Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Дороденков Александр Александрович

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИЯ МНОГОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Специальность 01.01.02 – дифференциальные
уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2015

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор *Бибиков Юрий Николаевич*.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор *Белан Евгений Петрович* (Крымский Федеральный университет имени В.И.Вернадского);

кандидат физико-математических наук, доцент *Иванов Борис Филиппович* (Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров).

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ".

Защита состоится "23" декабря 2015 г. в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199004, Санкт-Петербург, 10-я линия, д. 33. Ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте $http://spbu.ru/disser2/641/disser/dorodenkov\_diss.pdf$.

Автореферат разослан "____" ________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.49,
доктор физико-математических наук Ю. В. Чурин

Актуальность темы

В 1892 году А. М. Ляпунов в работе "Общая задача об устойчивости движения" заложил основы теории устойчивости движения. В частности, он исследовал устойчивость постоянного и периодического движений в критическом случае одной пары чисто мнимых корней характеристического уравнения. Именно этот случай возникает при исследовании возмущения линейного осциллятора $\ddot{x} + \lambda^2 x = 0$. Позднее А. А. Андронов и независимо от него Э. Хопф исследовали при наличии в автономном возмущении малого параметра ответвление от нулевого решения предельного цикла (так называемая бифуркация Андронова–Хопфа). В 60-е годы аналогичная проблема для периодических возмущений была решена Ю. И. Неймарком и Р. Сакером. Они установили, что при периодическом возмущении имеет место бифуркация рождения двумерного инвариантного тора.

В 1893 году А. М. Ляпунов исследовал устойчивость нулевого решения системы, которая возникает при исследовании автономного возмущения осциллятора вида

$$\ddot{x} + x^{2n-1} = 0, \tag{1}$$

где n — натуральное число, $n \geq 2$. Он рассматривал уравнение

$$\ddot{x} + x^{2n-1} = X(x, \dot{x}), \tag{2}$$

где $X(x, y)$ — аналитическая функция переменных x, y в окрестности начала координат, причем разложение X по степеням x, y не содержит членов порядка меньше $2n$, если переменной x приписывать порядок единица, а переменной y — порядок n. Подход Ляпунова заключается в следующем. В системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^{2n-1} + X(x, y), \tag{3}$$

эквивалентной уравнению (2), вводятся координаты r, φ согласно формулам $x = rCs(\varphi)$, $y = -r^n Sn(\varphi)$, $r > 0$, где $(Cs(\varphi),\ Sn(\varphi))$

— решение системы $\dfrac{dx}{d\varphi} = -y$, $\dfrac{dy}{d\varphi} = x^{2n-1}$ с начальными данными $Cs(0) = 1$, $Sn(0) = 0$. При $n = 1$ функции $Cs(\varphi)$, $Sn(\varphi)$ превращаются в $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$ соответственно. Основное тригонометрическое тождество соответствует тождеству $nSn^2(\varphi) + Cs^{2n}(\varphi) = 1$. Обозначим период функций $Cs(\varphi)$, $Sn(\varphi)$ через 2ω. В координатах r, φ система (3) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = -\dfrac{1}{r^{n-1}} X(rCs, -r^n Sn) Sn, \\ \dot{\varphi} = r^{n-1} - \dfrac{1}{r^n} X(rCs, -r^n Sn) Cs. \end{cases} \tag{4}$$

Исключая в данной системе t, получим уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = R_2(\varphi) r^2 + R_3(\varphi) r^3 + \ldots,$$

правая часть которого представляет собой сходящийся при достаточно малых r ряд с 2ω-периодическими коэффициентами. Тем самым вопрос об устойчивости при автономном возмущении нелинейного осциллятора решается аналогично случаю автономного возмущения линейного осциллятора. Если возмущение зависит от малого параметра, то возникает задача о бифуркации рождения из положения равновесия предельного цикла при прохождении малого параметра через нулевое значение. Она решается аналогично задаче о бифуркации Андронова–Хопфа в случае линейного осциллятора.

