На правах рукописи

Селиванов Антон Антонович

Адаптивное и робастное управление динамическими сетями с запаздыванием на основе пассификации

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2014

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор технических наук, профессор **Фрадков Александр Львович**
Официальные оппоненты:	**Чеботарёв Павел Юрьевич,** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова Российской академии наук, главный научный сотрудник
	Феоктистова Варвара Николаевна, кандидат физико-математических наук, Федеральная ювелирная сеть 585, аналитик
Ведущая организация:	Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Защита состоится “24” сентября 2014 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д.33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан “____” ________ 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физ.-мат. наук, профессор

В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В последние годы всё большее внимание исследователей привлекают задачи сетевого управления. Это связано, прежде всего, с повсеместным распространением сетей. Типичными примерами являются Интернет и телекоммуникационные сети, транспортные и энергетические системы, промышленные сети, молекулярные ансамбли, пищевые сети, клеточные и метаболические сети. С помощью сетей моделируют биологические колебания (циркадные ритмы), предсказывают распространение болезней и инфекций. Отдельного внимания заслуживают искусственные нейронные сети, которые, имитируя свойства биологических нейронных сетей, позволяют не только лучше понять и контролировать процессы, происходящие в биологических организмах, но и помогают исследователям создавать эффективные алгоритмы распознавания речи и изображений, синтезировать адаптивные регуляторы, стабилизирующие нелинейные системы. Структура многих из перечисленных сетей с каждым годом усложняется и исследовать такие системы без применения соответствующего математического аппарата становится трудно.

Несмотря на то, что уже опубликовано множество работ, посвящённых сетевому управлению, распространение сетевых систем столь обширно и спектр возникающих задач столь широк, что остаётся множество нерешённых задач, некоторые из которых рассмотрены в данной работе.

Целью диссертационной работы является построение и анализ регуляторов, обеспечивающих синхронизацию динамических сетей при наличии запаздываний в состояниях, измерениях и управлениях. Для достижения поставленной цели в работе ставятся и решаются следующие **задачи**:

1. Получить условия синхронизации сетей с запаздываниями в связях с помощью децентрализованного адаптивного алгоритма управления.

2. Получить условия синхронизации динамических систем с помощью консенсусного регулятора по запаздывающим измерениям.

3. Получить условия стабилизации линейной системы, адаптивно управляемой через сеть.

4. Получить алгоритмы стабилизации синхронных состояний сетей осцилляторов Ландау-Стюарта с запаздываниями в связях.

Методы исследований. Для достижения поставленной цели использовались методы теории управления: метод пассификации и метод скоростного градиента. Для исследования устойчивости систем с запаздыванием использовались метод функционалов Ляпунова-Красовского и метод функций Ляпунова-Разумихина.

Научную новизну работы составляют следующие результаты:

1. Получены условия синхронизации сетей идентичных систем Лурье с мгновенными и запаздывающими нелинейными связями с помощью децентрализованного адаптивного регулятора (Теоремы 2.1–2.4) [4, 6–8, 12].

2. Для сетей идентичных систем Лурье с ограниченными возмущениями предложен адаптивный закон управления с регуляризацией, получены условия предельной ограниченности разностей состояний подсистем (Теоремы 2.5, 2.6) [5, 10].

3. Для идентичных систем Лурье с липшицевыми нелинейностями получены условия синхронизации с помощью двух типов консенсусного регулятора по выходам с ограниченным запаздыванием (Теоремы 3.1, 3.2) [1, 11].

4. Получены условия полуглобальной стабилизации линейных систем с помощью адаптивного регулятора на основе пассификации при наличии переменного запаздывания в измерениях и управлении (Теорема 4.1) [9].

5. Для линейных систем, адаптивно управляемых через сеть, получены условия на границы периода дискретизации и сетевых запаздываний, обеспечивающие асимптотическую устойчивость [9].

6. На основе метода скоростного градиента предложен алгоритм адаптивной подстройки фазы связей в сети осцилляторов Ландау-Стюарта, обеспечивающий устойчивость кластерных синхронных состояний [2, 3].

Теоретическая значимость и практическая ценность. Полученные результаты обосновывают возможность использования адаптивных регуляторов на основе пассификации для стабилизации и синхронизации систем при наличии запаздываний в состояниях, измерениях и управлении. Кроме того, предложена целевая функция, позволяющая с помощью метода скоростного градиента синтезировать адаптивные регуляторы, обеспечивающие устойчивость кластерных синхронных состояний сетей осцилляторов Ландау-Стюарта.

