_1),$$

$$\Phi_{33}(t) = R + R^T - (1-2\alpha(h-\tau(t)))\frac{X+X^T-2X_1-2X_1^T}{2},$$

$$\Phi_{14}^{(i)} = P_2^T\,q_i - Y_3^{(i)}q_i, \quad \Phi_{24}^{(i)} = P_3^Tq_i, \quad \Phi_{34}^{(i)} = Y_3^{(i)}q_i, \quad i=1,\dots,N,$$

$$\Phi_{13}^{-}(t) = Y_1^T + P_2^T\mathcal{B}^{-}K - R + (1-2\alpha(h-\tau(t)))(X-X_1),$$

$$\Phi_{13}^{+}(t) = Y_1^T + P_2^T\mathcal{B}^{+}K - R + (1-2\alpha(h-\tau(t)))(X-X_1),$$

$$\Phi_{23}^{-}(t) = Y_2^T + P_3^T\mathcal{B}^{-}K - (h-\tau(t))(X-X_1),$$

$$\Phi_{23}^{+}(t) = Y_2^T + P_3^T\mathcal{B}^{+}K - (h-\tau(t))(X-X_1),$$

$$\Phi_{H1}^{-}(t) = \Phi_{11}(t) - \sum_{i=1}^{N}\varkappa_{0\ i}^{-}\mu_{1i}\mu_{2i}r_ir_i^T, \quad \Phi_{H1}^{+}(t) = \Phi_{11}(t) - \sum_{i=1}^{N}\varkappa_{0\ i}^{+}\mu_{1i}\mu_{2i}r_ir_i^T,$$

$$\Phi_{H2}^{-(i)} = \Phi_{14}^{(i)} + \frac{1}{2}\varkappa_{0\ i}^{-}(\mu_{1i}+\mu_{2i})r_i, \quad \Phi_{H2}^{+(i)} = \Phi_{14}^{(i)} + \frac{1}{2}\varkappa_{0\ i}^{+}(\mu_{1i}+\mu_{2i})r_i,$$

$$\Phi_{H3}^{-(i)} = -\varkappa_{0\ i}^{-}, \quad \Phi_{H3}^{+(i)} = -\varkappa_{0\ i}^{+},$$

$$\Phi_{H4}^{-} = \Phi_{11}(t) - \sum_{i=1}^{N}\varkappa_{0\ i}^{-}\mu_{1i}\mu_{2i}r_ir_i^T, \quad \Phi_{H4}^{+} = \Phi_{11}(t) - \sum_{i=1}^{N}\varkappa_{0\ i}^{+}\mu_{1i}\mu_{2i}r_ir_i^T,$$

$$\Phi_{H5}^{-(i)} = \Phi_{14}^{(i)} + \frac{1}{2}\varkappa_{1\ i}^{-}(\mu_{1i}+\mu_{2i})r_i, \quad \Phi_{H5}^{+(i)} = \Phi_{14}^{(i)} + \frac{1}{2}\varkappa_{1\ i}^{+}(\mu_{1i}+\mu_{2i})r_i,$$

$$\Phi_{H6}^{-(i)} = -\varkappa_{1\ i}^{-}, \quad \Phi_{H6}^{+(i)} = -\varkappa_{1\ i}^{+}, \quad i=1,\dots,N.$$

Теорема 2.2. *Пусть для заданного $\alpha > 0$ существуют матрицы $P \in I\!R^{n\times n}$ $(P > 0)$, $Q \in I\!R^{n\times n}$ $(Q > 0)$, $P_2 \in I\!R^{n\times n}$, $P_3 \in I\!R^{n\times n}$, $X \in I\!R^{n\times n}$, $X_1 \in I\!R^{n\times n}$, $R \in I\!R^{n\times n}$, $Y_1 \in I\!R^{n\times n}$, $Y_2 \in I\!R^{n\times n}$ и $Y_3^{(i)} \in I\!R^{n\times n}$ (i=1,...,N), а также положительные вещественные числа $\left\{\varkappa_{0\ i}^{-}\right\}_{i=1}^{N}$, $\left\{\varkappa_{0\ i}^{+}\right\}_{i=1}^{N}$, $\left\{\varkappa_{1\ i}^{-}\right\}_{i=1}^{N}$ и $\left\{\varkappa_{1\ i}^{+}\right\}_{i=1}^{N}$ такие, что следующие линейные матричные неравенства:*

$$\Theta > 0, \quad \Psi_{H0}^{-} < 0, \quad \Psi_{H0}^{+} < 0, \quad \Psi_{H1}^{-} < 0, \quad \Psi_{H1}^{+} < 0$$

выполнены. Тогда система (5) экспоненциально устойчива в целом со скоростью затухания α.

