САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Колабутин Николай Валерьевич

МОДЕЛИ УСТОЙЧИВОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ КООПЕРАЦИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Специальность 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2015 г.

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор, Петросян Леон Аганесович

Официальные оппоненты: Клейменов Анатолий Федорович,
доктор физико-математических наук,
профессор, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, ведущий научный сотрудник

Сандомирский Федор Алексеевич,
кандидат физико-математических наук,
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, научный сотрудник

Ведущая организация: Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Защита состоится 10 июня 2015 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199304, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан «____» ____________ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Нежинский В.М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Кооперативные дифференциальные игры – один из наиболее актуальных разделов теории игр, поскольку с их помощью возможно моделирование непрерывно развивающихся во времени конфликтно-управляемых процессов в различных областях, в первую очередь в менеджменте и в экономике. Диссертационная работа посвящена исследованию устойчивости кооперативных соглашений в моделях двухуровневой кооперации. Теория дифференциальных игр возникла в середине 20 века. До середины шестидесятых годов исследовались в основном антагонистические дифференциальные игры, в которых рассматривался конфликт между двумя сторонами с противоположными интересами. В 1965 году Р. Айзекс опубликовал фундаментальную работу по теории дифференциальных игр, в которой исследовались антагонистические игры преследования, и которая оказала заметное влияние на развитие динамического программирования и оптимального управления. Появились работы Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского, Л.А. Петросяна и др. Однако данный класс был применим только для ограниченного числа задач, в которых конфликтное взаимодействие носило антагонистический характер.

Затем стал рассматриваться класс неантагонистических дифференциальных игр. Они использовались для моделирования различных социально-экономических процессов. В качестве принципа оптимальности, как правило, использовалось равновесие по Нэшу, полученное в программных или позиционных стратегиях. После стали рассматриваться кооперативные дифференциальные игры, в которых участники имеют возможность кооперироваться с целью получения большего совместного выигрыша с его последующим распределением между участниками.

Решением кооперативной дифференциальной игры является соглашение о максимизации суммарного выигрыша и связанное с этим соглашением оптимальное поведение участников (игроков), а также выбор принципа оптимальности, по которому распределяется этот выигрыш. Поскольку дифференциальные игры всегда рассматриваются на некотором временном интервале, то появилось требование устойчивости кооперативного решения. Прежде всего, рассматривался вопрос о динамической устойчивости (временной состоятельности) выбранного принципа оптимальности. Это понятие было впервые формализовано Л.А. Петросяном.

Динамическая устойчивость (временная состоятельность) означает, что выбранный в начале игры принцип оптимальности сохраняет свою состоятельность на протяжении всего игрового процесса. Другими словами, при развитии игры вдоль изначально выбранной кооперативной траектории игроки следуют одному и тому же принципу оптимальности в каждый момент игры и, следовательно, не имеют причин отклониться от изначально выбранного решения.

Вопрос о динамической устойчивости в дифференциальных играх тщательно изучался на протяжении последних трех десятилетий. Исследования показали, что изначально выбранное кооперативное решение почти всегда теряет свою оптимальность с течением времени, т.е. является динамически неустойчивым (несостоятельным во времени). Это явление имеет место даже без изменения интересов участников или каких-либо внешних воздействий. Кроме Л.А. Петросяна это обстоятельство было обнаружено Ф. Кидландом и Е. Прескоттом. Чтобы сохранить устойчивость решения, необходимо в каждый момент времени проводить регуляризацию выбранного принципа оптимальности. В работе Л. А. Петросяна и Н. Н. Данилова было введено понятие "процедуры распределения дележа".

С развитием теории кооперативных дифференциальных игр стали исследоваться такие коалиционные решения, в которых участники объединяются в различные коалиции, выступающие как отдельные игроки. Здесь возможны различные постановки задач. Иногда предполагают, что образованные коалиции играют между собой в бескоалиционную игру, и каждая коалиция получает свой выигрыш, который затем распределяется между ее участниками в соответствии с некоторым принципом оптимальности. Для данных моделей также ставится вопрос о динамической устойчивости (временной состоятельности).