Результаты диссертации позволяют найти допустимую величину запаздывания при которой адаптивные регуляторы на основе пассификации стабилизируют (синхронизируют) систему. В частности, для линейной системы, адаптивно управляемой через сеть, полученные результаты позволяют оценить допустимые величины периода дискретизации и сетевых запаздываний.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета СПбГУ, на семинарах лаборатории управления сложными системами ИПМАШ РАН и на международных конференциях: 52nd

IEEE Conference on Decision and Control, Firenze, Italy, 2013; IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, Caen, France, 2013; European Conference on Complex Systems, Brussels, Belgium, 2012; The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, Russia, 2011; 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Orlando, Florida, 2011; 14th International Student Olympiad on Automatic Control, Saint-Petersburg, Russia, 2011; 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, 2011; 5th Intern. Conf. "Physics and Control", Leon, Spain, 2011.

Выполненный в ходе работы над диссертацией проект «Адаптивное управление нелинейными сетями с запаздыванием» был отмечен дипломом победителя конкурса грантов Санкт-Петербурга для студентов, аспирантов, молодых учёных, молодых кандидатов наук 2012 г. Доклад "Synchronization Algorithms for Dynamical Networks with Delayed Couplings", подготовленный в ходе работы над диссертацией и представленный на Международной студенческой олимпиаде по теории управления, был удостоен диплома второй степени за теоретический вклад. В 2013 году за научный проект «Алгоритмическое и программное обеспечение систем адаптивного сетевого управления с запаздыванием», выполненный в рамках работы над диссертацией, диссертант был удостоен стипендии Президента Российской Федерации для молодых учёных и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики, на 2013–2015 годы.

Результаты диссертации были получены в ходе работы по ФЦП «Кадры» (гос. контракты NN 16.740.11.0042, 14.B37.21.0247, соглашения NN 8846, 8855) и при поддержке РФФИ (проекты NN 11-08-01218, 12-01-31354, 13-08-01014) и использованы в перечисленных проектах.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 работ, в том числе 7 в изданиях из перечня ВАК. Работы [2–6, 8–11] написаны в соавторстве. В работах [2, 3] А.А. Селивановым была предложена целевая функция, позволяющая синтезировать адаптивные регуляторы, стабилизирующие желаемые синхронные состояния сетей, а также проведены численные эксперименты, иллюстрирующие работоспособность получаемых алгоритмов управления. В работах [4, 6, 10] диссертанту принадлежат условия адаптивной синхронизации сетей взаимосвязанных систем при наличии запаздываний в связях. В [5] А.А. Селиванову принадлежат результаты раздела IV. В [8, 9] диссертанту принадлежат формулировки и доказательства теорем, а соавторам — постановка задачи и выбор методов решения. В работе [11] А.А. Селиванову принадлежат результаты раздела IV.

Объем и структура работы. Диссертация объёмом 76 страниц состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы (114 источников).

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель и ставятся задачи работы, даётся обзор научной литературы по изучаемой проблеме, приводится краткое содержание работы по главам.

В первой главе приводятся вспомогательные сведения, относящиеся к системам с запаздыванием, даётся краткое описание методов пассификации и скоростного градиента, приводятся вспомогательные неравенства, используемые при получении основных результатов.

Во второй главе рассматривается задача синхронизации с лидером сети систем Лурье с мгновенными и запаздывающими нелинейными связями с помощью децентрализованного адаптивного алгоритма управления на основе пассификации.

В разделе 2.1 даётся математическая постановка задачи децентрализованного адаптивного управления. Рассматривается сеть, динамика которой описывается уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_\xi x_i(t) + \varphi_0\big(t, x_i(t)\big) + B_\xi u_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}\big(t, x_j(t)\big) + \sum_{j=1}^{N} \psi_{ij}\big(t, x_j(t - r(t))\big), \qquad (1) \\ y_i(t) &= C_\xi x_i(t), \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$ – состояния, $u_i \in \mathbb{R}$ – входы, $y_i \in \mathbb{R}^l$ – измеряемые выходы подсистем; неизвестные матрицы A_ξ, B_ξ, C_ξ параметризованы через $\xi \in \Xi$, где Ξ – известное множество; начальные условия задаются непрерывными функциями $x_i^0 \in \mathcal{C}[-h, 0]$.