Замечание 2.2. *Полученные результаты могут быть применены к случаю наличия запаздывания в дискретных измерениях. Пусть для некоторого $h_1 \in I\!R$ $(h_1 > 0)$ выполнено*

$$t_{k+1} - t_k \leqslant h_1, \quad \forall k \geqslant 0.$$

Рассмотрим закон обратной связи

$$u(t) = Kx(t_k - \tau_k), \;\; t_k \leqslant t < t_{k+1}, \tag{6}$$

где $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *– матрица усилений,* τ_k *– постоянное на каждом интервале* $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ *запаздывание такое, что* $0 \leqslant \tau_k \leqslant h_2, \quad \forall k \geqslant 0.$

Закон (6) *можно переписать следующим образом:*

$$u(t) = Kx(t - \tau(t)),$$

где $\tau(t) = t - t_k + \tau_k,\ t_k \leqslant t < t_{k+1},\ \ 0 \leqslant \tau(t) \leqslant h_1 + h_2$*. В итоге получаем, что данный случай можно свести к предыдущему, положив* $h = h_1 + h_2$*.*

В разделе 2.3 проводится анализ робастной экспоненциальной устойчивости с заданной степенью затухания нелинейной многосвязной системы Лурье с регулятором (3). Рассматривается нелинейная система с неопределенностями:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)\,x(t) + \sum_{i=1}^{k_1}(\tilde{q}_i + \Delta\tilde{q}_i)\,\tilde{\xi}_i(t) + \Big(B + \Delta B\tilde{\xi}_0(t)\Big)\,u(t),\\
\tilde{\sigma}_0(t) &= \tilde{r}_0^T x(t), \quad \tilde{\xi}_0(t) = \tilde{\varphi}_0(\tilde{\sigma}_0(t), t),\\
\tilde{\sigma}_i(t) &= \tilde{r}_i^T x(t), \quad \tilde{\xi}_i(t) = \tilde{\varphi}_i(\tilde{\sigma}_i(t), t), \quad i = 1, \ldots, k_1,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор управлений, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – постоянные известные матрицы, $\tilde{q}_i \in \mathbb{R}^n, \tilde{r}_i \in \mathbb{R}^n, \tilde{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ – постоянные известные векторы.

Помимо предположений 1–4, делается предположение, что неопределенности $\Delta A, \Delta\tilde{q}_i, \Delta B$ имеют следующую структуру:

$$\Delta A = \sum_{l=1}^{k_2} \bar{q}_l\, a_l\, \bar{r}_l^T, \quad \Delta B = B_0\, b, \quad \Delta\tilde{q}_i = \sum_{j=1}^{k_3} \bar{q}_{ij}\, a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k_1, \tag{8}$$

где $\bar{q}_l \in \mathbb{R}^n, \bar{r}_l \in \mathbb{R}^n (l = 1, \ldots, k_2)$, $\bar{q}_{ij} \in \mathbb{R}^n, (i = 1, \ldots, k_1, \quad j = 1, \ldots, k_3)$ – известные постоянные векторы, $B_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – известная постоянная матрица, и a_l, a_{ij}, b – неизвестные вещественные числа, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$0 < a_l^- \leqslant a_l \leqslant a_l^+, \quad 0 < a_{ij}^- \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij}^+, \quad 0 < b^- \leqslant b \leqslant b^+, \tag{9}$$

где $a_l^-, a_l^+, a_{ij}^-, a_{ij}^+, b^-, b^+\ (l = 1, \ldots, k_2, \quad i = 1, \ldots, k_1, \quad j = 1, \ldots, k_3)$ – известные положительные вещественные числа (случай, когда они могут быть отрицательными, также может быть сведен к текущему).

В результате, система (7) сводится к виду (1), и полученные теоремы распространяются на случай исследования робастной устойчивости.

В третьей главе полученные результаты применяются к различным задачам управления механическими объектами. Для всех рассматриваетмых систем путем анализа разрешимости систем линейных матричных неравенств, приведенных в Главе 2, находится верхняя граница шага дискретизации, при котором система экспоненциально устойчива с достаточно малой степенью затухания.

В разделе 3.1 рассматривается задача стабилизации маятника в вертикальном положении с помощью дискретной обратной связи.

