На правах рукописи

Петров Алексей Алексеевич

Топологические свойства и конструкции, связанные с глобальной динамикой

Специальность 01.01.04 — Геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2015

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Пилюгин Сергей Юрьевич.

Официальные оппоненты:

МАЛЮТИН Андрей Валерьевич, доктор физико-математических наук, ПОМИ РАН, ведущий научный сотрудник

ОСИПОВ Алексей Валерианович, кандидат физико-математических наук, Инвестиционная фирма "ОЛМА", менеджер

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени проф. М. А. Бонч-Бруевича

Защита состоится "___" _________ 2015г. на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, В.О. 10 линия 33-35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан "___" _________ 2015г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Нежинский В. М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Одной из интенсивно изучаемых в последнее время задач теории диффеоморфизмов гладких многообразий является задача об отслеживании их приближенных траекторий.

Известно, что для диффеоморфизма f замкнутого многообразия M следующие три утверждения эквивалентны:

(1) f удовлетворяет аксиоме А и строгому условию трансверсальности;

(2) f структурно устойчив;

(3) f обладает липшицевым свойством отслеживания.

Часто диффеоморфизмы, удовлетворяющие одному из условий (1) или (2) (а, следовательно, и всем остальным), называют “системами с гиперболическим поведением”. Кроме того, далее в тексте слово “система” будет для нас синонимом термина “диффеоморфизм гладкого многообразия”.

В связи с эквивалентностью пунктов (1) и (3) представляется естественным исследовать условия наличия свойств отслеживания для систем, удовлетворяющих аксиоме А. Так, выполнение аксиомы А означает, что неблуждающее множество исследуемой системы достаточно “хорошо устроено” с точки зрения глобальной качественной теории (оно гиперболично, и в нем плотны периодические точки). Изучая такие системы в теории отслеживания, естественно предположить, что условия наличия свойства отслеживания могут быть выражены в терминах, описывающих взаимное поведение устойчивых и неустойчивых многообразий неблуждающих траекторий. Например, если эти многообразия трансверсальны в стандартном дифференциально-топологическом смысле (т.е. если выполнено строгое условие трансверсальности), то, как уже было сказано, система структурно устойчива и обладает липшицевым свойством отслеживания. В случае, если фазовое пространство системы f (т.е. многообразие M) двумерно, то, как было установлено математиком Казухиро Сакаем (Kazuhiro Sakai), необходимое и достаточное условия наличия свойства отслеживания формулируется в терминах пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий (а именно, устойчивые и неустойчивые многообразия должны пересекаться C^0-трансверсально). Поэтому представляют интерес следующие два вопроса: можно ли сформулировать необходимое и достаточное условие свойства отслеживания и, в более частном случае, условия гельдерова свойства отслеживания (соответствующее определение приведено ниже) для систем с аксиомой А в терминах пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий для произвольных размерностей (подчеркнем еще раз, что для двумерных систем и для стандартного свойства отслеживания условие состоит в C^0-трансверсальности устойчивых и неустойчивых многообразий)? И возможен ли какой-нибудь аналог отслеживания при не C^0-трансверсальном пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий?

Отметим также, что, по большей части, стандартные подходы к исследованию динамических систем позволяют доказать наличие свойств отслеживания гладких систем с гиперболическим поведением траекторий. В связи с этим представляется актуальным исследовать вопрос наличия свойства отслеживания у негладких систем (гомеомофризмов метрических пространств).

Цель работы

Целью работы является изучение некоторых связей между свойством отслеживания приближенных траекторий гомеоморфизмов метрических пространств (или, в частном случае, диффеоморфизмов гладких многообразий) и различными объектами, характеризующими динамику этих гомеоморфизмов (диффеоморфизмов), например, типами пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий, наличием специальных аналогов функций Ляпунова и пр.

Методы исследований

Основными методами, используемыми в диссертации, являются методы теории гладких диффеоморфизмов. Кроме того, используются методы теории отслеживания псевдотраекторий в окрестности гиперболического множества, а также метод вспомогательных функций Ляпунова для доказательства наличия отслеживания, разработанный Х. Левовичем и его учениками и модифицированный в работах С. Ю. Пилюгина и диссертанта.

