

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

СТЕПАНОВА Полина Петровна

**СОВМЕСТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА И
МАССИВНО-ПОДАТЛИВЫХ ОПОР**

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор ПАСЫНКОВА Инна Анатольевна

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор КРИВЦОВ Антон Мирославович
(Институт прикладной математики и механики
(Физико-Механический факультет)
Санкт-Петербургского государственного
политехнического университета,
заведующий кафедрой теоретической механики)

член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор ЛЕОНОВ Геннадий Алексеевич
(Санкт-Петербургский государственный
университет,
заведующий кафедрой прикладной кибернетики)

Ведущая организация:

Институт проблем машиноведения
Российской Академии наук

Защита состоится " ____ " декабря 2013 г. в _____ часов на заседании совета по защите диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук Д 212.232.30 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, ауд. 405
С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан _____ 2013 г.

Учёный секретарь совета Д 212.232.30
доктор физико-математических наук



Кустова Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Высокоскоростные роторные машины широко используются в современной транспортной, промышленной, бытовой и высокоточной технике. Обычно вращение происходит на больших угловых скоростях, где под большой угловой скоростью понимается скорость, превышающая резонансную. Для выхода на рабочий режим система должна пройти резонансные зоны, что отрицательно сказывается на конструкциях, приводит к нарушению стабильной работы и к разрушению механизма. Техногенные катастрофы последнего времени, например, авария на Саяно-Шушенской ГЭС, показывают важность изучения динамики роторных машин и выдвигают высокий уровень требований к безопасности и надежности эксплуатации. Надежность работы роторных машин тесно связана с резонансными свойствами как ротора в целом, так и его опор, а также с обеспечением допустимого уровня их колебаний.

Современный уровень, предъявляемый к техническим характеристикам роторных машин, определяется возможностью повышения их частоты вращения. С ростом угловой скорости существенную роль приобретают такие факторы, как нелинейность системы, внутреннее и внешнее трение, влияние динамики опорных конструкций. Все эти вопросы требуют углубленных теоретических исследований.

На основании вышеизложенного можно заключить, что исследования совместных нелинейных колебаний неуравновешенного ротора и массивно-податливых опор являются актуальными.

В данной работе рассматривается прецессионное движение неуравновешенного ротора, закреплённого на гибком валу, установленном в массивных упругих опорах. Изучаются вопросы нахождения критических частот для линейно-упругих опор и вопросы определения резонансной области и возникновения автоколебаний и хаотических колебаний в случае нелинейных характеристик упругости опор. Учитывается трение со стороны окружающей среды и внутреннее трение системы. Проводится сравнение полученных результатов с результатами для упругих безмассовых опор.

Цель работы. Основной целью данной работы является изучение влияния динамики массивно-податливых опор с нелинейными упругими характеристиками на прецессионное движение неуравновешенного ротора, укрепленного на гибком невесомом валу. Была поставлена задача качественного исследования цилиндрических, симметричных конических и гиперболоидальных прямых синхронных прецессий при нелинейных характеристиках упругости опор типа Герца и типа ДUFFинга с учетом внешнего и внутреннего трения, а также исследование устойчивости ста-

ционарных режимов системы "ротор - массивно-упругие опоры" во всем диапазоне угловых скоростей вращения ротора.

Методы исследований. В работе используются современные методы классической механики, теории нелинейных колебаний, устойчивости движения и хаотической динамики, а также метод исследования прецессионного движения неуравновешенных роторов с четырьмя степенями свободы в нелинейной постановке, разработанный И. А. Пасынковой. Для аналитических и численных исследований применяются современные методы и алгоритмы компьютерного моделирования.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые **результаты, выносимые на защиту:**

- Исследовано влияние массы опор на динамику прецессионного движения статически и моментно неуравновешенного ротора при общих предположениях о нелинейности упругих характеристик опор, получены выражения для амплитудно-частотных характеристик и определены границы потери устойчивости симметричных гиперболоидальных, конических и цилиндрических прецессий.
- Исследовано влияние динамических свойств опор на критические частоты и ширину рабочего диапазона в случае линейно-упругих опор, показано появление дополнительных критических частот, обусловленных упругостью и массами опор, показано, что массивные опоры оказывают балансирующее влияние на больших угловых скоростях вращения ротора (отсутствует самоцентрирование ротора).
- Для нелинейных характеристик упругих опор типа Герца и типа ДUFFинга при учете внешнего трения проведено исследование симметричных гиперболоидальных, конических и цилиндрических прецессий, показано существование дополнительных нелинейных резонансов, обусловленных динамикой тяжелых опор, построены амплитудно-частотные характеристики, проведено исследование потери устойчивости, обнаружена возможность бифуркаций «жесткого» и «мягкого» типов.
- Для нелинейных характеристик упругих опор типа Герца и типа ДUFFинга численно исследовано влияние внутреннего трения на динамическое поведение ротора в межрезонансной и зарезонансной областях, построены границы возбуждения автоколебаний, показана возможность существования хаотических колебаний, в том числе переходного хаоса.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при конструировании и исследовании высокоскоростных роторных машин. На основе результатов диссертации могут быть даны практические ре-

комендации по определению резонансных зон, условий их прохождения и определению границ возбуждения автоколебаний и перехода в хаотические колебания в межрезонансной и зарезонансной областях.

Апробация работы. Результаты работы обсуждались на семинарах кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, а также докладывались на международных конференциях (тезисы опубликованы): "Пятые Поляховские чтения" (Санкт-Петербург, 3-6 февраля 2009 г.) [5], "Шестые Поляховские чтения" (Санкт-Петербург, 31 января - 3 февраля 2012 г.) [6].

Публикации. По теме диссертации имеется 6 публикаций, в том числе 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК.

