Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Синчук Сергей Сергеевич

Параболические факторизации редуктивных групп

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ВАВИЛОВ Николай Александрович
Официальные оппоненты:	ПАНИН Иван Александрович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, главный научный сотрудник
	СТЕПАНОВ Алексей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), доцент
Ведущая организация:	Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Защита состоится ____________ 2013 г. в _____ часов на заседании совета Д 212.232.29 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан ____________ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.232.29 Нежинский В.М.
доктор физ.-мат. наук, профессор

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Проблема стабилизации в алгебраической K-теории заключается в нахождении условий на кольцо R, достаточных для биективности отображений $\mathrm{K}_i(n, R) \to \mathrm{K}_i(n+1, R)$ между нестабильными K-функторами. Данную задачу можно условно разделить на четыре частных подзадачи, каждая из которых изучалась в отдельном контексте:

- сюръективная стабилизация K_1;
- инъективная стабилизация K_1 и сюръективная стабилизация K_2;
- инъективная стабилизация K_2;
- стабилизация для функторов K_i, $i > 2$.

Впервые проблема стабилизации для линейного K_1-функтора рассматривалась Х. Бассом в работе "K-theory and stable algebra" 1964 года. Басс доказал, что для конечной алгебры A над нетеровым коммутативным кольцом R размерности Крулля d и произвольного идеала $I \trianglelefteq A$ отображение $\mathrm{K}_1(d+1, A, I) \to \mathrm{K}_1(d+2, A, I)$, индуцированное естественным вложением линейных групп

$$\mathrm{GL}(d+1, A, I) \hookrightarrow \mathrm{GL}(d+2, A, I), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

оказывается сюръективным. Последнее утверждение можно сформулировать в виде равенства:

$$\mathrm{GL}(d+2, A, I) = \mathrm{E}(d+2, A, I) \cdot \mathrm{GL}(d+1, A, I).$$

Кроме того, Бассом была высказана гипотеза, что при тех же предположениях на основное кольцо имеет место инъективность отображения

$$\mathrm{K}_1(d+2, A, I) \to \mathrm{K}_1(d+3, A, I),$$

или, что то же самое:

$$\mathrm{GL}(d+2, A, I) \cap \mathrm{E}(d+3, A, I) = \mathrm{E}(d+2, A, I).$$

Данная гипотеза была доказана Бассом в совместной с Дж. Милнором и Ж.-П. Серром классической работе "Solution of the congruence subgroup problem for SL_n, $(n \geq 3)$ and Sp_{2n}, $(n \geq 2)$". Позднее Л. Васерштейн передоказал данную гипотезу, существенно упростив первоначальное доказательство Басса.

В монографии “Алгебраическая K-теория” Басс сформулировал вопрос о нахождении достаточных условий для биективности отображений K_1-функторов, индуцированных вложениями полупростых алгебраических групп. При этом Басс предлагал формулировать такие условия в терминах размерности Крулля основного кольца и размерностей максимальных расщепимых торов.

Пусть Φ – приведенная система корней ранга ≥ 2, а R – произвольное коммутативное кольцо. Обозначим через $\mathrm{G}(\Phi, -)$ односвязную аффинную *групповую схему Шевалле–Демазюра* типа Φ. Иными словами, рассматривается представимый функтор из категории коммутативных колец в категорию групп такой, что группа $\mathrm{G}(\Phi, \mathbb{C})$ является односвязной расщепимой комплексной алгебраической группой типа Φ.

Для произвольного коммутативного кольца R и систем корней Φ, не содержащих неприводимых компонент ранга 1, в группе $\mathrm{G}(\Phi, R)$ можно выбрать нормальную подгруппу $\mathrm{E}(\Phi, R)$, называемую *элементарной подгруппой.* Как абстрактная группа, $\mathrm{E}(\Phi, R)$ порождается элементарными корневыми унипотентами $t_\alpha(\xi)$ для $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$.

Группой Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, R)$ называется группа, заданная формальными образующими $x_\alpha(\xi)$ и набором тождеств, моделирующим элементарные соотношения между элементами $t_\alpha(\xi)$:

$$x_\alpha(\xi_1)x_\alpha(\xi_2) = x_\alpha(\xi_1 + \xi_2),$$

$$[x_\alpha(\xi_1), x_\beta(\xi_2)] = \prod_{i\alpha+j\beta\in\Phi,\ i,j>0} x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}\xi_1^i\xi_2^j), \quad \alpha \neq -\beta.$$

В данной формуле через $N_{\alpha\beta ij}$ обозначены некоторые целочисленные константы, называемые *структурными константами* группы Шевалле.

Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathrm{St}(\Phi, R) \to \mathrm{G}(\Phi, R)$, сопоставляющее каждой образующей $x_\alpha(\xi)$ элемент $t_\alpha(\xi)$. *Нестабильные* K_1 *и* K_2*-функторы, промоделированные по группам Шевалле*, определяются как коядро и ядро гомоморфизма φ:

$$1 \longrightarrow \mathrm{K}_2(\Phi, R) \longrightarrow \mathrm{St}(\Phi, R) \xrightarrow[\varphi]{} \mathrm{G}(\Phi, R) \longrightarrow \mathrm{K}_1(\Phi, R) \longrightarrow 1.$$

В частном случае $\Phi = \mathrm{A}_n$ имеем:

$$\mathrm{G}(\mathrm{A}_n, R) = \mathrm{SL}(n+1, R), \quad \mathrm{E}(\mathrm{A}_n, R) = \mathrm{E}(n+1, R),$$

$$\mathrm{K}_1(\mathrm{A}_n, R) = \mathrm{SK}_1(n+1, R) = \mathrm{SL}(n+1, R)/\,\mathrm{E}(n+1, R).$$

Если $\Phi = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ – одна из классических серий систем корней, а $Z = \mathrm{G}, \mathrm{St}, \mathrm{E}, \mathrm{K}_1$, то можно определить стабильную группу $Z(\Phi_\infty, R)$ как индуктивный предел соответствующих групп конечного ранга относительно семейства гомоморфизмов, индуцированных вложениями $\Phi_l \hookrightarrow \Phi_{l+1}$:

$$Z(\Phi, R) = \lim_{n\to+\infty} Z(\Phi_n, R).$$

Отметим, что $\mathrm{K}_1(\mathrm{A}_\infty, R)$ совпадает со специальной группой Уайтхеда $\mathrm{SK}_1(R)$, а $\mathrm{St}(\mathrm{A}_\infty, R)$ – со стабильной группой Стейнберга $\mathrm{St}(R)$.

Р. Стейнберг в работе "Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques" 1962 года доказал сюръективность отображений $\theta\colon \mathrm{K}_2(\Phi_l, F) \to \mathrm{K}_2(\Phi_m, F)$ для $m > l$, классических Φ и произвольного поля F. В работе [4] Х. Мацумото при тех же предположениях доказал биективность θ. Результат Стейнберга о сюръективной стабилизации был обобщен М. Стейном на случай групп над полулокальными коммутативными кольцами, а К. Деннис и М. Стейн перенесли на коммутативные локальные кольца и теорему Мацумото. Кроме того, в работе "Stability for K_2" К. Деннисом была доказана теорема о сюръективной стабилизации для линейного K_2-функтора при условии на стабильный ранг основного кольца.

Общие результаты об инъективной стабилизации для линейных K_2-функторов были получены В. ван дер Калленом и независимо А. Суслиным и М. Туленбаевым (см. [1]). Позднее М. Кольстер усилил результат Суслина и Туленбаева, доказав в данном контексте теорему о предстабилизации. Кольстер исходил из похожих идей, но использовал другую факторизацию для группы Стейнберга.

В работе [5] М. Стейн получил простое единообразное доказательство теоремы Денниса и одновременно теоремы об инъективной стабилизации K_1 в более широком контексте расщепимых групп Шевалле над кольцами. Стейном, кроме того, были найдены условия достаточные для сюръективности отображений K_1-функторов, индуцированных вложениями классических групп Шевалле. В работах 1980–1990 Е. Плоткин обобщил результаты Стейна на случай вложений исключительных групп Шевалле, а также скрученных групп. В контексте унитарных и эрмитовых групп над кольцами с инволюцией, обобщающих классические группы Шевалле, достаточные условия для стабилизации K_1 и K_2-функторов были найдены в работах Э. Бака, Л. Васерштейна, М. Салиани и Н. Э. Мустафы-Заде (см. [2]).

Результаты о стабилизации высших K-функторов Володина, промоделированных по классическим группам, были получены А. Суслиным и И. Паниным. При этом теоремы о стабилизации K_1 и K_2 не передоказываются в данных работах, а используются в качестве базы индукции. Стабилизация высших K-функторов тесно связана с проблемой гомологической стабилизации для классических групп, изучавшейся К. Вогтманн, Р. Чарни, В. ван дер Калленом, Х. Маазеном и Б. Мирзаи.

В серии недавних работ Р. Рао и его ученики улучшили теорему об инъективной стабилизации K_1 для линейных и симплектических групп, рассматриваемых над классом геометрически регулярных алгебр над совершенным C_1-полем. В частности, из результатов Рао следует, что отображения $\mathrm{K}_1(\Phi_l, R) \to \mathrm{K}_1(\Phi_{l+1}, R)$ для колец R из рассматриваемого класса биективны уже при $l \geq \dim(R)$ в случае $\Phi_l = \mathrm{A}_l$, и $2l \geq \max(3, \dim(R)+1)$ в случае $\Phi_l = \mathrm{C}_l$. При этом Рао было показано, что для четных ортогональных групп улучшить классические результаты о стабилизации, вообще говоря, нельзя.