Основные результаты работы

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Показано, что естественное многомерное обобщение понятия C^0-трансверсальности, введенного Казухиро Сакаем, не является необходимым для наличия свойства отслеживания у диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А.

2. Приведены достаточные условия наличия свойства отслеживания у гомеоморфизмов компактного метрического пространства. Полученные

методы могут быть применены и к случаю негиперболических диффеоморфизмов.

3. Показано, что значение показателя Гельдера гельдерова свойства отслеживания диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме A, зависит не только от характера пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий, но и от класса гладкости данного диффеоморфизма.

4. Для диффеоморфизмов поверхностей, удовлетворяющих аксиоме A, но не удовлетворяющих условию C^0-трансверсальности, показано, что, несмотря на отсутствие у них свойства отслеживания, диффеоморфизм может обладать свойством отслеживания с плавающей точностью.

Таким образом, в данной работе исследована связь между наличием свойства отслеживания и различными свойствами гомеоморфизмов и диффеоморфизмов (имеющими геометрическую или топологическую природу).

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты проясняют связь между наличием свойства отслеживания у систем и различными объектами, характеризующими динамику этих систем.

Аппробация работы

Результаты диссертационной работы были доложены на следующих семинарах:

1. Семинар по динамическим системам в лаб. им. П. Л. Чебышева — Санкт-Петербург, Россия, 2013, 2014, 2015;

2. Петербургский топологический семинар им. В. А. Рохлина — Санкт-Петербург, Россия, 2015;

а также были включены в доклад автора на конференциии

3. International Student Conference “Science and Progress” — Санкт-Петербург, Россия, 2014.

Публикации

По материалам диссертации опубликованы работы [1-5]. Из них статьи [1–4] опубликованы в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК, ссылки на которые приведены в конце автореферата.

Работы [1–3] написаны в соавторстве с научным руководителем. В этих работах С. Ю. Пилюгину принадлежат постановки задач; доказательства основных результатов этих работ проведены соискателем лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Список литературы включает 24 названия. Объем диссертации 96 страниц.

Содержание диссертации

В главе 0 приведены основные определения и известные результаты.

В первой главе исследуется связь между свойством отслеживания и типами пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий дискретных динамических систем размерности 3, удовлетворяющих аксиоме А. Доказывается теорема, что условие C^0-трансверсальности не является необходимым для наличия у системы свойства отслеживания.

Пусть f гомеоморфизм метрического пространства (M,dist), и пусть $d > 0$.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность $\xi = \{\xi_i \in M \mid i \in \mathbb{Z}\}$ — d-псевдотраектория отображения f, если выполнены неравенства*

$$\mathrm{dist}(f(\xi_i),\xi_{i+1}) \le d, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Пусть $\varepsilon > 0$.

Определение 2. *Будем говорить, что точка $p \in M$ (ε,f)-отслеживает d-псевдотраекторию $\xi = \{\xi_i\}$, если выполнены неравенства*

$$\mathrm{dist}(f^i(p),\xi_i) \le \varepsilon, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

В дальнейшем, при рассмотрении некоторой фиксированной системы f, мы будем просто говорить, что точка p ε-отслеживает псевдотраекторию ξ.

Определение 3. *Будем говорить, что система f обладает свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $\xi = \{\xi_i\}$ найдется точка $p \in M$, ε-отслеживающая ξ.*

Следующее определение вводит свойство отслеживания, являющимся частным случаем свойства, введенного в определении 3.

Определение 4. *Если существуют такие константы $C,d_0 > 0, \gamma \in (0,1)$, что для любой d-псевдотраектории ξ отображения f с $d \in (0,d_0)$ найдется точка $p \in M$, Cd^γ-отслеживающая псевдотраекторию ξ, то мы будем говорить, что отображение f обладает гельдеровым свойством отслеживания с показателем Гельдера равным γ. Если $\gamma = 1$, то мы будем говорить, что отображение f обладает липшицевым свойством отслеживания.*

Также, мы будем рассматривать свойства отслеживания отображения f на некоторых подмножествах объемлющего метрического пространства M. Так, пусть $K \subset M$ — непустое подмножество.