С недавнего времени стали исследоваться модели двухуровневой кооперации, в которых участники объединяются в коалиции, выступающие как отдельные игроки, при этом коалиции также кооперируются для увеличения совместного выигрыша. В этом случае коалиции играют в свою кооперативную игру, получая общий выигрыш и распределяя его между собой в соответствии с некоторым принципом оптимальности. Это верхний уровень кооперации. Затем доля (выигрыш) каждой коалиции распределяется между ее участниками так же в соответствии с некоторым кооперативным принципом оптимальности, необязательно совпадающим с принципом оптимальности верхнего уровня игры. Это нижний уровень кооперации. Таким образом, получается двухуровневое объединение игроков, и двухуровневое распределение полученного выигрыша.

Встает вопрос об устойчивости таких кооперативных соглашений, которая должна поддерживаться как на верхнем уровне (в кооперации между коалициями), так и на нижнем (внутри каждой коалиции).

В данной работе рассмотрены модели двухуровневой кооперации на примере дифференциальной игры технологического альянса и на примере дифференциальной игры сокращения выбросов в атмосферу. Для игры технологического альянса предварительно рассмотрена модель коалиционного решения, когда образованные коалиции выступают как отдельные игроки, но играют в бескоалиционную игру. Показано, каким образом будут различаться простое коалиционное решение и решение в двухуровневой кооперации. Для распределения совместного выигрыша рассмотрены различные принципы оптимальности. Для каждой модели исследуются вопросы динамической устойчивости (временной состоятельности). Для моделей дифференциальных игр технологических альянсов приведены численные примеры.

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является построение решений в кооперативных дифференциальных играх с двухуровневой кооперацией между участниками и изучение вопроса их динамической устойчивости (временной состоятельности).

Научная новизна работы. Научная новизна работы заключается в разработке новых теоретико-игровых моделей технологических альянсов и моделей сокращения выбросов вредных веществ.

В дифференциальной игре технологического альянса впервые построено коалиционное решение, при котором коалиции выступают как отдельные игроки и играют между собой в бескоалиционную игру. В данной игре найдено равновесие по Нэшу между игроками-коалициями. Внутри коалиции для распределения выигрыша между ее участниками вычислена характеристическая функция, доказана ее супераддитивность, и построена динамически устойчивая (состоятельная во времени) процедура распределения дележа.

В дифференциальной игре технологического альянса впервые построена и исследована модель двухуровневой кооперации, когда коалиции выступают как отдельные игроки и кооперируются между собой. На верхнем и нижнем уровне кооперации построена характеристическая функция, и доказана ее супераддитивность. Построены процедуры распределения совместного выигрыша между коалициями и внутри каждой коалиции. Доказана динамическая устойчивость (временная состоятельность) построенного кооперативного решения.

Впервые построена модель двухуровневой кооперации в дифференциальной игре сокращения выбросов вредных веществ. Построено кооперативное решение, в котором для каждого уровня кооперации вычислена характеристическая функция, и доказана ее супераддитивность. Для распределения совместного выигрыша на обоих уровнях кооперации определена процедура распределения дележа, и показана ее динамическая устойчивость.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты диссертационного исследования применимы при построении моделей взаимодействия крупных фирм, картелей или концернов. При этом взаимодействие между картелями и концернами описывается на верхнем уровне кооперации, а на нижнем уровне кооперации описывается взаимодействие участников картельных соглашений. Большое практическое значение имеют построенные двухуровневые процедуры распределения совместного выигрыша, гарантирующие устойчивость кооперативного соглашения.

Положения, выносимые на защиту.

1. Построено коалиционное решение в дифференциальной игре технологического альянса. Найдено равновесие по Нэшу между игроками-коалициями, а для распределения выигрыша между участниками коалиции используется кооперативная теория. С этой целью используется характеристическая функция, показывается ее супераддитивность, и определяется динамически устойчивая (состоятельная во времени) процедура распределения дележа. В качестве принципа оптимальности используется PMS-вектор.