Случай периодических возмущений осциллятора (1) при $n = 2$, т. е. уравнение $\ddot{x} + x^3 = X(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$, $0 \le \varepsilon << 1$, был исследован Ю. Н. Бибиковым [3] как в направлении исследования устойчивости нулевого решения при $\varepsilon = 0$, так и в направлении бифуркации рождения инвариантного тора при $\varepsilon > 0$. Заметим, что описанный выше подход Ляпунова неприменим в периодическом случае, так как исключение t в системе (4) в этом случае не представляется возможным. Кроме того, принципиальным является то, что в отличие от случая $n = 1$, исследованного ранее в работах Неймарка и Сакера, частота невозмущенных колебаний является бесконечно малой функцией амплитуды.

Естественным продолжением этих исследований является случай, когда восстанавливающая сила (которая должна быть нечетной функцией) имеет вид $x^2 \operatorname{sgn} x$. Эта задача, а также ее обобщение на случай многомерных систем являются объектами исследований в диссертации.

Цель работы

Целью работы является получение условий наличия асимптотической устойчивости или неустойчивости при $\varepsilon = 0$ и бифуркации рождения инвариантного тора и его асимптотической устойчивости при $\varepsilon > 0$ для систем

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^2 \operatorname{sgn} x + Y(t, x, y, \varepsilon), \tag{5}$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = y + X(t, x, y, z, \varepsilon), \\ \dot{y} = -x^2 \operatorname{sgn} x + Y(t, x, y, z, \varepsilon), \, z = (z_1, \dots, z_n). \\ \dot{z} = Az + Z(t, x, y, z, \varepsilon), \end{cases} \tag{6}$$

Методы исследований

Для изучения устойчивости применяются методы Ляпунова, для бифуркации — теория инвариантных поверхностей, заложенная Крыловым и Боголюбовым, и получившая дальнейшее развитие в работах многих математиков, в частности, в работах Дж. Хейла, лемма которого [2] существенно используется в диссертации.

Основные результаты работы

Получены достаточные условия наличия асимптотической устойчивости или неустойчивости при $\varepsilon = 0$ и существования инвариантного тора и его асимптотической устойчивости при $\varepsilon > 0$ для систем (5), (6).

Научная новизна и апробация

Основные результаты диссертации являются новыми.

По содержанию диссертации сделана серия докладов на заседаниях Городского семинара по дифференциальным уравнениям (руководитель семинара член-корреспондент РАН В. А. Плисс).

Публикации результатов

Результаты исследований отражены в работах [3, 4, 5]. В статье [3] соискателю принадлежит § 2 о существовании инвариантного тора для соответствующей системы. Статьи [3, 4, 5] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов и изданий.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при исследовании многочастотных колебаний.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, дополнения, заключения и списка литературы, включающего 14 наименований. Объем диссертации 91 страница.

Содержание диссертации

В первой главе в указанных двух направлениях изучается дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} + x^2 \operatorname{sgn} x = Y(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \tag{7}$$

где Y — достаточно гладкая по x, $\dot{x}$, ε нелинейность. Ее порядок малости не ниже пятого, если полагать, что x имеет второй порядок, $\dot{x}$ — третий, ε — четвертый. Предполагается также, что функция Y непрерывна и периодична по t с периодом 2π, и выполняется соотношение $Y(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$.

Следуя Ляпунову, введем обобщенные полярные координаты. Для этого в эквивалентной уравнению (7) системе (6), где

$$Y(t,x,y,\varepsilon) = a_1(t)xy + a_2(t)y^2 + a_3(t)x^3 + a_4(t)x^2y + \\ + b_1(t)\varepsilon x + b_2(t)\varepsilon y + Y^*,$$

а порядок малости Y^* не ниже восьмого в указанном выше смысле, выполняется замена переменных

$$x = \rho^2 C(\varphi), \quad y = -\rho^3 S(\varphi), \tag{8}$$

где $\rho > 0$, функции $C(\varphi)$ и $S(\varphi)$ — решение системы

$$\frac{dx}{d\varphi} = -y, \quad \frac{dy}{d\varphi} = x^2 \operatorname{sgn} x$$