Определение 5. *Будем говорить, что отображение f обладает свойством отслеживания на множестве K, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что любая d-псевдотраектория $\xi \subset K$ может быть ε-отслежена точной.*

Аналогично определяются липшицево и гельдерово свойства отслеживания на множестве K.

Также нам будет удобно сформулировать следующие определения, являющиеся “конечными” аналогами определений 1 и 3.

Определение 6. *Пусть $d > 0$. Конечную последовательность $\xi = \{\xi_i \in M \mid i = n, \ldots, m\}$ (где $n,m \in \mathbb{Z}$, $n \leq m$), удовлетворяющую неравенствам*

$$\operatorname{dist}(f(\xi_i),\xi_{i+1}) \leq d, \quad i = n, \ldots, m-1, \tag{3}$$

мы будем называть конечной d-псевдотраекторией.

Определение 7. *Будем говорить, что система f обладает конечным свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой конечной d-псевдотраектории $\xi = \{\xi_i \in M \mid i = n, \ldots, m\}$, найдется такая точка $p \in M$, что выполнены неравенства*

$$\operatorname{dist}(f^i(p),\xi_{n+i}) \leq \varepsilon, \quad i = 0, \ldots, m-n. \tag{4}$$

Отметим, что в определении 7 d зависит только от ε, а не от длины псевдотраектории (т.е. значений m,n).

Про точку p, удовлетворяющую соотношениям (4), мы также будем говорить, что она ε-отслеживает конечную псевдотраекторию ξ.

Отметим, что для компактных метрических пространств определение 7 эквивалентно определению 3.

Дадим определение многомерной C^0-трансверсальности. Пусть (M, dist) — гладкое замкнутое связное многобразие с римановой метрикой dist, а A — топологическое пространство.

На пространстве всех непрерывных отображений из A в многообразие M (которое мы будем обозначать через $C(A, M)$), введем C^0-равномерную метрику, заданную по правилу: для $f_1,f_2 \in C(A, M)$

$$|f_1,f_2|_{C^0} = \sup_{x\in A}(\mathrm{dist}(f_1(x),f_2(x))).$$

Определение 8. *Пусть $\delta > 0$, A,B — топологические пространства, $U_A \subset A$, $U_B \subset B$ — произвольные подмножества, и пусть даны два непрерывных отображения $h_1\colon A \to M$, $h_2\colon B \to M$. Будем говорить, что пересечение $h_1(U_A) \cap h_2(U_B)$ δ-существенно, если для любых непрерывных отображений*

$$\widetilde{h_1}\colon A \to M,$$

$$\widetilde{h_2}\colon B \to M,$$

таких что $|h_1,\widetilde{h_1}|_{C^0} \leq \delta$, $|h_2,\widetilde{h_2}|_{C^0} \leq \delta$, выполнено соотношение

$$\widetilde{h_1}(U_A) \cap \widetilde{h_2}(U_B) \neq \varnothing.$$

Определение 9. *Пусть вновь A,B — топологические пространства, $h_1\colon A \to M$, $h_2\colon B \to M$ — непрерывные отображения, и пусть точки $a \in A$, $b \in B$ таковы, что $h_1(a) = h_2(b)$. Будем говорить, что в паре точек (a,b) отображения h_1 и h_2 C^0-трансверсальны, если для любых открытых множеств $U(a) \subset A$, $U(b) \subset B$, таких что $a \in U(a)$, $b \in U(b)$, найдется такое $\delta > 0$, что пересечение $h_1(U(a)) \cap h_2(U(b))$ δ-существенно.*

Наконец, дадим определение C^0-трансверсальности двух отображений.

Определение 10. *Пусть A,B — топологические пространства, а $h_1\colon A \to M$, $h_2\colon B \to M$ — непрерывные отображения. Будем говорить, что h_1 и h_2 C^0-трансверсальны, если для любых точек $a \in A$, $b \in B$, таких что $h_1(a) = h_2(b)$, отображения h_1 и h_2 C^0-трансверсальны в паре точек (a,b).*

Теперь мы сформулируем условие C^0-трансверсальности для диффеоморфизма f замкнутого многообразия M, удовлетворяющего аксиоме А.