Делаются следующие предположения:

1. Существует вектор $g \in \mathbb{R}^l$ такой, что $\forall \xi \in \Xi$ дробно-рациональная функция $g^T C_\xi (sI - A_\xi)^{-1} B_\xi$ является гипер-минимально-фазовой, т. е. её числитель является устойчивым многочленом с положительным старшим коэффициентом.

2. Функции φ_{ij} и ψ_{ij} кусочно-непрерывны по первому аргументу и глобально липшицевы по второму с постоянными L_{ij} и M_{ij}, соответственно.

3. Существуют функции $\Phi(t, x)$ и $\Psi(t, x)$ такие, что $\forall t \geqslant t_0, i = 1, \dots, N$

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}(t, \bar{x}(t)) = \Phi(t, \bar{x}(t)), \quad \sum_{j=1}^{N} \psi_{ij}(t, \bar{x}(t)) = \Psi(t, \bar{x}(t)).$$

4. Запаздывание $r(t)$ является дифференцируемой функцией такой, что для некоторых $h > 0$ и d
$$-h \leqslant t - r(t) \leqslant t, \quad \dot{r}(t) \leqslant d < 1.$$

Предположение 3 гарантирует существование синхронного решения системы (1) при $u_i \equiv 0$.

Предполагается, что каждому регулятору сети известен некоторый «синхронизирующий» сигнал – выход *системы-лидера:*

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_L(t) = A_\xi x_L(t) + \varphi_0(t, x_L(t)) + \Phi(t, x_L(t)) + \Psi\left(t, x_L\left(t - r(t)\right)\right) + B_\xi u_L(t),\\
&y_L(t) = C_\xi x_L(t),
\end{aligned} \tag{2}$$

где u_L – известный управляющий сигнал. Начальные условия для системы (2) задаются непрерывной функцией $x_L^0 \in \mathcal{C}[-h, 0]$.

Задача заключается в построении адаптивных законов обратной связи вида
$$u_i = U_i(t, y_i, \theta_i, y_L, u_L), \quad \dot{\theta}_i = \Theta_i(t, y_i, \theta_i, y_L, u_L),$$
обеспечивающих на всех траекториях системы (1), (2) выполнение соотношений
$$\lim_{t\to\infty} \|x_i(t) - x_L(t)\| = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

В разделе 2.2 на основе метода скоростного градиента получен децентрализованный адаптивный регулятор по выходу:
$$\begin{aligned}
&u_i(t) = -\theta_i^T(t)\big[y_i(t) - y_L(t)\big] + u_L(t),\\
&\dot{\theta}_i(t) = \Gamma_i\big[y_i(t) - y_L(t)\big]\big[y_i(t) - y_L(t)\big]^T g,
\end{aligned} \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4}$$
где $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{l\times l}$ – положительно определённые матрицы, начальные данные $\theta_i(t_0) \in \mathbb{R}^l$ выбираются произвольно.

Как известно (Фрадков, А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // АиТ. – 1974. – № 12. – С. 96-103), для всякого $\xi \in \Xi$ предположение 1 (гипер-минимально-фазовость) гарантирует существование матрицы P_ξ и вектора θ_ξ таких, что для некоторого $\varepsilon_\xi > 0$ выполнены соотношения
$$P_\xi > 0, \quad P_\xi A_* + A_*^T P_\xi < -\varepsilon_\xi I, \quad P_\xi B_\xi = C_\xi^T g, \tag{5}$$
где $A_* = A_\xi - B_\xi \theta_\xi^T C_\xi$. Из (5) следует, что подстановка $u = -\theta_\xi^T y + v$ делает систему $\dot{x}(t) = A_\xi x(t) + B_\xi u(t)$, $\tilde{y}(t) = g^T C_\xi x(t)$ *строго пассивной* по отношению к новому входу v, т. е. существуют функции $V(x) \geqslant 0$ и $\varphi(x) > 0$ для $x \neq 0$, такие что
$$V(x) \leqslant V(x(0)) + \int_0^t \left[\tilde{y}^T(t) v(t) - \varphi(x(t))\right] dt.$$

При исследовании системы (1), (2), (4) важную роль играет величина

$$\rho = \inf_{\xi \in \Xi} \varepsilon_\xi \lambda_{\max}^{-1}(P_\xi),$$

которая имеет смысл наименьшей степени устойчивости матриц A_*.