Основным ингредиентом, используемым в доказательстве стабилизационных теорем из работ [1], [2], является некоторая групповая факторизация, которая формулируется в терминах параболических подгрупп. Дадим краткий обзор классических треугольных разложений, обобщением которых являются данные факторизации. Напомним, что через $\mathrm{B}(\Phi, R)$ обозначается стандартная борелевская подгруппа группы $\mathrm{G}(\Phi, R)$, содержащая максимальный расщепимый тор $\mathrm{T}(\Phi, R)$, а через $\mathrm{B}^-(\Phi, R)$ – борелевская подгруппа $\mathrm{G}(\Phi, R)$, противоположная к $\mathrm{B}(\Phi, R)$. Унипотентные радикалы групп $\mathrm{B}(\Phi, R)$ и $\mathrm{B}^-(\Phi, R)$ обозначаются через $\mathrm{U}(\Phi, R)$ и $\mathrm{U}^-(\Phi, R)$.

В теории групп Шевалле над полями важнейшую роль играет *разложение Брюа*, которое утверждает, что $\mathrm{G}(\Phi, K) = \mathrm{U}(\Phi, K)\cdot\mathrm{N}(\Phi, K)\cdot\mathrm{U}(\Phi, K)$. В формуле выше через $\mathrm{N}(\Phi, K)$ обозначен алгебраический нормализатор тора $\mathrm{T}(\Phi, K)$, совпадающий с абстрактным нормализатором в случае поля $|K| \geq 4$. Само разложение Брюа на группы над кольцами не обобщается, но в простейших ситуациях известны аналогичные треугольные факторизации с большим количеством множителей.

Классически известно, что для полулокального кольца R выполнено *разложение Гаусса*:

$$\mathrm{G}(\Phi, R) = \mathrm{T}(\Phi, R)\cdot\mathrm{U}(\Phi, R)\cdot\mathrm{U}^-(\Phi, R)\cdot\mathrm{U}(\Phi, R) = \mathrm{B}(\Phi, R)\cdot\mathrm{U}^-(\Phi, R)\cdot\mathrm{U}(\Phi, R).$$

По существу, разложение Гаусса вытекает уже из результатов SGAIII, а прямое элементарное доказательство приведено, например, в работах М. Стейна и Э. Абе и К. Судзуки.

Другим примером треугольной факторизации является недавний результат А. Смоленского, Б. Сури и Н. Вавилова, который для кольца R стабильного ранга 1 утверждает, что

$$\mathrm{E}(\Phi, R) = \mathrm{U}(\Phi, R) \cdot \mathrm{U}^-(\Phi, R) \cdot \mathrm{U}(\Phi, R) \cdot \mathrm{U}^-(\Phi, R).$$

Разложения Брюа и Гаусса допускают обобщение на случай *стабильных* классических групп: Р. Шарпом в работах 1972 и 1980 года для произвольного кольца R было получено разложение:

$$\mathrm{St}(\Phi_\infty, R) = \widehat{\mathrm{U}}(\Phi_\infty, R) \cdot \widehat{\mathrm{W}}(\Phi_\infty, R) \cdot \widehat{\mathrm{U}}(\Phi_\infty, R) \cdot \widehat{\mathrm{U}}^-(\Phi_\infty, R).$$

Здесь через $\widehat{\mathrm{W}}(\Phi, R)$ обозначена подгруппа $\mathrm{St}(\Phi, R)$, порожденная элементами $\widehat{w}_\alpha(1) = x_\alpha(1)x_{-\alpha}(-1)x_\alpha(1)$ для $\alpha \in \Phi$.

С другой стороны, для колец размерности ≥ 1 группы $\mathrm{G}(\Phi, R)$ *конечного* ранга, вообще говоря, не допускают подобных разложений в терминах элементарных образующих. Это связано со следующими обстоятельствами.

- Во-первых, группа $\mathrm{G}(\Phi, R)$ не обязана порождаться элементарными образующими, так что вместо $\mathrm{G}(\Phi, R)$ заведомо нужно рассматривать элементарную подгруппу $\mathrm{E}(\Phi, R)$.

- Однако даже в тех случаях, когда группа $\mathrm{G}(\Phi, R)$ порождается элементарными образующими, она не обязана иметь по отношению к ним конечную ширину. Как показал В. ван дер Каллен, простейшим примером такого кольца является кольцо $R = \mathbb{C}[x]$. А именно, уже специальная линейная группа $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C}[x])$ не имеет конечной ширины по отношению к элементарным трансвекциям.

Сформулируем теперь два наиболее известных варианта параболических факторизаций, которые для групп $\mathrm{GL}(n, R)$, $\mathrm{SL}(n, R)$ и $\mathrm{E}(n, R)$ формулируются в терминах стабильного ранга кольца R. Грубо говоря, это совсем слабые формы разложений Брюа и Гаусса, которые допускают обобщение на произвольные конечномерные кольца.

В доказательстве сюръективной стабилизации для функтора K_1 используется *разложение Басса—Кольстера*, которое утверждает, что при $\mathrm{sr}(R) < n$ имеет место равенство:

$$\mathrm{GL}(n, R) = \mathrm{GL}(n-1, R) \cdot \mathrm{U}_{n-1} \cdot \mathrm{U}^-_{n-1} \cdot \mathrm{U}_{n-1} \cdot \mathrm{U}^-_{n-1}\,.$$

Как и выше, группа $\mathrm{GL}(n-1, R)$ рассматривается как подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$ посредством отображения стабилизации, а группы U_{n-1} и U^-_{n-1} — это унипотентные радикалы противоположных параболических подгрупп P_{n-1} и P^-_{n-1}.