В совместной работе [1] И. А. Пасынковой принадлежат постановка задачи и теоретические исследования, П. П. Степановой — численные результаты. В работах [2, 4, 5] П. П. Степановой принадлежат компьютерное моделирование уравнений движения системы "ротор — опоры" и численные исследования, И. А. Пасынковой принадлежат постановка задач, научные консультации.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 47 наименований. Общий объём диссертации составляет 106 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, приведен краткий исторический обзор по исследуемой тематике, сформулированы цели и задачи работы, приводится краткое изложение содержания диссертации, а также представлены основные результаты, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена выводу уравнений движения системы "ротор-массивные опоры" при самых общих предположениях о нелинейных характеристиках упругих опор с учетом линейного внешнего трения. Приведено описание метода исследования, получены условия существования симметричных гиперболоидальных, конических и цилиндрических прецессий и проведено исследование устойчивости по линейному приближению.

В §1.1 дано описание модели ротора, укрепленного на гибком валу в упругих массивных опорах. Ротор представляет собой абсолютно твёрдое динамически симметричное тело, насаженное на линейно-упругий невесомый вал. Гибкий вал укреплен в упругих массивных опорах с заданными массами и характеристиками жёсткости. Ротор имеет массу M , длина вала равна L_r . Моменты инерции ротора равны J_p (осевой) и J_t

(трансверсальный). Дисбаланс ротора характеризуется тремя величинами: e — статический эксцентриситет, т.е. смещение центра масс ротора от оси его вращения, δ — угол между осью динамической симметрии ротора и прямой, параллельной оси вращения и проходящей через центр масс, и ε — угол между плоскостью, в которой лежит угол δ , и плоскостью, проходящей через ось вращения и его центр масс. Точки крепления вала Q_j (опоры) рассматриваются как точечные массы M_1 и M_2 . Ротор установлен вертикально. Точка крепления твёрдого тела к валу Q находится на расстоянии $e_j L$, от j -ой опоры, ($j = 1, 2$), где L — расстояние между опорами. Если точка Q расположена снаружи от j -ой опоры, то $e_j < 0$, так что всегда выполняется условие $e_1 + e_2 = 1$. Предполагается, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω и перемещение ротора вдоль оси вращения пренебрежимо мало.

В §1.2 приводится вывод уравнений движения. Система "ротор - массивные опоры" имеет восемь степеней свободы. В качестве обобщенных координат выбраны: (x, y) — декартовы координаты точки Q ; (α, β) — углы, определяющие направление касательной к изогнутой оси вала в точке Q ; (x_j, y_j) — декартовы координаты массивных опор, ($j = 1, 2$). Уравнения выписаны в комплексной форме. Рассматриваются изотропные опоры. Реакция j -ой опоры может быть записана в виде: $\mathbf{R}_j = -F_j(|S_j|) \mathbf{n}_j$, где S_j — смещение точки конца вала Q_j от ее равновесного положения, $\mathbf{n}_j = \mathbf{S}_1/|\mathbf{S}_1|$ — единичный вектор направления S_j . Функции $F_j(|S_j|)$ являются непрерывно дифференцируемыми, возрастающими и $F_j(0) = 0$, они могут быть как линейными, так и нелинейными. Уравнения Лагранжа II-го рода относительно комплексных переменных:

$$\begin{aligned} M\ddot{S} + \tilde{\mu}_e \dot{S} + c_{11}(S - S_0) + c_{12}(\gamma - \gamma_0) &= Mew^2 \exp(i\omega t), \\ J_t \ddot{\gamma} + \dot{\gamma}(\tilde{\mu}_e L^2 - iJ_p \omega) + c_{12}(S - S_0) + c_{22}(\gamma - \gamma_0) &= (J_t - J_p)\delta\omega^2 \exp(i(\omega t - \varepsilon)), \\ M_1 \ddot{S}_1 + \tilde{\mu}_1 \dot{S}_1 + F_1(|S_1|) \frac{S_1}{|S_1|} &= \left(c_{11}e_2 - \frac{c_{12}}{L}\right)(S - S_0) + \left(c_{12}e_2 - \frac{c_{22}}{L}\right)(\gamma - \gamma_0), \\ M_2 \ddot{S}_2 + \tilde{\mu}_2 \dot{S}_2 + F_2(|S_2|) \frac{S_2}{|S_2|} &= \left(c_{11}e_1 + \frac{c_{12}}{L}\right)(S - S_0) + \left(c_{12}e_1 + \frac{c_{22}}{L}\right)(\gamma - \gamma_0). \end{aligned} \quad (1)$$

В силу предположения о линейной упругости вала третье и четвертое уравнение системы (1) являются линейными алгебраическими относительно (S, γ) . Возможно найти точное решение для (S, γ) и использовать его для исключения этих переменных из системы. Получим систему из двух дифференциальных уравнений относительно переменных S_1, S_2 , каждое 4-ого порядка.

Для перехода к уравнениям в безразмерном виде введены безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и безразмерные переменные $s_j = S_j/h$, где h — некото-

рая малая длина, например, статический эксцентриситет e или величина $L \delta$. Выбор характерной угловой скорости ω_0 зависит от вида нелинейности $F_j(|S_j|)$.

Безразмерные дифференциальные уравнения примут вид:

$$\sum_{j=1,2} \left(\frac{d^2}{d\tau^2} (e_{3-j} s_j + \sigma_{1j} N_j) + \mu_e \frac{d}{d\tau} (e_{3-j} s_j + \sigma_{1j} N_j) + N_j \right) = d_1 \Omega^2 \exp(i\Omega\tau), \quad (2)$$

$$\sum_{j=1,2} (-1)^j \left(\frac{d^2}{d\tau^2} (s_j + \sigma_{2j} N_j) + (k l \mu_e + i \Omega (l - 1)) \frac{d}{d\tau} (s_j + \sigma_{2j} N_j) + e_j k l N_j \right) = l d_2 \Omega^2 \exp(i(\Omega\tau - \varepsilon)),$$

В уравнениях (2) использованы обозначения

$$l = \frac{J_t - J_p}{J_t}, \quad k = \frac{ML^2}{J_t l}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad m_j = \frac{M_j}{M}, \quad (3)$$

μ_e, μ_j - безразмерные коэффициенты сопротивления, d_j - безразмерные эксцентриситеты, коэффициенты σ_{kj} зависят от коэффициентов жесткости вала. Величины N_j имеют вид:

$$N_j = m_j \ddot{s}_j + \mu_j \dot{s}_j + f_j(|s_j|) \frac{s_j}{|s_j|}, \quad (4)$$

где $f_j(|s_j|)$ - безразмерные функции нелинейных характеристик опор.