При формулировке результатов используются величины

$$\overline{L} = \max_{i=1,\dots,N} \sum_{j=1}^{N} [L_{ij} + L_{ji}], \quad \overline{M} = \max_{i=1,\dots,N} \sum_{j=1}^{N} \left[M_{ij} + \frac{M_{ji}}{1-d} \right],$$

которые имеют смысл сил связей.

В подразделе 2.3.1 условия синхронизации получены для функции φ_0, удовлетворяющей следующему предположению.

Предположение 5. *Функция $\varphi_0(t,x)$ кусочно-непрерывна по первому аргументу и глобально липшицева по второму с постоянной L_0.*

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения 1–5. Если $\overline{L} + \overline{M} < \rho - 2L_0$, то адаптивный алгоритм управления* (4) *обеспечивает выполнение соотношения* (3) *на траекториях системы* (1), (2), (4) *и стремление настраиваемых параметров $\theta_i(t)$ к постоянным значениям.*

В подразделе 2.3.2 получены условия синхронизации для функции φ_0, удовлетворяющей следующему предположению.

Предположение 6. *Существует функция $h_0(t, C_\xi x)\colon [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi_0(t,x) = B_\xi h_0(t, C_\xi x)$ и для всех начальных условий из $\mathcal{C}[-h,0]$ и кусочно-непрерывных u_i уравнения* (1), (2) *имеют решения продолжимые на $t \geqslant t_0$.*

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения 1–4, 6 и*

$$(y_1 - y_2)^T g(h_0(t,y_1) - h_0(t,y_2)) \leqslant 0, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^l.$$

Если выполнено неравенство $\overline{L} + \overline{M} < \rho$, то адаптивный алгоритм управления (4) *обеспечивает выполнение соотношения* (3) *на траекториях системы* (1), (2), (4) *и стремление настраиваемых параметров $\theta_i(t)$ к постоянным значениям.*

В подразделе 2.3.3 для случая линейных связей φ_{ij}, ψ_{ij} получены более точные условия синхронизации системы (1), (2), (4) (Теоремы 2.3, 2.4).

В разделе 2.4 рассматриваются системы с ограниченными возмущениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_\xi x_i(t) + \varphi_0\big(t, x_i(t)\big) + B_\xi u_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}\big(t, x_j(t)\big) + \sum_{j=1}^{N} \psi_{ij}\big(t, x_j(t - r(t))\big) + w_i(t), \qquad (6) \\ y_i(t) &= C_\xi x_i(t), \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где x_i, u_i, y_i, A, B, C, φ_0, φ_{ij}, ψ_{ij} те же, что и в (1), и $w_i \in \mathbb{R}^n$ – неизвестные ограниченные функции: $\|w_i\| \leqslant \Delta_i, i = 1, \ldots, N$.

Вместо предположения 4 делается следующее предположение:

4′. Запаздывание $r(t)$ является дифференцируемой функцией такой, что

$$0 \leqslant r(t) \leqslant h, \quad \dot{r}(t) \leqslant d < 1.$$

Рассматривается следующая цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \|x_i(t) - x_L(t)\|^2 \leqslant b, \tag{7}$$

где $b > 0$ – заданное число.

В случае систем с возмущениями для обеспечения ограниченности θ_i в регулятор добавляется отрицательная обратная связь:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -\theta_i(t)^T \big[y_i(t) - y_L(t)\big] + u_L(t), \\ \dot{\theta}_i(t) &= \Gamma_i \big[y_i(t) - y_L(t)\big] \big[y_i(t) - y_L(t)\big]^T g - \sigma\theta_i(t), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{l\times l}$ – положительно определённые матрицы, $\sigma > 0$, $\theta_i(t_0) \in \mathbb{R}^l$.