В доказательстве инъективной стабилизации для функтора K_1 и сюръективной стабилизации для функтора K_2 используется *разложение Денниса—Васерштейна*, которое утверждает, что при $\mathrm{sr}(R) \leq n-1$ группа Стейнберга допускает разложение $\mathrm{St}(\mathrm{A}_n, R) = P \cdot X_\beta \cdot Q$, где $P = \mathrm{StP}_1$ и $Q = \mathrm{StP}_n$ — параболические подгруппы группы Стейнберга, а X_β — корневая подгруппа, соответствующая корню $\beta = -\alpha_1 - \ldots - \alpha_n$.

Цель работы. Основная цель настоящей работы состоит в получении новых, не рассматривавшихся ранее, разложений типа Денниса—Васерштейна групп Стейнберга, а также получении аналогов таких разложений в контексте относительных групп Шевалле и унитарных групп. Кроме того, мы изучаем приложения подобных разложений к проблеме стабилизации K_1 и K_2–функторов.

Методы исследований. Вычисления в настоящей работе производятся с использованием техники работ Х. Мацумото, М. Стейна, А. Суслина и М. Туленбаева, в частности, существенным образом используются элементарные соотношения между корневыми унипотентами и т.н. «стабильные» вычисления в представлениях групп Шевалле, т.е. вычисления с вектором старшего весового подпространства.

Основные результаты. В диссертации получены следующие результаты.

1. Сформулированы и доказаны относительные аналоги разложения Денниса—Васерштейна в контексте классических групп при естественных условиях стабильности.

2. Получены новые разложения типа Денниса—Васерштейна для групп Стейнберга конечного ранга.

3. Улучшен результат работы [2] об инъективной стабилизации KU_1 и сюръективной стабилизации KU_2.

4. Дано алгебраическое определение K_3 и относительного K_2-функторов, промоделированных по группам Шевалле конечного ранга, а также дана их топологическая интерпретация.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в младшей алгебраической K-теории, структурной теории групп Шевалле и унитарных групп.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы были изложены на следующих конференциях и семинарах:

1. “Groups and Their Actions”, Бендлево, Польша, 2010;

2. “International Conference Mathematics and Applications, UEL”, Хошимин, Вьетнам, 2011;

3. “Third Conference and Workshop on Group Theory”, Тегеран, Иран, 2011;

4. “Algebraic Groups and Related Structures”, Санкт-Петербург, 2012;

5. “ATM Workshop on Classical and Non-stable Algebraic K-theory”, Мумбай, Индия, 2013.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в печатных работах автора [6]–[12], приведенных в конце автореферата. Четыре из них [6]–[9] вышли в журналах, входящих в список ВАК.

Работы [6], [7] написаны в соавторстве. В [6] диссертанту принадлежат основные результаты, а соавтору — постановка задачи и введение. В [7] диссертанту принадлежат параграфы 2–9, а соавтору — постановка задачи, введение и параграфы 1, 10.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав (первая глава содержит 3 параграфа, вторая — 4 параграфа, третья — 3 параграфа, четвертая — 5 параграфов) и списка литературы, содержащего 106 наименований. Объем диссертации — 96 страниц.

Содержание работы

Данная работа находится на стыке теории групп Шевалле и младшей алгебраической K-теории. Основной текст диссертационной работы состоит из введения и четырех глав.

В **первой главе** кратко изложены основные определения и конструкции, относящиеся к теории групп Шевалле, гиперболическим унитарным группам и группам Стейнберга.

Введем обозначение $\mathrm{St}(\Phi, R, I)$ для ядра отображения $\mathrm{St}(\Phi, R) \to \mathrm{St}(\Phi, R/I)$, индуцированного канонической проекцией $R \to R/I$.

Предположим, что в Φ выбран порядок, определяющий систему простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Для $\alpha \in \Phi$ мы обозначаем через $m_i(\alpha)$ коэффициент в разложении α по простым корням, т.е. $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{l} m_i(\alpha)\alpha_i$. Для индекса $i = 1, \ldots, l$ определим i-е стандартное *параболическое подмножество* корней в Φ, его *редуктивную* и *специальную* части:

$$\begin{array}{rcl} S_i & := & \big\{\alpha \in \Phi \mid m_i(\alpha) \;\geq\; 0\big\}, \\ \Delta_i & := & \big\{\alpha \in \Phi \mid m_i(\alpha) \;=\; 0\big\}, \\ \Sigma_i & := & \big\{\alpha \in \Phi \mid m_i(\alpha) \;>\; 0\big\}. \end{array} \tag{1}$$

Обозначим через $\mathrm{StL}_i(\Phi, R, I)$ образ в $\mathrm{St}(\Phi, R, I)$ группы $\mathrm{St}(\Delta_i, R, I)$ относительно отображения групп Стейнберга, индуцированного вложением $\Delta_i \subseteq \Phi$, через $\widehat{\mathrm{U}}_i^{\pm}(\Phi, I)$ – подгруппы, порожденные корневыми элементами $x_\alpha(\xi)$ для $\alpha \in \pm\Sigma_i$, $\xi \in R$, а через $\mathrm{StP}_i(\Phi, R, I)$ – подгруппу, порожденную $\mathrm{StL}_i(\Phi, R, I)$ и $\widehat{\mathrm{U}}_i(\Phi, I)$.