В §1.3 изучается прецессионное движение ротора. Следуем методу, предложенному И. А. Пасынковой. Система (2) допускает точное решение вида:

$$s_j = R_j \exp(i\varphi_j) \exp(i\Omega\tau), \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

где R_j, φ_j - вещественные постоянные, $R_j > 0$.

Это решение представляет собой прямую синхронную круговую прецессию. Комплексные амплитуды $R_j \exp(i\varphi_j)$ определяют положения равновесия опор в системе координат, вращающейся вместе с ротором.

Для ротора с гибким вращающимся валом в работах И. А. Пасынковой были введены понятия цилиндрической, конической или гиперболоидальной прецессий в зависимости от вида поверхности, которую замечает в пространстве недеформированная ось вала или ось подшипников, характеризующая перемещение вала как твердого тела.

В результате подстановки решения (5) в систему (2) получена система линейных алгебраических уравнений относительно величин $\exp(i\varphi_j)$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} (A_j + i\Omega C_j) R_j \exp(i\varphi_j) &= d_1 \Omega^2, \\ \sum_{j=1,2} (-1)^j (B_j + i\Omega D_j) R_j \exp(i\varphi_j) &= d_2 \Omega^2 \exp(-i\varepsilon), \quad \text{где} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{f_j(R_j)}{R_j} - \left(e_{3-j} + m_j + \sigma_{1j} \frac{f_j(R_j)}{R_j} + \sigma_{1j} \mu_e \mu_j \right) \Omega^2 + \sigma_{1j} m_j \Omega^4, \\
B_j &= k e_j \frac{f_j(R_j)}{R_j} - \left(1 + k e_j m_j + \sigma_{2j} \frac{f_j(R_j)}{R_j} + k \sigma_{2j} \mu_e \mu_j \right) \Omega^2 + \sigma_{2j} m_j \Omega^4, \\
C_j &= \mu_j + \mu_e \left(e_{3-j} + \sigma_{1j} \frac{f_j(R_j)}{R_j} \right) - \sigma_{1j} (\mu_j + \mu_e m_j) \Omega^2, \\
D_j &= k \left(e_j \mu_j + \mu_e (1 + \sigma_{2j} \frac{f_j(R_j)}{R_j}) \right) - \sigma_{2j} (\mu_j + k \mu_e m_j) \Omega^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

В отсутствии сил сопротивления ($\mu_e = 0$, $\mu_j = 0$) определитель системы (6) принимает вид:

$$\Delta = A_1 B_2 + A_2 B_1. \tag{8}$$

Множество $\Delta = 0$ задаёт в пространстве $\{\Omega, R_1, R_2\}$ поверхность нелинейных резонансов, которая разделяет это пространство на области, где прецессии имеют качественно различный характер. Если упругие опоры $f_j(R_j)$ линейны, то $\Delta = 0$ представляет собой уравнение для нахождения критических частот вращения ротора.

В пункте 1.3.1 получены условия существования симметричных круговых прецессий, когда опоры описывают окружности равных радиусов, т.е. $R_1 = R_2 = R$. Предполагается, что опоры обладают одинаковыми характеристиками: $f_1 = f_2 = f$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $m_1 = m_2 = m$. Ротор укреплен в середине между опорами, т.е. $e_1 = e_2 = 1/2$. В этом случае коэффициенты системы (6) соответственно равны $A_1 = A_2 = A$, $B_1 = B_2 = B$, $C_1 = C_2 = C$, $D_1 = D_2 = D$.

В пункте 1.3.2 показано, что симметричная гиперболоидальная прецессия полностью неуравновешенного ротора может существовать только при отсутствии сил сопротивления и при $\varepsilon = \pi/2$. Получено выражение для амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) гиперболоидальной прецессии:

$$R = \frac{\Omega^2}{2} \sqrt{\frac{d_1^2}{A^2} + \frac{d_2^2}{B^2}}. \tag{9}$$

В пункте 1.3.3 исследована симметричная коническая прецессия. Рассматривается моментно-неуравновешенный ротор, т.е. $e = 0$, $\sigma \neq 0 \Rightarrow d_1 = 0$, в таком случае угол фазового сдвига ε становится неопределённым и его можно положить нулю. Положим $h = L\delta$, тогда $d_2 = 1$. На ротор и опоры действуют силы внешнего трения. Среди решений вида (5) можно выделить решение $s_2 = -s_1$ ($R_1 = R_2 = R$, $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi = \varphi$). В таком случае поверхность, заматаемая недеформированной осью ротора, представляет собой конус с вершиной между опорами, и прецессия будет симметричной конической. Получено выражение АЧХ конической

прецессии:

$$R = \frac{\Omega^2}{2} \frac{1}{\sqrt{B^2 + \Omega^2 D^2}}. \quad (10)$$

Пункт 1.3.4 посвящен цилиндрической прецессии. Рассматривается статически неуравновешенный, но моментно-уравновешенный ротор, т.е. $\delta = 0, e \neq 0$, следовательно $d_2 = 0$. На ротор и опоры действуют силы внешнего трения. В таком случае среди решений вида (5) можно выделить решение $s_1 = s_2$ ($R_1 = R_2 = R, \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$), представляющее собой цилиндрическую прецессию. Получено АЧХ цилиндрической прецессии:

$$R = \frac{\Omega^2}{2} \frac{1}{\sqrt{A^2 + \Omega^2 C^2}}. \quad (11)$$

В §1.4 исследована устойчивость симметричных прецессий по линейному приближению. Введены малые возмущения $r_j(\tau), \alpha_j(\tau)$ для каждой опоры по формулам: $s_j = (R + r_j) \exp(i(\varphi_j + \alpha_j)) \exp(i\Omega\tau)$. Характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет шестнадцатый порядок относительно характеристического показателя. В пункте 1.4.1 рассмотрена устойчивость симметричной цилиндрической прецессии. В силу симметрии характеристический полином распадается на два независимых полинома 8-ого порядка. Коэффициенты полиномов получены в системе компьютерной алгебры Maple. Множество $\{a_8 = 0 \cup b_8 = 0\}$, где a_8, b_8 - свободные члены характеристических полиномов, определяет наличие хотя бы одного нулевого корня характеристического полинома, а значит является бифуркационным для системы. Каждое из условий $a_8 = 0$ и $b_8 = 0$ представляет собой гиперболу, асимптотами которых являются кривые нелинейного резонанса $A = 0$ и $B = 0$ соответственно. Критическими точками являются точки пересечения гипербол $a_8 = 0, b_8 = 0$ с кривой АЧХ. В зависимости от параметров системы может возникнуть до 8-ми таких критических точек. В пункте 1.4.2 исследована устойчивость симметричной конической прецессии. Полученный характеристический полином совпадает с характеристическим полиномом, соответствующему цилиндрической прецессии. Таким образом, условия для границ потери устойчивости конической прецессии такие же, как и для цилиндрической прецессии.

Во **второй главе** рассмотрено прецессионное движение ротора в линейно-упругих опорах. Получены уравнения движения системы и уравнение для нахождения критических скоростей вращения ротора. Выявлены дополнительные резонансы, обусловленные влиянием динамики массивных опор. Построены графики АЧХ симметричных прецессий для динамически вытянутого и сжатого роторов. На больших угловых ско-

ростях вращения ротора обнаружен эффект балансировки ротора. Рассмотрен пример турбомолекулярного насоса и проведено сравнение с результатами Genta (1999) и И. А. Пасынковой (2006), показано влияние учёта масс опор.

В §2.1 приведен вывод уравнений движения неуравновешенного ротора в массивных линейно-упругих опорах. Показано, что эти уравнения допускают точное решение, соответствующее прямой синхронной круговой прецессии.

В §2.2 получено уравнение для нахождения критических угловых скоростей. Показано, что для динамически вытянутого ("длинного") ротора имеется четыре критические скорости, а для динамически сжатого ("короткого") — три. Известно, что ротор в невесомых упругих опорах имеет соответственно две или одну критические угловые скорости, т.е. влияние динамики тяжёлых опор приводит в каждом случае к появлению двух дополнительных критических угловых скоростей. Показано, что самоцентрирования ротора не происходит, и массивные опоры оказывают балансирующее действие на больших угловых скоростях ротора.

В §2.3 рассмотрены симметричные прямые синхронные прецессии.

В §2.4 рассмотрен пример турбомолекулярного насоса, который применялся в лабораторных медицинских исследованиях. Результаты расчета критических частот приведены в таблице 1. В первой строке представлены критические скорости, полученные Genta (1999) для жестких безмассовых опор, во второй строке — результаты И. А. Пасынковой (2006) для упругих безмассовых опор. Результаты для различных значений масс представлены в строках 3, 4, 5. Как видно из таблицы 1, влияние массивных упругих опор приводит к существенному сдвигу первых критических угловых скоростей в сторону более низкой части спектра и к появлению дополнительных критических скоростей, причем динамические свойства опор существенным образом влияют на ширину рабочего диапазона. Отметим, что уменьшение массы опор приводит к сдвигу третьей и четвёртой критических частот в сторону увеличения, и это можно использовать для расширения рабочей зоны ротора.

Третья глава посвящена исследованию прецессионного движения ротора с существенно нелинейными характеристиками упругости опор типа Герца $F_j(|S_j|) = c_0^{(j)}|S_j|^{3/2}$, с учетом внутреннего трения. Выписаны уравнения движения системы, построены АЧХ симметричных прецессий как для динамически вытянутого, так и динамически сжатого роторов. Проведено исследование устойчивости цилиндрической и симметричной конической прецессии. Выявлены различные сценарии потери устойчивости, как "жесткого" типа, когда происходит срыв амплитуды, так и "мягкого" типа, когда происходит смена вида прецессии. Для цилиндри-

Таблица 1: Расчеты критических частот для примера

	Параметры опор: $c_1, c_2 (10^7 \text{ Н/М}); m_1, m_2 (\text{кг})$	$\omega_{cr 1}$	$\omega_{cr 2}$	$\omega_{cr 3}$	$\omega_{cr 4}$
1	$c_1 = c_2 = \infty, m_1 = m_2 = 0$	10496	67080		
2	$c_1 = c_2 = 1.07, m_1 = m_2 = 0$	7832	17926		
3	$c_1 = c_2 = 1.07, m_1 = 2, m_2 = 0.5$	7746	16966	23334	223883
4	$c_1 = c_2 = 1.07, m_1 = 0.5, m_2 = 0.5$	7763	17226	45841	223994
5	$c_1 = c_2 = 1.07, m_1 = 0.25, m_2 = 0.5$	7766	17248	64679	224154
6	$c_1 = c_2 = 1.07, m_1 = 0.5, m_2 = 0.25$	7793	17540	45846	309887
7	$c_1 = c_2 = 1.07, m_1 = 3, m_2 = 2$	7554	15208	19428	125574

ческой прецессии определена граница возбуждения автоколебаний, проведено численное интегрирование системы на различных угловых скоростях, показывающее сложную динамику движения ротора. Система имеет четыре нелинейных резонанса. Показано, что автоколебания могут возникать в межрезонансной области между вторым и третьим нелинейными резонансами, а также в зарезонансной области. Обнаружена хаотизация предельных циклов. С помощью модифицированного алгоритма Беннетина проведено вычисление полного спектра ляпуновских показателей, подтверждающих характер полученных аттракторов.