Введём обозначение:

$$\overline{M}_h = \max_{i=1,\ldots,N} \sum_{j=1}^{N} \left[e^{\sigma h} M_{ij} + \frac{M_{ji}}{1-d} \right].$$

Теорема 2.5. *Пусть выполнены предположения 1–3, 4′, 5. Если*

$$\overline{L} + \overline{M}_h < \rho - 2L_0, \quad \sigma = \frac{1}{2}\left(\rho - 2L_0 - \overline{L} - \overline{M}_h\right),$$

то адаптивный алгоритм управления (8) *обеспечивает выполнение соотношения* (7) *с*

$$b = \frac{\lambda_{\max}(P_\xi)}{\sigma^2 \lambda_{\min}(P_\xi)} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 + \frac{1}{\lambda_{\min}(P_\xi)} \sum_{i=1}^{N} \theta_\xi^T \Gamma_i^{-1} \theta_\xi,$$

где P_ξ, θ_ξ из (5)*, на траекториях системы* (6)*,* (2)*,* (8) *и ограниченность настраиваемых параметров $\theta_i(t)$.*

Теорема 2.6. *Пусть выполнены предположения 1–3, 4′, 6 и*

$$(y_1 - y_2)^T g(h_0(t, y_1) - h_0(t, y_2)) \leqslant 0, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^l.$$

Если

$$\overline{L} + \overline{M}_h < \rho, \quad \sigma = \frac{1}{2}\left(\rho - \overline{L} - \overline{M}_h\right),$$

то адаптивный алгоритм управления (8) *обеспечивает выполнение соотношения* (7) *с*

$$b = \frac{\lambda_{\max}(P_\xi)}{\sigma^2 \lambda_{\min}(P_\xi)} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 + \frac{1}{\lambda_{\min}(P_\xi)} \sum_{i=1}^{N} \theta_\xi^T \Gamma_i^{-1} \theta_\xi,$$

где P_ξ*,* θ_ξ *из* (5)*, на траекториях системы* (6)*,* (2)*,* (8) *и ограниченность настраиваемых параметров* $\theta_i(t)$*.*

В разделе 2.5 на примере сети четырёх связанных систем Чуа продемонстрирована эффективность полученных результатов, приведены способы вычисления величин, необходимых для проверки условий теорем. Кроме того, продемонстрировано преимущество адаптивного регулятора перед статическим, которое заключается в меньших предельных значениях коэффициентов усиления в законах обратной связи.

В третьей главе рассматривается задача синхронизации идентичных системы Лурье с помощью управляющего сигнала, который строится как взвешенная сумма разностей запаздывающих выходов соседних узлов.

В разделе 3.1 даётся математическая постановка задачи консенсусного управления. Рассматриваются N систем

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + \varphi(t, x_i(t)) + Bu_i(t), \\ y_i(t) &= Cx_i(t), \quad t \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{9}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$ – состояния, $u_i \in \mathbb{R}$ – входы, $y_i \in \mathbb{R}^l$ – измеряемые выходы систем; постоянные матрицы A, B, C имеют подходящие размерности. Предполагается, что функция $\varphi(t, x)$ кусочно-непрерывна по первому аргументу и глобально липшицева по второму с постоянной L_φ. В отличие от второй главы, здесь предполагается, что регулятору i-ой системы доступны измерения с некоторых «соседних» узлов, при этом на передачу информации от j-ого узла к i-ому необходимо время $r_{ij}(t)$. Рассматриваются законы обратной связи двух типов:

$$u_i(t) = K \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t) \big(y_i(t) - y_j(t - r_{ij}(t))\big), \tag{10}$$

$$u_i(t) = K \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t) \big(y_i(t - r_{ji}(t)) - y_j(t - r_{ij}(t))\big), \tag{11}$$

где $K \in \mathbb{R}^{1 \times l}$ – вектор-строка коэффициентов усиления, $g_{ij}(t) \geqslant 0$ – ограниченные, кусочно-непрерывные функции, определяющие какие измерения доступны регуляторам, такие что $g_{ii}(t) \equiv 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$. Регуляторы (10), (11) называются консенсусными и возникают в ряде областей физики, биологии и социологии. В (10) вычисляется разница между текущим выходом i-ой системы и запаздывающим выходом j-ой системы, что не требует знания величины запаздывания. Если величины запаздываний известны, то возможно построить регулятор (11), а если вдобавок $r_{ij}(t) = r_{ji}(t)$, то вычисляется разность между выходами систем в одно и то же время. Поскольку в случае синхронизации системы регулятор (11) обращается в ноль, его наличие не меняет синхронное решение систем (9) (с $u_i \equiv 0$), а лишь изменяет его устойчивость. Регулятор (11) возникает, если измерению доступны только разности выходов, например, если летательный аппарат с некоторым запаздыванием измеряет расстояние до ближайших соседей.