В разделе 3.2 исследуется задача робастной стабилизации в вертикальном положении маятника с трением с помощью дискретного регулятора в различных случаях: случае известных параметров, случае неизвестного коэффициента трения, случае неизвестной массы маятника, случае неизвестной длины маятника, а также в случае неизвестного коэффициента трения, длины и массы одновременно. Кроме того полученные оценки являются более точными в сравнение с оценками, полученными с помощью метода представления нелинейностей в качестве политопической неопределенности, предложенного Э. М. Фридман.

В разделе 3.3 рассмотрена задача синхронизации трех мобильных роботов в случае постоянного шага дискретизации.

В разделе 3.4 изучается система «маятник на тележке», где решается задача раскачки и дискретной стабилизации маятника и тележки. Также для этой системы приводятся описания экспериментальных лабораторных установок Lego Mindstorms NXT, позволяющих проводить натурные эксперименты, наглядно демонстрирующие результаты полученных алгоритмов.

В разделе 3.5 представлен пример сетевого управления синхронизацией двух систем «маятник на тележке».

В четвертой главе рассматривается задача управления энергией Гамильтоновых систем в случае квантованных измерений сигнала. Подход продемонстрирован на примере управления энергией маятника с помощью обратной связи с квантованием, содержащем в себе все трудности, характерные для нелинейных частично-устойчивых систем.

В разделе 4.1 предлагается постановка задачи. Рассматривается уравнение маятника

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t) + \frac{1}{ml^2}u(t), \qquad (10)$$

где φ – угол отклонения ($\varphi = 0$ в нижнем положении), u – управляющий вращающий момент, g – гравитационная постоянная, m и l – масса и длина маятника соответственно. Предполагается, что $H(\varphi, \dot{\varphi})$ – полная энергия маятника, т.е.

$$H(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi).$$

Рассматривается задача стабилизации уровня энергии системы (10). Предполагается, что $z = [\varphi, \dot{\varphi}]^T$, $z \in \mathbb{R}^2$, и h ($h < 2mgl$) – некоторое положительное число. Рассматривается множество $X_h = \{z : 0 < H(z) \leqslant h\}$. Предполагается, что H_* $(0 < H_* < h)$ – целевой уровень энергии, а целевая функция выглядит следующим образом: $V(z) = \dfrac{1}{2}\left(H(z) - H_*\right)^2$. Требуется найти закон обратной связи $u = U(z)$, обеспечивающий достижение цели управления

$$\lim_{t\to\infty} V\left(z(t, z_0)\right) = 0. \tag{11}$$

Алгоритм управления основан на *методе скоростного градиента*, предложенном А. Л. Фрадковым в 1979 г., и выглядит следующим образом:

$$u = U(z) = -\gamma \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\gamma\left(H(z) - H_*\right) B^T z, \tag{12}$$

где $\gamma > 0$ и $B = [0,\ 1]^T$.

Далее предполагается, что множество $\mathcal{Z} = \{z_i : z_i \in X_h, i \in \mathbb{N}\} \bigcup z_{sat}$ является конечным подмножеством множества $X_h \bigcup z_{sat}$, где $z_{sat} \in \mathbb{R}^2$, и рассматривается следующий квантователь: $q(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{Z}$. Также предполагается, что $Z_i = \left\{z \in \mathbb{R}^2 : q(z) = z_i\right\}$ – области квантования такие, что $\bigcup Z_i = X_h$. Следовательно, $q(z) = z_i$ для всех $z \in Z_i$, $i \in \mathbb{N}$. Когда z не принадлежит объединению областей квантования, квантователь насыщается, т.е. $q(z) = z_{sat}$, если $z \notin X_h$.

Предполагается, что для измерения вектора состояния z доступны только квантованные сигналы $q(z)$. Тогда закон управления (12) не применим. Следовательно, вместо непрерывного управления (12) рассматривается квантованный по состоянию закон (12):

$$u = U(q(z)) = -\gamma\left(H(q(z)) - H_*\right) B^T q(z). \tag{13}$$

Таким образом, требуется исследовать условия достижимости цели управления (11) с помощью квантованного по состоянию закона управления (13). Также отмечается, что поскольку квантование осуществляется по состоянию, правая часть дифференциального уравнения (10), (13) является разрывной. Решения дифференциального уравнения (10), (13) понимаются по Филиппову.