В §3.1 приведено описание природы внутреннего трения для ротора, укрепленного на гибком валу, и связь внутреннего трения с неустойчивостью вращения ротора на достаточно больших угловых скоростях. В §3.2 приведены уравнения движения ротора для нелинейных характеристик опор типа Герца с учетом внешнего и внутреннего трения.

Дифференциальные уравнения в безразмерном виде:

$$\sum_{j=1,2} \left(\frac{d^2}{d\tau^2} (e_{3-j}s_j + \sigma_{1j} N_j) + (\mu_e + \mu_i) \frac{d}{d\tau} (e_{3-j}s_j + \sigma_{1j} N_j) - \right. \quad (12)$$

$$\left. -i \Omega \mu_i (e_{3-j}s_j + \sigma_{1j} N_j) + N_j \right) = d_1 \Omega^2 \exp(i\Omega\tau),$$

$$\sum_{j=1,2} (-1)^j \left(\frac{d^2}{d\tau^2} (s_j + \sigma_{2j} N_j) + (kl(\mu_e + \mu_i) + i\Omega(l-1)) \frac{d}{d\tau} (s_j + \sigma_{2j} N_j) - \right.$$

$$\left. -i \Omega k \mu_i l (s_j + \sigma_{2j} N_j) + e_j k l N_j \right) = l d_2 \Omega^2 \exp(i(\Omega\tau - \varepsilon)),$$

где использованы обозначения (3) и:

$$\nu_j = \frac{c_0^{(j)}}{c_0^{(1)}}, \quad N_j = m_j \ddot{s}_j + \mu_j \dot{s}_j + \nu_j \sqrt{|s_j|} s_j, \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

Среди решений системы можно выделить прямую синхронную круговую прецессию. Коэффициенты A_j, B_j, C_j, D_j в системе алгебраических уравнений (6) вычисляются по формулам (7) при $f_j(R_j)/R_j = \nu_j \sqrt{R_j}$. Причем эти коэффициенты не зависят от внутреннего трения.

В пространстве переменных X, Y_1, Y_2 , где $Y_j = \sqrt{R_j}$, $X = \Omega^2$ построены множества нелинейных резонансов для динамически вытянутого и сжатого роторов (рис. 1). Кривые, которые получаются в результате сечения этого множества биссектральной плоскостью $Y_1 = Y_2$, являются скелетными кривыми для АЧХ симметричных круговых прецессий.

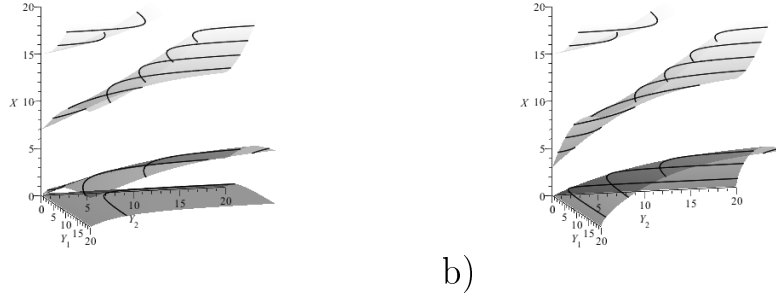


Рис. 1: Множество нелинейных резонансов: а) "длинный", б) "короткий" ротор

Тождество $|\exp(i(\varphi_1 - \varphi_2))| \equiv 1$ задаёт в пространстве $\{Y_1, Y_2, X\}$ интегральное множество, которому принадлежат состояния относительно равновесия системы. Состояния равновесия симметричных прецессий локализованы на плоскости $Y_1 = Y_2$.

§3.3 посвящен симметричным круговым синхронным прецессиям. В пункте 3.3.1 рассмотрена симметричная прецессия гиперболоидального типа.

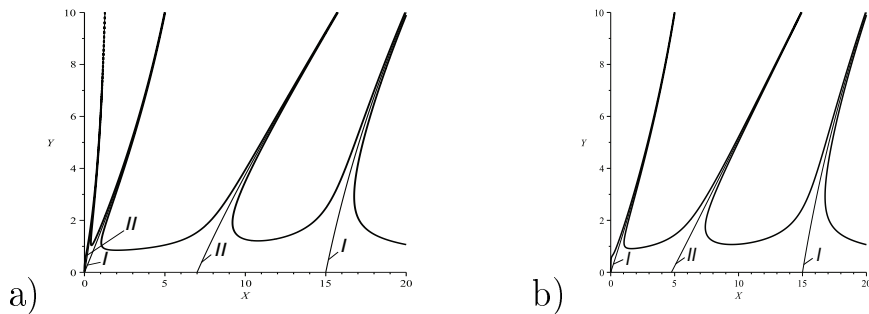


Рис. 2: АЧХ гиперболоидальной прецессии: а) "длинный", б) "короткий" ротор

Графики АЧХ гиперболоидальной прецессии представлены на рис.2 жирной линией, слева – для динамически вытянутого ротора, справа – для динамически сжатого. Два последних нелинейных резонанса связаны с динамикой массивных опор. При уменьшении масс опор два последних резонанса сдвигаются в область больших угловых скоростей.

В пунктах 3.3.2 и 3.3.3 рассмотрены симметричная коническая и цилиндрическая прецессии. Построены АЧХ и показано, что учет масс опор приводит к появлению дополнительного резонанса по сравнению с результатами И. А. Пасынковой для безмассовых опор.

В §3.4 исследована потеря устойчивости цилиндрических и симметричных конических прецессий при переходе через нулевые корни харак-

теристического полинома. Составлена система линейного приближения. Показано, что характеристический полином системы распадается на два независимых полинома и выписаны коэффициенты характеристических полиномов, при этом свободные коэффициенты a_8, b_8 не зависят от внутреннего трения. Множество $\{a_8 = 0 \cup b_8 = 0\}$ определяет по крайней мере один нулевой корень системы, поэтому является бифуркационным. Точки пересечения АЧХ и этих гипербол определяют границы устойчивости. В пунктах 3.4.1 и 3.4.2 рассмотрена потеря устойчивости симметричной конической и цилиндрической прецессий. На рис. 3 показаны график АЧХ цилиндрической прецессии (толстая линия) и условия $a_8 = 0$ и $b_8 = 0$ (тонкая линия). Неустойчивые режимы отмечены штриховой линией. "Жёсткий" характер потери устойчивости, когда происходит "скачок" или "срыв" амплитуды, наблюдаем между точками "3", "4" и "7", "8", а "мягкий" между точками "1", "2" (на b)) и "5", "6". В случае "мягкой" бифуркации потеря устойчивости цилиндрической прецессии сопровождается отделением двух устойчивых состояний равновесия, локализованных на поверхности гиперboloида, таким образом, прецессия меняет тип на гиперboloидальный.