Далее под синхронизацией понимается выполнение соотношений

$$\lim_{t\to\infty}(x_i(t) - x_j(t)) = 0, \quad i, j = 1, \dots, N \tag{12}$$

на траекториях системы (9) (с некоторыми u_i).

При формулировке условий синхронизации накладывается следующее предположение.

Предположение 7. *Существует вектор $g \in \mathbb{R}^l$ такой, что функция $g^T C(sI - A)^{-1}B$ является гипер-минимально-фазовой.*

В разделе 3.2 получены условия синхронизации систем (9) с помощью закона обратной связи (10) при выполнении следующего предположения, обеспечивающего существование синхронного решения системы (9), (10).

Предположение 8. $\exists c(t), r(t), h\colon \forall t \geqslant 0, \forall i, j = 1, \dots, N$

$$\sum_{k=1}^{N} g_{ik}(t) = c(t), \quad r_{ij}(t) = r(t), \quad 0 \leqslant r(t) \leqslant h.$$

Определим матрицу $L(t) = \{l_{ij}(t)\}_{i,j=1}^N$, где $l_{ij}(t) = -g_{ij}(t)$, если $i \neq j$, $l_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N g_{ik}(t)$, если $i = j$. Введём обозначения $G(t) = \{g_{ij}(t)\}_{i,j=1}^N$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T$,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{1} & -I_{N-1} \end{pmatrix}, \quad ML(t)M = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0} & \Lambda(t) \end{pmatrix}, \quad MG(t)M = \begin{pmatrix} c(t) & * \\ \mathbf{0} & \Omega(t) \end{pmatrix},$$

где $\Lambda(t)$, $\Omega(t)$ – некоторые матрицы.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены Предположения 7, 8 и для некоторого $\lambda_* > 0$*

$$\Lambda(t) + \Lambda^T(t) \geqslant \lambda_* I. \tag{13}$$

Тогда для достаточного большого k существуют достаточно малые h и L_φ такие, что закон обратной связи (10) *с $K = -kg^T$ обеспечивает выполнение* (12) *на траекториях системы* (9), (10) *для любых начальных данных.*

В разделе 3.3 получены условия синхронизации систем (9) с помощью закона обратной связи (11) при выполнении следующего предположения, обеспечивающего существование синхронного решения системы (9), (11).

Предположение 9. $\exists h\colon \forall t \geqslant 0, \forall i, j = 1, \ldots, N$

$$r_{ij}(t) = r_{ji}(t), \quad r_{ij}(t) \leqslant h.$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены Предположения 7, 9 и для некоторого* $\lambda_* > 0$

$$\Lambda(t) + \Lambda^T(t) \geqslant \lambda_* I. \tag{14}$$

Тогда для достаточного большого k *существуют достаточно малые* h *и* L_φ *такие, что закон обратной связи* (11) *с* $K = -kg^T$ *обеспечивает выполнение* (12) *на траекториях системы* (9), (11) *для любых начальных данных.*

Если матрица $L(t)$ постоянна и симметрична, т. е. граф связей не изменяется и не ориентирован, то условия (13), (14) равносильны связности графа.

В четвёртой главе рассматривается задача адаптивной стабилизации линейной системы при наличии переменного неизвестного запаздывания в управлении и измерениях.

В разделе 4.1 приводится математическая постановка задачи. Рассматривается неопределённая линейная система

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\xi x(t) + Bu(t - r_1(t)), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t - r_2(t)), \end{aligned} \tag{15}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u \in \mathbb{R}$ – вход, $y \in \mathbb{R}^l$ – измеряемый выход системы. Предполагается, что $y(t) = 0$ при $t - r_2(t) < 0$.

Делаются следующие предположения:

10. Неизвестная матрица A_ξ лежит в известном политопе

$$A_\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i A_i, \quad 0 \leqslant \xi_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^N \xi_i = 1. \tag{16}$$

11. Существует вектор $g \in \mathbb{R}^l$ такой, что $g^T C(sI - A_\xi)^{-1} B$ гипер-минимально-фазовая (имеет устойчивый числитель с положительным старшим коэффициентом) для всех A_ξ из (16).