В разделе 4.2 сформулирован и доказан основной результат, состоящий в получении оценок как для границы ошибки квантизации, так и для границ области притяжения и области начальных данных.

Предполагается, что $e(z) = q(z) - z = [e_1(z),\ e_2(z)]^T$ – вектор ошибки квантования, и квантователь выбран таким образом, что

$$|e_1(z)| \leqslant \Delta_1, \quad |e_2(z)| \leqslant \Delta_2 \quad \text{для всех } z \in X_h.$$

Следовательно, $|e(z)| \leqslant \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} = \Delta$ для всех $z \in X_h$.

Закон (13) переписывается следующим образом: $U(q(z)) = U(z) + e_u(z)$, при этом имеет место неравенство $|e_u(z)| \leqslant \gamma\,\Delta_e$ для всех $z \in X_h$, где $\Delta_e = \frac{1}{2}ml^2\Delta_2^3 + \frac{3l\sqrt{2mh}}{2}\Delta_2^2 + (4h - H_*)\Delta_2 + 2g\sqrt{2mh}\sin\frac{\delta}{2}$. Для множества $\{z \in X_h : a \leqslant H(z) \leqslant b\}$, где $b > a \geqslant 0$ – некоторые числа, вводится обозначение $H^{-1}_{[a,b]}$.

Предполагается, что h_* – некоторая положительная константа, удовлетворяющая условию $h_* < \min\{H_*, h - H_*\}$. Рассматриваются следующие функции скалярной переменной y:

$$
\begin{aligned}
f_1(y) &= H_* - h_* - \frac{3ml^2\,\Delta_e^2}{y^2},\\
f_2(y) &= \frac{g}{l}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{f_0(y)}{mgl}\right)^2} - \frac{\gamma\Delta_e}{ml^2}\left(\frac{h_*\sqrt{6}}{y} + 1\right),\\
&\quad \text{где } f_0(y) = \min\left\{2mgl - H_* - h_*,\ f_1(y)\right\},\\
f_3(y) &= 4h_*^2 - y^2 - \frac{16\sqrt{6}\,\gamma\,\Delta_e^3}{f_2(y)\,y},\\
f_4(y) &= \frac{1}{12}\,y^2\arccos\left(1 - \frac{f_1(y)}{mgl}\right)f_2(y) - \Delta_e^2.
\end{aligned}
$$

Основной результат заключается в следующей теореме.

Теорема 4.2. *Пусть следующая система неравенств*

$$
0 < y < 2h_*, \quad f_1(y) > 0, \quad f_2(y) > 0, \quad f_3(y) > 0, \quad f_4(y) > 0 \qquad (14)
$$

разрешима относительно y. Тогда для любого решения $y = h_1$ системы (14) *и любых начальных условиях $z(0) \in H^{-1}_{[H_*-\varkappa_2, H_*+\varkappa_2]}$ траектории замкнутой системы* (10), (13) *удовлетворяют $z(t) \in H^{-1}_{[H_*-h_*, H_*+h_*]}$ для всех $t \geqslant 0$, и существует $T > 0$ такое, что $z(t) \in H^{-1}_{[H_*-\varkappa_1, H_*+\varkappa_1]}$ для всех $t \geqslant T$, где*

$$
\varkappa_1 = \sqrt{\frac{1}{4}h_1^2 + \frac{2\sqrt{6}\,\gamma\,\Delta_e^3}{h_1 f_2(h_1)}}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{h_*^2 - \frac{2\sqrt{6}\,\gamma\,\Delta_e^3}{h_1 f_2(h_1)}}.
$$

Следствие 4.1. *Для любых $\tilde{\varkappa}_1, \tilde{\varkappa}_2$, удовлетворяющих $\tilde{\varkappa}_1 < \tilde{\varkappa}_2 < h_*$, существуют достаточно малые Δ_1, Δ_2 такие, что для любых начальных условий $z(0) \in H^{-1}_{[H_*-\tilde{\varkappa}_2, H_*+\tilde{\varkappa}_2]}$ траектории замкнутой системы* (10), (13) *удовлетворяют $z(t) \in H^{-1}_{[H_*-h_*, H_*+h_*]}$ для всех $t \geqslant 0$, и существует $T > 0$ такое, что $z(t) \in H^{-1}_{[H_*-\tilde{\varkappa}_1, H_*+\tilde{\varkappa}_1]}$ для всех $t \geqslant T$.*

В разделе 4.3 приводятся численные примеры, в которых подробно и наглядно демонстрируются результаты Теоремы 4.2.