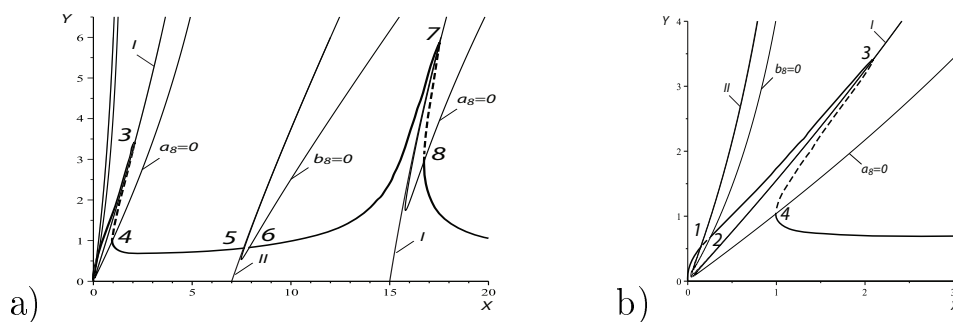


Рис. 3: АЧХ цилиндрической прецессии и границы устойчивости: а) общий вид, б) начальная область в крупном масштабе

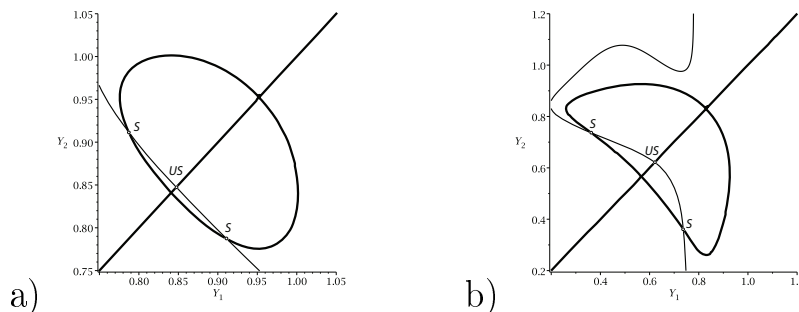


Рис. 4: Бифуркации цилиндрической прецессии: а) $X = 7.8$, б) $X = 0.22$

Сечения поверхности локализации решений для "мягких" бифуркаций изображены на рис. 4.

Несмотря на то, что только один из нелинейных резонансов I и II влияет на вид АЧХ конической и цилиндрической прецессий, вблизи

каждого из них, в зависимости от параметров, может произойти потеря устойчивости.

Для случая невесомых опор в работах И. А. Пасынковой для конической и цилиндрической прецессий наблюдались только 2 ветви гипербола бифуркационного множества $\{a_8 = 0 \cup b_8 = 0\}$, так как каждое из $a_8 = 0$ и $b_8 = 0$ имело второй порядок относительно X . Учёт масс опор приводит к увеличению порядка для каждого из $a_8 = 0$ и $b_8 = 0$ до четвёртого относительно X , таким образом, может наблюдаться до четырёх ветвей гипербола множества $\{a_8 = 0 \cup b_8 = 0\}$, что усложняет картину потери устойчивости.

В §3.5 рассмотрена потеря устойчивости цилиндрической прецессии при переходе через чисто-мнимые корни характеристического полинома. В пункте 3.5.1 рассмотрена граница возбуждения автоколебаний в межрезонансной области.

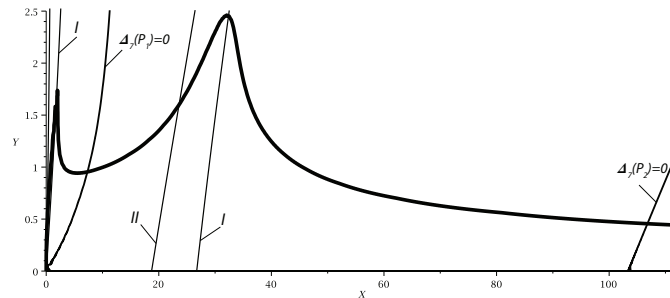


Рис. 5: АЧХ цилиндрической прецессии и $\Delta_7(P_1) = 0$, $\Delta_7(P_2) = 0$.

При $\Delta_7(P_j) = 0$, где $\Delta_7(P_j)$ – определитель Гурвица 7-ого порядка, характеристический полином имеет чисто мнимые корни. На рис. 5 изображена АЧХ цилиндрической прецессии, нелинейные резонансы $A = 0$, $B = 0$ и кривые $\Delta_7(P_j) = 0$ для динамически вытянутого ротора. При выбранных параметрах точка пересечения АЧХ цилиндрической прецессии и кривой $\Delta_7(P_1) = 0$ лежит в межрезонансной области. Численно было проверено, что до точки пересечения АЧХ с кривой $\Delta_7(P_1) = 0$ все вещественные части корней характеристических полиномов отрицательны. За точкой пересечения АЧХ с $\Delta_7(P_1) = 0$ появляется пара комплексно-сопряженных корней полинома $P_1 = 0$ с положительной вещественной частью. После пересечения АЧХ и с $\Delta_7(P_2) = 0$ появляется еще одна пара комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью полинома $P_2 = 0$. Таким образом, границу потери устойчивости определяет наименьшая из общих точек АЧХ и $\Delta_7(P_1) = 0$, $\Delta_7(P_2) = 0$.