12. Существуют h_1, h_2 такие, что: $0 \leqslant r_1(t) \leqslant h_1$, $0 \leqslant r_2(t) \leqslant h_2$.

13. Существует единственное $t_* > 0$ такое, что

$$\begin{cases} t - r(t) < 0, & t < t_*, \\ t - r(t) \geqslant 0, & t \geqslant t_*, \end{cases}$$

где $r(t) = r_1(t) + r_2(t - r_1(t))$.

Рассматривается адаптивный регулятор

$$\begin{aligned} u(t) &= -k(t) g^T y(t), \\ \dot{k}(t) &= \gamma^{-2} \left(g^T y(t) \right)^2, \end{aligned} \tag{17}$$

где $k, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, g из предположения 11.

В разделе 4.2 получены условия выполнения соотношений

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0, \ \lim_{t \to \infty} k(t) = \mathrm{const} \tag{18}$$

на траекториях системы (15), (17).

Теорема 3.3. *Пусть выполнены Предположения 10–13 и для заданных значений* $M_k > 0$, $M_1 > 0$, $k_* > 0$ *существуют* $n \times n$ *матрицы* $P > 0$, $S > 0$, $R > 0$, G_1, G_2, G_3 *такие, что:*

$$\begin{aligned} & H_i(a,b,c)\Big|_{a \pm M_k, b \pm M_k, c \pm M_1} < 0, \quad i = 1, \ldots, N, \\ & PB = C^T g, \quad \begin{pmatrix} R & G_j \\ * & R \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где

$$H_i(a,b,c) = \begin{pmatrix} H_1^i & H_2(c) & 0 & H_3 & H_4(a) & hA_i^T R \\ * & -R & R & H_5(a) & -hG_1 & H_7(b) \\ * & * & -(S+R) & hG_2 & hG_1 & 0 \\ * & * & * & -h^2 R & H_6(a) & 0 \\ * & * & * & * & -h^2 R & 0 \\ * & * & * & * & * & -R \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} H_1^i &= P[A_i - Bk_* g^T C] + [A_i - Bk_* g^T C]^T P + S, \\ H_2(c) &= cPBg^T C, \\ H_3 &= k_* hPBg^T C, \\ H_4(a) &= k_* hPBg^T C - ahPBg^T C, \\ H_5(a) &= ahC^T g B^T P - hG_2, \\ H_6(a) &= ah^2 PBg^T C - h^2 (G_3)^T, \\ H_7(b) &= hbC^T g B^T R - hk_* C^T g B^T R, \\ h &= h_1 + h_2. \end{aligned}$$

Предположим, что

$$h_1 \leqslant \frac{M_1 \lambda_{\min}(P)}{M_k^2 \|g^T C\|^2}.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ существует число $\gamma > 0$ такое, что для всех начальных условий

$$\|x_0\| < \delta, \quad k(0) \in [k_* - M_k, k_*]$$

решения системы (15)*,* (17) *удовлетворяют свойству* (18).

В разделе 4.3 для системы, адаптивно управляемой через сеть, показано, что полученные результаты позволяют найти оценки на допустимые величины периода дискретизации и сетевых запаздываний. Это важное приложение продемонстрировано в разделе 4.4 на примере летательного аппарата, адаптивно управляемого через сеть.

В пятой главе предложены алгоритмы подстройки фазы связей (coupling phase), обеспечивающие устойчивость различных кластерных синхронных состояний сети осцилляторов Ландау-Стюарта.

Рассматривается сеть, состоящая из N осцилляторов, соединённых связями с запаздыванием:

$$\dot{z}_j(t) = [\lambda + i\omega - (1 + i\gamma)|z_j|^2]z_j + Ke^{i\beta} \sum_{n=1}^{N} a_{jn}[z_n(t-\tau) - z_j(t)], \qquad (19)$$

где $j = 1, \ldots, N$, $z_j = r_j e^{i\varphi_j} \in \mathbb{C}$ – состояния осцилляторов, τ – постоянное запаздывание, λ, ω, γ – вещественные коэффициенты, $\omega \neq 0$.