В заключении приведены основные результаты работы.

Заключение

В результате исследования получены новые условия на шаг квантования для обеспечения экспоненциальной устойчивости с заданной степенью затухания, а также экспоненциальной робастной устойчивости с заданной степенью затухания, нелинейных многосвязных систем Лурье с дискретным регулятором. Эффективность результатов продемонстрирована в задачах дискретного управления следующими механическими объектами: управление маятником, робастное управление маятником с трением, синхронизация трех мобильных роботов, стабилизация маятника на тележке, синхронизация систем «маятник на тележке», управляемых через сеть. Также продемонстрирован подход, позволяющий оценить точность достижения цели управления энергией маятника с помощью обратной связи с квантованием.

Публикации автора по теме диссертации

1. **Сейфуллаев, Р. Э. Анализ дискретно-непрерывных нелинейных многосвязных систем на основе линейных матричных неравенств / Р. Э. Сейфуллаев, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 6. — С. 57–74.**

2. Сейфуллаев, Р. Э. Исследование устойчивости гибридных нелинейных систем с помощью S-процедуры и линейных матричных неравенств / Р. Э. Сейфуллаев // Материалы 5-ой Российской мультиконференции по проблемам управления. Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах . — 2012. — С. 223–226.

3. Сейфуллаев, Р. Э. Управление колебательными системами методом скоростного градиента с реализацией на базе LEGO Mindstorms NXT / Р. Э. Сейфуллаев // Материалы 7-ой научно-технической конференции «Мехатроника, автоматизация, управление». — 2010. — С. 349–352.

4. Сейфуллаев, Р. Э. Управление нелинейным осциллятором методом скоростного градиента / Р. Э. Сейфуллаев // Материалы XII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». — 2010. — С. 220–226.

5. Сейфуллаев, Р. Э. Управление энергией маятника с помощью обратной связи с квантованием / Р. Э. Сейфуллаев // XVII конференция молодых ученых «Навигация и управление движением». — 17-20 марта 2015, Санкт-Петербург. (www.elektropribor.spb.ru/kmu2015/refs?paper=tsu126).

6. Сейфуллаев, Р. Э. Учебно-лабораторный комплекс для исследования систем управления нелинейными колебаниями / Р. Э. Сейфуллаев, А. С. Пятыгин // Тезисы II Межд. науч.-практ. конф. «Научно-техническое творчество молодежи – путь к обществу, основанному на знаниях». — 2010. — С. 238–239.
7. **Accuracy of Fridman's Estimates for Sampling Interval: A Nonlinear System Case Study / E. Usik, R. Seifullaev, A. Fradkov, T. Bryntseva // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). — 2014. — World Congress, Vol. 19, Part 1. — P. 11165–11170.**
8. **LEGO Mindstorms NXT Robots and Oscillators in Control Education / S. A. Filippov, A. L. Fradkov, I. V. Ashikhmina, R. E. Seifullaev // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). — 2010. — Periodic Control Systems, Vol. 4, Part 1. — P. 156–160.**
9. Seifullaev, R. E. Energy based and sampled-data control of the cart-pendulum system / R. E. Seifullaev // Conference Abstracts of International Student Conference "Science and Progress". — 2011. — P. 80.
10. Seifullaev, R. E. Energy Based Control of Cart-Pendulum System / R. E. Seifullaev // Preprints of 14th International Student Olympiad on Automatic Control. — 2011. — P. 50–54.
11. **Seifullaev, R. E. Robust nonlinear sampled-data system analysis based on Fridman's method and S-procedure / R. E. Seifullaev, A. L. Fradkov // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com): 28 JAN 2015. — DOI: 10.1002/rnc.3304**
12. **Seifullaev, R. E. Sampled-Data Control of Nonlinear Oscillations Based on LMIs and Fridman's Method / R. E. Seifullaev, A. L. Fradkov // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). — 2013. — Periodic Control Systems, Vol. 5, Part 1. — P. 95–100.**
13. **Seifullaev, R. E. Speed Gradient Energy and Sampled-Data Control of Cart-Pendulum System / R. E. Seifullaev // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). — 2012. — Advances in Control Education, Vol. 9, Part 1. — P. 478–483.**
14. **Synchronization of Nonlinear Systems Over Intranet: Cart-pendulum Case Study / M. Ananyevskiy, R. Seifullaev, D. Nikitin, A. Fradkov // Proceedings of IEEE Conference on Control Applications. — 2014. — P. 1214–1219.**