Напомним, что диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме А, если

— множество неблуждающих точек $\Omega(f)$ гиперболично;

— периодические точки плотны в $\Omega(f)$.

Для точки $p \in \Omega(f)$ обозначим соответственно через $W^s(p)$ и $W^u(p)$ устойчивое и неустойчивое многообразия точки p.

Определение 11. *Будем говорить, что диффеоморфизм f удовлетворяет условию C^0-трансверсальности, если любая точка $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$, где $p,q \in \Omega(f)$, является C^0-трансверсальной точкой пересечения многообразий $W^s(p)$ и $W^u(q)$.*

Основным результатом главы 1 является следующая теорема.

Теорема 1. *Существует C^1-гладкий диффеоморфизм $f\colon M \to M$ гладкого 3-многообразия M, удовлетворяющий следующим условиям:*

(1) *f удовлетворяет аксиоме A;*

(2) *найдутся такие две неподвижные гиперболические точки p_1,p_2, что $\dim(W^u(p_1)) = \dim(W^s(p_2)) = 1$, и $W^u(p_1) \cap W^s(p_2) \neq \varnothing$;*

(3) *f обладает гельдеровым свойством отслеживания с показателем Гельдера $\frac{1}{4}$.*

Во второй главе даны достаточные условия, при которых гомеоморфизм компактного метрического пространства обладает конечным свойством отслеживания. В приведенных условиях используются аналоги функций Ляпунова.

Сформулируем основной результат главы 2. Пусть f — гомеоморфизм метрического протранства (X,dist).

Сформулируем основное предположение.

Мы предполагаем, что пространство X компактно и существуют такие две неотрицательные функции V и W, заданные на замкнутой окрестности диагонали $X \times X$, что $V(p,p) = W(p,p) = 0$ для всех $p \in X$, и что выполнены условия (C1)-(C9), сформулированные ниже. В дальнейшем мы также предполагаем, что аргументы функций V и W достаточно близки друг к другу, так что значения функций V и W определены.

Мы формулируем условия (C1)-(C9) в терминах геометрических объектов, порожденных функциями V и W (а не в терминах самих функций V и W). Основной причиной для выбора такой формы условий является тот факт, что в точности таким образом сформулированные условия используются при доказательстве наличия свойства отслеживания, и что в таком виде эти условия можно легко проверить для конкретных функций V и W.

Фиксируем положительные числа $a,b > 0$ и точку $p \in X$. Положим

$$P(a,b,p) = \{q \in X \mid V(q,p) \leq a, W(q,p) \leq b\},$$

$$Q(a,b,p) = \{q \in P(a,b,p) \mid V(q,p) = a\},$$

$$T(a,b,p) = \{q \in P(a,b,p) \mid V(q,p) = 0\}.$$

Обозначим через $B(\varepsilon,p)$ открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке p, т.е.

$$B(\varepsilon,p) = \{q \in X \mid \operatorname{dist}(q,p) < \varepsilon\}.$$

Положим

$$\operatorname{Int}^0 P(a,b,p) = \{q \in P(a,b,p) \mid V(q,p) < a, W(q,p) < b\},$$

$$\partial^0 P(a,b,p) = Q(a,b,p) \cup \{q \in P(a,b,p) \mid W(q,p) = b\},$$

$$\operatorname{Int}^0 Q(a,b,p) = \{q \in P(a,b,p) \mid V(q,p) = a, W(q,p) < b\}.$$

Сформулируем условия (C1)-(C4), в которых содержатся предположения о геометрии множеств, введенных выше.

(C1) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\Delta_0 = \Delta_0(\varepsilon) > 0$, что включение

$$P(\Delta_0,\Delta_0,p) \subset B(\varepsilon,p)$$

выполнено для всех $p \in X$.