При выбранных значениях параметров изучено поведение системы в области за точкой пересечения АЧХ и $\Delta_7(P_1) = 0$. Результаты численного интегрирования системы при $X = \sqrt{\Omega} = 10$ представлены на рис. 6.

Изменение $R_1(\tau)$ на рис. 6, на графике а) – в течение первых 200 оборотов, на графике б) – за время от 200 до 250 оборотов. Автоколеба-

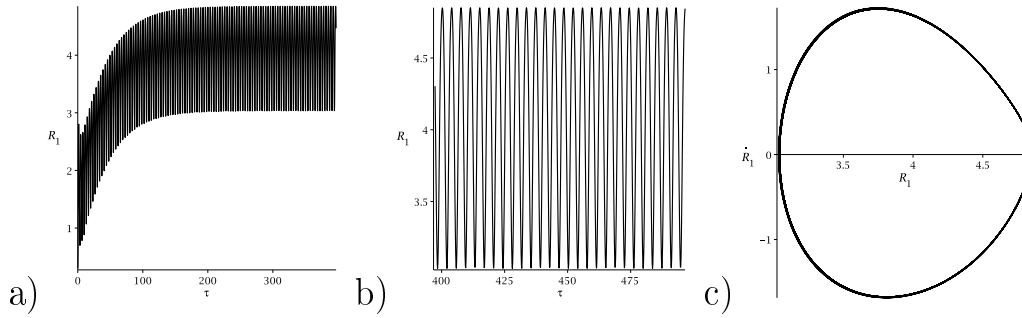


Рис. 6: $X = 10$, а) $R_1(\tau)$ в течение 200 оборотов б) $R_1(\tau)$ за время от 200 до 250 оборотов, в) фазовая траектория за время от 200 до 1000 оборотов

ния устанавливаются примерно за 150 оборотов, на рис. 6 в) представлен полученный предельный цикл на плоскости $\{R_1, \dot{R}_1\}$ фазового пространства $\{R_1, \dot{R}_1, R_2, \dot{R}_2, \varphi_1 - \varphi_2, \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2\}$ за время от 200 до 1000 оборотов.

Полный спектр ляпуновских показателей, полученный с помощью алгоритма Беннетина за 300 итераций с шагом равным одному обороту, в конечной точке вычисления равен:

$$\{0.0005, -0.0074, -0.008, -0.0271, -0.0989, -0.0989, -0.2774, -0.2775, -0.3183, -0.319, -0.3255, -0.3258, -0.3302, -0.3305, -0.4569, -0.457\}.$$

Вычисления с увеличивающимся количеством итераций показали, что первый показатель стремится к нулю, т.е. сигнатура спектра соответствует устойчивому предельному циклу. Было проведено интегрирование системы до 20050 оборотов, при этом вид предельного цикла совпадает с картиной, полученной за время от 200 до 250 оборотов.

При $X = 12$ и $X = 13$ также получены устойчивые автоколебательные режимы, отмечено, что с ростом угловой скорости увеличиваются время установления автоколебаний и средняя величина амплитуды.

При дальнейшем увеличении частоты, например, при $X = 14$, наблюдаем установление автоколебаний, однако в спектре ляпуновских показателей присутствуют положительные показатели, не стремящиеся к нулю, что говорит о неустойчивости и возможном появлении хаоса.

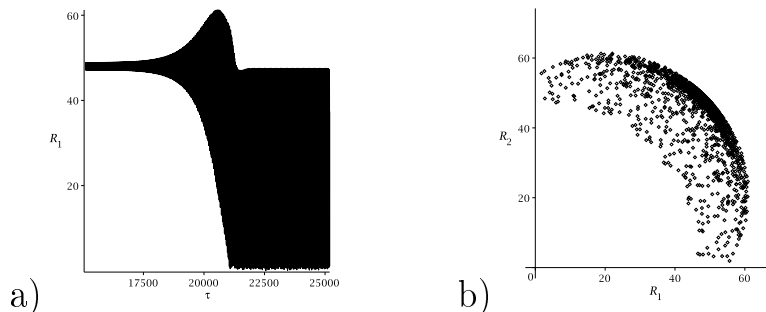


Рис. 7: $X = 14$, а) $R_1(\tau)$ за время от 9000 до 15000 оборотов, б) отображение Пуанкаре от 11000 до 13000

Автоколебания с постоянным средним значением амплитуды устанавливаются примерно за 900 оборотов, однако, в спектре ляпуновских показателей присутствуют положительные значения, не стремящиеся к

0, что говорит о неустойчивости полученного режима. Дальнейшее интегрирование системы при $X = 14$ показало, что начиная примерно с 11000 оборотов движение соскальзывает в хаос, см. рис. 7.

Отображение Пуанкаре представлено на рис. 7 б). Итак, при удалении от границы возбуждения автоколебания теряют устойчивость.

В пункте 3.5.2 показано, что при уменьшении внутреннего трения граница возбуждения автоколебаний сдвигается в сторону больших частот. Рассмотрен случай, когда возбуждение автоколебаний происходит в зарезонансной области.

В **четвертой главе** изучается прецессионное движение системы "ротор-опоры" с нелинейными упругими характеристиками типа Дуффинга: $F_j(|S_j|) = c_0^{(j)}|S_j| + c_1^{(j)}|S_j|^3$ и с учетом внутреннего трения. Выписаны уравнения движения системы, для симметричных прецессий построены АЧХ для динамически вытянутого и динамически сжатого ротора. Проведено исследование устойчивости по линейному приближению цилиндрической и симметричной конической прецессии, найдены границы потери устойчивости стационарных движений. Для цилиндрической прецессии определена граница возбуждения автоколебаний, проведено численное интегрирование системы при различных угловых скоростях.

В §4.1 приведены уравнения движения, в предположении, что на ротор и опоры действуют силы внешнего трения, и на ротор действуют силы внутреннего трения. Построены множества нелинейных резонансов для динамически вытянутого и сжатого роторов.

В §4.2 получены АЧХ для симметричных гиперболоидальной, конической и цилиндрической прецессий.