2. Построена теоретико-игровая модель двухуровневой кооперации в дифференциальной игре технологического альянса. На верхнем уровне кооперации строится специальным образом характеристическая функция, и доказывается ее супераддитивность. В качестве принципа оптимальности выбран динамический вектор Шепли, и показана его состоятельность во времени. На нижнем уровне также строится характеристическая функция, и доказывается ее супераддитивность. В качестве принципов оптимальности используются динамический вектор Шепли, ES-вектор и вектор пропорционального распределения

выигрышей. Показана их динамическая устойчивость

3. Предложена теоретико-игровая модель двухуровневой кооперации в дифференциальной игре сокращения вредных выбросов. На верхнем уровне кооперации строится характеристическая функция, и доказывается ее супераддитивность. В качестве принципа оптимальности выбран динамический вектор Шепли, для реализации которого определяется процедура распределения совместного выигрыша. Доказывается динамическая устойчивость данного принципа. На нижнем уровне также строится характеристическая функция, и доказывается ее супераддитивность. В качестве принципа оптимальности используется дележ, пропорциональный динамическому вектору Шепли, и доказывается его временная состоятельность.

Апробация работы. Основные результаты, составляющие содержание работы, были представлены на научных конференциях: на международной конференции IFAC CEFIS: Synergy of Computational Economics and Financial and Industrial Systems (Стамбул, 2007), на конференциях аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость"(Санкт-Петербург, 2008-2010), на международной конференции 13th International Symposium on Dynamic Games and Applications (Вроцлав, 2008), на международных конференциях "Game theory and management"GTM (Санкт-Петербург, 2009, 2010, 2014), на международной конференции "Computational Management Science"CMS (Вена, 2010), на международной научной конференции "Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л.В. Канторовича"(Санкт-Петербург, 2012)

Публикации. Список основных работ по теме диссертации включает 8 наименований, в том числе 4 статьи в рецензируемых научных журналах ([6], [1], [3], [4] общим объемом 105 авторских листов) и 4 публикации в трудах материалов конференций. Общий объем опубликованных материалов составляет 119 авторских листов.

Работы [1], [5] – [8] написаны в соавторстве. В работах [1], [7], [8] соавторам принадлежит постановка задачи и метод построения решения, а диссертантом был предложен вычислительный алгоритм для построения решения и получены численные результаты. В работах [5], [6] диссертанту принадлежит формулировка основного результата, получение численных результатов, а соавтору постановка задачи и выбор метода решения.

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка использованной литературы. Полный объем диссертации составляет 122 страницы. Диссертация содержит 11 рисунков и 17 таблиц. Библиографический список включает 44 наименования и занимает 6 страниц.

В первой главе рассматривается коалиционная модель на примере дифференциальной игры технологического альянса. В разделе 1.1 рассматривается постановка задачи. Участниками игры выступают фирмы, обладающие некоторой технологией. Множество игроков обозначается за $N = \{1, ..., n\}$. Главным параметром каждой фирмы $i \in N$ является уровень ее технологии x_i, на который наложено ограничение $x_i > 0$. Игра начинается из начального состояния $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ в момент t_0 и продолжается период $T - t_0$, в течение которого фирмы получают определенный выигрыш от использования своей технологии. В момент T окончания игры, фирмы получают некоторый дополнительный выигрыш. Игрок стремится максимизировать свой выигрыш, для чего инвестирует в развитие своей технологии. Уровень инвестиций фирмы $i \in N$ обозначается за $u_i \in R^+$. Задается уравнение динамики развития игрока:

$$\dot{x}_i(s) = \alpha_i \left[u_i(s) x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i \in N,$$

где α_i и δ – положительные константы. Задается формула для вычисления выигрыша игрока:

$$H_i\left(x_i^0, T-t_0, u_i\right) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i\left(s, x_i(s), u_i(s)\right) \exp\left[-r(s-t_0)\right] ds +$$
$$+ \exp\left[-r(T-t_0)\right] q_i \left[x_i(T)\right]^{1/2},$$

где $h_i\left(s, x_i(s), u_i(s)\right) = P_i\left[x_i(s)\right]^{1/2} - c_i u_i(s)$; P_i, c_i, q_i, r – положительные константы; r – процентная ставка. Определяется коалиция игроков K, образованная некоторым подмножеством фирм $K \subseteq N$. Фирма-участник может получить дополнительные возможности в развитии, которые она не могла бы получить в одиночку, поэтому уравнение, описывающее технологическое развитие фирм, изменяется и принимает вид:

$$\dot{x}_i(s) = \alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} + \sum_{j\in K,\ j\neq i} b_j^{[j,i]}[x_j(s)x_i(s)]^{1/2} - \delta x_i(s)$$
$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i \in K,$$