Уравнения (19) имеют синхронные решения с общей амплитудой $r_j \equiv r_{0,m}$ и фазами $\varphi_j = \Omega_m t + j\Delta\varphi_m$, где Ω_m – общая частота, $\Delta\varphi_m = 2\pi m/N$ – сдвиг по фазе. Целое число m определяет одно из возможных кластерных синхронных состояний.

В работе (C.-U. Choe, T. Dahms, P. Hövel, E. Schöll. Controlling synchrony by delay coupling in networks: From in-phase to splay and cluster states // Physical Review E. – 2010. – Vol. 81, no. 2. – P. 025205) показано, что параметр β определяет устойчивость различных кластерных синхронных состояний сети осцилляторов Ландау-Стюарта. Для нахождения значения β, обеспечивающего устойчивость желаемого синхронного состояния, необходимо решать уравнения, содержащие параметры системы. Для случая неизвестных параметров системы в разделах 5.2, 5.3 предлагается использовать адаптивный алгоритм подстройки параметра β. Для этой цели предлагается использовать целевую функцию

$$Q = 1 - f_d(\varphi) + \frac{N^2}{2} \sum_{p|d, 1 \leqslant p < d} f_p(\varphi), \qquad (20)$$

где

$$f_p(\varphi) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} e^{pi\varphi_j} \sum_{k=1}^{N} e^{-pi\varphi_k},$$

d – желаемое число кластеров, символ $p|d$ означает, что p является делителем d. Для получения необходимого алгоритма подстройки метод скоростного градиента применяется к целевой функции (20):

$$\dot{\beta} = -\Gamma \frac{\partial}{\partial \beta} \dot{Q},$$

где Γ – положительное число.

Работоспособность получаемых алгоритмов иллюстрируется результатами численного моделирования.

В заключении приведены основные результаты работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. **Селиванов, А. Управление синхронизацией сетей с нелинейностями и запаздывающими связями / А. Селиванов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. — 2013. — № 1(3). — С. 265–271.**

2. **Adaptive synchronization in delay-coupled networks of Stuart-Landau oscillators / A. Selivanov, J. Lehnert, T. Dahms et at. // Physical Review E. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 016201.**

3. **Control of Synchronization in Delay-Coupled Networks / E. Schöll, A. Selivanov, J. Lehnert et al. // International Journal of Modern Physics B. — 2012. — Vol. 26, no. 25. — P. 1246007.**

4. Decentralized Output Feedback Synchronization of Dynamical Networks / A. Fradkov, G. Grigoriev, I. Junussov, A. Selivanov // The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. — 2011. — P. 22–23.

5. **Fradkov, A. Decentralized adaptive controller for synchronization of dynamical networks with delays and bounded disturbances / A. Fradkov, G. Grigoriev, A. Selivanov // IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. — 2011. — P. 1110–1115.**

6. Fradkov, A. Passification Based Controlled Synchronization of Complex Networks / A. Fradkov, I. Junussov, A. Selivanov // European Conference on Complex Systems. — 2013. — P. 993–996.

7. Selivanov, A. Adaptive synchronization of networks with nonlinear delayed interconnections / A. Selivanov // International Student Conference “Science and Progress”. — 2011. — P. 81.

8. **Selivanov, A. Adaptive synchronization of nonlinear networks with delayed couplings under incomplete control and incomplete measurements / A. Selivanov, A. Fradkov, E. Fridman // IFAC World Congress. — 2011. — P. 1249–1254.**

9. **Selivanov, A. Adaptive Control of Systems with Fast Varying Unknown Delay in Measurements / A. Selivanov, E. Fridman, A. Fradkov // IEEE Conference on Decision and Control. — 2013. — P. 5583–5587.**

10. Selivanov, A. Adaptive synchronization of networks with bounded disturbances or delays under incompleteness of measurement and control / A. Selivanov, G. Grigoriev, A. Fradkov // International Conference “Physics and Control”. — 2011. — `http://lib.physcon.ru/doc?id=2a3ddd1a33bb`.

11. **Selivanov, A. Robust and Adaptive Passification Based Consensus Control of Dynamical Networks / A. Selivanov, I. Junussov, A. Fradkov // IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing. — 2013. — P. 707—711.**

12. Selivanov, A. Synchronization Algorithms for Dynamical Networks with Delayed Coupling / A. Selivanov // International Student Olympiad on Automatic Control. — 2011. — P. 31—36.