В §4.3 проведено исследование потери устойчивости при переходе через нулевые корни характеристических полиномов.

В §4.4 проводится исследование потери устойчивости при переходе через чисто мнимые корни характеристического полинома. Установлено, что граница возбуждения автоколебаний может находиться в межрезонансной области. Численное интегрирование показало, что на частотах близких к границе возбуждения автоколебаний устанавливается устойчивый предельный цикл, что подтверждается полученным спектром ляпуновских показателей.

На более высоких частотах сначала также устанавливается предельный цикл, но имеющий более сложную структуру - предельный цикл с петлей, см рис. 8. Было обнаружено, что в спектре ляпуновских показателей старшие показатели положительны и при увеличении итераций сохраняют положительные значения, что говорит о неустойчивости предельного цикла. Действительно, дальнейшее интегрирование показало, что начиная с некоторого момента происходит хаотизация предельно-

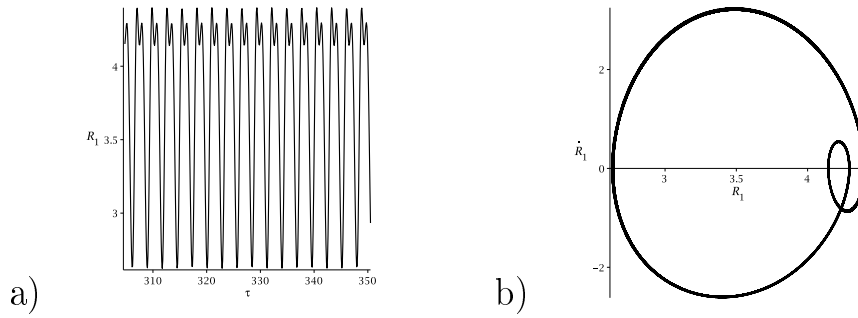


Рис. 8: $X = 17$, а) $R_1(\tau)$ от 200 до 230 оборотов, б) фазовая траектория от 200 до 300 оборотов

го цикла. На рис. 9 приведены результаты интегрирования и отображение Пуанкаре, которые подтверждают наличие хаоса. В дальнейшем на фоне хаотических колебаний происходит синхронизация и устанавливается новый предельный цикл, см. рис. 10. Таким образом, наблюдается переходный хаос.

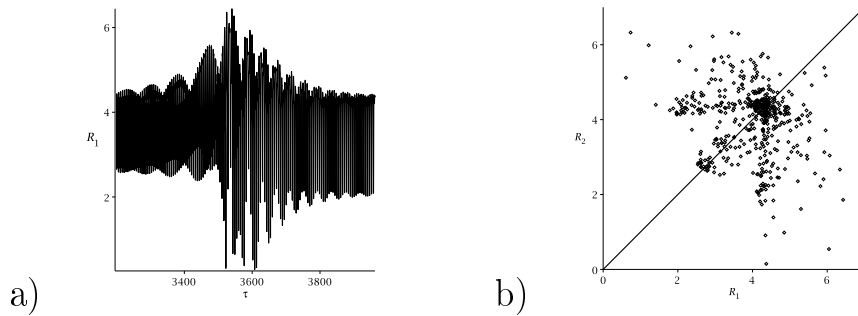


Рис. 9: $X = 17$, время от 2100 до 2600 а) $R_1(\tau)$, б) отображение Пуанкаре

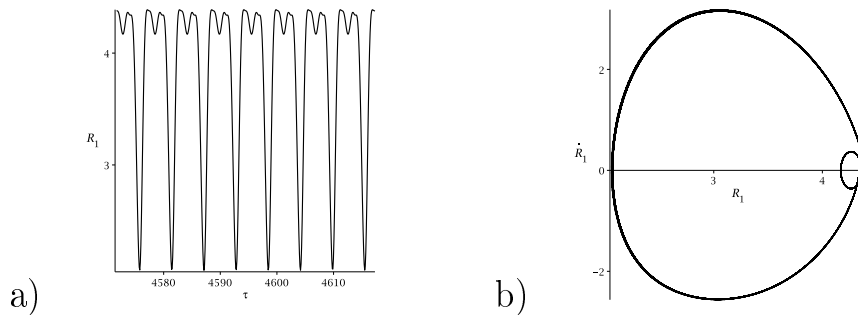


Рис. 10: $X = 17$, а) $R_1(\tau)$ от 3000 до 3030 оборотов, б) фазовые траектории от 3000 до 4000 оборотов

Отмечено, что при уменьшении внутреннего трения граница возбуждения автоколебаний сдвигается в закритическую область.

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты диссертации.

Список опубликованных статей автора по теме диссертации

Публикации автора в изданиях из списка ВАК

1. *Пасынкова И. А., Степанова П. П.* Влияние массы и упругости опор на критические частоты неуравновешенного ротора Джеффкотта// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.1. 2008 Вып. 2 – с. 141-147.
2. *Пасынкова И. А., Степанова П. П.* Прецессии неуравновешенного ротора Джеффкотта в массивно-податливых опорах// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.1. 2011. Вып. 4 – с. 134-141.
3. *Степанова П. П.* Прецессии неуравновешенного ротора в массивных нелинейно-упругих опорах// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.1. 2012. Вып. 4 – с. 125-132.

Публикации автора в других изданиях

4. *Пасынкова И. А., Степанова П. П.* Цилиндрическая прецессия неуравновешенного ротора в массивно-податливых опорах// В сб.: Пятые Поляховские чтения. Избранные труды. 2009. – с. 101-106.
5. *Пасынкова И. А., Степанова П. П.* Цилиндрическая прецессия неуравновешенного ротора в массивно-податливых опорах// Пятые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 3 — 6 февраля 2009 г. - СПб 2009. С. 55
6. *Степанова П. П.* Прецессии неуравновешенного ротора Джеффкотта в массивно-податливых опорах с учетом трения// Шестые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 31 января — февраля 2012 г. - М.: Издатель И. В. Балабанов, 2012. - С. 68