с начальными данными $C(0) = 1$, $S(0) = 0$. Очевидно, что функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ — периодические, порядок их гладкости равен 3 и 2 соответственно, и справедливо тождество

$$3S^2(\varphi) + 2C^3(\varphi) \operatorname{sgn} C(\varphi) = 2.$$

В результате замены получим систему

$$\dot\rho = -\frac{S}{2\rho^2} Y(t, \rho^2 C, -\rho^3 S, \varepsilon), \quad \dot\varphi = \rho - \frac{C}{\rho^3} Y(t, \rho^2 C, -\rho^3 S, \varepsilon),$$

которую можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot\rho = P_3(t,\varphi)\rho^3 + P_4(t,\varphi)\rho^4 + P_5(t,\varphi)\rho^5 + \\ \;+ Q_1(t,\varphi)\varepsilon + Q_2(t,\varphi)\varepsilon\rho + O(\rho^6 + \varepsilon\rho^2 + \varepsilon^2), \\ \dot\varphi = \rho + \Phi_2(t,\varphi)\rho^2 + \Phi_3(t,\varphi)\rho^3 + \Phi_4(t,\varphi)\rho^4 + \\ \;+ \Theta_1(t,\varphi)\dfrac{\varepsilon}{\rho} + \Theta_2(t,\varphi)\varepsilon + O\left(\rho^5 + \varepsilon\rho + \dfrac{\varepsilon^2}{\rho}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем функции, зависящие от переменных t, φ, — периодические с периодами 2π, 2ω соответственно.

В первом параграфе рассматривается вопрос об устойчивости нулевого решения при $\varepsilon = 0$. Доказывается, что существует замена переменных вида

$$\rho = r + h_2(\varphi)r^2 + h_3(t,\varphi)r^3 + h_4(t,\varphi)r^4 + h_5(t,\varphi)r^5, \tag{10}$$

в результате которой получим систему

$$\begin{cases} \dot r = g\, r^5 + O(r^6), \\ \dot\varphi = r + \Psi_2(t,\varphi)r^2 + \Psi_3(t,\varphi)r^3 + O(r^4), \end{cases} \tag{11}$$

где g — так называемая константа Ляпунова, которая, вообще говоря, отлична от нуля и равна среднему значению от выражения

$$\begin{gathered}\frac{a_4}{2}C^2S^2 + \left(\frac{3a_1}{2}CS^2 - \frac{\bar a_1}{2}CS^2\right)\left(-\frac{\bar a_2}{2}\int S^3 d\varphi - \right.\\ - \frac{\bar a_3}{2}\int C^3 S d\varphi + \frac{CS^2}{2}\int (a_1 - \bar a_1)d\varphi + \frac{\bar a_1^2}{4}\left(\int CS^2 d\varphi\right)^2 - \\ \left. - \frac{\bar a_1^2}{2}\int C^3S^3 d\varphi\right) + \frac{3}{8}a_1\bar a_1^2 CS^2\left(\int CS^2 d\varphi\right)^2 - \\ - \frac{\bar a_1^2}{2}a_1C^3S^3\int CS^2 d\varphi + \frac{\bar a_1}{2}a_2C^2S^4 - \bar a_1 a_2 S^3\int CS^2 d\varphi - \\ - \bar a_1 a_3 C^3 S\int CS^2 d\varphi - \left(\frac{\bar a_1}{2}\int CS^2 d\varphi + a_1C^2S\right)\left(-\frac{\bar a_2}{2}S^3 - \right.\\ - \frac{\bar a_3}{2}C^3S + \frac{\bar a_1^2}{2}CS^2\int CS^2 d\varphi - \frac{\bar a_1^2}{2}C^3S^3 + \\ \left. + \left(SC^3\operatorname{sgn} C - \frac{S^3}{2}\right)\int (a_1 - \bar a_1)d\varphi\right)\Bigg) - \frac{\partial \tilde h_4}{\partial\varphi}.\end{gathered}$$

Здесь и далее черта над символом означает среднее значение, под неопределенным интегралом будем понимать первообразную, среднее значение которой равно нулю. Заметим, что первое слагаемое имеет ненулевое среднее значение, если $\bar a_4 \neq 0$.