Во **второй главе** приведен краткий обзор известных условий стабильности, конкретизирована их взаимосвязь, а также определены новые условия стабильности, формулирующиеся в терминах действия унипотентных радикалов на весовых диаграммах базисных представлений групп Шевалле. Данные условия обобщают условие Бака на относительные группы Шевалле и терминальные параболические подгруппы. Мы называем их условиями «типа Бака».

Сформулируем классическое определение стабильного ранга кольца, восходящее к Бассу. Пусть R – произвольное ассоциативное кольцо, а I – его двусторонний идеал. Строка $(a_1, \ldots, a_n) \in {}^nR$ называется *I-унимодулярной*, если элементы $a_1 - 1, a_2, \ldots a_n$ содержатся в идеале I, а $a_1, \ldots, a_n$ порождают кольцо R как *правый* идеал. Напомним, что *стабильным рангом* $\mathrm{sr}(R, I)$ пары (R, I) называется наименьшее натуральное число n такое, что всякая I-унимодулярная строка $a = (a_1, \ldots a_{n+1})$ длины $n + 1$ оказывается I-стабильной, иными словами, можно выбрать такие $b_1, \ldots, b_n \in I$, что

$$(a_1 + a_{n+1}b_1, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n) \in {}^nR \text{ —}$$

также I-унимодулярна. Если $R = I$, то число n называют стабильным рангом кольца R и обозначают через $\mathrm{sr}(R)$.

Пусть теперь R – коммутативное кольцо, π – неприводимое базисное представление группы Шевалле $\mathrm{G}(\Phi, R)$ со старшим весом μ на свободном R-модуле V, элементы которого интерпретированы как столбцы высоты $\dim(V)$ с коэффициентами из R. Обозначим через $\mathrm{Ums}(\Phi, \mu, R, I)$ подмножество V, состоящее из I-унимодулярных столбцов, а через $\mathrm{Ums}_0(\Phi, \mu, R, I)$ – подмножество I-унимодулярных столбцов, содержащихся в орбите вектора старшего веса под действием относительной элементарной подгруппы $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$. Ясно, что $\mathrm{Ums}_0(\Phi, \mu, R, I) \subseteq \mathrm{Ums}(\Phi, \mu, R, I)$. Сформулируем теперь определение условия «типа Бака».

Определение 1. Пусть Γ – некоторое подмножество весов $\Lambda(\pi)$, содержащее старший вес μ. Мы говорим, что коммутативное кольцо R удовлетворяет *условию типа Бака* $B(\Phi, \mu, \Gamma, R, I)$, если для произвольного столбца $v \in \mathrm{Ums}_0(\Phi, \mu, R, I)$ можно найти унипотентный радикал $g \in \mathrm{U}(\Phi, I)$ такой, что компоненты столбца $\pi(g)v$, проиндексированные весами из подмножества Γ, образуют I-унимодулярный столбец высоты $|\Gamma|$.

Именно в терминах этого условия сформулированы основные технические леммы четвертой главы, обобщающие методы М. Стейна, А. Суслина и М. Туленбаева из работ [1], [5] на произвольные группы Шевалле.

Пример 2. Рассмотрим случай $\Phi = \mathrm{A}_l$, $\mu = \varpi_1$. Предположим, что веса представления (A_l, ϖ_1) имеют нумерацию $1, \ldots, l, l{+}1$. Очевидно, что условие $B(\mathrm{A}_l, \varpi_1, \{1, \ldots, l\}, R, I)$ вытекает из условия $\mathrm{sr}(R, I) \leq l$.

Пример 3. Рассмотрим случай $\Phi = \mathrm{D}_l$, $\mu = \varpi_1$. Предположим, что веса представления (D_l, ϖ_1) имеют нумерацию $1, \ldots, l, -l, \ldots, -1$. Можно показать, что условие $B(\mathrm{D}_l, \varpi_1, \{1, \ldots, l\}, R, I)$ превращается в частный случай определения стабильного ранга форменного кольца из работы [2] и вытекает из оценки $\mathrm{asr}(R) \leq l - 1$ для любого коммутативного кольца R и идеала I.

В **третьей главе** определяются относительные группы Стейнберга, нестабильные K_3 и относительные K_2-функторы в контексте групп Шевалле конечного ранга, а также доказываются их некоторые простейшие свойства.

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, I — его идеал, $D = R \times_{R/I} R$ — «удвоение» кольца R относительно I. Элементы D можно интерпретировать как упорядоченные пары элементов кольца R, сравнимых между собой по модулю I.