где $b_j^{[j,i]} \geq 0$ – положительная константа, представляющая эффект передачи технологии для фирмы i, осуществляемый фирмой j. Выигрыш коалиции вычисляется, как сумма выигрышей входящих в нее игроков:

$$H_K\left(x_K^0, T-t_0, u_K\right) = \sum_{i\in K}\int\limits_{t_0}^{T} h_i\left(s, x_i(s), u_i(s)\right) \exp\left[-r(s-t_0)\right] ds +$$
$$+ \sum_{i\in K} \exp\left[-r(T-t_0)\right] q_i \left[x_i(T)\right]^{1/2}$$

Вводится коалиционное разбиение множества игроков $\Delta = \{K_1, K_2, ..., K_m\}$, и определяется коалиционная игра. Считается, что коалиции из заданного разбиения выступают как отдельные игроки и играют между собой в бескоалиционную игру. Уравнение динамики развития коалиции $K_l \subset \Delta$ и ее выигрыш определяются формулами выше. Вводится понятия управления коалиции и уравнение динамики развития коалиции. В разделе 1.2 определяется равновесие по Нэшу в игре коалиций. Для каждой коалиции вычисляется оптимальное управление игроков, и вычисляется максимальный выигрыш каждой коалиции $W^{(t_0)K_l}(t, x_{K_l}(t))$. В разделе 1.3 показано распределение выигрыша коалиции между ее участниками. Вначале строится и вычисляется характеристическая функция $V^{(t_0)K_l}(L, x_L(t), T-t)$ в игре внутри коалиции для любой коалиции $L \subseteq K_l$ (подраздел 1.3.1). Затем доказывается супераддитивность вычисленной характеристической функции (подраздел 1.3.2). Далее определяется процедура распределения выигрыша (подраздел 1.3.3), согласно которой члены коалиции K_l делят между собой долю коалиции от совместного выигрыша. В качестве принципа оптимальности для распределения выигрыша внутри коалиции используется динамический вектор Шепли.

$$\nu_i^{(t_0)K_l}\left(t, x^*_{K_l}(t)\right) = \sum_{K \subseteq K_l} \frac{(k-1)!(k_l-k)!}{k_l!} \Big[V^{K_l(t_0)}\left(K, x^*_K(t), T-t\right) - \\ - V^{K_l(t_0)}\Big(K \setminus i, x^*_{K \setminus i}(t), T-t\Big)\Big]$$

Определяется функция процедуры распределения дележа $B^{K_l}(t) = \left\{B_i^{K_l}(t)\right\}_{t=t_0}^{T}$. Показана динамическая устойчивость (временная состоятельность) построенного решения. В разделе 1.4 обобщаются результаты предыдущих разделов, и приводится общий алгоритм построения устойчивого PMS-вектора. В разделе 1.5 приводится численный пример для построенного решения. Приведены графические иллюстрации состояний игроков и их прибылей и таблицы с численными результатами.

Во второй главе рассматривается модель двухуровневой кооперации в дифференциальной игре технологического альянса. В разделе 2.1 приводится математическая модель игры. Игроками вновь являются фирмы, обладающие некоторой технологией. Уравнение технологического развития и выигрыши для отдельного игрока и для коалиции игроков берется из предыдущей главы. Задается коалиционное разбиение множества игроков $\Delta = \{K_1, K_2, ..., K_m\}$, и вводятся основные параметры коалиций. Уравнение динамики развития каждой коалиции из разбиения и ее выигрыш определяются формулами из предыдущей главы. В разделе 2.2 показана кооперация между коалициями из разбиения $\breve{K} = K_{l_1} \bigcup K_{l_2} \bigcup ... \bigcup K_{l_k}$. Уравнение динамики развития игроков в объединенных коалициях имеет следующий вид:

$$\dot{x}_i(s) = \alpha_i \left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} + \sum_{j \in \breve{K},\ j \neq i} b_j^{[j,i]}[x_j(s)x_i(s)]^{1/2} - \delta x_i(s)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i \in \breve{K}.$$