Теорема. *Если $g < 0$, то нулевое решение уравнения* (7) *асимптотически устойчиво, если $g > 0$, то оно неустойчиво.*

Во втором параграфе рассматривается случай когда $\varepsilon > 0$. С помощью нескольких замен система (9) приводится к виду, гарантирующему существование инвариантного тора. Сначала заменой (10) приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{r} = gr^5 + Q_1(t,\varphi)\varepsilon + Q_2(t,\varphi)\varepsilon r + O(r^6 + \varepsilon r^2 + \varepsilon^2), \\ \dot{\varphi} = r + \Psi_2(t,\varphi)r^2 + \Psi_3(t,\varphi)r^3 + \Psi_4(t,\varphi)r^4 + \\ \quad + \Theta_1(t,\varphi)\dfrac{\varepsilon}{r} + \Theta_2(t,\varphi)\varepsilon + O(r^5 + \varepsilon r + \dfrac{\varepsilon^2}{r}). \end{cases}$$

Затем заменой

$$r = \sqrt[4]{\varepsilon}(\alpha + z), \tag{12}$$

где $|z| < \alpha, \alpha > 0$ избавляемся от особенностей правой части. Получим систему

$$\begin{cases} \dot{z} = Q_1(t,\varphi)\varepsilon^{\frac{3}{4}} + Z_1(t,\varphi)\varepsilon + Z_2(t,\varphi)\varepsilon z + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \varepsilon z^2\right), \\ \dot{\varphi} = \sqrt[4]{\varepsilon}\alpha + E_2(t,\varphi)\sqrt{\varepsilon} + E_3(t,\varphi)\varepsilon^{\frac{3}{4}} + E_4(t,\varphi)\varepsilon + \\ \quad + \sqrt[4]{\varepsilon}z + E_5(t,\varphi)\sqrt{\varepsilon}z + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}}z + \sqrt{\varepsilon}z^2\right). \end{cases}$$

Далее заменой вида

$$\begin{aligned} z = u &+ \sqrt{\varepsilon}\hat{F}_0(\varphi) + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\tilde{F}_0(t,\varphi) + \sqrt{\varepsilon}uF_1(\varphi) + \\ &+ \sqrt{\varepsilon}u^2F_2(\varphi) + \sqrt{\varepsilon}u^3F_3(\varphi) \end{aligned} \tag{13}$$

избавляемся от члена $Q_1(t,\varphi)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$. Получим систему

$$\begin{cases} \dot{u} = U_1(t,\varphi)\varepsilon + U_2(t,\varphi)\varepsilon u + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \varepsilon u^2 + \varepsilon^{\frac{3}{4}}u^4\right), \\ \dot{\varphi} = \sqrt[4]{\varepsilon}\alpha + G_2(t,\varphi)\sqrt{\varepsilon} + G_3(t,\varphi)\varepsilon^{\frac{3}{4}} + G_4(t,\varphi)\varepsilon + \\ \quad + \sqrt[4]{\varepsilon}u + G_5(t,\varphi)\sqrt{\varepsilon}u + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}}u + \sqrt{\varepsilon}u^2\right), \end{cases}$$

Заменой вида

$$u = v + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\hat{H}(\varphi) + \varepsilon\tilde{H}(t,\varphi) + \varepsilon^{\frac{3}{4}}v\hat{h}(\varphi) + \varepsilon v\tilde{h}(t,\varphi) \tag{14}$$

приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{v} = L(\alpha)\varepsilon + M(\alpha)\varepsilon v + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \varepsilon v^2 + \varepsilon^{\frac{3}{4}}v^4\right), \\ \dot{\varphi} = \sqrt[4]{\varepsilon}\alpha + H_2(t,\varphi)\sqrt{\varepsilon} + H_3(t,\varphi)\varepsilon^{\frac{3}{4}} + H_4(t,\varepsilon)\varepsilon + \\ \quad + \sqrt[4]{\varepsilon}v + H_5(t,\varphi)\sqrt{\varepsilon}v + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}}v + \sqrt{\varepsilon}v^2\right), \end{cases}$$

где

$$L(\alpha) = g\alpha^5 + \frac{\bar{b}_2}{5}\alpha, \quad M(\alpha) = 5g\alpha^4 + \frac{\bar{b}_2}{5}. \tag{15}$$