Определение 4. Определим относительную группу Стейнберга, относительный K_2-функтор и K_3-функтор при помощи формул:

$$\mathrm{St}_L(\Phi, R, I) := \mathrm{St}(\Phi, D, 0 \times I)/[\mathrm{St}(\Phi, D, 0 \times I), \mathrm{St}(\Phi, D, I \times 0)],$$
$$\mathrm{K}_2(\Phi, R, I) := \mathrm{Ker}(\varphi : \mathrm{St}_L(\Phi, R, I) \to \mathrm{G}(\Phi, R, I)),$$
$$\mathrm{K}_3(\Phi, R) := \mathrm{H}_3(\mathrm{St}(\Phi, R, I), \mathbb{Z}).$$

Здесь через $0 \times I$ и $I \times 0$ обозначены идеалы D, состоящие из упорядоченных пар $(0, x)$ и $(x, 0)$ для $x \in I$, через φ обозначена каноническая проекция, а $\mathrm{St}(\Phi, D, J)$ обозначает нормальное замыкание подгруппы $\mathrm{St}(\Phi, J)$, порожденнной корневыми унипотентами уровня $J \trianglelefteq D$ в группе $\mathrm{St}(\Phi, D)$.

Сформулируем теперь основной результат третьей главы.

Теорема 5. *Предположим, что справедливы следующие условия.*

1. *Тривиальны первые и вторые гомологии групп* $\mathrm{St}(\Phi, R)$, $\mathrm{St}(\Phi, D)$.

2. *Имеет место включение* $K_2(\Phi, D) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{St}(\Phi, D))$.

Тогда выполнены следующие утверждения.

- *Существует точная последовательность*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{K}_3(\Phi, R) \arrow[r] & \mathrm{K}_3(\Phi, R/I) \arrow[dll] \\
\mathrm{K}_2(\Phi, R, I) \arrow[r] & \mathrm{K}_2(\Phi, R) \arrow[r] & \mathrm{K}_2(\Phi, R/I) \arrow[dll] \\
\mathrm{K}_1(\Phi, R, I) \arrow[r] & \mathrm{K}_1(\Phi, R) \arrow[r] & \mathrm{K}_1(\Phi, R/I).
\end{tikzcd}$$

- *Младшие* K*-функторы, промоделированные по группам Шевалле, допускают интерпретацию в терминах гомотопических групп топологического пространства* $X = B\,\mathrm{G}(\Phi, R)^+_{\mathrm{E}(\Phi,R)}$*:*

$$\mathrm{K}_i(\Phi, R) \cong \pi_i(X),\ \ i = 1, 2, 3.$$

Как было показано М. Стейном, условие тривиальности первых и вторых гомологий группы Стейнберга выполнено для систем корней $\Phi = \mathrm{A}_l, \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l$, ранга $l \geqslant 4$ и для всех остальных Φ ранга $\geqslant 5$. Для $\Phi = \mathrm{A}_3, \mathrm{D}_4, \mathrm{F}_4$ первое условие выполняется тогда и только тогда, когда кольцо R не имеет поля вычетов $\mathbb{F}_2$, а для $\Phi = \mathrm{B}_3$ – когда R не имеет полей вычетов $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$.

Второе свойство, также назывемое свойством «центральности K_2», было доказано В. ван дер Калленом для систем корней $\Phi = \mathrm{A}_l$ ранга $\geqslant 3$ и произвольного кольца R. Если стабильный ранг R достаточно мал по сравнению с рангом Φ, то данное свойство вытекает, кроме того, из теоремы о сюръективной стабилизации $\mathrm{K}_2(\Phi, R)$ (см. [5]). Для систем корней Φ, отличных от A_l, и произвольного кольца R центральность K_2 является одной из гипотез в теории групп Шевалле над кольцами.

Таким образом, из результатов М. Стейна и В. ван дер Каллена следует, что условия 1,2 теоремы 5 заведомо выполняются для систем корней $\Phi = \mathrm{A}_l$ для $l \geqslant 4$ и любой пары (R, I).

Перейдем теперь к обзору результатов **четвертой главы** работы.

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, I – его идеал, а $\Phi_l = \mathrm{A}_l, \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{D}_l$ – одна из классических систем корней. Следующий результат переносит теорему 2.5 работы [5] на относительные группы Стейнберга.

Теорема 6. *Пусть Φ_l – классическая система корней. Предположим, что $\mathrm{sr}(R, I) \leq l - 1$ для $\Phi = \mathrm{A}_l, \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l$, и $\mathrm{sr}(R, I) \leq l - 2$ для $\Phi = \mathrm{D}_l$. В случае $\Phi_l = \mathrm{B}_l, \mathrm{D}_l$ предположим дополнительно, что выполнено условие типа Бака $B(\mathrm{D}_{l-1}, \varpi_1, \{1, \ldots, l-1\}, R, I)$ (см. пример 3). Тогда относительная группа Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, R, I)$ совпадает со своим подмножеством:*

$$\mathrm{StP}_1(\Phi_l, R, I) \cdot \left(\widehat{\mathrm{U}}_1^-(\Phi_l, I) \cap \widehat{\mathrm{U}}_l^-(\Phi_l, I)\right) \cdot \mathrm{StP}_l(\Phi_l, R, I).$$

Из данного разложения для группы Стейнберга мы выводим следующее утверждение, обобщающее теорему 3.1 работы [5] на относительные группы.