Найдется такая константа $\Delta_1 > 0$, что для любой точки $p \in X$ и любых положительных чисел $\delta_1,\delta_2,\Delta < \Delta_1$ и $\delta_2 < \Delta$ найдется такое число $\alpha = \alpha(\delta_1,\delta_2,\Delta) > 0$, что

(C2) множество $Q(\delta_1,\delta_2,p)$ не является ретрактом $P(\delta_1,\delta_2,p)$;

(C3) $Q(\delta_1,\delta_2,p)$ является ретрактом $P(\delta_1,\delta_2,p) \setminus T(\delta_1,\delta_2,p)$;

(C4) существует ретракция

$$\sigma \colon P(\delta_1,\Delta,p) \to P(\delta_1,\delta_2,p),$$

обладающая следующим свойством: если $V(q,p) \neq 0$, то $V(\sigma(q),\sigma(p)) \neq 0$ для $q \in P(\delta,\Delta,p)$.

В следующей группе условий мы сформулируем наши предположения о поведении введенных выше множеств и их образов под действием гомеоморфизма f.

Мы предполагаем, что для любого $\Delta < \Delta_1$ найдутся такие положительные числа $\delta_1,\delta_2 < \Delta$, что для всех $p \in X$ выполнены следующие соотношения:

(C5) $f(P(\delta_1,\delta_2,p)) \subset \operatorname{Int}^0 P(\Delta,\Delta,f(p))$,

$f^{-1}(P(\delta_1,\delta_2,f(p))) \subset \operatorname{Int}^0 P(\Delta,\Delta,p)$;

(C6) $f(T(\delta_1,\delta_2,p)) \subset \operatorname{Int}^0 P(\delta_1,\delta_2,f(p))$;

(C7) $f(T(\delta_1,\Delta,p)) \cap Q(\delta_1,\delta_2,f(p)) = \varnothing$;

(C8) $f(P(\delta_1,\delta_2,p)) \cap \partial^0 P(\delta_1,\delta_2,f(p)) \subset \operatorname{Int}^0 Q(\delta_1,\delta_2,f(p))$;

(C9) $f(S(\delta_1,\Delta,p)) \cap P(\delta_1,\delta_2,f(p)) = \varnothing$, где

$$S(\delta_1,\Delta,p) = \{q \in P(\Delta,\Delta,p) \mid V(q,p) \geq \delta_1\}.$$

Основным результатом главы 2 является следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что гомеоморфизм f удовлетворяет условиям (C1)-(C9). Тогда f обладает конечным свойством отслеживания.*

Этот результат применяется для получения условий топологической устойчивости гомеоморфизма компактного метрического пространства и для получения условий наличия свойства отслеживания в окрестности негиперболической неподвижной точки.

В третьей главе мы показываем, что для модельного примера в случае кубического касания устойчивого и неустойчивого многообразий двумерная система класса гладкости C^1 обладает гельдеровым свойством отслеживания с показателем Гельдера $\frac{1}{4}$, причем значение показателя Гельдера можно повысить до $\frac{1}{3}$, если система обладает классом гладкости C^2, а также приводим пример системы класса гладкости C^1 с кубическим касанием устойчивого и неустойчивого многообразий, не обладающей гельдеровым свойством отслеживания с показателем Гельдера $\gamma \in (\frac{1}{4},1]$.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — диффеоморфизм класса гладкости C^k, где $k \in \mathbb{N}$. Пусть r_1,r_2 — гиперболические неподвижные точки седлового типа, и предположим, что выполнены следующие условия:

(d1) f линеен в окрестностях V_1 и V_2 точек r_1 и r_2 соответственно;

(d2) $W^u(r_1)$ и $W^s(r_2)$ обладают точкой кубического касания t;

(d3) найдется такая окрестность O точки t, что $f^{-1}(O) \subset V_1$, $f(O) \subset V_2$.

Одним из основных результатов главы 3 является следующая теорема.

Теорема 3. *(1) Если f обладет гельдеровым свойством отслеживания в $V_1 \cup O \cup V_2$ с показателем Гельдера γ, то $\gamma \leq \frac{1}{3}$.*

(2) Диффеоморфизм f обладает гельдеровым свойством отслеживания в $V_1 \cup O \cup V_2$ с показателем Гельдера $\frac{1}{4}$.

(3) Если f принадлежит классу гладкости C^2, то f обладает гельдеровым свойством отслеживания в $V_1 \cup O \cup V_2$ с показателем Гельдера $\frac{1}{3}$.