Уравнение $L(\alpha) = 0$ называется бифуркационным уравнением, так как каждому его положительному решению соответствует инвариантный тор (это будет показано в дальнейшем), определяемый уравнением (12). Пусть α^* — положительный корень уравнения $L(\alpha) = 0$, что равносильно выполнению неравенства $\dfrac{\bar{b}_2}{g} < 0$. Тогда $M(\alpha^*) = M^* = -\dfrac{4}{5}\bar{b}_2 \neq 0$. Таким образом система примет вид

$$\begin{cases} \dot{v} = M^*\varepsilon v + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \varepsilon v^2 + \varepsilon^{\frac{3}{4}} v^4\right), \\ \dot{\varphi} = \sqrt[4]{\varepsilon}\alpha + \Omega_2(t,\varphi)\sqrt{\varepsilon} + \Omega_3(t,\varphi)\varepsilon^{\frac{3}{4}} + \Omega_4(t,\varphi)\varepsilon + \\ \quad + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \sqrt[4]{\varepsilon} v\right). \end{cases}$$

И, наконец, сделав замены вида

$$\varphi = \psi + \sqrt[4]{\varepsilon} f_1(\psi) + \sqrt{\varepsilon} f_2(t,\psi) + \varepsilon^{\frac{3}{4}} f_3(t,\psi) + \varepsilon f_4(t,\psi), \tag{16}$$

$$v = \varepsilon^{\frac{1}{8}}\eta, \tag{17}$$

получим систему

$$\begin{cases} \dot{\eta} = M^*\varepsilon\eta + O\left(\varepsilon^{\frac{9}{8}}\right), \\ \dot{\psi} = \sqrt[4]{\varepsilon}\alpha + d_2\sqrt{\varepsilon} + d_3\varepsilon^{\frac{3}{4}} + d_4\varepsilon + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{8}}\eta\right), \end{cases}$$

где d_i — константы. Известно, что для данной системы существует инвариантный двумерный тор, задаваемый уравнением

$$\eta = \varepsilon^{\frac{1}{8}} B(t,\psi,\varepsilon), \tag{18}$$

где функция $B(t,\psi,\varepsilon)$ — непрерывна и периодична по t, ψ.

Из формул (8), (10), (13)–(18) следует, что справедлива

Теорема. *При достаточно малом ε и выполнении неравенства $\dfrac{\bar{b}_2}{g} < 0$ существует инвариантный двумерный тор для* *уравнения* (7)

$$x = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\alpha^* + \varepsilon^{\frac{1}{4}} A(t, \varphi, \varepsilon)\right)^2 C(\varphi),$$
$$\dot{x} = -\varepsilon^{\frac{3}{4}} \left(\alpha^* + \varepsilon^{\frac{1}{4}} A(t, \varphi, \varepsilon)\right)^3 S(\varphi),$$

где функция $A(t, \varphi, \varepsilon)$ непрерывна и периодична по t, φ с периодом $2\pi, 2\omega$. К тому же, при $\bar{b}_2 > 0$ тор асимптотически устойчив.

Таким образом, имеет место бифуркация рождения инвариантного тора из положения равновесия при прохождении малого параметра через нулевое значение.

Если рассматриваемая система автономна, то имеет место бифуркация рождения предельного цикла из положения равновесия, т. е. аналогично бифуркации Андронова–Хопфа. В этом случае рассуждения существенно упрощаются. Эти результаты изложены в § 4.

Во второй главе исследуется в двух указанных выше направлениях система (6). Однако, сначала в § 1 рассматривается случай системы типа (6), где восстанавливающая сила $x^2 \operatorname{sgn} x$ заменена на более простую для исследования восстанавливающую силу x^3. Таким образом, § 1 можно рассматривать как эталонный по отношению к двум следующим.

Пусть в системе (6) функции X, Y, Z — достаточно гладкие нелинейности по переменным x, y, z_i и малому параметру ε в некоторой окрестности нуля, а порядок малости функции Y не ниже пятого, если x приписывать второй порядок, y — третий, а z_i и ε — четвертый. Положим также, что данные функции непрерывны и 2π-периодичны по t и выполняются равенства
$X(t, 0, 0, 0, \varepsilon) = 0$, $Y(t, 0, 0, 0, \varepsilon) = 0$, $Z(t, 0, 0, 0, \varepsilon) = 0$, матрица A — гиперболическая.