Теорема 7. *В условиях предыдущей теоремы предположим дополнительно для $\Phi_l = \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{D}_l$, что $\mathrm{sr}(R, I) \leq l - 2$. Тогда отображение стабилизации $\mathrm{K}_1(\Phi_{l-1}, R, I) \to \mathrm{K}_1(\Phi_l, R, I)$ инъективно, а отображение $\mathrm{K}_2(\Phi_{l-1}, R, I) \to \mathrm{K}_2(\Phi_l, R, I)$ – сюръективно.*

Следующая теорема доставляет ряд новых разложений типа Денниса—Васерштейна групп Стейнберга.

Теорема 8. • *Предположим, что* Φ_l *– неприводимая классическая система корней, а* r, s *– пара натуральных чисел,* $1 \le s < r \le l$, $d = \mathrm{dist}(\alpha_r, \alpha_s)$ *– расстояние на диаграмме Дынкина между вершинами, соответствующими простым корням* α_r, α_s, *а* $\mathrm{sr}(R) \le d$. *Тогда группа Стейнберга* $\mathrm{St}(\Phi_l, R)$ *совпадает со своим подмножеством:*

$$A_{rs} = \mathrm{StP}_r(\Phi_l, R) \cdot \left(\widehat{\mathrm{U}}_r^-(\Phi_l, R) \cap \widehat{\mathrm{U}}_s^-(\Phi_l, R)\right) \cdot \mathrm{StP}_s(\Phi_l, R).$$

- *Для исключительных систем корней равенство* $\mathrm{St}(\Phi_l, R) = A_{rs}$ *имеет место при условиях на кольцо* R, *перечисленных в следующей таблице:*

№	Φ_l	$\{r, s\}$	*условие на* R
1.	E_l, $l = 6, 7, 8$	$\{2, l\}$	$\mathrm{sr}(R) \le l - 3$
2.	E_l, $l = 6, 7, 8$	$\{1, l\}$	$\mathrm{asr}(R) \le l - 2$
3.	F_4	$\{1, 4\}$	$\mathrm{sr}(R) \le 2$
4.	G_2	$\{1, 2\}$	$\mathrm{sr}(R) \le 1$

В некоторых случаях разложение Денниса–Васерштейна позволяет описать ядро предстабилизации K_1-функтора.

Следствие 9. *Пусть* R *– коммутативное кольцо,* $l \ge 2$, $\Phi_l = \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l$, *а* $\mathrm{sr}(R) \le l$. *Тогда ядро отображения стабилизации* $\mathrm{K}_1(\Phi_l, R) \to \mathrm{K}_1(\Phi_{l+1}, R)$ *порождается образом группы* $\mathrm{Ker}(\mathrm{K}_1(\mathrm{A}_{n-2}, R) \to \mathrm{K}_1(\mathrm{A}_{n-1}, R))$ *при отображении* K_1*-групп, индуцированном вложением* $\mathrm{A}_{n-1} \hookrightarrow \Phi_n$.

Наконец, в последнем разделе четвертой главы мы показываем, что доказательство М. Стейна из работы [5] может быть перенесено на гиперболические унитарные группы. Это позволяет доказать стабилизацию для унитарных K_1 и K_2-функторов при более слабых условиях на основное кольцо R по сравнению с результатами, формулирующимися в терминах форменного стабильного ранга (ср. [2]).

Напомним определение гиперболических унитарных групп. Пусть R – произвольное ассоциативное кольцо с инволюцией, λ – некоторый центральный элемент R, такой, что $\lambda\overline{\lambda} = 1$, а Λ – форменный параметр на R, соответствующий λ, т.е. аддитивная подгруппа R, удовлетворяющая свойствам $\alpha\Lambda\overline{\alpha} \subseteq \Lambda$ для $\alpha \in R$ и $\Lambda_{\min} \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda_{\max}$, где

$$\Lambda_{\min} = \{\alpha - \lambda\overline{\alpha} \mid \ \alpha \in R\},\ \Lambda_{\max} = \{\alpha \mid \ \alpha \in R,\ \alpha = -\lambda\overline{\alpha}\}.$$

Рассмотрим свободный R-модуль $V = R^{2n}$ ранга $2n$ и зададим на нём полуторалинейную форму $f(u,v) = \overline{u_1}v_{-1} + \ldots + \overline{u_n}v_{-n}$. Гиперболическая унитарная группа $\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)$ определяется как подгруппа элементов $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(2n,R)$, сохраняющих λ-эрмитову форму $h(u,v) = f(u,v) + \lambda\overline{f(v,u)}$ и Λ-квадратичную форму $q(v) = f(v,v) + \Lambda$.