Выигрыши объединенных коалиций также вычисляются через сумму выигрышей участников. Вводится понятие максимальной коалиции $\breve{N}$ или технологического альянса коалиций. В разделе 2.3 описано построение характеристической функции $V^{(t_0)\Delta}\left(\breve{K}, x_{\breve{K}}(t), T - t\right)$ для верхнего уровня кооперации. В подразделах 2.3.1 и 2.3.2 вычисляются значения характеристической функции на верхнем уровне соответственно для максимальной коалиции в игре и для произвольной коалиции. Для равновесия по Нэшу в игре коалиций значение характеристической функции было найдено в разделе 1.2. В подразделе 2.3.3 доказывается супераддитивность построенной характеристической функции. В разделе 2.4 строится процедура распределения совместного выигрыша между коалициями. В качестве принципа оптимальности используется динамический вектор Шепли. Для реализации данного принципа строится процедура распределения дележа $B_\Delta(t) = \{B_{K_l}(t)\}_{t=t_0}^{T}$, и доказывается ее динамическая устойчивость (состоятельность во времени) на верхнем уровне. В разделе 2.5 описано распределение выигрыша внутри каждой коалиции. Приведено вычисление характеристической функции $V^{(t_0)K_l}(L, x_L(t), T - t)$ на нижнем уровне кооперации для всех возможных случаев, основное отличие от обыкновенной коалиционной игры состоит в том, что выигрыш коалиции K_l определяется из верхнего уровня кооперации. Доказана супераддитивность вычисленной характеристической функции. В разделах 2.6, 2.7 и 2.8 показаны процедуры распределения выигрыша коалиции между ее участниками. В каждом из разделов используется свой принцип оптимальности. В разделе 2.6 в качестве принципа оптимальности используется динамический вектор Шепли. В разделе 2.7 в качестве принципа оптимальности берется ES-вектор. В разделе 2.8 в качестве принципа оптимальности используется пропорциональный дележ. Для каждого случая определена функция процедуры распределения дележа $B^{K_l}(t) = \left\{B_i^{K_l}(t)\right\}_{t=t_0}^{T}$ на нижнем уровне, и доказана динамическая устойчивость (временная состоятельность) построенного решения. В разделе 2.9 и его подразделах приведены численные примеры построенной двухуровневой кооперации. Рассматриваются примеры для каждого из приведенных принципов оптимальности. В каждом примере построены графики изменения состояний игроков и их выигрышей, и приведены таблицы с результатами вычислений, показывающими перераспределение совместного выигрыша на верхнем и на нижнем уровне. Также приведены численные результаты, показывающие динамическую устойчивость построенных решений.

В третьей главе рассматривается модель двухуровневой кооперации в дифференциальной игре сокращения вредных выбросов в атмосферу. В разделе 3.1 приводится постановка задачи. В игре участвуют $N = \{1, ..., n\}$ предприятий, производство которых наносит вред окружающей среде. Игра начинается в момент t_0 и начального состояния $s_0 \geq 0$ – общего уровня загрязнения в момент t_0 и имеет неограниченную продолжительность. Основным параметром в игре является уровень загрязнения окружающей среды $s(t) \in R^+$. Параметром игрока $i \in N$ является его уровень вредных выбросов в атмосферу $e_i\left(s(t)\right)$. Также для каждого игрока задается максимально допустимый уровень вредных выбросов в атмосферу $\bar{e}_i \in R^+$. Определяются начальные условия игры, ограничение на параметры. Динамика объема загрязнения определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{s}(t) = \sum_{i \in N} e_i\left(s(t)\right) - \delta s(t)$$

$$s(t_0) = s_0$$

где δ – коэффициент природного поглощения загрязнения. Выигрышем игрока являются его затраты на возмещение вреда окружающей среде от выбросов:

$$\Pi_i\left(s_0, t_0, \mathbf{e}\right) = \int_{t_0}^{\infty} \exp\left[-r(t - t_0)\right]\left(C_i\left(e_i\left(s(t)\right)\right) + D_i\left(s(t)\right)\right) dt,$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}\left(s(t)\right) = \left\{e_1\left(s(t)\right), e_2\left(s(t)\right), ..., e_n\left(s(t)\right)\right\}$ – ситуация в игре. Определяется понятие коалиции игроков $K \subseteq N$. Выигрыш коалиции равен сумме выигрышей ее участников:

$$\Pi_K\left(s_0, t_0, \mathbf{e}\right) = \sum_{i \in K} \int_{t_0}^{\infty} \exp\left[-r(t - t_0)\right]\left(C_i\left(e_i\left(s(t)\right)\right) + D_i\left(s(t)\right)\right) dt$$