Таким образом, функции X, Y можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&X = \alpha_1(t)x^2 + \alpha_2(t)xy + \alpha_3(t)y^2 + \alpha_4(t)x^3 + \beta_1(t)\varepsilon x + \\
&+ \beta_2(t)\varepsilon y + \gamma_1(t)zx + \gamma_2(t)zy + X^*, \\
&Y = a_1(t)xy + a_2(t)y^2 + a_3(t)x^3 + a_4(t)x^2y + b_1(t)\varepsilon x + \\
&+ b_2(t)\varepsilon y + c_1(t)zx + c_2(t)zy + Y^*.
\end{aligned}$$

Во втором параграфе в предположении, что вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны, исследуется на устойчивость положение равновесия системы при $\varepsilon = 0$. Сначала находится константа Ляпунова g (аналогично тому, как это было сделано в первой главе), затем применяется второй метод Ляпунова.

Теорема. *Если $g < 0$, то нулевое решение системы* (6) *асимптотически устойчиво, а если $g > 0$, то оно неустойчиво.*

В третьем параграфе выводится бифуркационное уравнение, аналогичное бифуркационному уравнению из главы 1, и доказывается существование инвариантного двумерного тора при $\varepsilon > 0$ для системы (6).

Теорема. *Пусть выполняется неравенство $\dfrac{\bar{\beta}_1 + \bar{b}_2}{g} < 0$. Тогда при достаточно малом ε для системы* (6) *существует инвариантный двумерный тор*

$$\begin{aligned}
&x = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\alpha^* + \varepsilon^{\frac{1}{8}} R(t,\varphi,\varepsilon)\right)^2 C(\varphi), \\
&y = -\varepsilon^{\frac{3}{4}} \left(\alpha^* + \varepsilon^{\frac{1}{8}} R(t,\varphi,\varepsilon)\right)^3 S(\varphi), \\
&z = \varepsilon^{\frac{1}{8}} D(t,\varphi,\varepsilon),
\end{aligned}$$

где R, D — непрерывные, удовлетворяющие условию Липшица по φ функции. К тому же, при $\bar{\beta}_1 + \bar{b}_2 > 0$ и отрицательности действительных частей всех собственных чисел матрицы A этот тор асимтотически устойчив.

Заключение

Для системы вида (5) и его гиперболического линейного расширения (6) получены следующие результаты: 1) найдены достаточные условия наличия асимптотической устойчивости и неустойчивости (5) и (6) при $\varepsilon = 0$, 2) найдены достаточные условия существования инвариантного двумерного тора (бифуркация) для (5) и (6) при $\varepsilon > 0$, 3) найдены достаточные условия наличия асимптотической устойчивости инвариантных торов.

Для исследования (5) и (6) применялся метод разделения переменных.

Принципиальное отличие настоящей работы от предшествующих исследований состоит в том, что частота невозмущенных колебаний является бесконечно малой функцией амплитуды.

Список литературы

1. *Бибиков Ю. Н.* Устойчивость и бифуркация при периодических возмущениях положения равновесия осциллятора с бесконечно большой или бесконечно малой частотой // Мат. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 3. С. 1864–1881.

2. *Hale J. K.* Integral manifolds of perturbed differential system // Ann. of Math. 1961. Vol. 73. № 3. P. 496–531.

Публикации автора по теме диссертации

3. Бибиков Ю. Н., Букаты В. Р., Дороденков А. А. Регулярные и сингулярные периодические возмущения осциллятора с кубической восстанавливающей силой // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 79–89.

4. Дороденков А. А. Устойчивость и бифуркация рождения инвариантных торов из положения равновесия существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Санкт-Петербург. ун-та.

Сер. 1. 2009. Вып. 4. С. 20–27.

5. Дороденков А. А. Устойчивость и бифуркация положения равновесия одной существенно нелинейной системы // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер.1. 2013. Вып. 1. С. 68–71.