(4) Найдется диффеоморфизм класса гладкости C^1, удовлетворяющий условиям (d1)-(d3)*, но не обладающий гельдеровым свойством отслеживания с показателем Гельдера $\gamma > \frac{1}{4}$.*

В третьей главе изучено отслеживание в окрестности сепаратрисы, ведущей из седла в седло.

Рассмотрим диффеоморфизм класса C^2 двумерной плоскости,

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Пусть r_1 и r_2 — гиперболические неподвижные точки седлового типа.

Предположим, что в окрестностях V_1 точки r_1 и V_2 точки r_2 диффеоморфизм f линеен, и что точки r_1 и r_2 соединены сепаратрисой I.

Определение 12. *Пусть $d, \alpha > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что конечная последовательность $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N$ точек в $\mathbb{R}^2$ есть d-псевдотраектория для h с плавающей точностью степени α относительно сепаратрисы I, если*

$$\operatorname{dist}(f(\xi_k),\xi_{k+1}) \leq d\left(\operatorname{dist}(\xi_k,I)\right)^{\alpha}, \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Сформулируем результат главы 3, касающийся отслеживания в окрестности сепаратрисы.

Теорема 4. *Найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $d > 0$ существует конечная d-псевдотраектория $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N$ для f с плавающей точностью степени 1 относительно сепаратрисы I, для которой не существует точки $p \in \mathbb{R}^2$, ε-отслеживающей псевдотраекторию ξ.*

Теорема 5. *Пусть $\alpha > 0$. Найдутся такие положительные числа L,d_0, что для любого $d \in (0,d_0)$ и для любой конечной d-псевдотраектории $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N$ для f, лежащей в $V(\nu)$ и удовлетворяющей неравенствам*

$$|f_y(\xi_i) - (\xi_{i+1})_y| \leq d|(\xi_i)_y|^{1+\alpha}, \quad i = 0, \ldots, N-1, \tag{6}$$

найдется точка $p \in V(\nu)$, Ld-отслеживающая ξ.

Заключение

Итоги исследования позволяют прояснить связь между наличием свойства отслеживания и такими объектами, характеризующими динамику системы, как C^0-трансверсальность пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий (теорема 1), гладкостью системы и характером пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий (теорема 3). Предложен метод, основанный на построении вспомогательных функций Ляпунова, позволяющий исследовать систему на наличие свойства отслеживания (теорема 2; причем гладкость системы не предполагается). Кроме того, в теоремах 4, 5 для диффеоморфизмов поверхностей, удовлетворяющих аксиоме A, но не удовлетворяющих условию C^0-трансверсальности, показано, что, несмотря на отсутствие у них свойства отслеживания, диффеоморфизм может обладать свойством отслеживания с плавающей точностью.

При дальнейшей разработке данной темы может казаться перспективным продолжить исследовать вопрос о связи между наличием свойства отслеживания и C^0-трансверсальности (например, является ли свойство C^0-трасверсальности достаточным для наличия свойства отслеживания у систем с аксиомой A). Также представляет интерес вопрос о необходимых и достаточных условиях наличия свойства отслеживания у негладких систем (теорема 2 может послужить отправным пунктом для нового исследования).

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных журналах:

1. ***Petrov A. A., Pilyugin S. Yu.*** **Lyapunov functions, shadowing and topological stability // *Topol. Methods Nonlinear Anal.* — 2014. — T. 43, № 1. — C. 231–240.**

2. ***Petrov A. A., Pilyugin S. Yu.*** **Shadowing near nonhyperbolic fixed points // *Discrete Contin. Dyn. Syst.* — 2014. — T. 34, № 9. — C. 3761–3772.**

3. ***Petrov A. A., Pilyugin S. Yu.*** **Multidimensional C^0 transversality // *J. Math. Anal. Appl.* — 2015. — T. 424, № 1. — C. 696–703.**

4. ***Петров А.*** **Отслеживание в случае нетрансверсального пересечения // *Алгебра и Анализ.* — 2015. — Т. 27, № 1. — С. 149–177.**

Другие публикации автора:

5. *Петров А.* Отслеживание в окрестности сепаратрисы // *электронный журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления“.* — 2013. — №3.