Задается коалиционное разбиение на множестве игроков, и задаются параметры коалиции из разбиения. В разделе 3.2 описана кооперация между коалициями, выигрыши игроков в объединенных коалициях. В разделе 3.3 описывается построение и вычисление характеристической функции $V^{(t_0)\Delta}\left(K, s(t), t\right)$ для верхнего уровня кооперации. Вычисляются значения характеристической функции соответственно для всех возможных случаев, и доказывается субаддитивность вычисленной характеристической функции. В разделе 3.4 строится процедура распределения совместного выигрыша на верхнем уровне. В качестве принципа оптимальности используется динамический вектор Шепли. Далее определяется функция процедуры распределения выигрыша $\beta_\Delta(t) = \left\{\beta_{K_l}(t)\right\}_{t \in [t_0, \infty)}$, и доказывается ее динамическая устойчивость (временная состоятельность) на верхнем уровне. В разделе 3.5 описана общая суть распределения выигрыша внутри каждой коалиции. Заданы основные формулы распределения совместного выигрыша. В разделе 3.6 описано построение и вычисление характеристической функции $V^{K_l(t_0)}\left(L, s(t), t\right)$ на нижнем уровне кооперации для всех возможных случаев. В этом же разделе доказана субаддитивность вычисленной характеристической функции. В разделе 3.7 описана процедура распределения совместного выигрыша внутри коалиции. В качестве принципа оптимальности используется дележ, пропорциональный динамическому вектору Шепли. В этом же разделе приведена функция процедуры распределения дележа $\beta^{K_l}(t) = \left\{\beta_i^{K_l}(t)\right\}_{t=t_0}^{T}$ на нижнем уровне, и доказана динамическая устойчивость (состоятельность во времени) построенного решения.

В **заключении** содержится краткий обзор полученных результатов.

В диссертационной работе использована тройная нумерация формул. Первая цифра соответствует номеру главы, вторая является номером раздела в данной главе, третья – номером формулы в данном разделе. Подразделы имеют тройную нумерацию, где первая цифра означает номер главы, вторая – номер раздела в главе, третья – номер подраздела в разделе. Список литературы приведен в алфавитном порядке.

Список опубликованных автором работ по теме диссертации

1. **Зенкевич Н.А., Колабутин Н.В., Д. Янг Стохастическая модель совместного предприятия. // Управление большими системами. Вып. 26.1, М., ИПУ РАН. 2009. С. 287–318**

2. Колабутин Н.В. Количественное моделирование динамически устойчивого совместного предприятия // Процессы управления и устойчивость: Труды 39-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та. 2008. С. 47–51

3. **Колабутин Н.В. Двухуровневая кооперация в дифференциальной игре сокращения вредных выбросов // Математическая тео-**

рия игр и её приложения, том 6. 2014. вып. 4 С. 3–36

4. **Колабутин Н.В. Двухуровневая кооперация в дифференциальной игре технологического альянса // Вестник СПбГУ, Сер 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2015. Вып.1. С. 42–63.**

5. Колабутин Н.В., Петросян Л.А. Условие Д.В.К. Янга для динамического совместного предприятия // Процессы управления и устойчивость: Труды 40-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та. 2009. С. 624–629

6. **Petrosyan, L. A., Kolabutin, N. V. D. W. K. Yeung condition for dynamically stable joint venture. // Contributions to Game Theory and Management. Vol II. Collected papers/ Editors Leon A. Petrosjan, Nikolay A. Zenkevich. SPb. Graduate School of Management. SPbU. 2009. P. 220–240**

7. Zenkevich N.A., Kolabutin N.V. Quantitative Modeling of Dynamic Stable Joint Venture. In : Preprint Volume of the 11th IFAC Symposium "Computational Economics and Financial and Industrial Systems ". IFAC. Dogus University of Istanbul. Turkey. 2007. P. 68–74.

8. Zenkevich N.A., Kolabutin N.V. Quantitative Modeling of Dynamic Stable Joint Venture under Uncertainty // 13th International Symposium on Dynamic Games and Applications / Editors Arik A. Melikyan, Andrzej S. Nowak, Krzysztof J. Szajowski. Wroclaw University of Technology. 2008. P. 224–226