В группе $\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)$ можно выбрать корневые элементы $T_{ij}(\xi)$ для $1 \leq i \neq j \leq 2n$ и рассмотреть порожденную ими группу $\mathrm{EU}(2n,R,\Lambda)$, называемую *элементарной унитарной группой.* Далее можно определить *унитарную группу Стейнберга* $\mathrm{StU}(2n,R,\Lambda)$ как группу заданную формальными образующими $X_{ij}(\xi)$ и соотношениями, моделирующими простейшие соотношения между $T_{ij}(\xi)$. *Унитарный* K_1*-функтор* определяется как множество классов смежности

$$\mathrm{KU}_1(n,R,\Lambda) = \mathrm{U}(2n,R,\Lambda)/\,\mathrm{EU}(2n,R,\Lambda),$$

а *унитарный* K_2*-функтор* $\mathrm{KU}_2(2n,R,\Lambda)$ как ядро канонической проекции $\mathrm{StU}(2n,R,\Lambda) \to \mathrm{U}(2n,R,\Lambda)$.

Теорема 10. *Допустим, что $n \geqslant 3$, а $\mathrm{sr}(R) \leq n-2$. Тогда группа Стейнберга $\mathrm{StU}(2n,R,\Lambda)$ может быть представлена в виде произведения трех своих подгрупп:*

$$\mathrm{StU}(2n,R,\Lambda) = \mathrm{StUP}_n(2n,R,\Lambda)\cdot\mathrm{StUU}_n^-(2n,R,\Lambda)\cdot\mathrm{StUP}_1(2n,R,\Lambda).$$

Здесь $\mathrm{StUP}_n(2n,R,\Lambda)$ обозначает подгруппу $\mathrm{StU}(2n,R,\Lambda)$, порожденную элементами $X_{ij}(\xi)$ для $i > 0$, $\mathrm{StUP}_1(2n,R,\Lambda)$ подгруппу, порожденную элементами $X_{ij}(\xi)$ для $i \neq -1$, $j \neq 1$, а $\mathrm{StUU}_n^-(2n,R,\Lambda)$ — $X_{ij}(\xi)$ для $i < 0 < j$.

В качестве следствия из данной теоремы мы выводим следующий результат.

Теорема 11. *Допустим, что $n \geq 3$, а $\mathrm{sr}(R) \leq n-2$, тогда отображение*

$$\theta_{1,n-1}\colon\ \mathrm{KU}_1(n-1,R,\Lambda) \to \mathrm{KU}_1(n,R,\Lambda)$$

инъективно, а отображение

$$\theta_{2,n-1}\colon\ \mathrm{KU}_2(n-1,R,\Lambda) \to \mathrm{KU}_2(n,R,\Lambda),$$

индуцированное гомоморфизмом групп $\mathrm{StU}(2n-2,R,\Lambda) \to \mathrm{StU}(2n,R,\Lambda)$, сюръективно. Кроме того, для любого форменного идеала (I,Γ) выполнено равенство:

$$\mathrm{EU}(2n,R,I,\Gamma) \cap \mathrm{U}(2n-2,I,\Gamma) = \mathrm{EU}(2n-2,R,I,\Gamma).$$

Список цитированной литературы

[1] А. А. Суслин, М. С. Туленбаев, *Теорема о стабилизации для* K_2*-функтора Милнора.* Зап. науч. семин. ЛОМИ, 64, (1976), 131–152.

[2] A. Bak, V. A. Petrov, G. Tang, *Stability for quadratic* K_1. K-theory, 30, 1 (2003), 1–11.

[3] J.-L. Loday, *Cohomologie et groupes de Steinberg relatifs.* J. Algebra, 54, (1978), 178–202.

[4] H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4, 2 (1969), 1–62.

[5] M. R. Stein, *Stability theorems for* K_1*,* K_2 *and related functors modeled on Chevalley groups.* Japan J. Math., 4, 1 (1978), 77–108.

Статьи автора по теме диссертации в журналах, рекомендованных ВАК:

[6] **Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *Разложения типа Денниса—Васерштейна.*** Зап. научн. семин. ПОМИ, 375, (2010), 48–60.

[7] **Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *Параболические факторизации расщепимых классических групп.*** Алгебра и анализ, 23, 4 (2011), 1–30.

[8] **S. Sinchuk, *Injective stability for unitary*** K_1***, revisited.*** J. K-theory, 11, 2 (2013), 233–242.

[9] **С. Синчук, *Улучшенная стабилизация для нечетной ортогональной группы.*** Зап. научн. семин. ПОМИ, 414, (2013), 181–192.

Другие публикации автора по теме диссертации:

[10] N. Vavilov, S. Sinchuk, *Parabolic factorizations of classical groups.* Международная конференция “Groups and Their Actions”, Będlewo, Poland, (2010), с. 40–41, Тезисы докладов.

[11] N. Vavilov, S. Sinchuk, *Parabolic factorizations of classical groups.* Международная конференция “Third Conference and Workshop on Group Theory”, Tehran, Iran (2011), с. 172–175, Тезисы докладов.

[12] S. Sinchuk, *Dennis–Vaserstein type decompositions.* Международная конференция “Algebraic Groups and Related Structures”, Санкт-Петербург, (2012), с. 22, Тезисы докладов.